D-43

Оцена рада 7(седам)
Оцена одбране рада 7(седам)
Укупно оцена 7(седам)

Н. Сад 3.XI.1973

Комисија за одбрану
1. Др. Ђорђе Мушицки, пред. ком.
2. Др. Братислав Тошић, рук. рада
3. Стојановић Стојан, члан

Odsek fizike

D i p l o m s k i   r a d

MIGRACIJA MAGNONA U SEMI-INFINITNIM FEROMAGNETICIMA

Dragivoje M. Srećković

Uvod

U ovom radu definisana su zapreminska i površinska magnonska i fononska stanja i hamiltonijan interakcijam agnona sa zapreminskim i površinskim fononima u polu-beskonačnom kristalu. Polubeskonačni kristali su značajni za istraživanje, jer se takvi kristali sreću u praksi. Kristal uvek ima neku površinu koja ga ograničava.

Postojanje stanja lokalizovanih na površini kristala je dobro poznata činjenica. Pekar je uveo zapreminske i površinske eksitone, a Relej uvodi površinske fonone ili površinske talase. Naš cilj je ispitivanje mogućnosti postojanja površinskih magnona u feromagnetiku. Prilikom ovih ispitivanja koristićemo metod druge kvantizacije, jer on u odnosu na Hajtler-London-Hajzenbergovu aproksimaciju ima mnoga preimućstva. Kao što je poznato H-L-H aproksimacija pretpostavlja ekscitiranje samo jednog atoma u kristalu, dok metod druge kvantizacije obuhvata mnogo realniju situaciju, kada je više atoma istovremeno ekscitirano. Ovo omogućava primene statističkih metoda pri teorijskoj analizi fenomena u kristalima.

Dalji cilj ovoga rada je da se ispita verovatnoća koncentrisanja magnetne energije na površini kristala i uslovi pod kojima ova migrira iz zapremine na površinu.

I GLAVA

a/ Hajzenbergov model feromagneta

Za opis ponašanja sistema više tela, u našem slučaju jakog magnetnog materijala, potrebno je dati jasan oblik hamiltonijanu sistema. Obično se pri pisanju hamiltonijana nikad ne uzimaju u obzir sve osobine sistema već se pokušavaju dati samo najvažnije karakteristike. U kvantnoj teoriji jakog magnetizma dovoljno je uopšte računati sa sledećom predstavom problema.

Neka je: 1/ poznata vrsta atoma, iz kojih se sastoji kristal i elektronske konfiguracije nepopunjenih /unutrašnjih/ i valentnih /spoljašnjih/ ljuski; 2/ poznata spoljašnja sila, koja dejstvuje na sistem; 3/ zadan raspored atoma po čvorovima kristalne rešetke; 4/ rešetka se smatra uredjenom.

Po hamiltonijanu toga sistema treba odrediti, makar približno, energetski spektar sistema, vreme života pobudjenih stanja i izračunati takve makroskopske veličine, kao magnetizaciju, toplotni kapacitet, konstante anizotropije, elektroprovodnost, širine linija /fero/ magnetne rezonance, zavisnost tih veličina od temperature, spoljašnjih polja i dr.

U tom obliku problem je suviše težak za rešavanje. Zato u teoriji magnetizma razmatramo znatno prostije sisteme, koji modeliraju samo najvažnije, ili ih smatramo takvima, osobine realnih magnetika.

Često se jak magnetni materijal predstavlja kao sistem spinova, rasporedjenih u čvorovima kristalne rešetke i povezanih uzajamnim dejstvom. Izvešćemo sad hamiltonijan za taj model.

Uzećemo da je kristal sastavljen od N istih atoma, rasporedjenih u čvorovima proste kubne rešetke. Uzajamno dejstvo elektrona nepopunjenih unutrašnjih ljuski sa elektronima valentnih ljuski /ili sa elektronima provodljivosti/biće uzeto kao malo. Tada elektrone nepopunjenih ljuski i elektrone provodljivosti možemo približno posmatrati kao dva nezavisna podsistema. Ukoliko nas interesuju magnetna svojstva sistema, posmatraćemo samo elektrone nepopunjenih unutrašnjih ljuski /d- ili f- ljuske/.

Pretpostavimo, da u svakom atomu ima po jedan d- elektron. Zanemarimo orbitalni moment d- elektrona i izostavimo iz posmatranja uzajamno dejstvo magnetnih i orbitalnih momenata elektrona i njihovu uzajamnu interakciju. Inače govoreći, pomatraćemo d- elektron kao s- elektron. Spoljašnje magnetno polje je ravno nuli.

Kao rezultat imamo realni fero-/antifero- ili feri-/ magnetik modeliran fero-/antifero- ili feri-/ magnetnim dielektrikom, tj. kao rešetku koja je obrazovana od atoma iste vrste i ima u normalnom stanju po jedan valentni s-elektron, koji se smatra odgovornim za magnetizam. Dopustimo, da najniži energetski nivo $\mathcal{E}_0$ sistema elektrona u nultoj aproksimaciji karakteriše jedinična vrednost broja N_f popunjenja elektrona po čvorovima rešetke:

$$N_f = n_{f,-\frac{1}{2}} + n_{f,\frac{1}{2}} = 1 \qquad (1)$$

gde je $n_{f\sigma}(\sigma=\pm\frac{1}{2})$ - broj elektrona u čvoru f sa spinom upravljenim "ulevo" /$\sigma=-\frac{1}{2}$/ ili "udesno" /$\sigma=\frac{1}{2}$/ i da je nivo $\mathcal{E}_0$ odvojen energetskom pukotinom odo stalih, pobudjenih, nivoa sistema. Uzajamno dejstvo elektrona uzima se kao perturbacija.

Pokažimo da je nivo $\mathcal{E}_0$ degenerisan i ispitajmo cepanje nivoa $\mathcal{E}_0$ pod dejstvom perturbacije N. N. Bogoljubov i S. V. Tjablikov 1949

Označimo sa $\mathcal{H}_0$ hamiltonijan nulte aproksimacije i sa C_0 sopstvena funkciju osnovnog stanja:

$$(\mathcal{H}_0 - \mathcal{E}_0)C_0 = 0 \qquad (2)$$

Nivo $\mathcal{E}_0$ biće spinski degenerisan, pošto je on odredjen samo zadanom jediničnom vrednošću broja popunjenih elektrona u čvorovima, dok vrednost spina u čvoru ostaje neodredjena /$\sigma = -\frac{1}{2}$ ili $\frac{1}{2}$/.

Funkciju C_0 odredićemo sabiranjem okupacionih brojeva n_f :

$$C_0 = C_0/\ldots, n_{f\sigma}, \ldots/ \qquad (3)$$

Sve linearne kombinacije ovih funkcija takodje su sopstvena funkcija operatora $\mathcal{H}$, koji pripada nivou $\mathcal{E}_0$. One obrazuju linearni prostor. Označimo ga sa $\mathcal{L}$.

Izračunajmo prvo cepanje nivoa $\mathcal{E}_0$, pod uticajem perturbacije.

Koristeći operatorsku formu teorije perturbacije, možemo videti, da se cepanje nivoa odredjuje iz jednačine

$$(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)C_0 = \widetilde{\mathcal{H}}C_0 \qquad (4)$$

gde je C_0- funkcija iz prostora $\mathcal{L}$, a $\widetilde{\mathcal{H}}$ - neki ermitski opertor, koji ma koju funkciju iz prostora $\mathcal{L}$ pretvara u funkciju koja pripada istom tom prostoru.

Pošto u svakom čvoru kristalne rešetke ima po jedan elektron, upravljenog spina koji je "levo" ili "desno", to je nivo $\mathcal{E}_0$ moguće odrediti zadanim z- komponentama spinova elektrona u svakom čvoru. Tada C_0 možemo smatrati kao funkciju od z- komponenti spinskih operatora:

$$C_0 = C_0\ /\ldots, S_f^z, \ldots/. \qquad (5)$$

Sledi da ekvivalentni hamiltonijan $\widetilde{\mathcal{H}}$ /4/ takodje možemo smatrati kao funkciju spinskih operatora. Predstavljajući $\tilde{\mathcal{H}}$ u vidu reda po stepenima spinskih operatora S_f^{α} /$\alpha = x,y,z$/, imaćemo:

$$\tilde{\mathcal{H}} = G_0 + \sum G_{\alpha}(f) S_f^{\alpha} + \sum G_{\alpha_1\alpha_2}(f_1,f_2) S_{f_1}^{\alpha_1} S_{f_2}^{\alpha_2} + \sum G_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(f_1,f_2,f_3) S_{f_1}^{\alpha_1} S_{f_2}^{\alpha_2} S_{f_3}^{\alpha_3} + \dots \tag{6}$$

gde su koeficijenti G - obične funkcije broja /koordinate/ čvorova rešetke. Sumirajući proizvode po svim f i α, koji ulaze u dati izraz, pri čemu ćemo uzeti samo kombinacije koje nisu sa istim indeksom f. U protivnom slučaju pomoću uslova komutacije za spinske operatore za $S=\frac{1}{2}$:

$$2S_f^x S_f^y = i S_f^z, \quad 2S_f^y S_f^z = i S_f^x, \quad 2S_f^z S_f^x = i S_f^y$$

$$(S_f^x)^2 = (S_f^y)^2 = (S_f^z)^2 = \frac{1}{4}$$

moguće ih je svesti na članove nižeg reda, kod kojih su svi indeksi f različiti. Pri tim uslovima sumirani operatori S_f^{α} pod znakom sume u /6/ uvek će komutirati. Pošto je operator $\tilde{\mathcal{H}}$ ermitski, to se i koeficijenti G razlaganja /6/ pojavljuju kao realne funkcije.

Za sada ćemo uzeti u obzir samo elektrostatičke sile, zanemarujući magnetne.

Ukoliko elektrostatičke sile ne zavise od orijentacije spinova, to će $\tilde{\mathcal{H}}$ obavezno biti invarijantno prema okretanju spinova. Zato svaki član razlaganja /6/ mora biti skalarna funkcija spinskih vektora.

Izvršimo kanoničku transformaciju spinskih operatora /kanoničkim ćemo zvati transformaciju koja zadržava uzajamni odnos pri premeštanju/:

$$S_f^{\alpha} \rightarrow -S_f^{\alpha}, \quad i \rightarrow -i \tag{7}$$

Operator $\tilde{\mathcal{H}}$ ostaje invarijantan u odnosu na ovu transformaciju, pošto početni hamiltonijan ne zavisi od upravljenosti spinova.

Sledi da operator $\tilde{\mathcal{H}}$ mora biti skalar, sastavljen od parnog broja spinskih operatora. Zato formulu /6/ možemo prepisati u obliku:

$$\tilde{\mathcal{H}} = G_0 + \sum G(f_1,f_2)(S_{f_1}, S_{f_2}) + O(S_{f_1}^{\alpha_1} S_{f_2}^{\alpha_2} S_{f_3}^{\alpha_3} S_{f_4}^{\alpha_4})$$

Ili uvodeći simetrično obeležavanje za koeficijente:

$$\tilde{\mathcal{H}} = G_0 - \frac{1}{2} \sum I(f_1,f_2)(S_{f_1}, S_{f_2}) \tag{8}$$

gde je I- takozvani integral izmene:

$$I(f_1,f_2) = -G(f_1,f_2) - G(f_2,f_1)$$

$$I(f_1,f_2) = I(f_2,f_1) \tag{9}$$

Ovo sumiranje u formuli /8/ počinje sa članom četvrtog reda odnosno S_f^{α}.

Elektrostatičko uzajamno dejstvo ne menja se pri promeni na obrnuto upravljene ose u običnom prostoru:

$$f^{\alpha} \rightarrow -f^{\alpha} \quad (\alpha = x, y, z) \qquad (10)$$

zato

$$I\,/f_1, f_2/ = I\,/-f_1, -f_2/. \qquad (11)$$

Na kraju uzećemo u obzir da su atomi raspoređjeni u čvorovima kristalne rešetke i da za kristalne rešetke važi invarijantnost odnosno translacija na veličinu f_o, koja se sadrži u rešetki koja ne osciluje:

$$f^{\alpha} \rightarrow f^{\alpha} + f_o^{\alpha} \quad (\alpha = x, y, z) \qquad (12)$$

Veličina I se ne mora menjati pri ovoj transformaciji i sledi, da mora biti funkcija samo odgovarajućih rastojanja. Ako su svi čvorovi rešetke ekvivalentni jedan drugom, to je:

$$I\,/f_1, f_2/ = I\,/|f_1 - f_2|/. \qquad (13)$$

Neka sad na sistem deluje spoljašnje magnetno polje H. Označimo sa μ magnetni moment atoma. Tada će hamiltonijan izotropnog materijala imati oblik:

$$\tilde{\mathcal{H}} = G_0 - \mu \sum (H, S_f) - \frac{1}{2} \sum I(f_1, f_2)(S_{f_1}, S_{f_2}) \qquad (14)$$

I tako, koristeći samo opšte znanje i dati model, ustanovili smo da se hamiltonijan može zapisati pomoću spinskih operatora elektrona "nepopunjenih" ljuski. To dopušta opismagnetnih materijala kao skupa spinova raspoređjenih u čvorovima kristalne rešetke, koji uzajamno deluju jedan sa drugim po parovima sa energijom jednakom I. Eksplicitni oblik integrala izmene I ne određjuje se pomoću atomskih veličina. Oni ulaze ovde kao neke fenomenološke veličine. Feromagnetnom rasporedu spinova odgovara pozitivan znak za I, antiferomagnetnom -negativan.

Takav model jakog magnetnog materijala obično se naziva hajzenbergovski model, a odgovarajući hamilatonijan oblika /8/ ili /14/ hajzenbergovski spinski hamiltonijan. Prvi put takav model bio je predložen u radovima J. I. Frenkela /1928./ i V. Hajzenberga /1928./. Time su postavljene osnove savremene teorije magnetizma.

Mogućnost svodjenja kulonevske interakcije na efektivni spinski hamiltonijan /14/ prvi je ustanovio Dirak /1929./, /1960./. Koristeći slične pretpostavke, Arai /1962./ je u sasvim opštem obliku pokazao da je hamiltonijan /14/ u prvoj aproksimaciji tačan i da se sledeće njegove popravke mogu zanemariti, ako prepokrivanje odgovarajućih atomskih talasnih funkcija smatramo malim.

b/ Zapreminski i površinski magnoni

Razmotrićemo polubeskonačni feromagnetik proste kubne strukture sa jednim atomom po elementarnoj ćeliji. Ćeliju ćemo označiti pomoću vektora:

$$\vec{n}=\{n_1, n_2, n_3\} \;;\; -\frac{N_1}{2} < n_1 \leqq \frac{N_1}{2} \;;$$

$$-\frac{N_2}{2} < n_2 \leqq \frac{N_2}{2} \;;\; 0 < n_3 \leqq N_3 \,,$$

gde je $N_1N_2N_3 = N$ ukupan broj atoma u kristalu.

Osnovu za dalja razmatranja predstavlja pretpostavka da magnetni momenti atoma na površini i u unutrašnjosti kristala nisu jednaki. Poznato je da se magnetni momenti slobodnih i vezanih atoma u kristalu dosta razlikuju, tako da je opravdano pretpostaviti da polu-slobodni atomi sa površine nemaju isti magnetni moment kao atomi u unutrašnjosti kristala. Promenu integrala izmene izmedju površinskog i prvog sledećeg sloja zanemarujemo. Uzimajući ovo u obzir, tj. ako magnetski moment atoma u unutrašnjosti kristala ima vrednost μ, tada je odgovarajuća vrednost za površinski atom $\mu+\mu'$. Zapreminska i površinska magnonska stanja definisaćemo na sledeći način.

Spinski hamiltonijan feromagnetika sa efektivnim spinom $s=\frac{1}{2}$ ima sledeći oblik:

$$H=\left[\mu\mathcal{H}+\tfrac{1}{2}J(0)\right]\sum_{\vec{n}}\left(\tfrac{1}{2}-S^z_{\vec{n}}\right)-\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{n}_1}{}' I_{\vec{n}\vec{n}_1} S^-_{\vec{n}} S^+_{\vec{n}_1} -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{n}_1}{}' I_{\vec{n}\vec{n}_1}\left(\tfrac{1}{2}-S^z_{\vec{n}}\right)\left(\tfrac{1}{2}-S^z_{\vec{n}_1}\right) \qquad (1)$$

gde je $\mathcal{H}$ spoljašnje magnetno polje, a $I_{\vec{n}\vec{n}_1}$ integral izmene $\vec{n}$-og i $\vec{n}_1$-og atoma, $J(0)=\sum_{n} I_{\vec{n}\vec{n}_1}$, μ magnetni moment atoma.

