



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ПРИМЉЕНО: - 2 АРГ 2007 -	
ОРГАНИЗ.ЈЕД.	БРОЈ
0603	9/753

Uticaj tamne energije na evoluciju crnih rupa

- Diplomski rad -

Mentori: Prof. Dr Milan Pantić
Prof. Dr Milan Ćirković

Kandidat: Darko Donevski

U Novom Sadu, jula 2007. godine

Sadržaj

Uvod	2
1. Elementi teorije crnih rupa	5
1.1 Schwarzschildovo rešenje i Kruskal-Szekeresove koordinate	5
1.2 Zakoni mehanike crnih rupa	15
2. Tamna energija	23
2.1 Kosmološka konstanta	26
2.1.1 Energija vakuuma	28
2.1.2 Kosmološki parametri sa kosmološkom konstantom	31
2.2 Kvintesencija	33
2.3 Stvaranje tema za naredne debate	36
3. Zračenje izolovane crne rupe	38
4. Analiza uticaja akrecije tamne energije na proces evolucije crnih rupa	50
4.1 Eventualni porast crnih rupa na račun energije vakuuma	50
4.1.1 Teorija Dalal-Griesta	54
4.1.2 Poređenje navedenih teorija	58
4.2 Promena mase crne rupe usled akrecije tamne energije	61
4.2.1 Ispitivanje mogućnosti za postojanje tamne energije za koju je $w < -1$	61
4.2.2 Smanjenje mase crnih rupa pri akreciji tamne energije	64
4.2.3 Evolucija crnih rupa u Big-Rip scenariju	69
4.2.4 Neke moguće posledice ovih procesa	71
Zaključak	72
Dodatak 1. Svojstva crnih rupa	74
Dodatak 2. Uticaj pozadinskih zračenja na evoluciju crnih rupa	79
Literatura	82



Uvod

Uobičajena definicija crne rupe je da je to objekat koji tako jako zakrivljuje prostor-vremenski kontinuum da čak ni svetlo ne može da pobegne sa površine tog objekta. Sa stanovišta klasične opšte teorije relativnosti, izolovana crna rupa predstavlja vrlo stabilan objekat. Metrika prostor-vremena je, u prisustvu crne rupe, u opštem slučaju data rešenjem Kerr-Newmana gde figurišu tri veličine: masa crne rupe M , ugaoni momenat J i naelektrisanje Q . Ova metrika opisuje večnu, rotirajuću crnu rupu koja ne menja svoje parametre sa vremenom. Međutim, u realnoj situaciji, ovi parametri se mogu menjati, i to ne na proizvoljan način, već po tačno određenim zakonima. To su četiri zakona mehanike crnih rupa koje su 1970-ih godina postavili Hawking, Bekenstein, Bardeen i Carter, i koji svoju formalnu analogiju imaju u principima termodinamike. Hawking je nešto kasnije izveo zaključak da stacionarna crna rupa emituje zračenje termalnog karaktera (Hawkingov efekat), i taj rezultat je bio u potpunoj suprotnosti sa onim što predviđa opšta teorija relativnosti, prema kojoj sledi da je horizont događaja jednosmerna barijera i da se kroz koju se može proći u unutrašnjost crne rupe, ali ne i izaći iz nje. Emisija čestica predstavlja isključivo kvantni efekat, usled čega se masa crne rupe smanjuje tokom vremena.

Poslednjih godina XX veka došlo je do mnogih kosmoloških otkrića koja su otvorila novo poglavlje u procesu evolucije crnih rupa. Rasprava koja se vodila na temu ispravnosti tvrdjenja da je zračenje crnih rupa isključivo termalno dovela je do nastanka mnogih teorija koje razmatraju paradoks gubitka informacija iz crne rupe. Čak je i sam Hawking 2004. godine odbacio koncept po kome je nemoguće izvući bilo kakav podatak iz nje i prihvatio ideju da je evolucija crnih rupa unitarna. Sa druge strane, otkrivanje ubrzanog širenja našeg Univerzuma 1998. godine, kao i dobijanje slike o tome u kom odnosu se nalaze njegovi sastavni delovi, uslovalo je nastanak mnogih teorija koje daju zaključak o prisustvu tamne energije kao njegovog najrasprostranjenijeg gradivnog elementa. Prava priroda tamne energije je predmet mnogih naučnih razmatranja. Postoje dve osnovne klase teorija u odnosu na vrstu tamne energije koja se razmatra: jedna sa konstantnom gustinom energije (kosmološka konstanta) i druga, koja obuhvata dinamičke modele sa promenljivom gustinom energije (kvintesencija, k-essence, fantomska energija). Ovi modeli pojavili su se kao težnja da se premoste problemi između izmerene vrednosti kosmološke konstante i vrednosti koja je očekivana na osnovu kvantne teorije polja ("problem kosmološke konstante").

Cilj ovog rada je da se analizira promena mase crnih rupa u zavisnosti od uticaja tih različitih oblika tamne energije. Struktura rada je sledeća: U prvom poglavlju je dat metodički uvod u teoriju crnih rupa, upoznavanje sa osnovnim svojstvima ovih objekata i deo u kojem se ukazuje na problematiku emisije čestica iz crne rupe. U drugom poglavlju se razmatra pojam tamne energije i oblika u kojem se ona pojavljuje, kao i navođenje nekih osnovnih teorijskih mogućnosti koje objašnjavaju njenu prirodu. Potom dolaze delovi rada u kojima se razmatra proces promene mase crne rupe.

Najpre se (u trećem poglavlju) razmatra zračenje izolovane crne rupe (kao objekta koji ne apsorbuje nikakve čestice) na kosmološkoj pozadini, dok se u četvrtom poglavlju analizira uticaj moguće akrecije za dva različita oblika tamne energije.

Prvo se analizira uticaj kosmološke konstante, odnosno promena mase crne rupe pri eventualnoj akreciji energije vakuuma. Radi potpunosti analize naveden je i doprinos kosmičke mikrotalasne pozadine, odnosno razlog zbog čega ta apsorpcija neće u dalekoj budućnosti imati bitniju ulogu.