Spinski operatori mogu se zameniti Pauli-jevim operatorima $P_{\vec{n}}$ na sledeći način:

$$\frac{1}{2}-S^z_{\vec{n}}=P^+_{\vec{n}}P_{\vec{n}} \;;\; P^+_{\vec{n}}=S^-_{\vec{n}} \;;\; P_{\vec{n}}=S^+_{\vec{n}} \,. \qquad (2)$$

Prema tome, hamiltonijan /1/ je:

$$H=\left[\mu\mathcal{H}+\tfrac{1}{2}J(0)\right]\sum_{\vec{n}} P^+_{\vec{n}}P_{\vec{n}} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{n}_1}{}' I_{\vec{n}\vec{n}_1} P^+_{\vec{n}}P_{\vec{n}_1} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{n}_1}{}' I_{\vec{n}\vec{n}_1} P^+_{\vec{n}}P_{\vec{n}}P^+_{\vec{n}_1}P_{\vec{n}_1} \qquad (3)$$

U analizi hamiltonijana /3/ moramo upotrebiti Bozeove operatore $B_{\vec{n}}$ /6/ u sledećoj aproksimaciji:

$$
\begin{aligned}
P_{\vec{n}} &\approx B_{\vec{n}} - B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \\
P^+_{\vec{n}} &\approx B^+_{\vec{n}} - B^+_{\vec{n}} B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \\
P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}} &\approx B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} - B^+_{\vec{n}} B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}}
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Ako zamenimo /4/ u /3/ uzimajući najbližu aproksimaciju, zatim zanemarimo četvrti stepen u Boze-operatorima, dobijamo:

$$
\begin{aligned}
H = {} & [(\mu+\mu')\mathcal{H} + 3I] \sum_{n_1 n_2} B^+_{n_1 n_2 0} B_{n_1 n_2 0} - \frac{1}{2} I \sum_{n_1 n_2} B^+_{n_1 n_2 0} (B_{n_1+1\, n_2 0} + B_{n_1-1\, n_2 0} + \\
& + B_{n_1 n_2+1\, 0} + B_{n_1 n_2-1\, 0} + B_{n_1 n_2 1}) + (\mu\mathcal{H} + 3I) \sum_{\vec{n}} B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} - \\
& - \frac{1}{2} I \sum_{\vec{n}} B^+_{\vec{n}} (B_{\vec{n}+\vec{a}_1} + B_{\vec{n}-\vec{a}_1} + B_{\vec{n}+\vec{a}_2} + B_{\vec{n}-\vec{a}_2} + B_{\vec{n}+\vec{a}_3} + B_{\vec{n}-\vec{a}_3})
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

gde je $\vec{n} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3$, a $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ će bàti vektori osnovne rešetke. Prva dva člana u izrazu /5/ predstavljaju hamiltonijan površinskih atoma, dok su poslednja dva hamiltonijan zapreminskih atoma.

U cilju dijagonàlizacije hamiltonijana/5/ izvršićemo prelaz u impulsni prostor i:

$$
B_{\vec{n}} = \sum_{\vec{k}} U^{\vec{k}}_{\vec{n}} B_{\vec{k}} \quad ; \quad B^+_{\vec{n}} = \sum_{\vec{k}} \overset{*}{U}{}^{\vec{k}}_{\vec{n}} B^+_{\vec{k}} \qquad (6)
$$

Zahtevaćemo da novi Boze-operatori zadovoljavaju sledeće jednačine kretanja:

$$
i\frac{dB_{\vec{k}}}{dt} = \omega(\vec{k}) B_{\vec{k}} \quad , \quad i\frac{dB^+_{\vec{k}}}{dt} = -\omega(\vec{k}) B^+_{\vec{k}} \qquad (7)
$$

Funkcije $U^{\vec{k}}_{n}$ ćemo odrediti pomoću jednačina

$$
i\frac{dB_{\vec{n}}}{dt} = [B_{\vec{n}}, H] \,, \qquad (8)
$$

koje, kad eksplicitno napišemo, daju za $n_3 = 0$

$$
\begin{aligned}
i\frac{dB_{n_1 n_2 0}}{dt} = {} & [(\mu+\mu')\mathcal{H} + 3I] B_{n_1 n_2 0} - \\
& - \frac{1}{2} I (B_{n_1+1\, n_2 0} + B_{n_1-1\, n_2 0} + B_{n_1 n_2+1\, 0} + B_{n_1 n_2-1\, 0} + B_{n_1 n_2 1})
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

za $n_3 \geqq 1$

$$
i\frac{dB_{\vec{n}}}{dt} = [\mu\mathcal{H} + 3I] B_{\vec{n}} - \frac{1}{2} I (B_{\vec{n}+\vec{a}_1} + B_{\vec{n}-\vec{a}_1} + B_{\vec{n}+\vec{a}_2} + B_{\vec{n}-\vec{a}_2} + B_{\vec{n}+\vec{a}_3} + B_{\vec{n}-\vec{a}_3}) \qquad (10)
$$

Zatim zamenjujući /6/ u /9/ i /10/ dobijamo dva sistema jednačina:

$$
[\mu\mathcal{H} - \omega(\vec{k})] U^{\vec{k}}_{\vec{n}} = -\frac{1}{2} I (6U^{\vec{k}}_{\vec{n}} - U^{\vec{k}}_{\vec{n}+\vec{a}_1} - U^{\vec{k}}_{\vec{n}-\vec{a}_1} - U^{\vec{k}}_{\vec{n}+\vec{a}_2} - U^{\vec{k}}_{\vec{n}-\vec{a}_2} - U^{\vec{k}}_{\vec{n}+\vec{a}_3} - U^{\vec{k}}_{\vec{n}-\vec{a}_3}) \qquad (11)
$$

$$
[(\mu+\mu')\mathcal{H} - \omega(\vec{k})] U^{\vec{k}}_{n_1 n_2 0} = -\frac{1}{2} I (6U^{\vec{k}}_{n_1 n_2 0} - U^{\vec{k}}_{n_1+1\, n_2 0} - U^{\vec{k}}_{n_1-1\, n_2 0} - U^{\vec{k}}_{n_1 n_2+1\, 0} - U^{\vec{k}}_{n_1 n_2-1\, 0} - U^{\vec{k}}_{n_1 n_2 1}) \qquad (12)
$$

Sistem /12/ predstavlja na neki način, kvantno-mehanički granični uslov.

Moramo ispitati rešenje za $U_{\vec{n}}^{\vec{k}}$, koje zadovoljava /11/ i /12/ u sledećem obliku:

$$U_{\vec{n}}^{\vec{k}} = D_k e^{i(k_1 n_1 + k_2 n_2)} \left[\sin k_3 n_3 + b \sin k_3 (n_3 + 1) \right] \qquad (13)$$

Ako uvedemo $U_{\vec{n}}^{\vec{k}}$ /13/ u /11/ i /12/ dobijamo

$$b = -\frac{I}{2\mu' \mathcal{H}} \qquad (14)$$

$$\omega_k = I(1 - \cos k) + \mu \mathcal{H}$$ -zakon disperzije

i

$$\mu \mathcal{H} - \omega(\vec{k}) = -I(3 - \cos k_1 - \cos k_2 - \cos k_3) \qquad (15)$$

Sistemi jednačina /11/ i /12/ takodje dopuštaju i drugo rešenje za /13/, koje je fizički moguće, tj.

$$U_{\vec{n}}^{\vec{k}} = C_{\vec{k}} e^{i(k_1 n_1 + k_2 n_2)} e^{-\eta n_3} \qquad (16)$$

gde je

$$e^{\eta} = -\frac{2\mu' \mathcal{H}}{I}, \quad \eta \geq 0 \qquad (17)$$

Elementarne ekscitacije čiji se operatori transformišu po formuli /6/ pomoću funkcija /13/ nazvaćemo zapreminski magnoni, dok ćemo elementarne ekscitacije čiji se operatorit ransformišu po /6/ sa /16/ funkcijama zvati površinskim magnonima. Uzrok za ova imena je jednostavan. Ako formiramo izraz $\langle B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}} \rangle$ /$\langle \cdots \rangle$označava statističku srednju vrednost prema Džipsu/ koji predstavlja koncentraciju elementarnih ekscitacija i definiše prostornu raspodelu njihove gustine, onda je za slučaj /6/ prema /13/

$$\langle B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}} \rangle = \sum_{\vec{k}} |U_{\vec{n}}^{\vec{k}}|^2 \bar{N}_{\vec{k}} \qquad (18)$$

samo ako je $|U_{\vec{n}}^{\vec{k}}|^2$ periodična funkcija od $\vec{n}$, elementarne ekscitacije su homogeno raspoređjene u celoj zapremini kristala. Za rešenje /6/ sa funkcijama /16/ dobijamo:

$$\langle B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}} \rangle = \sum_{\vec{k}(\text{dvo-dimenzionalno})} |C_{\vec{k}}|^2 e^{-2\eta n_3} \bar{N}_{\vec{k}} \qquad (19)$$

To se može videti iz jednačine koja ima maksimalnu koncentraciju za $\vec{n}_3 = 0$ i eksponencijalno opada sa povećanjem dubine. Zbog toga elementarne ekscitacije koje odgovaraju ovom rešenju ćemo zvati površinskim magnonima.

Transformacijom /6/ sa funkcijama /13/ hamiltonijan se dijagonalizuje na oblik:

$$H = \sum_{\vec{k}} \omega(\vec{k}) B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}}, \qquad (20)$$

gde je $$D_k=\left(\frac{2}{N\left(1-\frac{1}{\mu'\mathcal{H}}\cos k_3+\frac{I^2}{4\mu'^2\mathcal{H}^2}\right)}\right)^{1/2}$$

dok transformacija /6/ sa /16/ daje:

$$H=\sum_{\vec{k}}\omega(k_1k_2i\eta)B^+_{k_1k_2i\eta}B_{k_1k_2i\eta} \qquad (21)$$

gde je $\vec{k}$ u /21/ dvo-dimenzionalan talasni vektor, a $C_{\vec{k}}=/N_1N_2/^{-\frac{1}{2}}$.

/Napomenimo da transformacija

$$B_{\vec{n}}=\sum_{\vec{k}(\text{dvo-dimenzionalno})}C_{k_1k_2i\eta}e^{i(k_1n_1+k_2n_2)}e^{-\eta n_3}B_{k_1k_2i\eta}$$

nije kanonična za sve n_3, već samo za $n_3=0$. Za dalja razmatranja u ovom radu ovo odstupanje od kanoničnosti transformacije nije od značaja./

Zapreminski i površinski fononi

Klasični hamiltonijan sistema fonona ima oblik:

$$H=\frac{1}{2}\sum_{\vec{n},i}\left\{m\left(\dot{\xi}^i_{\vec{n}}\right)^2+\sum_{\vec{n}',i'}\Lambda^{ii'}(\vec{n}-\vec{n}')\,\xi^i_{\vec{n}}\,\xi^{i'}_{\vec{n}'}\right\} \qquad (1)$$

Jednačina kretanja za n-ti atom može se izvesti prema Lagranževom formalizmu:

$$m\ddot{\xi}^i_{\vec{n}}+\sum_{\vec{n}',i'}\Lambda^{ii'}(\vec{n}-\vec{n}')\,\xi^{i'}_{\vec{n}'}=0 \qquad (2)$$

gde je $\xi^i_{\vec{n}}$ /i = x,y,z/ i-ta komponenta pomeraja n-tog atoma oko svog ravnotežnog položaja, $\Lambda^{ii'}(\vec{n}-\vec{n}')$ koeficijenti koji zavise samo od rastojanja izmedju $\vec{n}$ i $\vec{n}'$ atoma.

Iz /2/ slede komponentne jednačine koje možemo pisati u prvoj aproksimaciji, tj. za $n_3\geq 1$:

$$\begin{aligned}
&m\ddot{\xi}^x_{\vec{n}}+\Lambda^T_0\left(\xi^y_{\vec{n}}+\xi^z_{\vec{n}}\right)+\Lambda_0\xi^x_{\vec{n}}+\\
&\quad+\Lambda\left(\xi^x_{\vec{n}-\vec{a}_1}+\xi^x_{\vec{n}+\vec{a}_1}+\xi^x_{\vec{n}-\vec{a}_2}+\xi^x_{\vec{n}+\vec{a}_2}+\xi^x_{\vec{n}-\vec{a}_3}+\xi^x_{\vec{n}+\vec{a}_3}\right)=0\,,\\
&m\ddot{\xi}^y_{\vec{n}}+\Lambda^T_0\left(\xi^x_{\vec{n}}+\xi^z_{\vec{n}}\right)+\Lambda_0\xi^y_{\vec{n}}+\\
&\quad+\Lambda\left(\xi^y_{\vec{n}-\vec{a}_1}+\xi^y_{\vec{n}+\vec{a}_1}+\xi^y_{\vec{n}-\vec{a}_2}+\xi^y_{\vec{n}+\vec{a}_2}+\xi^y_{\vec{n}-\vec{a}_3}+\xi^y_{\vec{n}+\vec{a}_3}\right)=0\,, \qquad (3)\\
&m\ddot{\xi}^z_{\vec{n}}+\Lambda^T_0\left(\xi^y_{\vec{n}}+\xi^x_{\vec{n}}\right)+\Lambda_0\xi^z_{\vec{n}}+\\
&\quad+\Lambda\left(\xi^z_{\vec{n}-\vec{a}_1}+\xi^z_{\vec{n}+\vec{a}_1}+\xi^z_{\vec{n}-\vec{a}_2}+\xi^z_{\vec{n}+\vec{a}_2}+\xi^z_{\vec{n}-\vec{a}_3}+\xi^z_{\vec{n}+\vec{a}_3}\right)=0\,,
\end{aligned}$$

gde smo približno uzeli da su torzioni koeficijenti za dva susedna atoma jednaki nuli, tj.

$$\Lambda^{xy}=\Lambda^{yx}=\Lambda^{xz}=\Lambda^{zx}=\Lambda^{yz}=\Lambda^{zy}=0$$

U /3/ smo uveli oznake:

$\lambda_0^{xx} = \lambda_0^{yy} = \lambda_0^{zz} = \lambda_0$ -koeficijent istezanja atoma oko svog ravnotežnog položaja,

$\lambda^{xx} = \lambda^{yy} = \lambda^{zz} = \lambda$ -koeficijent istezanja za dva susedna atoma,

$\lambda_0^{xy} = \lambda_0^{yx} = \lambda_0^{xz} = \lambda_0^{zx} = \lambda_0^{yz} = \lambda_0^{zy} = \lambda_0^T$ -koeficijent torzije za posmatrani atom.

Atomi na površini su drugačije vezani zbog nepostojanja sloja $n_3 = -1$. Uzećemo da se ta promena vezanosti ogleda u sledećem: neka su λ_0', $\lambda_0^{T'}$ i λ' promene koeficijenata λ_0, λ_0^T i λ izmedju površinskog i prvog sledećeg sloja. Ako uzmemo da je λ_0 -veličina nultog reda, njena promena λ_0' je mala veličina prvog reda i nju ćemo uzeti u obzir. S obzirom da su λ_0^T i λ otprilike veličine istog reda i u odnosu na λ_0 predstavljaju male veličine prvog reda, njihove promene $\lambda_0^{T'}$ i λ' su male veličine drugog reda i njih ćemo zanemariti. Posle ovih aproksimacija, komponentni sistem jednačina za $n_3 = 0\,[\vec{n} = (n_1 n_2 0)]$ je:

$$m\ddot{\xi}^x_{\vec{n}} + \lambda_0^T(\xi^y_{\vec{n}} + \xi^z_{\vec{n}}) + (\lambda_0 - \lambda_0')\xi^x_{\vec{n}} + \lambda(\xi^x_{\vec{n}-\vec{a}_1} + \xi^x_{\vec{n}+\vec{a}_1} + \xi^x_{\vec{n}-\vec{a}_2} + \xi^x_{\vec{n}+\vec{a}_2} + \xi^x_{\vec{n}+\vec{a}_3}) = 0,$$

$$m\ddot{\xi}^y_{\vec{n}} + \lambda_0^T(\xi^x_{\vec{n}} + \xi^z_{\vec{n}}) + (\lambda_0 - \lambda_0')\xi^y_{\vec{n}} + \lambda(\xi^y_{\vec{n}-\vec{a}_1} + \xi^y_{\vec{n}+\vec{a}_1} + \xi^y_{\vec{n}-\vec{a}_2} + \xi^y_{\vec{n}+\vec{a}_2} + \xi^y_{\vec{n}+\vec{a}_3}) = 0, \quad (4)$$

$$m\ddot{\xi}^z_{\vec{n}} + \lambda_0^T(\xi^y_{\vec{n}} + \xi^x_{\vec{n}}) + (\lambda_0 - \lambda_0')\xi^z_{\vec{n}} + \lambda(\xi^z_{\vec{n}-\vec{a}_1} + \xi^z_{\vec{n}+\vec{a}_1} + \xi^z_{\vec{n}-\vec{a}_2} + \xi^z_{\vec{n}+\vec{a}_2} + \xi^z_{\vec{n}+\vec{a}_3}) = 0.$$