Posebna pažnja je data analizi modela sa akrecijom fantomske energije, jer on predstavlja jednu od najnovijih i najegzotičnijih teorijskih mogućnosti koje su se pojavile poslednjih godina. On čini osnovu za postavku tzv. Big-Rip evolucionog scenarija po kojem bi se sve gravitaciono (a potom i drugačije) vezane strukture u našem Univerzumu razdvojile usled povećanja gustine tamne energije.

U proračunima je korišćen poluklasični račun (pretpostavlja se važenje Einsteinovih jednačina polja, a pojedine veličine, poput mase, uzimaju se kao promenljive usled kvantnih i relativističkih efekata). Radi jednostavnosti, korišćen je prirodni sitem jedinica ($G = c = \hbar = 1$), izuzev kod konkretnih izračunavanja. Korišćena metrika u lokalno Lorentzovom sistemu je $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, dok je znak Riemannovog i Einsteinovog tenzora $+$. Grčki indeksi su korišćeni za označavanje prostorno-vremenskih, a latinični indeksi za označavanje prostornih kooordinata.

*The universe divided
As the heart and mind collided
With the people left unguided
For so many troubled years
In a cloud of doubts and fears
Their world was torn asunder into hollow
Hemispheres*

Rush "Hemispheres"

*Six Stars of the Northern Cross
In mourning for their sister's loss
In a final flash of glory
Nevermore to grace the night...*

*Invisible to telescopic eye
Infinity, the star that would not die*

*All who dare to cross her course
Are swallowed by her fearsome force*

*Through the void
To be destroyed
Or is there something more?
Atomized...at the core?
Or through the Astral Door?
To soar...*

*I set a course just east of Lyra
And northwest of Pegasus
Flew into the light of Deneb
Sailed across the Milky Way
On my ship, the 'Rocinante'
Wheeling through the galaxies
Headed for the heart of Cygnus
Headlong into mystery*

*The x-ray is her siren song
My ship cannot resist her long
Nearer to my deadly goal
Until the black hole
Gains control...*

*Spinning, whirling
Still descending
Like a spiral sea
Unending...*

Rush "Cygnus X-1, Book One: The Voyage "

1. Elementi teorije crnih rupa

“ Što više istražujem vasionu i izučavam detalje njene arhitekture, to više dokaza pronalazim za to da je vasiona, u određenom smislu, sigurno znala da dolazimo!”

F. Dyson

1.1 Schwarzschildovo rešenje i Kruskal-Szekeresove koordinate

Nakon formulacije Einsteinove “Opšte teorije relativnosti” 1916.godine, veoma brzo su se pojavila i neka egzaktna rešenja jednačina gravitacionog polja, kao što su Schwarzschildovo rešenje, koje je objavljeno 1916.godine, odnosno rešenje Reissner-Nordstroma, koje je objavljeno 1918.godine (v. dodatak 1). Opšta teorija relativnosti predviđa postojanje singulariteta prostor-vremena, koji mogu biti svrstani u dve vrste: singularitet Velikog praska i singularitet crne rupe. Singularitet Velikog praska predstavlja početni singularitet iz kojeg je nastao naš Univerzum. Na njegovo postojanje ukazuju teorijska predviđanja koja su u skladu sa posmatračkim dokazima kao što su udaljavanje galaksija i kosmičko mikrotalasno pozadinsko zračenje. Singulariteti crnih rupa nastaju pri gravitacionom kolapsu masivnih zvezda. Teoreme o singularitetima koje su razradili Hawking i Penrose, predviđaju njihovo nastajanje pri određenim uslovima, a nedvosmisleni pokazatelji postojanja crnih rupa su određeni astrofizički objekti (aktivna galaktička jezgra ili izvori X-zračenja, recimo) čija se svojstva na adekvatan način mogu objasniti upravo postojanjem crnih rupa.

Najopštija metrika za oblast unutar neke zvezde može se napisati kao [45]

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.1)$$

Metrika koju je odredio Schwarzschild, data je jednačinom

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.2)$$

Ovo rešenje opisuje gravitaciono polje zvezde mase M , za $r > R$, gde je R -radijus zvezde.

Materija unutar zvezde može se tretirati kao idealan fluid gustine energije ρ i pritiska p . Tada je tenzor energije-impulsa za oblast $r < R$ dat sledećim izrazom:

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)U_\mu U_\nu \quad (1.3)$$

Ovde je U_μ - kvadrivektor brzine fluida, za koga važi $g^{\mu\nu}U_\mu U_\nu = -1$.

Kako je materija u unutrašnjosti zvezde u stanju mirovanja, mogu se napisati komponente kvadrivektora brzine

$$U_r = U_\theta = U_\phi = 0 \quad (1.4)$$

$$U_t = -\sqrt{A(r)} = -\left(\frac{1}{-g^t}\right) \quad (1.5)$$

Koeficijente $A(r)$ i $B(r)$ u jednačini (1.1) moguće je odrediti ako se reši Einsteinova jednačina polja $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}$ za metriku (1.1) i dati tenzor energije-impulsa (1.3).

Navedena razmatranja se odnose na zvezde glavnog niza koje su u hidrostatičkoj ravnoteži. Kada zvezda svoje nuklearno gorivo potroši pri fuziji celokupnog vodonika u helijum, ona počinje da se hladi i skuplja. Skupljanje će se zaustaviti kada se pritisak degenerisanog elektronskog gasa¹ izjednači sa gravitacionom silom. Na taj način zvezda postaje beli patuljak. Beli patuljci ne mogu imati masu veću od neke kritične vrednosti (Chandrasekharova granica za $M \approx 1.3M_s$), zbog toga što pritisak degenerisanog elektronskog gasa ne može da spreči sažimanje usled gravitacione sile. Kao i zvezde malih masa, zvezde velikih masa (veće od $10M_s$), kada postanu crveni džinovi sagorevaju u svojim jezgrima i H i He. Međutim, zbog svojih velikih masa, one su u stanju da pokrenu mnoštvo dodatnih termonuklearnih reakcija. Porastom temperature najpre se vrši sagorevanje C a potom i sagorevanje O. Reakcije se odvijaju u jezgru dok se nuklearno gorivo ne istroši. Nakon toga će se jezgro skupljati pod uticajem gravitacije. Na kraju se dešava gorenje Si, a termonuklearna reakcija je potpaljena u tankoj ljusci izvan jezgra. Nakon daljeg rasta temperature (sada ona iznosi i preko $10^9 K$) počinje

¹ Degenerisani gas je gas čija se svojstva razlikuju od svojstava klasičnog idealnog gasa usled uzajamnog kvantnomehaničkog uticaja čestica. Ovaj uzajamni uticaj povezan je sa fundamentalnim svojstvom identičnosti čestica. Uzimanjem u obzir ovog svojstva, pokazuje se da verovatnoće zaposedanja različitih stanja, čak i u idealnom gasu, nisu nezavisne. Degeneracija gasa nastaje kada njegova temperatura postane manja od tzv. temperature degeneracije, i povećava se sa povećanjem koncentracije čestica. Degenerisani elektronski gas, na osnovu ovoga, predstavlja gas elektrona, i to je jedno od stanja materije koje je široko rasprostranjeno u Univerzumu, poput elektronskog fermi-gasa u zvezdama.

sagorevanje Si. Element koji nastaje (Fe) ne gori, ma koliko bila velika temperatuta u jezgri zvezde. Zbog toga masivna zvezda ima inertno jezgro koje je okruženo sa još nekoliko tankih ljusaka u kojima se još odvijaju termonuklearne reakcije. Te ljuske su nagomiklane u blizini jezgra zvezde. Pri svakom od tih procesa masa jezgra može da pređe Chandrasekharovu granicu. Tada gustina jezgra postaje dovoljno velika, pa dolazi do neutronizacije supstance u procesu $p + e^- \rightarrow n + \nu$. To dovodi do smanjenja pritiska u centru zvezde i naglog sažimanja koje predstavlja početak nastajanja supernove. Supernove eksplozijom rasejavaju u prostor mase koje su reda nekoliko sunčevih masa, pri čemu ta supstanca u okolni prostor može zračiti ogromne količine energije. Zaključuje se da je krajnji stadijum evolucije zvezda velikih masa eksplozija supernove čiji je ostatak neutrinska zvezda. Poput elektrona, i neutroni se pokoravaju Paulijevom principu isključenja – dva identična neutrona ne mogu se se primorati da zauzmu isto mesto. Kao posledica toga, materijal u sagorelom jezgri masivne zvezde kolapsira na veoma malu veličinu i stvara se pritisak degenerisanih neutrona. Tipična neutrinska zvezda ima prečnik od svega 10–20 km, veoma jako magnetno polje i veliku gustinu $\rho \approx 10^{18} \text{ g/cm}^3$. Da bi se što tačnije utvrdila veza $R = f(M)$ za neutronske zvezde, potrebno je znati karakter interakcije između neutrona i na osnovu toga formulisati jednačinu stanja neutronske gasa. Osim ovoga treba uzeti u obzir prisustvo izvesnog broja protona i elektrona u neutronske gasu, pogotovo u slojevima bližim površini zvezde. Pri razmatranju strukture zvezda velike gustine, neophodna je (kako je već istaknuto) primena relativističke teorije gravitacije, i to ako je radijus zvezde uporediv sa gravitacionim radijusom $R = 2M$.

Kako se pokazuje da je radijus neutronske zvezde samo nekoliko puta veći od gravitacionog radijusa, korišćenjem odgovarajuće jednačine stanja neutronske gasa i relativističke teorije gravitacije može se dobiti maksimalna masa stabilne neutronske zvezde koja iznosi približno $2,7 M_\odot$, što je poznata granica Openheimer-Volkova. Kada masa neutronske zvezde pređe tu vrednost, pritisak neutronske gasa ne može da uravnoteži gravitaciono privlačenje usled čega dolazi do daljeg sažimanja (gravitacioni kolaps), pa radijus zvezde postaje manji od gravitacionog. Posmatrana zvezda se tada nalazi unutar sfere gravitacionog radijusa, i kosmička brzina postaje veća od brzine svetlosti. Dok masivna zvezda kolapsira, gravitacija iznad površi zvezde postaje sve jača. To znači da će, dok kolaps napreduje, svetlosni zraci koji napuštaju površ zvezde biti savijeni pod sve većim uglovima. Na kraju će to skretanje biti tako jako da se svetlosni zraci savijaju natrag prema kolapsirajućoj zvezdi. U ovoj fazi zvezda upada unutar svog **horizonta događaja**, i obrazuje se crna rupa, jer zvezda postaje crna zato što sva svetlost tada biva skrenuta sa svog pravca zbog velike zakrivljenosti prostor-vremena. Termin horizont događaja je jako pogodan - to je doslovno horizont u geometriji prostor-vremena iza kojeg ne možemo videti nijedan događaj. Iako crna rupa nastaje čim se zvezda skupi unutar svog horizonta događaja, i dalje ne postoje nikakve sile u prirodi koje bi mogle zvezdu da održe. Tako se ona i dalje skuplja pod uticajem sve veće gravitacije. Jačina gravitacije i zakrivljenost prostor-vremena oko implodirajuće zvezde rastu sve više dok na kraju čitava zvezda ne bude sabijena u jednu tačku – **singularitet**.

Horizont događaja - granična površina oko crne rupe. Formiran je od svetlosti koja nije uspela da pobegne iz crne rupe i ostaje da lebdi na ivici. Liči na talasni front svetlosti.

Carter, Israel, Penrose i Hawking su dokazali, da u trenutku formiranja crne rupe, horizont može imati nepravilan oblik i snažno vibrirati. U deliću sekunde horizont će ipak dobiti jedinstven, gladak oblik i biće sferan ako nema rotacije, a ako ima biće spljošten na polovima, gde stepen spljoštenosti zavisi od brzine. Nakon kolapsa, obrazuje se jednosmeran horizont događaja kroz koji bi čestice, zračenje i drugo mogli upasti u zvezdu, ali ništa iz nje se ne bi moglo emitovati (nalik semipermeabilnoj membrani). Na kraju bi se obrazovao prostorno-vremenski singularitet, i to ne na kritičnom radijusu, nego u središtu zvezde. Ovaj fizički fenomen bi nastavio da se odvija za posmatrača koji propada zajedno sa površinom kolapsirajuće zvezde, jer nikakva svetlost do spoljnog posmatrača ne bi dolazila. Treba shvatiti da, iako naučnici govore o horizontu događaja kao o površini crne rupe, na njemu nema ničeg fizičkog ili opipljivog. Sva zvezdana materija je potpuno sabijena u singularitet u centru crne rupe, tako da je sve što postoji samo oblast jakog zakrivljenja prostor-vremena.