Zato što postoji translaciona simetrija u pravcima $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$, rešenje ćemo tražiti u obliku:

$$\xi^j_{\vec{n}} = A^j e^{i(q_1 n_1 + q_2 n_2)}[\sin q_3 n_3 + b \sin q_3 (n_3+1)]e^{-i\omega t}, \quad (j = x, y, z). \quad (5)$$

Konstantu b odredjujemo iz uslova da /5/ istovremeno bude rešenje i za /3/ i /4/. Zamenjivanjem /5/ dobijamo linearan sistem jednačina po amplitudama A^j. Da bi sistem imao netrivijalna rešenja po A determinanta sistema mora biti ravna nuli, tj.:

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + \lambda_0 + 2\lambda(\cos q_1 + \cos q_2 + \cos q_3) & \lambda_0^T & \lambda_0^T \\ \lambda_0^T & -m\omega^2 + \lambda_0 + 2\lambda(\cos q_1 + \cos q_2 + \cos q_3) & \lambda_0^T \\ \lambda_0^T & \lambda_0^T & -m\omega^2 + \lambda_0 + 2\lambda(\cos q_1 + \cos q_2 + \cos q_3) \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Zamenom /5/ u /4/ na potpuno isti način dobijamo uslov:

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + \lambda_0 - \lambda_0' + \lambda(2\cos q_1 + 2\cos q_2 + 2\cos q_3 + \frac{1}{b}) & \lambda_0^T & \lambda_0^T \\ \lambda_0^T & -m\omega^2 + \lambda_0 - \lambda_0' + \lambda(2\cos q_1 + 2\cos q_2 + 2\cos q_3 + \frac{1}{b}) & \lambda_0^T \\ \lambda_0^T & \lambda_0^T & -m\omega^2 + \lambda_0 - \lambda_0' + \lambda(2\cos q_1 + 2\cos q_2 + 2\cos q_3 + \frac{1}{b}) \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

Izjednačavanjem /6/ i /7/ dobijamo da je:

$$b=\frac{\Lambda}{\Lambda_0'} \tag{8}$$

Prema tome, proizvoljan pomeraj atoma u kristalu možemo napisati u obliku:

$$\vec{\xi}_{\vec{n}}=\sum_{\vec{q}\,l}\vec{e}_l(\vec{q})f(n_3q_3)\left\{A(\vec{q})e^{i(q_1n_1+q_2n_2)}e^{-i\omega_l(\vec{q})t}+A^*(\vec{q})e^{-i(q_1n_1+q_2n_2)}e^{i\omega_l(\vec{q})t}\right\} \tag{9}$$

gde je $f(n_3k_3)=\sin n_3k_3+(\Lambda/\Lambda_0')\sin(n_3+1)k_3$, a l označava broj grana frekvencije.

Sistemi jednačina /3/ i /4/ svojom strukturom dopuštaju još jedan tip rešenja koje ima fizičkog smisla. Rešenje ćemo tražiti u obliku:

$$\xi^j_{\vec{n}}=A^j e^{i(q_1n_1+q_2n_2)}e^{-\rho n_3}e^{-i\omega t}\quad,\quad \rho\geqq 0\;. \tag{10}$$

ρ odredjujemo iz uslova da rešenje/10/ istovremeno zadovoljava /3/ i /4/. Na potpuno isti način kao i u prethodnom rešenju /8/ dobijamo vrednost za:

$$e^{\rho}=-\frac{\Lambda_0'}{\Lambda}\;. \tag{11}$$

Proizvoljni pomeraj atoma na površini u ovom slučaju je:

$$\vec{\xi}_{\vec{n}}=\sum_{\vec{q}\,l}\vec{e}_l(\vec{q},i\rho)e^{-\rho n_3}\times$$
$$\times\left\{A(\vec{q},i\rho)e^{i(q_1n_1+q_2n_2)}e^{-i\omega_l(\vec{q},i\rho)t}+A^*(\vec{q},i\rho)e^{-i(q_1n_1+q_2n_2)}e^{i\omega_l(\vec{q},i\rho)t}\right\} \tag{12}$$

gde je $\vec{q}$ dvo-dimenzionalan talasni vektor. Izraze /9/ i /12/ možemo napisati u operatorskoj formi:

$$\hat{\vec{\xi}}_{\vec{n}}=\sum_{\vec{q}\,l}\left(\frac{\hbar}{N\left|1+\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}e^{iq_3}\right|m\omega_l(\vec{q})}\right)^{1/2}\vec{e}_l(\vec{q})f(n_3q_3)\times\left\{\hat{a}_{l\vec{q}}e^{i(q_1n_1+q_2n_2)}+\hat{a}^+_{l\vec{q}}e^{-i(q_1n_1+q_2n_2)}\right\}, \tag{13}$$

$$\hat{\vec{\xi}}_{\vec{n}}=\sum_{\vec{q}\,l}\left(\frac{\hbar(1-e^{-2\rho})}{N_1N_2\,m\,\omega_l(\vec{q},i\rho)}\right)^{1/2}\vec{e}_l(\vec{q},i\rho)e^{-\rho n_3}\times\left\{\hat{a}_{l\vec{q},i\rho}e^{i(q_1n_1+q_2n_2)}+\hat{a}^+_{l\vec{q},i\rho}e^{-i(q_1n_1+q_2n_2)}\right\}. \tag{14}$$

Energije sistema u ovom drugom slučaju su, respektivno:

$$E=\sum_{\vec{q}\,l}\omega_l(\vec{q})\left(\frac{1}{2}+N_{\vec{q}}\right)\;, \tag{15}$$

$$E=\sum_{\vec{q}\,l}\omega_l(\vec{q},i\rho)\left(\frac{1}{2}+N_{\vec{q},i\rho}\right)\,. \tag{16}$$

U /14/ i /16/ $\vec{q}$ je dvo-dimenzionalan talasni vektor.

II GLAVA

Koeficijent površinske anihilacije magnona

a/ Spin-fonon interakcija

Pri temperaturama različitim od nule atomi vrše toplotne oscilacije. Zbog toga se menja potencijal izmenske interakcije i nastaje interakcija spinova s oscilacijama rešetke ili fononima. Računaćemo za prost izotropni feromagnetik. Označimo sa veličinu pomeranja atoma iz ravnotežnog položaja i razložimo integral izmene po odgovarajućim pomeranjima, ograničavajući se na linearne članove . Predstavimo dalje pomeranje u obliku sume normalnih oscilacija, dodajući osnovnom operatoru operator energije sopstvenih oscilacija rešetke i prelazeći u reprezentaciju druge kvantizacije. Znači koristimo sledeći izraz za ukupni hamiltonijan sistema:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{dd} + \mathcal{H}_{ph} + \mathcal{H}_{d-ph} \tag{1}$$

gde su $\mathcal{H}_{dd}$, $\mathcal{H}_{ph}$ -operatori sopstvenih energija spinskog i fononskog podsistema:

$$\mathcal{H}_{dd} = -\mu \sum (H, S_f) - \frac{1}{2} \sum I(f_1 - f_2)(S_{f_1}, S_{f_2})$$

$$\mathcal{H}_{ph} = \sum \omega_k \beta_k^+ \beta_k \tag{2}$$

β_k^+, β_k -operatori kreacije i anihilacije fonona s energijom ω_k /indeks k uključuje u sebe talasni vektor fonona i broj odgovarajućih grana fononskog spektra/, koji zadovoljavaju bozonske komutacione relacije.

$\mathcal{H}_{d-ph}$ -operator spin-fononske energije uzajamnog dejstva:

$$\mathcal{H}_{d-ph} = \sum A_{\vec{k}}(\vec{f}_1 - \vec{f}_2)(S_{\vec{f}_1}, S_{\vec{f}_2})(b_k - b^+_{-k})\left(e^{i(\vec{f}_1, \vec{\nu})} - e^{i(\vec{f}_2, \vec{\nu})}\right)$$

$$A_k(f) = i\sqrt{\frac{1}{2V\rho\omega_k}}\,(e_{\vec{k}}, \nabla_f I(\vec{f})) \tag{3}$$

V-zapremina sistema, ρ -gustina kristala, $e_{\vec{k}}$ -jedinični vektor polarizacije fonona sa impulsom k.

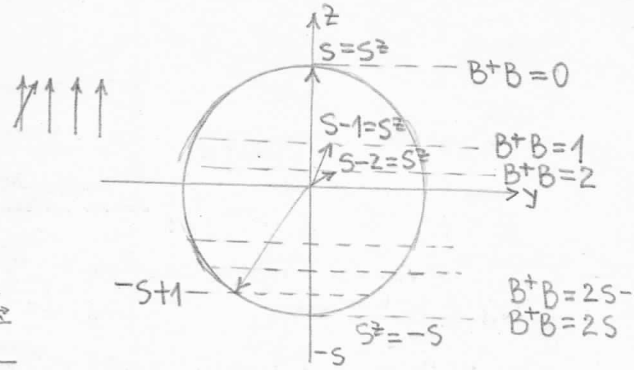
Razvijanjem hamiltonijan spin-fonon interakcije dobija oblik:

$$H = \underbrace{-\mu\mathcal{H}\sum_{\vec{n}} S^z_{\vec{n}}}_{H_1} \underbrace{- \frac{1}{2}\sum_{\substack{\vec{n}\vec{m} \\ \vec{n}\neq\vec{m}}} I_{\vec{n}\vec{m}}\, \vec{S}_{\vec{n}}\vec{S}_{\vec{m}}}_{H_2} \qquad S^z_{\vec{n}} = S - (S - S^z_{\vec{n}})$$

gde je

$$H_1 = -\mu\mathcal{H}\sum_{\vec{n}} S + \mu\mathcal{H}\sum_{\vec{n}}(S - S^z_{\vec{n}}) = -\mu\mathcal{H}SN + \mu\mathcal{H}\sum_{\vec{n}}(S - S^z_{\vec{n}})$$

A operatori spina su:



$$\hat{S}_{\vec{n}} = S^x_{\vec{n}}\vec{i} + S^y_{\vec{n}}\vec{j} + S^z_{\vec{n}}\vec{k}$$

$$\hat{S}_{\vec{m}} = S^x_{\vec{m}}\vec{i} + S^y_{\vec{m}}\vec{j} + S^z_{\vec{m}}\vec{k}$$

$$\hat{S}_{\vec{n}}\hat{S}_{\vec{m}} = \underbrace{S^x_{\vec{n}}S^x_{\vec{m}} + S^y_{\vec{n}}S^y_{\vec{m}}} + S^z_{\vec{n}}S^z_{\vec{m}}$$

$$S^+_{\vec{n}} = S^x_{\vec{n}} + iS^y_{\vec{n}}, \quad S^x_{\vec{n}} = \frac{S^+_{\vec{n}} + S^-_{\vec{n}}}{2}, \quad S^x_{\vec{m}} = \frac{S^+_{\vec{m}} + S^-_{\vec{m}}}{2}$$

$$S^-_{\vec{n}} = S^x_{\vec{n}} - iS^y_{\vec{n}}, \quad S^y_{\vec{n}} = \frac{S^+_{\vec{n}} - S^-_{\vec{n}}}{2i}, \quad S^y_{\vec{m}} = \frac{S^+_{\vec{m}} - S^-_{\vec{m}}}{2i}$$

$$S^x_{\vec{n}}S^x_{\vec{m}} = \frac{S^+_{\vec{n}}S^+_{\vec{m}} + S^+_{\vec{n}}S^-_{\vec{m}} + S^-_{\vec{n}}S^+_{\vec{m}} + S^-_{\vec{n}}S^-_{\vec{m}}}{4}, \quad S^y_{\vec{n}}S^y_{\vec{m}} = \frac{S^+_{\vec{n}}S^+_{\vec{m}} - S^+_{\vec{n}}S^-_{\vec{m}} - S^-_{\vec{n}}S^+_{\vec{m}} + S^-_{\vec{n}}S^-_{\vec{m}}}{-4}$$

$$S^x_{\vec{n}}S^x_{\vec{m}} + S^y_{\vec{n}}S^y_{\vec{m}} = \frac{S^+_{\vec{n}}S^-_{\vec{m}} + S^-_{\vec{n}}S^+_{\vec{m}}}{2}, \quad \frac{S^+_{\vec{n}}S^-_{\vec{m}} + S^-_{\vec{n}}S^+_{\vec{m}}}{2} + S^z_{\vec{n}}S^z_{\vec{m}}, \quad I_{\vec{n}\vec{m}} = I_{\vec{m}\vec{n}} = I_{\vec{n}-\vec{m}}$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} S^-_{\vec{n}}S^+_{\vec{m}} - \frac{1}{4}\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} \frac{S^-_{\vec{m}}S^+_{\vec{n}}}{2}, \quad \vec{n} \neq \vec{m} \qquad S^+_{\vec{n}}S^-_{\vec{m}} = S^-_{\vec{m}}S^+_{\vec{n}} \qquad \begin{matrix}\vec{n}\to\vec{m}\\ \vec{m}\to\vec{n}\end{matrix}$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} S^-_{\vec{n}}S^+_{\vec{m}}$$

$$\boxed{\frac{S^+_{\vec{n}}S^-_{\vec{m}} + S^-_{\vec{n}}S^+_{\vec{m}}}{2}} + S^z_{\vec{n}}S^z_{\vec{m}}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} S^-_{\vec{n}}S^+_{\vec{m}}$$

$$S^z_{\vec{n}}S^z_{\vec{m}} = [S - (S - S^z_{\vec{n}})][S - (S - S^z_{\vec{m}})] = -\cancel{\tfrac{1}{4}}\, S^2 - (S - S^z_{\vec{m}}) -$$

$$- S(S - S^z_{\vec{n}}) + (S - S^z_{\vec{n}})(S - S^z_{\vec{m}}) = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} S^2 I_{\vec{n}-\vec{m}} =$$

$$= -\frac{1}{2}S^2\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}-\vec{m}} = -\frac{1}{2}S^2\sum_{\vec{n}\vec{l}} I_{\vec{l}} = -\frac{1}{2}S^2\sum_{\vec{l}} I_{\vec{l}} \underbrace{\sum_{\vec{n}} 1}_{N} = -\frac{1}{2}NS^2J_0$$

$$\sum_{\vec{l}} I_{\vec{l}} = \sum_{\vec{m}} I_{\vec{n}-\vec{m}} = J_0 \qquad \vec{n}-\vec{m} = \vec{l}$$

Treći član je:

$$-\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} S(S - S^z_{\vec{n}}) = \frac{1}{2}S\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}-\vec{m}}(S - S^z_{\vec{n}}) = \frac{1}{2}S\sum_{\vec{l}} I_{\vec{l}}\sum_{\vec{n}}(S - S^z_{\vec{n}}) =$$

$$= \frac{1}{2}J_0 S\sum_{\vec{n}}(S - S^z_{\vec{n}})$$

Ukupan hamiltonijan spin-spin interakcije biće:

$$H = -\mu\mathcal{H}N - \frac{1}{2}NS^2J_0 + \sum_{\vec{n}}(\mu\mathcal{H} + J_0S)(S - S^z_{\vec{n}}) - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} S^-_{\vec{n}}S^+_{\vec{m}} -$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}}(S - S^z_{\vec{n}})(S - S^z_{\vec{m}})$$

gde prva dva člana predstavljaju energiju osnovnog stanja, druga dva čine hamiltonijan harmonijske aproksimacije, a poslednji član je hamiltonijan dinamičke interakcije spinova.

Blohova aproksimacija

Bloh daje sledeće vrednosti spinskih operatora:

1/ $S^-_{\vec{n}} = \sqrt{2S}\,B^+_{\vec{n}}$

2/ $S^+_{\vec{n}} = \sqrt{2S}\,B_{\vec{n}}$

3/ $S - S^z_{\vec{n}} = B^+_{\vec{n}}B_{\vec{n}}$

4/ odbacuje se hamiltonijan dinamičke interakcije spinova.