Singularitet - predstavljen je tačkom. U toj tački su beskonačni pritisak, gustina i zakrivljenost prostor-vremena. To je centar crne rupe. Do ovog zaključka došli su Penrose i Hawking, smatrajući da ovde otkazuju svi zakoni fizike. Sam pojam singulariteta nije precizno određen, odnosno jako je težak za objašnjavanje, jer se on pomalo kosi sa zdravim razumom. Penrose je radio na matematici urušavanja materije pod jakom gravitacijom, koristeći pojedine teoreme iz topologije. Može se postaviti analogija sa matematičkim singularitetom - on se nalazi u tački u kojoj se funkcija ne može definisati, a isto tako se ni vreme u singularnosti ne može definisati. Zakrivljenost prostor-vremena zavisi od mase. Ako bi se Univerzum nalazio u jako malim dimenzijama, zakrivljenost prostora bi bila ogromna, a ako bi se našao u jednoj tački - singularitetu, gustina mase bi bila beskonačna, tako da se jednačine prostora i vremena više ne bi mogle primeniti.

Rešavanjem Schwarzschildovih jednačina dobijeno je da postoje dve singulariteta i to jedan u prošlosti i jedan u budućnosti. Singularitet Velikog Praska je P vrste (past), i iz njega je proistekla materija i nastao svet, a singularitet u crnim rupama je F vrste (future), i u njega materija većinski bespovratno odlazi.

Nakon formiranja crne rupe, tj. nakon kolapsa zvezde, ona se vrlo brzo smesti u stacionarno stanje, pošto pri svakoj kretnji emisija gravitacionih talasa odnosi energiju. Za vreme kolapsa zvezde i nastajanja crne rupe, sva materija se kreće jako brzo, tako da se i energija brzo odliva. Od nekadašnje zvezde zadržavaju se *masa, ugaoni moment i ukupno naelektrisanje*. Israel je došao do zaključka da, ako je neutralna i ne rotira, crna rupa je jednostavan objekat koji se može opisati samo jednim parametrom - svojom masom. One bi se mogle opisati pomenutim oblikom Einsteinovih jednačina do kojih je došao Schwarzschild.

Rotirajuća crna rupa nastaje od rotirajuće zvezde. Uglavnom sve zvezde rotiraju, pa se pretpostavlja da su i većina crnih rupa rotirajuće i da se odlikuju masom i ugaonim momentom. Ovu pojavu je otkrio R. Kerr. Brzina rotiranja prilikom kolapsa se naglo povećava, što znači da crna rupa mnogo brže rotira od bivše zvezde. Kod rotirajućih crnih rupa takođe postoji Schwarzschildov radijus, ali izvan njega se nalazi i tzv. stacionarna granica, koja obrazuje polutarno ispupčenje oko crne rupe koje je uslovljeno centripetalnom silom. Objekat koji se nađe na stacionarnoj granici, ali izvan

Schwarzschildovog radijusa, samo je delimično zarobljen i ima šanse da se izbavi. Ako bi se objekat kretao u smeru rotiranja crne rupe, ona bi ispoljila težnju da ga zavrtla poput kamena iz praćke daviši mu pritom više energije nego što je imao prilikom ulaska. Time se smanjuje ugaoni momenat crne rupe tj. ona usporava jer je deo ugaonog momenta prešao na objekat. Kada bi se ugaoni momenat istrošio ostala bi samo masa.

Sferno simetrični gravitacioni kolaps može se razmatrati na sledeći način:

- Za vrednosti r veće od radijusa zvezde, metrika je data Schwarzschildovim rešenjem (1.2).
- Za oblast gde je r manje od radijusa zvezde, može se, zbog pojednostavljenja, zanemariti pritisak p , tako da tenzor energija-impuls ima oblik [45]

$$T_{\mu\nu} = \rho U_{\mu} U_{\nu} \quad (1.6)$$

Metrika se može napisati u Gausovim normalnim koordinatama u obliku

$$ds^2 = -dt^2 + U(r,t)dr^2 + V(r,t)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.7)$$

Iz jednačina gravitacionog polja dobija se da je

$$U(r,t) = R^2(t)f(r), \quad (1.8)$$

$$V(r,t) = R^2(t)r^2,$$

pri čemu je funkcija $f(r)$ data na sledeći način:

$$f(r) = \frac{1}{1 - kr^2} \quad (1.9)$$

gde je k -parametar krivine².

Parametar krivine je pozitivan u slučaju zatvorenog (konačnog) Univerzuma, negativan u slučaju otvorenog (beskonačnog) Univerzuma, dok je za kvazi-Euklidski Univerzum $k = 0$.

² U kosmologiji sa k se obeležava parametar krivine koji je povezan sa veličinama H i ρ izrazom $k = \rho_0 - \rho_c = \rho_0 - 3H_0^2 / 8\pi G$. Primećuje se da parametar k označava razliku između trenutne i kritične gustine, i evolucija u budućnosti će zavisiti od njegove vrednosti. Vrednost $k = -1$ odgovara Univerzumu sa negativnom krivinom, čiji je dvodimenzionalni analog sedlasta površina. Vrednost $k = 1$ odgovara Univerzumu sa pozitivnom krivinom (i sferom u 2D-analogiji), dok se za $k = 0$ dobija ravan, tzv. Einstein-de-Sitterov Univerzum.

Metrika unutar kolapsirajuće zvezde (1.7) sada postaje

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (1.10)$$

Parametri R i t su povezani parametarskim jednačinama cikloide

$$t = \frac{1}{2\sqrt{k}}(\eta + \sin \eta) \quad (1.11)$$

$$R = \frac{1}{2}(1 + \cos \eta)$$

Kada je $\eta = \pi$, tada je $R = 0$. Vrednost R je renormalizovana jer je u početnom trenutku $R(0) = 1$. Za posmatrača izvan zvezde vreme kolapsa do Schwarzschildovog radijusa ($R = 2M$) je beskonačno dugo. Zato je kolaps do $R = 0$ neopservabilan za spoljašnjeg posmatrača. Međutim, za posmatrača koji je vezan za površinu zvezde, vreme kolapsa do $R = 0$ je konačno.