Bozeovi operatori su:

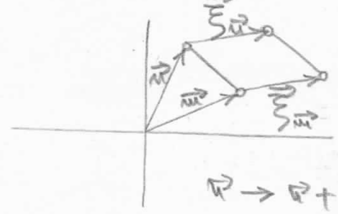
$$B^+_{\vec{n}}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle, \quad B_{\vec{n}}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

Sada je ukupni hamiltonijan po Blohu:

$$H_{Bl} = -\mu\mathcal{H}N - \frac{1}{2}NS^2J_0 + (\mu\mathcal{H} + SJ_0)\sum_{\vec{n}} B^+_{\vec{n}}B_{\vec{n}} - S\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} B^+_{\vec{n}}B_{\vec{m}}$$

ili još kraće:

$$H_{Be}=E_0+\Delta\sum B^+_{\vec{n}}B_{\vec{n}}-\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}}B^+_{\vec{n}}B_{\vec{m}}$$



$$[B_n, B^+_m]=\delta_{n,m}$$

$$[B_n, B_m]=[B^+_m, B^+_m]=0$$

$$H=-\mu\mathcal{H}\sum_{\vec{n}}S^z_{\vec{n}}-\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}I_{\vec{n}-\vec{m}}\hat{S}_{\vec{n}}\hat{S}_{\vec{m}}$$

$$\vec{n}\to\vec{n}+\vec{\xi}_{\vec{n}}$$
$$\vec{m}\to\vec{m}+\vec{\xi}_{\vec{m}}$$
$$I_{\vec{n}-\vec{m}}\to I_{\vec{n}}+\vec{\xi}_{\vec{n}}-\vec{m}-\vec{\xi}_{\vec{m}}=$$
$$=I_{\vec{n}-\vec{m}}+(\vec{\xi}_{\vec{n}}-\vec{\xi}_{\vec{m}})$$

Integral izmene je:

$$I_{\vec{n}-\vec{m}}\to I(\vec{n}+\vec{\xi}_{\vec{n}}-\vec{m}-\vec{\xi}_{\vec{m}})=$$

$$=I[\underbrace{(\vec{n}-\vec{m})}_{\vec{q}}+\underbrace{(\vec{\xi}_{\vec{n}}-\vec{\xi}_{\vec{m}})}_{\vec{\xi}_{\vec{q}}}]\cong I(\vec{n}-\vec{m})+(\vec{\xi}_{\vec{n}}-\vec{\xi}_{\vec{m}})\nabla I(\vec{n}-\vec{m})+\dots$$

Razlika hamiltonijana biće:

$$H-\bar{H}=-\mu\mathcal{H}\sum_n S^z_n-\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}I_{\vec{n}-\vec{m}}\hat{S}_{\vec{n}}\hat{S}_{\vec{m}}-\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}\nabla I_{\vec{n}-\vec{m}}(\vec{\xi}_{\vec{n}}-\vec{\xi}_{\vec{m}})\hat{S}_{\vec{n}}\hat{S}_{\vec{m}}$$

gde je poslednji član hamiltonijan spin-fonon interakcije. Dalje:

$$\bar{H}=E_0+\Delta\sum_{\vec{n}}(S-S^z_{\vec{n}})-\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}I_{\vec{n}-\vec{m}}S^-_{\vec{n}}S^+_{\vec{m}}-\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}I_{\vec{n}-\vec{m}}(S-S^z_{\vec{n}})(S-S^z_{\vec{m}})-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}\nabla I_{\vec{n}-\vec{m}}(\vec{\xi}_{\vec{n}}-\vec{\xi}_{\vec{m}})[S^-_{\vec{n}}S^+_{\vec{m}}+(S-S^z_{\vec{n}})(S-S^z_{\vec{m}})]$$

$$H=-\mu\mathcal{H}N+\mu\mathcal{H}\sum_{\vec{n}}(S-S^z_{\vec{n}})-\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}I_{\vec{n}-\vec{m}}(S^-_{\vec{n}}S^+_{\vec{m}}+S^z_{\vec{n}}S^z_{\vec{m}})$$

i na kraju dobijamo treću formulu za hamiltonijan spin-fonon interakcije:

$$\bar{H}=H-\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}\nabla I_{\vec{n}-\vec{m}}(\vec{\xi}_{\vec{n}}-\vec{\xi}_{\vec{m}})(\underbrace{S^-_{\vec{n}}S^+_{\vec{m}}}_{2SB^+_{\vec{n}}B_{\vec{m}}}+S^z_{\vec{n}}S^z_{\vec{m}})$$

<u>Hamiltonijan spin-fonon interakcije u Blohovoj aproksimaciji</u>

$$S^+_{\vec{m}}=\sqrt{2S}\,B_{\vec{m}}\qquad S^z_{\vec{n}}S^z_{\vec{m}}=(S-B^+_{\vec{n}}B_{\vec{n}})(S-B^+_{\vec{m}}B_{\vec{m}})\cong S^2-SB^+_{\vec{n}}B_{\vec{n}}-SB^+_{\vec{m}}B_{\vec{m}}$$
$$S^-_{\vec{n}}=\sqrt{2S}\,B^+_{\vec{n}}$$

Član S^2 ne igra ulogu za spin-fonon interakciju, jer ne sadrži $B^+_{\vec{n}}B_{\vec{n}}$ odnosno $B^+_{\vec{m}}B_{\vec{m}}$. Blohovska opšta formula izgleda:

$$H^{S-F}_{Be}=-\frac{S}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}\nabla_{\vec{n}-\vec{m}}I_{\vec{n}-\vec{m}}(\vec{\xi}_{\vec{n}}-\vec{\xi}_{\vec{m}})(2B^+_{\vec{n}}B_{\vec{m}}-B^+_{\vec{n}}B_{\vec{n}}-B^+_{\vec{m}}B_{\vec{m}})$$

Uzimajući u obzir Furijeovu transformaciju:

$$I_{\vec{n}-\vec{m}}=\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}J_{\vec{k}}e^{i\vec{k}(\vec{n}-\vec{m})},\quad \nabla I_{\vec{n}-\vec{m}}=\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}i\vec{k}J_{\vec{k}}e^{i\vec{k}(\vec{n}-\vec{m})},\quad J_{\vec{k}}=\sum_{\vec{n}}I_{\vec{n}-\vec{m}}e^{i\vec{k}(\vec{n}-\vec{m})}$$

dobijamo:

$$H_{Be}=-\frac{S}{2}\nabla_{\vec{\sigma}-\vec{\tau}}I_{\vec{\sigma}-\vec{\tau}}(\vec{\xi}_{\vec{\sigma}}-\vec{\xi}_{\vec{\tau}})(2B^+_{\vec{\sigma}}B_{\vec{\tau}}-B^+_{\vec{\sigma}}B_{\vec{\sigma}}+B^+_{\vec{\tau}}B_{\vec{\tau}})+\text{simetrični ostatak}$$

Oblik polubeskonačnog kristala izgleda kao na slici:

$$\overset{-1}{\circ}\quad \overset{0}{\circ}\longleftrightarrow\overset{1}{\circ}\quad \overset{2}{\circ}\quad \overset{3}{\circ}$$
$$a\vec{\tau}=\vec{a}$$

Atom sa položajem -1 ne postoji za polubeskonačni kristal, a nulti položaj je poseban - to je površinski atom.

Blohovski hamiltonijan ima izgled:

$$H_{Be}^{S-F}=\frac{SI}{2N}\sum_k kJ_k e^{ika}(\xi_0-\xi_1)\Big(2B_0^+B_1\overbrace{-B_0^+B_0-B_1^+B_1}^{\text{ne treba}}\Big)$$ + simetrični ostatak

Furijeov transform za jednu dimenziju daje:

$$I_{\vec{u}-\vec{m}}=\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}J_{\vec{k}}e^{i\vec{k}(\vec{u}-\vec{m})},\quad I_{\vec{0}-\vec{\tau}}=\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}J_{\vec{k}}e^{-i\vec{k}\vec{a}}\Big|_{k>0},\quad \frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{N}\sum_k J_k e^{-ika}=-\frac{i}{N}\sum_{\vec{k}}\vec{k}J_k e^{ika}\Big|_{k>0}$$

Hamiltonijan spin-fonon interakcije u Blohovoj aproksimaciji za jednu dimenziju je: $H_{eff}=-\frac{S}{2}\nabla_{0-1}I_{0-1}(\xi_0-\xi_1)B_0^+B_1$

$$I_{\vec{u}-\vec{m}}=\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}J_{\vec{k}}e^{i\vec{k}(\vec{u}-\vec{m})a}$$

$$-\frac{\pi}{a}\le k_i\le\frac{\pi}{a},\quad 0\le k\le\frac{\pi}{a}$$

$$I_{u-m}=\frac{1}{N}\sum_k J_k e^{ika(u-m)}\sim\frac{L}{2\pi N}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk\,e^{ika(u-m)}=$$

$$ka=x,\quad -\pi\le x\le\pi,\quad dk=\frac{1}{a}dx$$

$$=\frac{Na}{2\pi Na}\int_{-\pi}^{\pi}dx\,e^{ix(u-m)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\,e^{ix(u-m)}$$

$$\sum_k=\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k},\quad \sum_u=\frac{L}{2\pi}\int dk$$

$$I_{u-m}=\frac{1}{N}\sum_{k\ge 0}J_k\cos ka(u-m),\quad I_{u-m}=\frac{Na}{N2\pi}\int_0^{\pi/a}J(ka)\cos ka(u-m)\,dk$$

$$I_{0-1}=\frac{1}{N}\sum_{k\ge 0}J_k\cos ka,\quad \nabla I_{0-1}=\frac{1}{N}\sum_{k\ge 0}kJ_k\sin ka$$

$$u-m=y,\quad I_{u-m}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}J(x)\cos x(u-m)\,dx,\quad I(y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}J(x)\cos xy\,dx\Big/\cdot\cos x'y$$

$$\int_0^\infty I(y)\cos x'y\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty J(x)dx\underbrace{\int_0^\infty\cos xy\cos x'y\,dy}_{}\qquad \frac{\pi}{2}\left[\delta(x'-x)+\delta(x'+x)\right]$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot J(x')$$

$$J(x)=4\int_0^\infty I(y)\cos xy\,dy,\quad J(ka)=4\pi\int_0^\infty I_{u-m}\cos(u-m)\,d(u-m);\quad J(ka)=8\pi\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty I_{u-m}\cos(u-m)\,d(u-m)$$

$$J(ka)=4N\sum_u I_{u-m}\cos ka(u-m)$$

$$u-m=l,\quad k=\frac{2\pi\nu}{Na}\dots,\quad I_l=\frac{1}{N}\sum_k J_k\cos kal=\frac{1}{N}\Big\{\sum_k J_k\frac{1}{2}e^{ikal}+\sum_k J_k\frac{1}{2}e^{-ikal}\Big\}\quad k\to -k$$

$$\cos xy\cos x'y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-x')y+\cos(x+x')y\right]$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\cos(x-x')y\,dy=\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta\cos(x-x')y\,dy=\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\infty}\frac{\sin(x-x')y}{x-x'}\Big|_0^\beta=\frac{\pi}{2}\delta(x-x')$$

Na kraju dobijamo efektivni hamiltonijan spin-fonon interakcije u Blohovoj aproksimaciji:

$$H_{eff}=-\frac{S}{2}\nabla_{0-1}I_{0-1}(\xi_0-\xi_1)\cdot 2B_0^+B_1=-\frac{S}{N}\sum_{k\ge 0}kJ_k\sin ka(\xi_0-\xi_1)B_0^+B_1$$

gde su ξ_0 -površinski fononi, ξ_1 -zapreminski fononi, B_0 -površinski magnoni i B_1 -zapreminski magnoni.

Matrični elementi prelaza mogu se pisati kao:

$$\langle 0_q | \langle 1_\varkappa | \langle n_{q-\varkappa} \pm 1 | H_{int} | n_{q-\varkappa} \rangle | 0_\varkappa \rangle | 1_q \rangle$$

$$\text{„+“}: \sqrt{n_{q-\varkappa}+1} \qquad B^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$\text{„−“}: \sqrt{n_{q-\varkappa}} \qquad B|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

Integral izmene za jednu dimenziju biće:

$$I_\ell = \frac{2}{N}\sum_{k\geq 0} J_k \cos ka\ell \,/\cdot \cos qa\ell \,, \quad q>0 \,, \quad \ell = n-m \neq 0 \quad \text{uvek } 0,\ k+q\neq 0$$

$$\sum_\ell I_\ell \cos qa\ell = \frac{2}{N}\sum_{k\geq 0} J_k \sum_\ell \cos qa\ell \cos ka\ell = \frac{1}{2N}\sum_{k\geq 0} J_k \Big\{ \sum_\ell e^{ia(k+q)\ell} +$$

$$+ \underbrace{\sum_\ell e^{-ia(k+q)\ell}}_{0} + \underbrace{\sum_\ell e^{ia(k-q)\ell}}_{N\delta_{k,q}} + \underbrace{\sum_\ell e^{-ia(k-q)\ell}}_{N\delta_{k,q}} \Big\} = \sum_{k\geq 0} J_k \delta_{k,q} = J_q \,, \quad J_q = \sum_\ell I_\ell \cos qa\ell$$

Aproksimacija najbližih suseda za integral izmene u jednoj dimenziji izgledaće kao:

$$\circ \quad \circ \quad \underset{\frac{N}{2}-1}{\circ} \quad \underset{\frac{N}{2}}{\circ} \quad \underset{\frac{N}{2}+1}{\circ}$$

$$I_{-1} = I_{+1} \equiv I$$

$$\ell = n - m$$

$$J_q = \sum_m I_{\frac{N}{2}-m} \cos qa\left(\tfrac{N}{2}-m\right) = \underbrace{I_{\frac{N}{2}-(\frac{N}{2}+1)}}_{I_{-1}} \cdot \cos(-qa) + I_{\frac{N}{2}-(\frac{N}{2}+1)} \cdot \cos qa = 2I\cos qa$$

$$(J_q)_{N.S.} = 2I\cos qa$$

(NAJBLIŽIH SUSEDA)

$$I_{0-1} = \frac{2}{N}\sum_k J_k \cos ka \qquad \nabla_\ell = \frac{\partial}{\partial(\ell a)}\vec{\imath}$$

$$\nabla_\ell I_\ell = -\frac{2}{N}\vec{\imath}\sum_k J_k \sin ka\ell \,, \quad \nabla_{n-m} I_{n-m} = -\frac{2}{N}\vec{\imath}\sum_k k J_k \sin ka(n-m)$$

$$n=0, m=1, \ \nabla_{0-1} I_{0-1} = \vec{\imath}\,\frac{2}{N}\sum_k J_k \sin ka$$

$$\nabla_{0-1} I_{0-1} = \vec{\imath}\,\frac{4I}{N}\sum_k k\cos ka \sin ka = \vec{\imath}\,\frac{2I}{N}\sum_k k\sin 2ka = \vec{\imath}\, 2I \frac{L}{\pi N}\int_0^{\frac{\pi}{a}} k\sin 2ka\, dk = \vec{\imath}\,\frac{2I}{a\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x\, dx =$$

$$= \vec{\imath}\,\frac{2I}{a\pi} = -\frac{I}{a}\vec{\imath}$$

Integral izmene u tri dimenzije

Dalje razvijanje ovog problema u tři dimenzije daje:

$$I(n_x-m_x, n_y-m_y, n_z-m_z) = \frac{2}{N_xN_yN_z}\sum_{k_xk_yk_z} J(k_x,k_y,k_z)\, e^{iak_x\underbrace{(n_x-m_x)}_{\ell_x} + iak_y\underbrace{(n_y-m_y)}_{\ell_y}} \cdot \cos ak_z \overbrace{(n_z-m_z)}^{\ell_z} =$$

$$= I(\ell_x,\ell_y,\ell_z) = \frac{2}{N_xN_yN_z}\sum_{k_xk_yk_z} J(k_x,k_y,k_z)\, e^{iak_x\ell_x + iak_y\ell_y} \cdot \cos a\ell_z k_z \,/\cdot\, e^{-iaq_x\ell_x - iaq_y\ell_y} \cdot \cos q_z a\ell_z =$$

$$= \sum_{\ell_x\ell_y\ell_z} I(\ell_x,\ell_y,\ell_z)\, e^{-iaq_x\ell_x - iaq_y\ell_y} \cdot \cos q_z a\ell_z = \frac{2}{N_xN_yN_z}\sum_{k_xk_yk_z} J(k_x,k_y,k_z) \Big(\underbrace{\sum_{\ell_x} e^{ia\ell_x(k_x-q_x)}}_{N_x\delta_{k_x,q_x}} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\sum_{\ell_y} e^{ia\ell_y(k_y-q_y)}}_{N_y\delta_{k_y,q_y}} \cdot \underbrace{\sum_{\ell_z} \cos q_z a\ell_z \cos k_z a\ell_z}_{\frac{1}{2}N_z\delta_{k_z,q_z}}$$

$$= J(q_x,q_y,q_z) = \sum_{\ell_x\ell_y\ell_z} I(\ell_x,\ell_y,\ell_z)\, e^{-iaq_x\ell_x - iaq_y\ell_y} \cdot \cos q_z a\ell_z$$

$$J(q_x,q_y,q_z) = 2I(\cos q_x a + \cos q_y a + \cos q_z a)$$

$$I(n_x-m_x, n_y-m_y, 0-1) = \frac{2}{N_xN_yN_z}\sum_{k_xk_yk_z} J(k_x,k_y,k_z)\, e^{iak_x\ell_x + iak_y\ell_y} \cos k_z a$$

$$\nabla I(n_x-m_x, n_y-m_y, 0-1) = \frac{2}{N_xN_yN_z}\sum_{k_xk_yk_z} J(k_x,k_y,k_z) \cdot \Big\{ i\vec{\imath}k_x e^{iak_x\ell_x + iak_y\ell_y} \cos k_z a +$$

$$+ i\vec{\jmath}k_y e^{iak_x\ell_x + iak_y\ell_y} \cos ak_z - \vec{k}k_z e^{iak_x\ell_x + iak_y\ell_y} \sin k_z a \Big\}$$