Do sada je razmatran slučaj idealizovanog sferno-simetričnog kolapsa. U realnosti, većina zvezda nije potpuno sferno-simetrična, a pored toga poseduje i izvestan momenat impulsa. Zanimljivo je odgovoriti na pitanje da li se i u takvom slučaju može formirati crna rupa? Teoreme o singularitetima Hawkinga i Penrosea potvrđuju neizbežnost formiranja crne rupe, pod određenim pretpostavkama, kao što su važenje opšte teorije relativnosti i pozitivnost gustine energije. Kasnije je, metodama teorije perturbacija (Price, 1972. godine), pokazano da pri gravitacionom kolapsu koji malo odstupa od sferne simetrije takođe dolazi do stvaranja singulariteta koji je izolovan horizontom događaja od ostatka Univerzuma.

Metrika Schwarzschilda (1.2) poseduje singularitet u koordinatnom početku za $r = 0$, i prividan singularitet na Schwarzschildovom radijusu $r = 2M$. Singularitet za taj radijus nije realan, već je posledica nepovoljno izabranog koordinatnog sistema. Na to ukazuje i podatak da je tipična komponenta Riemannovog tenzora proporcionalna M/r^3 , a to je na Schwarzschildovom radijusu proporcionalno $1/M^2$, što je konačna vrednost. Zbog toga je jedino $r = 0$ fizički singularitet prostor-vremena. Da bi se odstranio ovaj prividni singularitet za $r = 2M$, potrebno je preći na novi koordinatni sistem.

Uvodeći nove koordinate U i V relacijama

$$U + V = 2t, \quad (1.12)$$

$$V - U = 2 \left(r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right),$$

dobija se metrika **Eddington-Finkelsteina**.

Ova metrika se može zapisati u obliku [60]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dU dV + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.13)$$

Kao što se može zapaziti, ova metrika i dalje poseduje singularitet za $r = 2M$, pa je potrebna transformacija da bi otklonila singularni faktor ispred $dU dV$. Može se pokazati da je takva transformacija oblika [60]

$$\tilde{u} = - \exp \left(- \frac{U}{4M} \right), \quad (1.14)$$

$$\tilde{v} = \exp \left(\frac{V}{4M} \right)$$

Ovako definisane koordinate su izotropne ($e_{\tilde{u}} \cdot e_{\tilde{u}} = e_{\tilde{v}} \cdot e_{\tilde{v}} = 0$). Metrika (1.13) u ovim koordinatama dobija sledeći oblik:

$$ds^2 = - \frac{32M^3}{r} \exp \left(- \frac{r}{2M} \right) d\tilde{v} d\tilde{u} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.15)$$

Nesingularna metrika dobija se prelaskom na **Kruskal-Szekeres** koordinate. One su izražene preko starih koordinata sledećim izrazima

$$u = \frac{1}{2}(\tilde{v} - \tilde{u}), \quad (1.16)$$

$$v = \frac{1}{2}(\tilde{v} + \tilde{u})$$

Konačnim prelaskom na nesingularne koordinate dobija se metrika Kruskal-Szekeresa

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{2M}\right) (du^2 - dv^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.17)$$

Ovakva metrika ne poseduje singularnost za $r = 2M$, međutim ona poseduje nešto dodatno. Naime, koordinate u i v su povezane sa Schwarzschildovom koordinatom r implicitnom relacijom

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right) = u^2 - v^2 \quad (1.18)$$

To zapravo znači da fizičkoj singularnosti $r = 0$ odgovara geometrijsko mesto tačaka $v^2 - u^2 = 1$, odnosno dve singularnosti čije su jednačine

$$v = \pm \sqrt{1 + u^2} \quad (1.19)$$

Pored toga, oblast daleko od Schwarzschildovog radijusa $r \gg 2M$ data je nejednačinom $u^2 \gg v^2$, tako da zapravo postoje dve spoljašnje oblasti i to $u \gg +|v|$ i $u \ll -|v|$. Dakle, Schwarzschildove koordinate poseduju jedan singularitet za $r = 0$, i jednu spoljašnju oblast $r \gg 2M$, dok koordinate Kruskal-Szekeresa poseduju dva singulariteta i dve spoljašnje oblasti. Naime, koordinate Schwarzschilda opisuju samo deo prostorno-vremenske mnogostrukosti dok koordinate Kruskal-Szekeresa opisuju celu prostorno-vremensku mnogostrukost i na taj način predstavljaju potpuno analitičko produženje Schwarzschildovog rešenja.

Uopštenje Schwarzschildove metrike na slučaj rotirajuće crne rupe sa ugaonim momentom J i naelektrisanjem Q , izvršili su Kerr i Newman 1965. godine.

Njihova geometrija ima oblik [45],[72]

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\varphi]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\varphi - a dt]^2 + \frac{\rho}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (1.20)$$

gde su

$$\begin{aligned} a &\equiv J / M, \\ \Delta &\equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \\ \rho^2 &\equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (1.21)$$

Horizont događaja se u ovom slučaju nalazi na mestu gde je $\Delta = 0$, odnosno na radijusu

$$r = r_+ \equiv M + \sqrt{(M^2 - a^2 - Q^2)} \quad (1.22)$$

Geometrija Kerr-Newmana poseduje još jednu karakterističnu površ-ergosferu³. Stacionarni posmatrači mogu postojati samo izvan ergosfere, dok se između ergosfere i horizonta događaja posmatrač ne može nalaziti u stanju mirovanja (sa konstantnim vrednostima r, θ, φ) usled Lense-Tiringovog efekta. Sama ergosfera nalazi se na radijusu

$$r_0(\theta) = M + \sqrt{(M^2 - a^2 \cos^2 \theta - Q^2)} \quad (1.23)$$

Kao i u slučaju geometrije Schwarzschilda (1.2) čestica koja prođe kroz horizont događaja (1.22) ne može se vratiti nazad u asimptotski ravnu oblast, odnosno u beskonačnost, jer su svetlosni konusi unutar horizonta događaja usmereni prema singularnosti, tako da će čestica pasti na nju za neko konačno sopstveno vreme. Čestica koja se nalazi unutar ergosfere može, međutim, da je napusti i vrati se u beskonačnost. Površina horizonta događaja A je [45]

$$A = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 4\pi \left[\left(M + \sqrt{(M^2 - a^2 \cos^2 \theta - Q^2)} \right)^2 + a^2 \right] \quad (1.24)$$