Sad treba naći promenu integrala izmene za površinski i prvi susedni atom:

$$\nabla I(u_x-m_x,u_y-m_y,0-1)=\frac{4I}{N_xN_yN_z}\sum_{k_xk_yk_z}(\cos k_xa+\cos k_ya+\cos k_za)\cdot e^{iak_xl_x+iak_yl_y}\cdot\left[i(k_x\vec{i}+k_y\vec{j})\cos k_za-\right.$$
$$\left.-\vec{k}k_z\sin ak_z\right]$$

i dalje treba zameniti:

$$\sum_{k_xk_yk_z}\to\sum_{k_x}\sum_{k_y}\sum_{k_z}\to\frac{N_xa}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}}dk_x\cdot\frac{N_ya}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}}dk_y\cdot\frac{N_za}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{a}}dk_z$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{il_xx}dx=\frac{1}{il_x}e^{il_xx}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{l_x}\sin l_x\pi=2\pi\frac{\sin l_x\pi}{l_x\pi}=\begin{cases}0, & l_x\neq0\\ 1, & l_x=0\end{cases}=2\pi\delta_{l_x,0}$$

Traženi integral izmene postupno ćemo rešavati:

$$\nabla I(\overbrace{u_x-m_x}^{l_x},\overbrace{u_y-m_y}^{l_y},0-1)=\frac{4I}{N_xN_yN_z}\Big\{i\vec{i}\sum_{k_xk_yk_z}k_x(\cos k_xa+\cos k_ya+\cos k_za)\cdot$$
$$\cdot e^{iak_xl_x+iak_yl_y}\cdot\cos ak_z+i\vec{j}\sum_{k_xk_yk_z}k_y(\cos k_xa+\cos k_ya+\cos k_za)e^{iak_xl_x+iak_yl_y}\cos ak_z-$$
$$-\vec{k}\sum_{k_xk_yk_z}k_z(\cos k_xa+\cos k_ya+\cos k_za)e^{iak_xl_x+iak_yl_y}\sin k_za\Big\}$$

$$\sum_{k_xk_yk_z}k_x(\cos k_xa+\cos k_ya+\cos k_za)e^{iak_xl_x+iak_yl_y}\cos k_za=\frac{N_xaN_yaN_za}{\pi(2\pi)^2}\Big\{\int_{-\pi}^{\pi}k_x\cos k_xa\,e^{iak_xl_x}dk_x\cdot$$
$$\cdot\int_{-\pi}^{\pi}e^{iak_yl_y}dk_y\overbrace{\int_0^{\pi}\cos k_za\,dk_z}^{0}+\int_{-\pi}^{\pi}k_xe^{iak_xl_x}dk_x\int_{-\pi}^{\pi}\cos k_ya\,e^{iak_yl_y}dk_y\overbrace{\int_0^{\pi}\cos k_za\,dk_z}^{0}+$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi}k_xe^{iak_xl_x}dk_x\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e^{iak_yl_y}dk_y}^{2\pi\delta_{l_y,0}}\overbrace{\int_0^{\pi}\cos^2k_za\,dk_z}^{\frac{\pi}{2}}\Big\}$$

Ispred suma ispada faktor $\frac{1}{a^4}$, a pojedine integrale ćemo rešavati:

$$\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi}=0,\quad\int_0^{\pi}\cos^2x\,dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}\cos^2x-\sin^2x&=\cos2x\\ \cos^2x+\sin^2x&=1\\ \hline \cos^2x&=\frac{1}{2}(1+\cos2x)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}dx+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos2x\,d(2x)=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{4}\underbrace{\sin2x\Big|_0^{\pi}}_{0}=\frac{1}{2}\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{ixl_x}dx=\frac{1}{il_x}e^{ixl_x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2i\sin\pi l_x}{il_x}=2\pi\frac{\sin\pi l_x}{\pi l_x}=2\pi\delta_{l_x,0}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}xe^{ixl_x}dx=uv-\int v\,du=\frac{xe^{ixl_x}}{il_x}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{il_x}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ixl_x}dx=\int_0^{\pi}xe^{ixl_x}dx+\int_{-\pi}^{0}xe^{ixl_x}dx=$$
$$=\int_0^{\pi}xe^{ixl_x}dx+\int_{\pi}^{0}ye^{-iyl_x}dy=\int_0^{\pi}xe^{ixl_x}dx-\int_0^{\pi}xe^{-ixl_x}dx=2i\int_0^{\pi}x\sin xl_x\,dx$$

$x=-y$, $x=-\pi$
$dx=-dy$, $x=0$
$y=\pi$, $y=0$

$$\int_0^{\pi}x\sin xl_x\,dx=uv-\int v\,du=-\frac{x\cos xl_x}{l_x}+\frac{1}{l_x}\int\cos xl_x\,dx=\Big|-\frac{x\cos xl_x}{l_x}+\frac{1}{l_x^2}\overbrace{\sin xl_x}^{0}\Big|_0^{\pi}=-\frac{\pi\cos\pi l_x}{l_x}$$

$l_x\neq0$

$$\int_{-\pi}^{\pi}xe^{ixl_x}dx=\begin{cases}0, & l_x=0\\ \frac{2\pi}{i}\frac{(-1)^{l_x}}{l_x}, & l_x\neq0\end{cases}=\frac{2\pi}{i}\frac{(-1)^{l_x}}{l_x}(1-\delta_{l_x,0})$$

Opet se vraćamo na integral izmene i:

$$\frac{4I}{N_xN_yN_z}i\vec{i}\sum_{k_xk_yk_z}k_x(\cos k_xa+\cos k_ya+\cos k_za)\cos k_za\,e^{iak_xl_x+ial_yk_y}=$$
$$=\frac{4I}{N_xN_yN_z}i\vec{i}\cdot\frac{N_xaN_yaN_za}{(2\pi)^2\cdot\pi}\cdot\frac{1}{a^4}\cdot2\pi\delta_{l_y,0}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\pi}{i}\frac{(-1)^{l_x}}{l_x}(1-\delta_{l_x,0})=\frac{2I}{a}\frac{(-1)^{l_x}}{l_x}\delta_{l_y,0}(1-\delta_{l_x,0})\vec{i}$$

$$\frac{4I}{N_xN_yN_z}i\vec{j}\sum_{k_xk_yk_z}k_y(\cos k_xa+\cos k_ya+\cos k_za)\cos k_za\,e^{iak_xl_x+iak_yl_y}=\frac{2I}{a}\frac{(-1)^{l_y}}{l_y}\delta_{l_x,0}(1-\delta_{l_y,0})\vec{j}$$

$$\sum_{k_xk_yk_z} k_z(\cos k_x a+\cos k_y a+\cos k_z a)e^{iak_x\ell_x+iak_y\ell_y}\sin k_z a=\frac{N_xaN_yaN_za}{(2\pi)^2\pi}\Big\{\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos k_x a\, e^{iak_x\ell_x}dk_x}_{\pi(\delta_{\ell_x,1}+\delta_{\ell_x,-1})}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e^{iak_y\ell_y}dk_y}_{2\pi\delta_{\ell_y,0}}\underbrace{\int_0^{\pi}k_z\sin k_z a\,dk_z}_{\pi}+\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e^{iak_x\ell_x}dk_x}_{2\pi\delta_{\ell_x,0}}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos k_y a\,e^{iak_y\ell_y}dk_y}_{\pi(\delta_{\ell_y,1}+\delta_{\ell_y,-1})}\underbrace{\int_0^{\pi}k_z\sin k_z a\,dk_z}_{\pi}+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}e^{iak_x\ell_x}dk_x\int_{-\pi}^{\pi}e^{iak_y\ell_y}dk_y\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}k_z\sin 2k_z a\,dk_z$$

Kad ispred sumiranja izvučeno faktor $\frac{1}{a^4}$ i uvedemo Kronekerov simbol δ dobijamo: $\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\ell}dx=2\pi\delta_{\ell,0}$

$x=-t$, $dx=-dt$, $\cos x=\cos t$, $e^{ix\ell_x}=e^{-it\ell_x}$

$x=-\pi$, $t=\pi$; $x=0$, $t=0$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,e^{ix\ell_x}dx=\int_0^{\pi}\cos x\,e^{ix\ell_x}dx+\int_{-\pi}^{0}\cos x\,e^{ix\ell_x}dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\cos x\,e^{ix\ell_x}dx-\int_{\pi}^{0}\cos t\,e^{-it\ell_x}dt=\int_0^{\pi}\cos x\,e^{ix\ell_x}dx+\int_0^{\pi}\cos x\,e^{-ix\ell_x}dx=2\int_0^{\pi}\cos x\cos x\ell_x\,dx=$$

$t\to x$

$$=\int_0^{\pi}\cos(\ell_x-1)x\,dx+\int_0^{\pi}\cos(\ell_x+1)x\,dx=$$

$$\begin{aligned}&\cos(\ell_x-1)x=\cos x\cos x\ell_x+\sin x\sin x\ell_x\\ +&\ \cos(\ell_x+1)x=\cos x\cos x\ell_x-\sin x\sin x\ell_x\\ \hline &\cos x\cos x\ell_x=\tfrac{1}{2}[\cos(\ell_x-1)x+\cos(\ell_x+1)x]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\ell_x-1}\sin(\ell_x-1)x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\ell_x+1}\sin(\ell_x+1)x\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{\sin\pi(\ell_x-1)}{\ell_x-1}+\frac{\sin\pi(\ell_x+1)}{\ell_x+1}=\pi\frac{\sin\pi(\ell_x-1)}{\pi(\ell_x-1)}+\pi\frac{\sin\pi(\ell_x+1)}{\pi(\ell_x+1)}=\pi\delta_{\ell_x-1,0}+\pi\delta_{\ell_x+1,0}=\pi\delta_{\ell_x,1}+\pi\delta_{\ell_x,-1}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}k_z\sin 2k_z a\,dk_z=\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{\sin 2ak_z}{4a^2}\Big|_0^{\pi}}_{0}-\frac{k_z\cos 2ak_z}{2a}\Big|_0^{\pi}\Big)=\frac{1}{2}\Big(-\frac{\pi\cos 2\pi a}{2a}+\underbrace{\frac{0\cdot\cos 2\cdot 0a}{2a}}_{0}\Big)=-\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi}k_z\sin k_z a\,dk_z=\pi$$

$$-\vec{k}\frac{4I}{N_xN_yN_z}\frac{N_xaN_yaN_za}{(2\pi)^2\cdot\pi}\frac{1}{a^4}\Big\{2\pi\cdot\pi\cdot\pi(\delta_{\ell_x,1}+\delta_{\ell_x,-1})\delta_{\ell_y,0}+2\pi\cdot\pi\cdot\pi(\delta_{\ell_y,1}+\delta_{\ell_y,-1})\delta_{\ell_x,0}+$$

$$+2\pi\delta_{\ell_x,0}\cdot 2\pi\delta_{\ell_y,0}\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big\}=-\vec{k}\frac{I}{a}\Big\{2\delta_{\ell_y,0}(\delta_{\ell_x,1}+\delta_{\ell_x,-1})+2\delta_{\ell_x,0}(\delta_{\ell_y,1}+\delta_{\ell_y,-1})-\delta_{\ell_x,0}\delta_{\ell_y,0}\Big\}$$

Na kraju biće:

$$\nabla I(\overbrace{n_x-m_x}^{\ell_x},\overbrace{n_y-m_y}^{\ell_y},0-1)=\frac{I}{a}\Big\{\vec{i}\,\frac{2(-1)^{\ell_x}}{\ell_x}\delta_{\ell_y,0}(1-\delta_{\ell_x,0})+\vec{j}\,\frac{2(-1)^{\ell_y}}{\ell_y}\delta_{\ell_x,0}(1-\delta_{\ell_y,0})-$$

$$-\vec{k}\big[2\delta_{\ell_y,0}(\delta_{\ell_x,1}+\delta_{\ell_x,-1})+2\delta_{\ell_x,0}(\delta_{\ell_y,1}+\delta_{\ell_y,-1})-\delta_{\ell_x,0}\delta_{\ell_y,0}\big]\Big\}$$

b/ Koeficijent površinske anihilacije kad u procesu učestvuju zapreminski fononi

Posmatraćemo verovatnoću prelaza u kome se uništava jedan zapreminski magnon, radja jedan površinski magnon i jedan zapreminski fonon ili jedan površinski fonon, pri čemu mora da važi zakon o održanju energije odnosno impulsa. Ovo fizički znači da jedan zapreminski magnon prelazi u površinski uz radjanje jednog zapreminskog ili površinskog fonona, što znači da se jedan deo energije pretvorio u toplotu i da zapreminski namagnetisan kristal prelazi u površinski namagnetisan kristal. Naravno, ovo važi pod uslovom da je energija zapreminskog magnona veća od energije površinskog magnona, a što se može videti iz zakona disperzije.

Hamiltonijan interakcije magnon-fonon u aproksimaciji najbližih suseda dat je izrazom:

$$H_{int} = \sum_{\vec{n}} |\nabla I(\vec{n})| B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}+\vec{q}_3} \left(\hat{\xi}_{\vec{n}+\vec{q}_3} - \hat{\xi}_{\vec{n}} \right) \qquad (1)$$

Osnovnu ulogu u procesu anihilacije zapreminskihh magnona očigledno igra sledeći član hamiltonijana:

$$H_{int} = \sum_{n_1 n_2} |\nabla I(n_1 n_2 0)| B^{+}_{n_1 n_2 0} B_{n_1 n_2 1} \left(\hat{\xi}_{n_1 n_2 1} - \hat{\xi}_{n_1 n_2 0} \right) \qquad (2)$$

Posmatraćemo prelaz iz stanja

$$|n_{\vec{q}}>|n_{\vec{k}}>|n_{k_1 k_2 i\eta}> \qquad (3)$$

u stanje

$$< n_{\vec{q}}+1| < n_{\vec{k}}-1| < n_{k_1 k_2 i\eta}+1| \qquad (4)$$

Na osnovu /2/, /3/ i /4/ amplituda verovatnoće prelaza je:

$$< n_{\vec{q}}+1| < n_{\vec{k}}-1| < n_{k_1 k_2 i\eta}+1| H_{int} |n_{\vec{q}}>|n_{\vec{k}}>|n_{k_1 k_2 i\eta}> \qquad (5)$$

Posle kraćeg računa dobija se:

$$H_{int} = \lambda \sum_{n_1 n_2} \left\{ D_{k'} D_{k''} D_{q} f(1, k''_3) \left[f(1,q) - f(0,q) \right] e^{i(k''_1 - k'_1 - q_1) n_1} e^{i(k''_2 - k'_2 - q_2) n_2} A^{+}_{k'} A_{k''} a^{+}_{q} \right.$$

Veštački ćemo uvući zakon o održanju impulsa za treću komponentu $(k''_3 = i\eta + q_3)$

$$H_{int} = \lambda \left\{ D_{k'} D_{k''} D_{q} f(1, k''_3) \left[f(1,q) - f(0,q) \right] A^{+}_{k'} A_{k''} a^{+}_{q} \delta_{k''_1, k'_1 + q_1} \delta_{k''_2, k'_2 + q_2} \delta_{k''_3, i\eta + q_3} \right. =$$

$$= \lambda D_{k'} D_{\substack{k'_1+q_1 \\ k'_2+q_2 \\ i\eta+q_3}} f(1, k''_3) \left[f(1,q) - f(0,q) \right] A^{+}_{k'} A_{\substack{k'_1+q_1 \\ k'_2+q_2 \\ i\eta+q_3}} a^{+}_{q} N_1 N_2$$

Ovo znači da se uništava jedan zapreminski magnon sa talasnim vektorom $/k_1'+q_1, k_2'+q_2, i\mathcal{H}+q_3$ /, radja se jedan zapreminski fonon sa talasnim vektorom $/q_1, q_2, q_3/$ i radja se jedan površinski magnon sa talasnim vektorom $/k_1', k_2', i\mathcal{H}$ /.