³ Rotirajuća crna rupa poseduje dva horizonta događaja, i površina koja se nalazi između njih predstavlja ergosferu. Iz nje čestica, u principu, može pobeći u spoljašnjost izvlačeći deo kinetičke energije iz crne rupe. Povećanjem brzine rotacije, unutrašnji horizont postaje sve veći dok se spoljni horizont događaja skuplja. Do maksimalnog mogućeg spina dolazi kada se dva horizonta događaja stope. Treba istaći da je kod statičnih crnih rupa singularitet tačka, dok je singularitet Kerr-Newmanove crne rupe prsten. Taj prstenasti singularitet leži u ravni ekvatora crne rupe, normalno na osu rotacije.

Veličine koje karakterišu ovu geometriju su Θ - ugaona brzina horizonta događaja i κ - površinska gravitacija⁴.

U realnim situacijama, zvezde obično nisu naelektrisane i pri njihovom kolapsu će se obrazovati crne rupe za koje će biti $Q=0$. Ugaona brzina horizonta i površinska gravitacija su u tom slučaju [44]

$$\Theta = J \cdot \frac{2M}{M^2 + \sqrt{(M^4 - J^2)}} \quad (1.25)$$

$$\kappa = \sqrt{M^4 - J^2} \cdot \frac{2M}{M^2 + \sqrt{(M^4 - J^2)}}$$

Odavde se primećuje da $\kappa \rightarrow 0$ kada $J \rightarrow M^2$. Ukoliko je $J > M^2$, geometrija (1.20) i dalje opisuje prostor-vreme, ali sada ne postoji horizont događaja (da bi bilo $\Delta = 0$ u jednačini (1.21), potrebno je da r bude kompleksno), pa se javlja “goli” singularitet, koji se smatra “vidljivim” za posmatrača u beskonačnosti. U tačakama singulariteta Einsteinove jednačine gravitacionog polja ne važe, tako da se ne može predvideti šta sve iz singulariteta može da proizide. Zbog toga je Penrose 1969. godine predložio hipotezu kosmičke cenzure (*eng. cosmic censorship*). Prema toj hipotezi, svi singulariteti moraju biti izolovani horizontom događaja od posmatrača u beskonačnosti, odnosno ne smeju biti “goli”. Iako ova hipoteza nije do sada egzaktno dokazana, svi pokušaji da se konstruiše misaoni ekperiment u kojem bi se crnoj rupi dodavala materija, tako da ona dođe u stanje $J > M^2$, bili su bezuspešni.

⁴ Površinska gravitacija predstavlja vrednost kvadrivektora ubrzanja probne čestice na horizontu.

1.2. Zakoni mehanike crnih rupa

U okviru klasične opšte teorije relativnosti, mogu se formulisati četiri zakona mehanike crnih rupa (Bardeen, Bekenstein, Carter, Hawking 1973.godine). Ovi zakoni su formulisani po analogiji sa principima termodinamike [55], pošto se neke veličine, svojstvene crnim rupama, ponašaju analogno određenim termodinamičkim veličinama.

Nulti zakon mehanike crnih rupa glasi: *Površinska gravitacija κ stacionarne crne rupe se ne menja tokom vremena.*

Prvi zakon mehanike crnih rupa može se formulisati u obliku [24],[55]

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G} \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q \quad (1.26)$$

Kako je uzeto da je $G = 1$, tada je

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q \quad (1.27)$$

Ovde δM predstavlja razliku masa dve stacionarne, aksijalno simetrične crne rupe gde je δA - razlika površina horizonta, δJ - razlika njihovih ugaonih momenata, a δQ razlika njihovih naelektrisanja. Drugi član sa desne strane u jednačini (1.27) predstavlja rad izvršen nad crnom rupom pri promeni njenog ugaonog momenta. Ovaj član može biti kako pozitivan, tako i negativan. Prvi član sa desne strane te jednačine može biti samo pozitivan. Razlog za to je da se površina horizonta događaja A ne može smanjivati tokom vremena. O tome govori naredni zakon mehanike crnih rupa.

Drugi zakon mehanike crnih rupa dat je izrazom

$$\delta A \geq 0 \quad (1.28)$$

Ovaj rezultat je dobijen pod pretpostavkom da važi hipoteza kosmičke cenzure i da je energija uvek pozitivna. Relacija (1.27) pokazuje analogiju između površine horizonta A i entropije S . Sada se nameće i analogija između temperature T i veličine $\frac{\kappa}{8\pi}$. U okviru

klasične teorije ovo je samo formalna analogija, pošto crna rupa ne može biti u termodinamičkoj ravnoteži sa spoljašnjim zračenjem, jer ona ne može emitovati zračenje. U tom slučaju je efektivna temperatura crne rupe jednaka apsolutnoj nuli. Kasnije će se pokazati da se, kada se uzmu u obzir i kvantni efekti, situacija menja (Hawkingovo zračenje).



Produžavajući analogiju i dalje, može se postulirati naredni zakon mehanike crnih rupa.

Treći zakon mehanike crnih rupa glasi: *Nemoguće je smanjiti vrednost κ do nule u konačnom broju operacija.*

Da bi se postiglo smanjenje površinske gravitacije, u crnu rupu bi trebalo da se ubacuju čestice na takav način da joj se poveća ugaoni momenat. Međutim, smanjenje površinske gravitacije u ovakvom procesu postaje sve manje i manje kada masa i ugaoni momenat teže kritičnoj vrednosti $J/M^2 \rightarrow 1$ (na osnovu 1.25). Ovaj idealizovan proces zahteva beskonačno dugo vreme i beskonačnu deljivost materije.

Svi procesi u kojima učestvuju crne rupe mogu se podeliti u dve grupe:

1. Povratni procesi, u kojima se parametri crne rupe M, J i Q menjaju na taj način da se površina horizonta događaja A ne menja.
2. Nepovratni procesi, u kojima se pri izmeni M, J i Q površina horizonta događaja A povećava. Ukoliko crna rupa prođe kroz nepovratan proces, više se ne može vratiti u prvobitno stanje.