Ako sada predjemo na Blohovski efektivni hamiltonijan biće:

$$H_{ef} = -\frac{S}{2}\sum_{\substack{u_x u_y\\ m_x m_y}} \nabla I(u_x-m_x, u_y-m_y, 0-1)\left(\xi_{u_x,u_y,0}-\xi_{m_x,m_y,1}\right)\cdot 2B^+_{u_x,u_y,0}B_{m_x,m_y,1}$$

$$I(u_x-m_x, u_y-m_y, 0-1) = \frac{2}{N_xN_yN_z}\sum_{k_xk_yk_z} J(k_x,k_y,k_z)\,e^{iak_x(u_x-m_x)+iak_y(u_y-m_y)}\cos ak_z \qquad -\frac{\pi}{a}\le k_x,k_y\le\frac{\pi}{a}, \quad 0\le k_z\le\frac{\pi}{a}$$

$$\nabla I(u_x-m_x, u_y-m_y, 0-1) = \frac{2}{N_xN_yN_z}\sum_{k_xk_yk_z} J(k_x,k_y,k_z)\,e^{iak_x(u_x-m_x)+iak_y(u_y-m_y)}\cdot\left[(i\vec{i}k_x+i\vec{j}k_y)\cos ak_z-\vec{k}k_z\sin ak_z\right]$$

a Boze-operatori kreacije i anihilacije magnona su:

$$B^+_{u_x,u_y,0} = \frac{1}{\sqrt{N_xN_y}}\sum_{q_xq_y} B^+_{q_x,q_y,i\eta}\,e^{-ia(q_xu_x+q_yu_y)}$$

$$B_{m_x,m_y,1} = \sum_{p_xp_yp_z}\sqrt{\frac{2}{N_xN_yN_z\left(1-\frac{I}{\mu'\mathcal{H}}\cos ap_z+\frac{I^2}{4\mu'^2\mathcal{H}^2}\right)}}\,e^{ia(p_xm_x+p_ym_y)}\cdot\left(-\frac{I}{2\mu'\mathcal{H}}\right)\sin ap_z\cdot B_{p_xp_yp_z}$$

dok su pomeraji atoma /operatori/ zapreminskih fonona dati izrazom:

$$\vec{\xi}_{u_x,u_y,0} = \sum_{l\lambda_x\lambda_y\lambda_z}\sqrt{\frac{2}{N_xN_yN_z\left|1+\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}e^{ia\lambda_z}\right|M\omega_l(\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z)}}\left[a^{(l)}_{\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z}e^{ia(\lambda_xu_x+\lambda_yu_y)}+a^{+(l)}_{-\lambda_x,-\lambda_y,-\lambda_z}e^{ia(\lambda_xu_x+\lambda_yu_y)}\right]\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}\sin a\lambda_z\cdot\vec{e}_l(\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z)$$

$$\vec{\xi}_{m_x,m_y,1} = \sum_{l\lambda_x\lambda_y\lambda_z}\sqrt{\frac{\hbar}{N_xN_yN_z\left|1+\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}e^{ia\lambda_z}\right|M\omega_l(\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z)}}\left[a^{(l)}_{\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z}e^{ia(\lambda_xm_x+\lambda_ym_y)}+a^{+(l)}_{-\lambda_x,-\lambda_y,-\lambda_z}e^{ia(\lambda_xm_x+\lambda_ym_y)}\right]\cdot\vec{e}_l(\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z)\cdot\left[\sin a\lambda_z+\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}\sin 2a\lambda_z\right]$$

Ako faktor ispred svih suma obeležimo sa Q onda je:

$$Q = -\frac{S}{2}\frac{2}{N_xN_yN_z}\frac{2}{\sqrt{N_xN_y}}\frac{1}{\sqrt{N_xN_yN_z}}\frac{1}{\sqrt{N_xN_yN_z}}\frac{1}{\sqrt{N_xN_yN_z}}\left(-\frac{I}{2\mu'\mathcal{H}}\right) = \frac{SI}{\mu'\mathcal{H}}\frac{1}{N_x^{6/2}N_y^{6/2}N_z^{5/2}}$$

Hamiltonijan interakcije magnona i zapreminskih fonona je:

$$H = -\frac{S}{2}\sum_{\substack{u_xu_y\\ m_xm_y}}\frac{2}{N_xN_yN_z}\sum_{k_xk_yk_z}J(k_x,k_y,k_z)\,e^{iak_x(u_x-m_x)+iak_y(u_y-m_y)}\cdot\left[(i\vec{i}k_x+i\vec{j}k_y)\cos ak_z-\vec{k}k_z\sin ak_z\right]\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{l\lambda_x\lambda_y\lambda_z}\sqrt{\frac{2}{N_xN_yN_z\left|1+\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}e^{ia\lambda_z}\right|M\omega_l(\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z)}}\left[a^{(l)}_{\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z}e^{ia(\lambda_xu_x+\lambda_yu_y)}+a^{+(l)}_{-\lambda_x,-\lambda_y,-\lambda_z}e^{ia(\lambda_xu_x+\lambda_yu_y)}\right]\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}\sin a\lambda_z\cdot\vec{e}_l(\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z)\right.$$

$$-\sum_{l\lambda_x\lambda_y\lambda_z}\sqrt{\frac{\hbar}{N_xN_yN_z\left|1+\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}e^{ia\lambda_z}\right|M\omega_l(\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z)}}\left[a^{(l)}_{\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z}e^{ia(\lambda_xm_x+\lambda_ym_y)}+a^{+(l)}_{-\lambda_x,-\lambda_y,-\lambda_z}e^{ia(\lambda_xm_x+\lambda_ym_y)}\right]\cdot\vec{e}_l(\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z)\cdot$$

$$\left.\cdot\left[\sin a\lambda_z+\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}\sin 2a\lambda_z\right]\right\}\cdot 2\frac{1}{\sqrt{N_xN_y}}\sum_{q_xq_y}B^+_{q_x,q_y,i\eta}\,e^{-ia(q_xu_x+q_yu_y)}\,.$$

$$\cdot\sum_{p_xp_yp_z}\sqrt{\frac{2}{N_xN_yN_z\left(1-\frac{I}{\mu'\mathcal{H}}\cos ap_z+\frac{I^2}{4\mu'^2\mathcal{H}^2}\right)}}\,e^{ia(p_xm_x+p_ym_y)}\cdot\left(-\frac{I}{2\mu'\mathcal{H}}\right)\sin ap_z\cdot B_{p_xp_yp_z}$$

a množenjem dobijamo četiri dela hamiltonijana:

$$H_I = Q\sum_{\substack{k_xk_yk_z\\ \lambda_x\lambda_y\lambda_z\\ p_xp_yp_z}} J(k_x,k_y,k_z)\left[(i\vec{i}k_x+i\vec{j}k_y)\cos ak_z-\vec{k}k_z\sin ak_z\right]\cdot\sqrt{\frac{\hbar}{\left|1+\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}e^{ia\lambda_z}\right|M\omega_l(\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z)}}\,\cdot$$

$$\sqrt{\frac{2}{1-\frac{I^2}{\mu'\mathcal{H}}\cos ap_z+\frac{I^2}{4\mu'^2\mathcal{H}^2}}}\cdot\vec{e}_l(\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z)\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}\sin a\lambda_z\cdot\sin ap_z\,a^{(l)}_{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}B^+_{q_xq_yi\eta}B_{p_xp_yp_z}\,.$$

$$\cdot \sum_{\substack{u_x u_y \\ m_x m_y}} e^{iau_x(u_x-m_x)+iak_y(u_y-m_y)+ia\lambda_x u_x+ia\lambda_y u_y-iaq_x u_x-iaq_y u_y+iap_x m_x+iap_y m_y}$$

$$e^{iau_x(k_x+\lambda_x-q_x)+iam_x(-k_x+p_x)+iau_y(k_y+\lambda_y-q_y)+iam_y(-k_y+p_y)}$$

$$N_x\delta_{k_x,q_x-\lambda_x} \quad N_x\delta_{k_x,p_x} \quad N_y\delta_{k_y,q_y-\lambda_y} \quad N_y\delta_{k_y,p_y} \qquad \delta_{k_x,q_x-\lambda_x}\delta_{k_x,p_x}=$$

$$N_x^2N_y^2\cdot\delta_{q_x,\lambda_x+p_x}\delta_{k_x,p_x}\cdot\delta_{q_y,\lambda_y+p_y}\cdot\delta_{k_y,p_y}=\sum_{\substack{u_x u_y \\ m_x m_y}} e^{\cdots} \qquad =\delta_{q_x,\lambda_x+p_x}\delta_{k_x,p_x}$$

$$H_I=N_x^2N_y^2Q\sum_{\substack{\lambda_x\lambda_y\lambda_z \\ p_xp_yp_z \\ k_z e}} J(p_xp_yk_z)\left[(i\vec{i}p_x+i\vec{j}p_y)\cos ak_z-\vec{k}k_z\sin ak_z\right]\cdot\sqrt{\frac{\hbar}{\left|1+\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}e^{ia\lambda_z}\right|MW_e(\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z)}}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{2}{1-\frac{I}{\mu'\mathcal{H}}\cos ap_z+\frac{I^2}{4\mu'^2\mathcal{H}^2}}}\cdot\vec{e}_e(\lambda_x\lambda_y\lambda_z)\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}\sin a\lambda_z\sin ap_z\cdot B^+_{\lambda_x+p_x,\lambda_y+p_y,i\eta}\cdot B_{p_x,p_y,p_z}\,a^{(e)}_{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}$$

$$H_{II}=Q\sum_{\substack{\lambda_x\lambda_y\lambda_z \\ p_xp_yp_z \\ k_xk_yk_z \\ q_xq_y e}}\vec{e}_e(\lambda_x\lambda_y\lambda_z)J(k_xk_yk_z)\left[i(k_x\vec{i}+k_y\vec{j})\cos ak_z-\vec{k}k_z\sin ak_z\right]\cdot\sqrt{\frac{\hbar}{\left|1+\frac{\Lambda}{\Lambda_0}e^{ia\lambda_z}\right|MW_e(\lambda_x\lambda_y\lambda_z)}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}\sin a\lambda_z\cdot\sqrt{\frac{2}{1-\frac{I}{\mu'\mathcal{H}}\cos ap_z+\frac{I^2}{4\mu'^2\mathcal{H}^2}}}\sin ap_z\cdot B^+_{q_xq_y i\eta}B_{p_xp_yp_z}a^{+(e)}_{-\lambda_x,-\lambda_y,\lambda_z}\cdot\sum_{\substack{u_x u_y \\ m_x m_y}}e^{\cdots}$$

$$S=\sum_{\substack{u_x u_y \\ m_x m_y}}e^{iau_x(k_x+\lambda_x-q_x)+iau_y(k_y+\lambda_y-q_y)+iam_x(-k_x+p_x)+iam_y(-k_y+p_y)}=N_x^2N_y^2\delta_{k_x,p_x}\delta_{q_x,p_x+\lambda_x}\delta_{k_y,p_y}\delta_{q_y,p_y+\lambda_y}$$

$$H_{II}=N_x^2N_y^2Q\sum_{\substack{\lambda_x\lambda_y\lambda_z \\ p_xp_yp_z \\ k_z e}}\vec{e}_e(\lambda_x\lambda_y\lambda_z)J(p_x,p_y,k_z)\left[i(p_x\vec{i}+p_y\vec{j})\cos ak_z-\vec{k}k_z\sin ak_z\right]\cdot\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}\sin a\lambda_z\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{\hbar}{\left|1+\frac{\Lambda}{\Lambda_0}e^{ia\lambda_z}\right|MW_e(\lambda_x\lambda_y\lambda_z)}}\cdot\sqrt{\frac{2}{1-\frac{I}{\mu'\mathcal{H}}\cos ap_z+\frac{I^2}{4\mu'^2\mathcal{H}^2}}}\cdot\sin ap_z\,B^+_{p_x+\lambda_x,p_y+\lambda_y,i\eta}B_{p_xp_yp_z}a^{+(e)}_{-\lambda_x,-\lambda_y,\lambda_z}$$

$$H_{III}=-Q\sum_{\substack{\lambda_x\lambda_y\lambda_z \\ p_xp_yp_z \\ k_xk_yk_z \\ q_xq_y e}}\vec{e}_e(\lambda_x\lambda_y\lambda_z)J(k_xk_yk_z)\left[i(k_x\vec{i}+k_y\vec{j})\cos ak_z-\vec{k}k_z\sin ak_z\right]\cdot\sqrt{\ }\cdot\sqrt{\ }\cdot\left[\sin a\lambda_z+\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}\sin 2a\lambda_z\right]$$

$$\cdot\sin ap_z\,B^+_{q_xq_y i\eta}B_{p_xp_yp_z}\cdot\sum_{\substack{u_x u_y \\ m_x m_y}}e^{\cdots}$$

$$S=\sum_{\substack{u_x u_y \\ m_x m_y}}e^{iau_x(k_x-q_x)+iau_y(k_y-q_y)+iam_x(-k_x+\lambda_x+p_x)+iam_y(-k_y+\lambda_y+p_y)}$$

$$N_x\delta_{q_x,k_x} \quad N_y\delta_{q_y,k_y} \quad N_x\delta_{p_x,k_x-\lambda_x} \quad N_y\delta_{p_y,k_y-\lambda_y}$$

$$H_{III}=-QN_x^2N_y^2\sum_{\substack{\lambda_x\lambda_y\lambda_z \\ p_xp_yp_z \\ k_z e}}\vec{e}_e(\lambda_x\lambda_y\lambda_z)J(\lambda_x+p_x,\lambda_y+p_y,k_z)\left\{i\left[\vec{i}(\lambda_x+p_x)+\vec{j}(\lambda_y+p_y)\right]\cos ak_z-\vec{k}k_z\sin ak_z\right\}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\ }\cdot\sqrt{\ }\cdot[\quad]\sin ap_z\,B^+_{p_x+\lambda_x,p_y+\lambda_y,i\eta}B_{p_xp_yp_z}a^{(e)}_{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}$$

$$H_{IV}=-QN_x^2N_y^2\sum_{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}\cdots\ a^{+(e)}_{-\lambda_x,-\lambda_y,\lambda_z}$$

Za početno stanje je:

$$|i> = |1_{p_x p_y p_z}> |0_{\alpha_x+p_x, \alpha_y+p_y, i\eta}> |n_{\alpha_x \alpha_y \alpha_z}>$$

a konačno stanje je dato u obliku:

$$<f| = <0_{p_x p_y p_z}| < 1_{\alpha_x+p_x, \alpha_y+p_y, i\eta}| < (n-1)_{\alpha_x \alpha_y \alpha_z}|$$

$$B^+_{\alpha_x+p_x, \alpha_y+p_y, i\eta} \quad B_{p_x p_y p_z} \quad a^{(e)}_{\alpha_x \alpha_y \alpha_z} = \sqrt{n_{\alpha_x \alpha_y \alpha_z}}$$

$$a^{+(e)}_{-\alpha_x, -\alpha_y, \alpha_z} = \sqrt{n_{\alpha_x \alpha_y \alpha_z} + 1}$$

Skalarnim množenjem vektora dobijamo:

$$\vec{e}_e(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)[i(\vec{i} p_x + \vec{j} p_y)\cos a k_z - \vec{k} k_z \sin a k_z] = i(p_x \sin\theta\cos\varphi + p_y \sin\theta\sin\varphi)\cos a k_z -$$
$$- k_z \cos\theta \sin a k_z$$

$$\vec{e}_e = \frac{\alpha_x}{\alpha}\vec{i} + \frac{\alpha_y}{\alpha}\vec{j} + \frac{\alpha_z}{\alpha}\vec{k}, \quad \frac{\alpha_x}{\alpha} = \sin\theta\cos\varphi, \quad \frac{\alpha_y}{\alpha} = \sin\theta\sin\varphi$$

$$\frac{\alpha_z}{\alpha} = \cos\theta$$

$$\vec{e}_e(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)[i(\vec{i}(\alpha_x+p_x) + \vec{j}(\alpha_y+p_y))\cos a k_z - \vec{k} k_z \sin a k_z] =$$
$$= i[(\alpha_x+p_x)\sin\theta\cos\varphi + (\alpha_y+p_y)\sin\theta\sin\varphi]\cos a k_z - k_z\cos\theta\sin a k_z =$$
$$= i[p_x \sin\theta\cos\varphi + p_y\sin\theta\sin\varphi + \alpha\sin^2\theta]\cos a k_z - k_z\cos\theta\sin a k_z$$

$$|\overbrace{H_I + H_{III}}^{O}|^2 = (\sqrt{n})^2(\sqrt{\ })^2(\sqrt{\ })^2\{R_e^2 O + I_m^2 O\}$$

Izvršićemo dijagonalizaciju hamiltonijana:

$$\underbrace{H_I + H_{III}}_{F\cdot O} = F\{[i(p_x\sin\theta\cos\varphi + p_y\sin\theta\sin\varphi)\cos a k_z - k_z\cos\theta\sin a k_z] J_p \frac{\Lambda}{\Lambda_0^!}\sin a\alpha_z \sin a p_z -$$
$$-[i(p_x\sin\theta\cos\varphi + p_y\sin\theta\sin\varphi + \alpha\sin^2\theta)\cos a k_z - k_z\cos\theta\sin a k_z] J_{\alpha p}\sin a p_z\cdot\left(\sin a\alpha_z + \frac{\Lambda}{\Lambda_0^!}\sin 2a\alpha_z\right)\}$$

$$|H_I + H_{III}|^2 = |F|^2(R_e^2 O + I_m^2 O) \qquad J_p = J(p_x, p_y, p_z), \quad J_{\alpha p} = J(\alpha_x + p_x, \alpha_y + p_y, k_z)$$

$$R_e O = -J_p k_z \frac{\Lambda}{\Lambda_0^!}\cos\theta\sin a k_z \sin a\alpha_z \sin a p_z + J_{\alpha p} k_z\cos\theta\sin a k_z\sin a p_z\left(\sin a\alpha_z + \frac{\Lambda}{\Lambda_0^!}\sin 2a\alpha_z\right)$$

$$I_m O = J_p\frac{\Lambda}{\Lambda_0^!}(p_x\sin\theta\cos\varphi + p_y\sin\theta\sin\varphi)\cos a k_z \sin a\alpha_z\sin a p_z -$$
$$- J_{\alpha p}(p_x\sin\theta\cos\varphi + p_y\sin\theta\sin\varphi + \alpha\sin^2\theta)\cos a k_z\sin a p_z\left(\sin a\alpha_z + \frac{\Lambda}{\Lambda_0^!}\sin 2a\alpha_z\right)$$

Aproksimacija $a\alpha_z \ll 1$

$$R_e O = -J_p k_z\frac{\Lambda}{\Lambda_0^!}(a\alpha_z)\cos\theta\sin a k_z\sin a p_z + J_{\alpha p}k_z(a\alpha_z)\left(1 + 2\frac{\Lambda}{\Lambda_0^!}\right)\cos\theta\sin a k_z\sin a p_z$$

$$I_m O = J_p\frac{\Lambda}{\Lambda_0^!}(a\alpha_z)\cos a k_z\sin a p_z(p_x\sin\theta\cos\varphi + p_y\sin\theta\sin\varphi) -$$
$$- J_{\alpha p}(a\alpha_z)\left(1 + \frac{2\Lambda}{\Lambda_0^!}\right)(p_x\sin\theta\cos\varphi + p_y\sin\theta\sin\varphi)\cos a k_z\sin a p_z$$

Uzećemo aproksimaciju $\mathcal{J}_{\perp p} \approx \mathcal{J}_p$:

$$R_e O = \mathcal{J}_p k_z (a\lambda_z) \cos\theta \sin a k_z \sin a p_z \left(1 + \frac{2\Lambda}{\Lambda_0'} - \frac{\Lambda}{\Lambda_0'}\right) = \mathcal{J}_p k_z (a\lambda_z)\left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda_0'}\right) \cos\theta \sin a k_z \sin a p_z$$

U $I_m O$ zanemaren je član $\lambda \sin^2\theta$, jer se množi sa $a\lambda_z$ te je ta mala veličina drugog reda $\sim a(a\lambda)^2$.

$$I_m O = \mathcal{J}_p (a\lambda_z)(p_x \sin\theta \cos\varphi + p_y \sin\theta \sin\varphi) \cos a k_z \sin a p_z \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0'} - 1 - 2\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}\right) =$$

$$= -\mathcal{J}_p (a\lambda_z)(p_x \sin\theta \cos\varphi + p_y \sin\theta \sin\varphi) \cos a k_z \sin a p_z \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda_0'}\right)$$

$$R_e^2 O = \mathcal{J}_p^2 k_z^2 (a\lambda_z)^2 \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda_0'}\right)^2 \cos^2\theta \sin^2 a k_z \sin^2 a p_z$$

$$I_m^2 O = \mathcal{J}_p^2 (a\lambda_z)^2 \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda_0'}\right)^2 (p_x \cos\varphi + p_y \sin\varphi)^2 \sin^2\theta \cos^2 a k_z \sin^2 a p_z$$

Sada pišemo :

$$|H_I + H_{III}|^2 = |F|^2 \mathcal{J}_p^2 (a\lambda_z)^2 \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda_0'}\right)^2 \sin^2 a p_z \left[k_z^2 \cos^2\theta \sin^2 a k_z + (p_x \cos\varphi + p_y \sin\varphi)^2 \cdot \sin^2\theta \cos^2 a k_z\right]$$

Ispitajmo rešivost: $\omega_{zapr.} = \mu\mathcal{H} + SIa^2 (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$

$\omega_{povr.} = \mu\mathcal{H} + SIa^2 \left(p_x^2 + p_y^2 - \frac{\mathcal{H}^2}{a^2}\right)$

$$\hbar c\lambda + \mu\mathcal{H} + SIa^2 (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \mu\mathcal{H} + SIa^2 \left[(p_x + \lambda_x)^2 + (p_y + \lambda_y)^2 - \frac{\mathcal{H}^2}{a^2}\right] =$$

$$= SIa^2 \left(p_x^2 + p_y^2 - \frac{\mathcal{H}^2}{a^2} + \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + 2\lambda_x p_x + 2\lambda_y p_y\right)$$

$$\hbar c\lambda + SIa^2 p_z^2 = SIa^2 \left(\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + 2\lambda_x p_x + 2\lambda_y p_y - \frac{\mathcal{H}^2}{a^2}\right)$$

$$\hbar c\lambda + SIa^2 \left[p_z^2 - \lambda_x^2 - \lambda_y^2 + \frac{\mathcal{H}^2}{a^2} - 2\lambda_x p_x - 2\lambda_y p_y\right] = 0$$

$$\lambda_x = \lambda \sin\theta \cos\varphi, \quad \lambda_y = \lambda \sin\theta \sin\varphi, \quad \lambda_z = \cos\theta$$

$$\hbar c\lambda + SIa^2 \left[p_z^2 - \lambda^2 \sin^2\theta + \frac{\mathcal{H}^2}{a^2} - 2\lambda \sin\theta (p_x \cos\varphi + p_y \sin\varphi)\right] = 0$$

$$SIa^2 \sin^2\theta \cdot \lambda^2 + \left[2SIa^2 \sin\theta (p_x \cos\varphi + p_y \sin\varphi) - \hbar c\right]\lambda - SI\mathcal{H}^2 - SIa^2 p_z^2 = 0$$

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

$$A = SIa^2 \sin^2\theta, \quad B = 2SIa^2 \sin\theta (p_x \cos\varphi + p_y \sin\varphi) - \hbar c, \quad C = -SI\mathcal{H}^2 - SIa^2 p_z^2$$

$$\lambda_1 = \frac{\hbar c - 2SIa^2 \sin\theta (p_x \cos\varphi + p_y \sin\varphi)}{2SIa^2 \sin^2\theta} +$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{\hbar c - 2SIa^2 \sin\theta (p_x \cos\varphi + p_y \sin\varphi)}{2SIa^2 \sin^2\theta}\right)^2 + \frac{SI\mathcal{H}^2 + SIa^2 p_z^2}{SIa^2 \sin^2\theta}}$$

$$\lambda_1 = \frac{\hbar c - 2SIa^2 \sin\theta (p_x \cos\varphi + p_y \sin\varphi)}{2SIa^2 \sin^2\theta} +$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{\frac{\hbar c}{2SIa^2} - \sin\theta (p_x \cos\varphi + p_y \sin\varphi)}{\sin^2\theta}\right)^2 + \frac{\frac{\mathcal{H}^2}{a^2} + p_z^2}{\sin^2\theta}}$$

$$\alpha_1 = \frac{\hbar c}{2SIa^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{p_x\cos\varphi + p_y\sin\varphi}{\sin\theta} + \sqrt{\left(\frac{\hbar c}{2SIa^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{p_x\cos\varphi + p_y\sin\varphi}{\sin\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{H}^2}{a^2} + p_z^2\right)\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}}$$

$$\alpha_1 = \frac{-B + (B^2 - 4AC)^{1/2}}{2A} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{-B - (B^2 - 4AC)^{1/2}}{2A}$$

$$\delta(A\alpha^2 + B\alpha + C) = \frac{\delta(\alpha - \alpha_1)}{|2A\alpha_1 + B|} + \frac{\delta(\alpha - \alpha_2)}{|2A\alpha_2 + B|}$$

$$M = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |H_{I} + H_{III}|^2\, \delta(A\alpha^2 + B\alpha + C)\, d^3\alpha =$$

$$= \int_0^{\infty}\iint\limits_{(\text{uglovi})} |H_{I} + H_{III}|^2\, \delta(A\alpha^2 + B\alpha + C)\, \alpha^2 \sin\theta\, d\alpha\, d\theta\, d\varphi$$

$$M = \iiint |H_{I} + H_{III}|^2 \frac{\delta(\alpha - \alpha_1)}{|2A\alpha_1 + B|}\, d^3\alpha + \iiint |H_{I} + H_{III}|^2 \frac{\delta(\alpha - \alpha_2)}{|2A\alpha_2 + B|}\, d^3\alpha = M_1 + M_2$$

Biće $M_2 = 0$ jer je $\alpha_2 < 0$:

$$M_1 = \int_0^{\infty}\iint\limits_{(\text{uglovi})} |H_{I} + H_{III}|^2 \frac{\delta(\alpha - \alpha_1)}{|2A\alpha_1 + B|}\, \alpha^2 \sin\theta\, d\alpha\, d\theta\, d\varphi$$

Odredimo granice za ugao θ : $\alpha_1 = \frac{\hbar c}{2SIa^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{p_x\cos\varphi + p_y\sin\varphi}{\sin\theta} +$

$$+ \left[\left(\frac{\hbar c}{2SIa^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{p_x\cos\varphi + p_y\sin\varphi}{\sin\theta}\right)^2 + \frac{\frac{\mathcal{H}^2}{a^2} + p_z^2}{\sin^2\theta}\right]^{1/2}$$

$$\frac{\hbar c}{2SIa^2} = \bar{A} \quad , \quad p_x\cos\varphi + p_y\sin\varphi = \bar{B} \quad , \quad \frac{\mathcal{H}^2}{a^2} + p_z^2 = \bar{C}$$

$$\underline{A > 0,\ C > 0}$$

$$\frac{\bar{A}}{\sin^2\theta} - \frac{\bar{B}}{\sin\theta} + \left[\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\bar{A}}{\sin\theta} - B\right)^2 + \frac{\bar{C}}{\sin^2\theta}\right]^{1/2}$$

a/ Uzimanjem $\alpha_1 > 0$ **odmah se vidi da važi za** $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

b/ $\alpha_1 \leq \alpha_{max}$

$$\frac{\bar{A}}{\sin^2\theta} - \frac{\bar{B}}{\sin\theta} + \left[\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\bar{A}}{\sin\theta} - \bar{B}\right)^2 + \frac{\bar{C}}{\sin^2\theta}\right]^{1/2} \leq \alpha_{max}$$

$$X + [X^2 + Y^2]^{1/2} \leq \alpha_{max} \ ; \ X = \frac{\bar{A}}{\sin^2\theta} - \frac{\bar{B}}{\sin\theta} \ , \ Y^2 = \frac{\bar{C}}{\sin^2\theta}$$

$$[X^2 + Y^2]^{1/2} \leq \alpha_{max} - X$$

$$z = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$X^2 + Y^2 \leq \alpha_{max}^2 + X^2 - 2\alpha_{max}X \qquad X = Az^2 - Bz \ ; \ Y = Cz^2$$

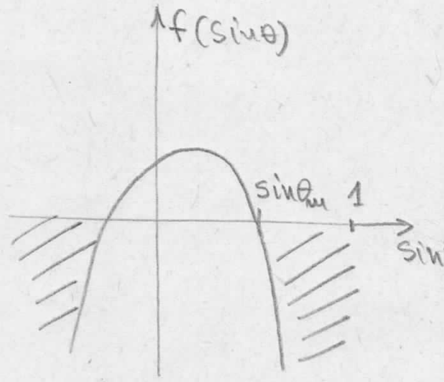
$$Y^2 + 2\alpha_{max} X - \alpha_{max}^2 \leq 0$$

$$C z^2 + 2\alpha_{max}(A z^2 - B z) - \alpha_{max}^2 \leq 0$$

$$(C + 2\alpha_{max} A) z^2 - 2B\alpha_{max} z - \alpha_{max}^2 \leq 0$$

$$\left(C + \frac{2\pi\sqrt{3}}{a} A\right) z^2 - \frac{2\pi\sqrt{3}}{a} B z - \frac{3\pi^2}{a^2} \leq 0 \quad ; C, A \geq 0$$

$$-\frac{3\pi}{a^2}\sin^2\theta - \frac{2\pi\sqrt{3}}{a} B \sin\theta + \left(C + \frac{2\pi\sqrt{3}}{a} A\right) \leq 0$$



$$(\sin\theta)_{1/2} = \frac{-\frac{2\pi\sqrt{3}}{a} B \pm \sqrt{\frac{12\pi^2}{a^2} B^2 + \frac{12\pi^2}{a^2}\left(C + \frac{2\pi\sqrt{3}}{a} A\right)}}{\frac{6\pi^2}{a^2}}$$

$$(\sin\theta)_{1/2} = \frac{-\frac{2\pi\sqrt{3}}{a}\bar{B} \pm \frac{2\pi\sqrt{3}}{a}\sqrt{\bar{B}^2 + \bar{C} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{a}\bar{A}}}{\frac{6\pi^2}{a^2}}$$

$$(\sin\theta)_{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{a}{\pi}\left(-\bar{B} \pm \sqrt{\bar{B}^2 + C + \frac{2\pi\sqrt{3}}{a}\bar{A}}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{a}{\pi}\left(-\bar{B} + \sqrt{\bar{B}^2 + \bar{C} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{a}\bar{A}}\right) \leq \sin\theta \leq 1$$

$$\bar{B}_{max} = \frac{\pi}{a}, \quad \bar{C} = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\varkappa^2}{a^2}, \quad \bar{A}\cdot\frac{2\pi\sqrt{3}}{a} = \frac{2\pi\sqrt{3}\,\hbar c}{2SIa^3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{a}{\pi}\left(-\frac{\pi}{a} + \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\varkappa^2}{a^2} + \frac{2\pi\sqrt{3}\,\hbar c}{2SIa^3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-1 + \sqrt{2 + \frac{\varkappa^2}{\pi^2} + \frac{2\sqrt{3}\,\hbar c}{2\pi SIa}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-1 + \sqrt{2 + \frac{\varkappa^2}{\pi^2} + \frac{\sqrt{3}\,\hbar c}{\pi SIa}}\right)$$

$$M_1 = \iint\limits_{(uglovi)} \frac{|H_1(\alpha_1) + H_{III}(\alpha_1)|^2}{|2A\alpha_1 + B|}\alpha_1^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$M_1 = \int_0^{2\pi}\int_{\theta_m}^{\pi/2} \frac{|F|^2 J_p^2 (a\alpha_1\cos\theta)^2 \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right)^2}{|2A\alpha_1 + B|}\sin^2 ap_z \left[K_z^2\cos^2\theta\sin^2 ak_z + (p_x\cos\varphi + p_y\sin\varphi)^2\sin^2\theta\cos^2 ak_z\right] \cdot \alpha_1^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$A = SIa^2\sin^2\theta, \quad B = 2SIa^2\sin\theta(p_x\cos\varphi + p_y\sin\varphi) - \hbar c$$

$$\alpha_1 = \frac{\bar{A}}{\sin^2\theta} - \frac{\bar{B}}{\sin\theta} + \left[\left(\frac{\bar{A}}{\sin^2\theta} - \frac{\bar{B}}{\sin\theta}\right)^2 + \frac{\frac{\varkappa^2}{a^2} + p_z^2}{\sin^2\theta}\right]^{1/2}$$

$$\bar{A} = \frac{\hbar c}{2SIa^2}, \quad \bar{B} = p_x\cos\varphi + p_y\sin\varphi$$

$$\theta_m = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{a}{\pi}\left(-\bar{B} + \sqrt{\bar{B}^2 + \bar{C} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{a}\bar{A}}\right)$$

c/ Koeficijent površinske anihilacije kad u procesu učestvuju površinski fononi

Polazeći od efektivnog hamiltonijana u Blohovoj aproksimaciji:

$$H = -\frac{S}{2}\Gamma_{0-1} I_{0-1}(\xi_0 - \xi_1)\cdot 2B_0^+ B_1$$

i uzimajući sada u obzir površinske fonone sledi:

$$\vec{\xi}_{u_x,u_y,0} = \sum_{\ell k_x k_y} \sqrt{\frac{\hbar(1-e^{-2\varsigma})}{N_1 N_2 M\omega_\ell(k_x,k_y,i\varsigma)}}\cdot\left[a^{(\ell)}_{k_x,k_y,i\varsigma}\, e^{ia(k_x u_x + k_y u_y)} + a^+_{-k_x,-k_y,i\varsigma}\, e^{ia(k_x u_x + k_y u_y)}\right]\vec{e}_\ell(k_x,k_y,i\varsigma)$$

$$\vec{\xi}_{m_x,m_y,1} = \sum_{\ell k_x k_y} \sqrt{\frac{\hbar(1-e^{-2\varsigma})}{N_1 N_2 M\omega_\ell(k_x,k_y,i\varsigma)}}\cdot\left[a^{(\ell)}_{k_x,k_y,i\varsigma}\, e^{ia(k_x m_x + k_y m_y)} + a^+_{-k_x,-k_y,i\varsigma}\, e^{ia(k_x m_x + k_y m_y)}\right]\cdot\vec{e}_\ell(k_x,k_y,i\varsigma)\, e^{-\varsigma}$$

$$H = -\frac{S}{2}\frac{2}{N_x N_y N_z}\sum_{\substack{u_x u_y\\ m_x m_y}}\sum_{k_x k_y k_z} J(k_x,k_y,k_z)\, e^{iak_x(u_x-m_x)+iak_y(u_y-m_y)}\cdot\left[(i\vec{i}k_x + i\vec{j}k_y)\cos ak_z - \vec{k}k_z\sin ak_z\right]\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{\ell k_x k_y}\sqrt{\frac{\hbar(1-e^{-2\varsigma})}{N_1 N_2 M\omega_\ell(k_x,k_y,i\varsigma)}}\cdot\left[a^{(\ell)}_{k_x,k_y,i\varsigma}\, e^{ia(k_x u_x + k_y u_y)} + a^+_{-k_x,-k_y,i\varsigma}\, e^{ia(k_x u_x + k_y u_y)}\right]\cdot\vec{e}_\ell(k_x,k_y,i\varsigma) -\right.$$

$$\left.-\sum_{\ell k_x k_y}\sqrt{\frac{\hbar(1-e^{-2\varsigma})}{N_1 N_2 M\omega_\ell(k_x,k_y,i\varsigma)}}\cdot\left[a^{(\ell)}_{k_x,k_y,i\varsigma}\, e^{ia(k_x m_x + k_y m_y)} + a^+_{-k_x,-k_y,i\varsigma}\, e^{ia(k_x m_x + k_y m_y)}\right]\cdot\vec{e}_\ell(k_x,k_y,i\varsigma)\, e^{-\varsigma}\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{2}{\sqrt{N_x N_y}}\sum_{q_x q_y} B^+_{q_x,q_y,i\eta}\, e^{-ia(q_x u_x + q_y u_y)}\sum_{p_x p_y p_z}\sqrt{\frac{2}{N_x N_y N_z\left(1-\frac{I}{\mu'\mathcal{H}}\cos ap_z + \frac{I^2}{4\mu'^2\mathcal{H}^2}\right)}}\cdot$$

$$\cdot e^{ia(p_x m_x + p_y m_y)}\cdot\left(-\frac{I}{2\mu'\mathcal{H}}\right)\cdot\sin ap_z\cdot B_{p_x p_y p_z}$$