Povratni procesi pri kojima se smanjuju J i Q (pri konstantnom A) crpe energiju iz crne rupe, jer se njena masa smanjuje. Na osnovu rada Misnera, Thorna i Wheelera, kada se masa smanji na određenu vrednost – ireducibilnu (nesmanjivu) masu M_{ir} , iz crne rupe se ne može više izvući energija. Inače, ireducibilna masa je određena jednačinom $M_{ir} = \sqrt{A/16\pi}$.

Početna masa crne rupe može se izraziti preko ove ireducibilne mase M_{ir} , ugaonog momenta J i naelektrisanja Q na sledeći način:

$$M = \left(M_{ir} + \frac{Q^2}{4M_{ir}} \right)^2 + \frac{J^2}{4M_{ir}^2} \quad (1.29)$$

Iz ove jednačine se može zaključiti da je ukupna energija crne rupe sastavljena iz tri dela: ireducibilne mase, energije rotacije i energije elektromagnetnog polja. Ove tri energije se ne mogu međusobno linearno sabrati da bi dale ukupnu energiju, već je ukupna energija data kombinacijom iskazanom u jednačini (1.29). Sama ireducibilna masa je u funkciji M, J i Q data kao

$$M_{ir} = \frac{1}{2} \sqrt{(r_+^2 + a^2)} = \frac{1}{2} \left[\left(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \right)^2 + a^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.30)$$

Povratni proces se može sada okarakterisati time da je u njemu ireducibilna masa M_{ir} konstantna. Analogno tome, nepovratan proces je onaj u kojem se masa povećava.

Friedmannov model, koji se usvaja kao model ekspandujućeg Univerzuma, kada se ekstrapolira u prošlost (kosmološko vreme) daje beskonačnu gustinu. Ako se pretpostavi da je u dalekoj prošlosti gustina bila homogena i kretanje izotropno, Friedmannova rešenja su primenljiva sve do stanja ogromne gustine. U blizini singulariteta gde prestaje važenje opšte teorije relativnosti potrebno je uvesti novu teoriju koja operiše sa kvantnim efektima gravitacije.

Kompletna kvantna teorija gravitacije još uvek ne postoji. U kvantnoj elektrodinamici se račun perturbacije vrši razvojem u red po malom parametru $\alpha \approx e^2 / \hbar c$ i red tada konvergira. U slučaju gravitacije se može uzeti neka pozadinska metrika, i zatim se u njoj mogu teorijom perturbacije izračunati kvantne korekcije preko Feynmanovih dijagrama. Pri niskim energijama, račun za doprinos pojedinih dijagrama konvergira. Međutim, za egzaktne rezultate treba uzeti i sve ostale energije. Pri energijama bliskim Planckovoj, svi dijagrami postaju jednako bitni. Svi dijagrami sa zatvorenim petljama divergiraju, i zbog toga se opšta teorija relativnosti ne može renormalizovati. Sve ovo pokazuje da se perturbacioni račun ne može primeniti na jaka gravitaciona polja.

Postoji nekoliko pristupa problemu kvantizacije gravitacije. U pristupu integrala po trajektorijama, posmatraju se dve hiperpovršine S_1 i S_2 sa vrednostima metrike g_1 i g_2 i fizičkih polja ϕ_1 i ϕ_2 na njima. Amplituda prelaza sa S_1 na S_2 data je kao suma po svim konfiguracijama g i ϕ koje imaju datu vrednost na hiperpovršinama S_1 i S_2 . Dakle, za amplitudu prelaza se može napisati

$$\langle g_2, \phi_2, S_2 | g_1, \phi_1, S_1 \rangle = \int D[g, \phi] \exp(iI[g, \phi]) \quad (1.31)$$

gde je $D[g, \phi]$ neka mera u prostoru svih konfiguracija polja g i ϕ , dok je $I[g, \phi]$ dejstvo ovih polja. Integral se uzima po svim poljima koje imaju zadate vrednosti na zadatim hiperpovršinama S_1 i S_2 . Dejstvo se, na osnovu proračuna koje su Israel i Hawking sproveli u svojim radovima, može napisati u obliku [56]

$$I = \frac{1}{16\pi} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{(-g)} d^4x + \int L_M \sqrt{(-g)} d^4x \quad (1.32)$$

Prvi član sa desne strane je dejstvo samog gravitacionog polja, dok je drugi član dejstvo materijalnih polja. R je skalar krivine, a Λ kosmološka konstanta.

Pri bilo kakvim varijacijama metrike, takvim da su ove varijacije, kao i normalne komponente njihovih izvoda, jednake nuli na granici integracije, gornje dejstvo će biti stacionarno ako i samo ako su zadovoljene Einsteinove jednačine polja

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu} \quad (1.33)$$

Dejstvo (1.32) neće biti ekstremno ako se uzmu takve varijacije metrike koje su jednake nuli na granici integracije, dok normalne komponente njihovih izvoda nisu tu jednake nuli. U tom slučaju, parcijalnom integracijom će se dobiti član koji sadrži integral normalnih komponenta izvoda varijacije metrike po granici oblasti. Zbog ovog dodatnog člana, dejstvo više neće biti ekstremno za rešenja jednačina (1.33).

U slučaju realne lorencovske metrike sa signaturom $(-,+,+,+)$, dejstvo $I[g,\phi]$ će biti realno i integral (1.31) neće konvergirati, već će oscilovati. Ova teškoća može da se otkloni uvođenjem imaginarnog vremena $\tau = it$. To znači da će se vremenska osa u kompleksnoj ravni zarotirati za $\pi/2$ u negativnom smeru. Kada se u integralu (1.31) t zameni sa $-i\tau$, pojaviće se faktor $-i$ ispred njega.