Ovde će faktor ispred svih suma biti:

$$Q = -\frac{S}{2}\frac{2}{N_x N_y N_z}\sqrt{\frac{\hbar(1-e^{-2\varsigma})}{N_1 N_2 M}}\cdot\frac{2}{\sqrt{N_x N_y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{N_x N_y N_z}}\cdot\left(-\frac{I}{2\mu'\mathcal{H}}\right) = \frac{SI}{\mu'\mathcal{H}}\frac{1}{N_x^2 N_y^2 N_z^{3/2}}\cdot\sqrt{\frac{\hbar(1-e^{-2\varsigma})}{N_1 N_2 M}}$$

Analognim postupkom tražićemo i ovde totalni hamiltonijan interakcije magnona sa površinskim fononima, rastavljajući ga prethodno na pojedine delove:

$$H_I = N_x^2 N_y^2 Q\sum_{\substack{p_x p_y p_z\\ k_x k_y i\varsigma\\ k_z \ell}}\vec{e}_\ell(k_x,k_y,i\varsigma)\, J(p_x,p_y,k_z)\left[(i\vec{i}p_x + i\vec{j}p_y)\cos ak_z - \vec{k}k_z\sin ak_z\right]\cdot\sqrt{\frac{1}{\omega_\ell(k_x,k_y,i\varsigma)}}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{2}{1-\frac{I}{\mu'\mathcal{H}}\cos ap_z + \frac{I^2}{4\mu'^2\mathcal{H}^2}}}\,\sin ap_z\cdot\underbrace{B^+_{k_x+p_x,k_y+p_y,i\eta}\, B_{p_x,p_y,p_z}\, a^{(\ell)}_{k_x,k_y,i\varsigma}}_{\sqrt{n_{k_x,k_y,i\varsigma}}}$$

$$H_{II} = N_x^2 N_y^2 Q\sum_{\substack{p_x p_y p_z\\ k_x k_y i\varsigma\\ k_z \ell}}\vec{e}_\ell(k_x,k_y,i\varsigma)\, J(p_x,p_y,k_z)\left[\quad\right]\cdot\sqrt{\ }\cdot\sqrt{\ }\cdot\sin ap_z\sqrt{n_{k_x,k_y,i\varsigma}+1}$$

$$H_{\underline{III}} = -N_x^2 N_y^2 Q \sum_{\substack{p_x p_y p_z \\ \lambda_x \lambda_y i \varsigma \\ k_z l}} \vec{e}_l(\lambda_x, \lambda_y, i\varsigma) J(\lambda_x + p_x, \lambda_y + p_y, k_z) \left\{ i \left[\vec{i}(\lambda_x + p_x) + \vec{j}(\lambda_y + p_y) \right] \cos a k_z - \vec{k} k_z \sin a k_z \right\} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{} \cdot \sqrt{} \cdot e^{-\varsigma} \sin a p_z \sqrt{n_{\lambda_x, \lambda_y, i\varsigma}}$$

$$H_{\underline{IV}} = -N_x^2 N_y^2 Q \sum_{\substack{p_x p_y p_z \\ \lambda_x \lambda_y i \varsigma \\ k_z l}} \vec{e}_l(\lambda_x, \lambda_y, i\varsigma) J(\lambda_x + p_x, \lambda_y + p_y, k_z) \left\{ \quad \right\} \cdot \sqrt{} \cdot \sqrt{} \cdot e^{-\varsigma} \sin a p_z \sqrt{n_{\lambda_x \lambda_y i\varsigma} + 1}$$

$$H_{\underline{I}} + H_{\underline{III}} = F \Big\{ \left[i(p_x \sin\theta \cos\varphi + p_y \sin\theta \sin\varphi) \cos a k_z - i\varsigma k_z \sin a k_z \right] J(p_x, p_y, k_z) \sin a p_z -$$

$$- \left[i(p_x \sin\theta \cos\varphi + p_y \sin\theta \sin\varphi + \lambda \sin^2\theta) \cos a k_z - i\varsigma k_z \sin a k_z \right] J(\lambda_x + p_x, \lambda_y + p_y, k_z) e^{-\varsigma} \sin a p_z \Big\}$$

$$|H_{\underline{I}} + H_{\underline{III}}|^2 = (H_{\underline{I}} + H_{\underline{III}}) \cdot (H_{\underline{I}} + H_{\underline{III}})^* \quad , \quad \overbrace{|H_{\underline{I}} + H_{\underline{III}}|}^{0}{}^2 = |F|^2 \left\{ I_{m_1}^2 0 + I_{m_2}^2 0 \right\}$$

$$I_{m_1} 0 = J(p_x, p_y, k_z) \sin a p_z (p_x \sin\theta \cos\varphi + p_y \sin\theta \sin\varphi) \cos a k_z - J(p_x, p_y, k_z) \sin a p_z \cdot \varsigma k_z \sin a k_z$$

$$I_{m_2} 0 = -J(\lambda_x + p_x, \lambda_y + p_y, k_z) e^{-\varsigma} \sin a p_z (p_x \sin\theta \cos\varphi + p_y \sin\theta \sin\varphi + \lambda \sin^2\theta) \cos a k_z +$$

$$+ J(\lambda_x + p_x, \lambda_y + p_y, k_z) e^{-\varsigma} \cdot \sin a p_z \cdot \varsigma k_z \sin a k_z$$

$$I_{m_1}^2 0 = J^2(p_x, p_y, k_z) \sin^2 a p_z \cos^2 a k_z (p_x \sin\theta \cos\varphi + p_y \sin\theta \sin\varphi)^2 + J^2(p_x, p_y, k_z) \sin^2 a p_z \cdot \varsigma^2 k_z^2 \sin^2 a k_z -$$

$$- 2 J^2(p_x, p_y, k_z) \sin^2 a p_z \cdot \varsigma k_z \sin a k_z \cos a k_z (p_x \sin\theta \cos\varphi + p_y \sin\theta \sin\varphi)$$

$$I_{m_2}^2 0 = J^2(\lambda_x + p_x, \lambda_y + p_y, k_z) e^{-2\varsigma} \sin^2 a p_z \cos^2 a k_z (p_x \sin\theta \cos\varphi + p_y \sin\theta \sin\varphi + \lambda \sin^2\theta)^2 +$$

$$+ J^2(\lambda_x + p_x, \lambda_y + p_y, k_z) e^{-2\varsigma} \sin^2 a p_z \cdot \varsigma^2 k_z^2 \sin^2 a k_z -$$

$$- 2 J^2(\lambda_x + p_x, \lambda_y + p_y, k_z) e^{-2\varsigma} \sin^2 a p_z \cdot \varsigma k_z \sin a k_z \cos a k_z (p_x \sin\theta \cos\varphi + p_y \sin\theta \sin\varphi + \lambda \sin^2\theta)$$

$$I_{m_1}^2 0 + I_{m_2}^2 0 = J^2(p_x, p_y, k_z) \sin^2 a p_z \cos^2 a k_z (p_x \sin\theta \cos\varphi + p_y \sin\theta \sin\varphi)^2 + J^2(p_x, p_y, k_z) \sin^2 a p_z \cdot \varsigma^2 k_z^2 \sin^2 a k_z -$$

$$- J^2(p_x, p_y, k_z) \varsigma k_z \sin^2 a p_z \sin 2a k_z (p_x \sin\theta \cos\varphi + p_y \sin\theta \sin\varphi) +$$

$$+ J^2(\lambda_x + p_x, \lambda_y + p_y, k_z) e^{-2\varsigma} \sin^2 a p_z \cos^2 a k_z (p_x \sin\theta \cos\varphi + p_y \sin\theta \sin\varphi + \lambda \sin^2\theta)^2 +$$

$$+ J^2(\lambda_x + p_x, \lambda_y + p_y, k_z) e^{-2\varsigma} \sin^2 a p_z \cdot \varsigma^2 k_z^2 \sin^2 a k_z - J^2(\lambda_x + p_x, \lambda_y + p_y, k_z) e^{-2\varsigma} \varsigma k_z \sin 2a k_z \sin^2 a p_z \cdot$$

$$\cdot (p_x \sin\theta \cos\varphi + p_y \sin\theta \sin\varphi + \lambda \sin^2\theta)$$

Za nalaženje koeficijenta anihilacije magnona uz učešće zapreminskih ili površinskih fonona potrebna je verovatnoća prelaza:

$$|n_{\vec{k}}\rangle|n_{\vec{k}'}\rangle|n_{\vec{q}}\rangle \equiv |n_{\vec{k}}\ \text{zapr. magnon}\rangle|n_{\vec{k}'}\ \text{površ. magnon}\rangle|n_{\vec{q}}\ \text{površ. fonon}\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |n_{\vec{k}}-1\rangle|n_{\vec{k}'}+1\rangle|n_{\vec{q}}+1\rangle$$

$$|n_{\vec{k}}\rangle|n_{\vec{k}''}\rangle|n_{\vec{q}'}\rangle \equiv |n_{\vec{k}}\ \text{zapr. m.}\rangle|n_{\vec{k}''}\ \text{površ. m.}\rangle|n_{\vec{q}'}\ \text{zapr. fonon}\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |n_{\vec{k}}-1\rangle|n_{\vec{k}''}+1\rangle|n_{\vec{q}'}+1\rangle$$

Koeficijent površinske anihilacije neka je:

$$V_p = \langle n_{\vec{q}}+1|\langle n_{\vec{k}'}+1|\langle n_{\vec{k}}-1|\ H^{I}_{int}\ |n_{\vec{k}}\rangle|n_{\vec{k}'}\rangle|n_{\vec{q}}\rangle$$

a koeficijent zapreminske anihilacije je:

$$V_z = \langle n_{\vec{q}'}+1|\langle n_{\vec{k}''}+1|\langle n_{\vec{k}}-1|\ H^{II}_{int}\ |n_{\vec{k}}\rangle|n_{\vec{k}''}\rangle|n_{\vec{q}'}\rangle$$

$$H_{int} = \sum_{\vec{u}} \nabla I_{\vec{u},\vec{u}+\vec{a}_3}\left(\hat{\xi}_{\vec{u}} - \hat{\xi}_{\vec{u}+\vec{a}_3}\right) B^+_{\vec{u}} B_{\vec{u}+\vec{a}_3}$$

$$H^{I}_{int} = \sum_{\vec{q}\,\vec{k}} \nabla I' f^p(\varsigma)\varphi(k_3) D N_1 N_2 (1-e^{-\varsigma})\, a^+_{-\vec{q}} B^+_{\vec{k}'} B_{\vec{k}}$$

$$H^{II}_{int} = \sum_{\vec{q}'\,\vec{k}} \nabla I' f^z(\vec{q}_3)\varphi(k_3) D N_1 N_2\, a^+_{\vec{q}'} B^+_{\vec{k}''} B_{\vec{k}}$$

$$\vec{q} = (q_1, q_2, i\varsigma)\ ;\ \vec{k}' = (q_1+k_1, q_2+k_2, i\eta)\ ;\ \vec{k}'' = (k_1-q_1, k_2-q_2, i\eta)$$

Uzimanjem u obzir približnih veličina /egzaktan račun zahteva kompjuterski rad/ pokazuje se da je verovatnoća za proces lokalizacije magnetizacije /magnona/ na površini mnogo veća ako se odvija preko kreacije fonona čija je energija manja /površinski fonon/. Ovo je jasno, jer je prelaz izmedju bliskih nivoa mnogo verovatniji:

$$f^p(\varsigma) = \left(\frac{\hbar(1-e^{-2\varsigma})}{\ldots}\right)^{1/2},\quad f^z(q_3) = -\left(\frac{\hbar}{N|1+\frac{\Lambda}{\Lambda_0'}e^{iq_3}|M\omega}\right)^{1/2}\left(\sin q_3 + \frac{2\Lambda}{\Lambda_0'}\cos\frac{3q_3}{2}\sin\frac{q_3}{2}\right)$$

$$\varphi(k_3) = -\left(\frac{2}{N\left(1-\frac{I}{\mu' \mathcal{H}}\cos a k_3 + \frac{I^2}{4\mu'^2\mathcal{H}^2}\right)}\right)^{1/2}\frac{I}{2\mu'\mathcal{H}}\sin k_3,\quad D = \left(\frac{1}{N_1 N_2}\right)^{1/2},\quad \nabla I' = \nabla I_{\vec{u},\vec{u}+\vec{a}_3}$$

$$V_p = \nabla I' f^p(\varsigma)\varphi(k_3) D N_1 N_2 (1-e^{-\varsigma})\sqrt{n_{\vec{q}}+1}\sqrt{n_{\vec{k}'}+1}\sqrt{n_{\vec{k}}}$$

$$V_z = \nabla I' f^z(q_3)\varphi(k_3) D N_1 N_2 \sqrt{n_{\vec{q}'}+1}\sqrt{n_{\vec{k}''}+1}\sqrt{n_{\vec{k}}}$$

$$\vec{q} = (q_1, q_2, i\varsigma),\quad \vec{k}' = (q_1+k_1, q_2+k_2, i\eta),\quad \vec{k}'' = (k_1-q_1, k_2-q_2, i\eta)$$

$$\frac{V_p}{V_z} \approx \hbar\sqrt{\omega_0}\,\frac{1}{q_3^2\theta}\,\frac{\int_0^{\rho}\frac{u\,du}{e^u-1}}{\int_0^{\rho}\frac{u^2\,du}{e^u-1}} \qquad \omega_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\Lambda_0}{M}} \sim 10^{10}$$

$$\theta \approx 10^{-2},\quad q_3 \approx 10^{-1}$$

$$\frac{V_p}{V_z} \approx 10^8$$

ZAKLJUČAK

Polazeći od Hajzenbergovog modela feromagneta uveli smo u naša teorijska razmatranja pojam zapreminskih i površinskih magnona i fonaona. Za opisivanje fenomena korišćena je spin-fonon interakcija u Blohovoj aproksimaciji. Uzet je u obzir polubeskonačni kristal, jer je to svaki kristal u praksi. Nadjeno je da pri migraciji magnona u polubeskonačnim kristalima verovatnoća koncentracije energije na površini ima dosta veću vrednost kad u procesu interakcije učestvuju površinski fononi.

Literatura

1/ A.S.Davidov: Kvantna mehanika, Moskva 1963.
2/ S.V.Tjablikov: Metode kvantne teorije magnetizma, Moskva 1965.
3/ S.Stojanović, B.S.Tošić: Fizika čvrstog stanja/članak/32,229/1969.
4/ V.M.Agranovič: Teorija eksitona, Moskva 1968.
5/ Č.Kitel: Uvod u fiziku čvrstog stanja, Beograd 1972.