Uvođenjem euklidskog dejstva [24],[37],[56]

$$I_E \equiv -iI, \quad (1.34)$$

izraz za amplitudu prelaza (1.31) će postati

$$\langle g_2, \phi_2, S_2 | g_1, \phi_1, S_1 \rangle = \int D[g, \phi] \exp(-I_E[g, \phi]) \quad (1.35)$$

Euklidsko dejstvo je pozitivno za polja koja su realna u Euklidovom prostoru, definisanom za realne vrednosti τ, x, y, z . Argument eksponencijalne funkcije u integralu (1.35) je stoga uvek negativan (ili najviše jednak nuli), pa treba očekivati da taj integral konvergira. Ova zamena realnog vremena t imaginarnim vremenom τ zapravo označava prelaz sa Lorencove metrike (sa signaturom $-,+,+,+$) na Euklidovu metriku (signatura je $+,+,+,+$). Procedura se sastoji u tome da se sa t pređe na imaginarno vreme τ i tada izvrši integracija po trajektorijama u euklidskom sektoru (gde su τ, x, y, z realni). Zatim se ovo rešenje analitički produži u kompleksnoj t ravni na Lorencov sektor gde su realne vrednosti τ, x, y, z .

Ovakva procedura se sada može primeniti i na Schwarzschildovu metriku. Uvođenjem smene $t = -i\tau$ dobija se pozitivno definitna metrika za $r > 2M$ [56],[60]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)d\tau^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.36)$$

Ova metrika poseduje prividnu singularitet za $r = 2M$, i on se može otkloniti uvođenjem nove koordinate x , tako da metrika ima oblik

$$ds^2 = -\left(\frac{x}{4M}\right)d\tau^2 + \left(\frac{r^2}{4M^2}\right)^2 dx^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.37)$$

gde je $x = 4M\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$.

Za vrednosti $r = 2M$ i $x = 0$ ovo će biti regularna metrika ako se τ uzme za periodičnu promenljivu sa periodom $8\pi M$. Euklidski sektor Schwarzschildovog rešenja je sada definisan sa $x \geq 0$ i $0 \leq \tau \leq 8\pi M$. Pošto je Schwarzschildovo rešenje periodično po imaginarnom vremenu sa periodom $\beta = 8\pi M$, može se zaključiti da je ovo rešenje tačka stacionarne faze u integralu po trajektorijama (1.35) za particionu funkciju Z kanonskog ansambla na temperaturi $T = 1/\beta$. Particiona funkcija je data na sledeći način [37], [56]

$$Z = \sum_i \exp(-\beta E_i) \quad (1.38)$$

Ova particiona funkcija se može napisati i kao

$$Z = \int D[g, \phi] \exp(-I_E[g, \phi]) \quad (1.39)$$

Euklidsko dejstvo u slučaju metrike (1.37) je, na osnovu rada Israela i Hawkinga [56]

$$I_E = \frac{1}{2}\beta M = 4\pi M^2 \quad (1.40)$$

Na osnovu ovog izraza mogu se izračunati srednja energija $\langle E \rangle$, entropija S i temperatura T Schwarzschildove crne rupe

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = M, \quad (1.41)$$

$$S = \beta \langle E \rangle + \ln Z = 4\pi M^2 = \frac{1}{4}A, \quad (1.42)$$

$$T = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{8\pi M}$$

Jednačina (1.41) je potpuno očekivana, međutim rezultat (1.42) da crna rupa ima entropiju S i temperaturu T različitu od nule je fundamentalan. On pokazuje da u prvom zakonu mehanike crnih rupa (1.27) postoji nešto više od formalne analogije između κ i T , odnosno A i S . Ako se izraz za entropiju napiše u SI sistemu, dobija se

$$S = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} A \quad (1.43)$$

Kao što je moguće primetiti, u ovom izrazu se pojavljuju četiri fundamentalne konstante: brzina svetlosti c , zatim Boltzmann-ova konstanta k_B , gravitaciona konstanta G i Planck-ova konstanta $\hbar$. Retke su situacije kada se one pojavljuju zajedno, a sve su svojstvene određenim teorijama (k_B za termodinamiku, G i c za teoriju relativnosti a $\hbar$ za kvantnu teoriju). Ovo znači da navedeni efekat može da odigra važnu ulogu u povezivanju ovih teorija u jednu celinu.

Sada se postavlja pitanje: *Da li temperatura različita od nule znači da crna rupa emituje zračenje kao crno telo iste temperature?* Hawking je, prvobitno, pokazao da se na ovo pitanje može potvrdno odgovoriti. Iako prema opštoj teoriji relativnosti crna rupa ne može da emituje čestice, to je moguće zahvaljujući kvantnim efektima u blizini horizonta. Prema kvantnoj teoriji polja, u vakuumu neprestano dolazi do stvaranja virtuelnih parova čestica-antičestica⁵, usled principa neodređenosti. Ovi parovi obično imaju kratko vreme života pre rekombinovanja. Ukoliko se jedan ovakav par obrazuje u blizini horizonta, jedna čestica iz para može da prođe kroz horizont i uđe u crnu rupu. Stanja neposredno unutar horizonta su stanja sa negativnom energijom, stoga, čestica koja je upala predstavlja fluks negativne energije u crnu rupu. Druga čestica, koja je ostala izvan horizonta, na taj način je stekla pozitivnu energiju i može da ode u beskonačnost. Negativan fluks energije kroz površinu horizonta znači da se energija (masa) crne rupe smanjuje. Prema tome, čestice koje odlaze u beskonačnost predstavljaju zračenje koje smanjuje energiju crne rupe u skladu sa zakonom održanja energije.

Kvalitativno se ovo može objasniti sledećim razmatranjem: Energija E i vreme života virtuelnog para čestica-antičestica τ povezani su Hajzenbergovom relacijom neodređenosti $E\tau \approx \hbar$. Ukoliko se čestice u prisustvu polja razidu na takvo rastojanje, da je rad izvršen od strane polja jednak ili veći od energije para E , tada je moguće da virtuelan par postane par realnih čestica. Verovatnoća da se čestice para nalaze na rastojanju l proporcionalna je sa $\exp(-El/\hbar c)$. Neka je P jačina polja, a λ konstanta interakcije čestice sa poljem.

⁵ Na jeziku Fejnmanovih dijagrama, virtuelne su one čestice koje (za razliku od realnih, slobodnih čestica) ne ispunjavaju uslov $E^2 - p^2 = m^2$. Da bi se istaklo narušavanje te jednačine, za virtuelne čestice se kaže da leže izvan površine mase (eng. *mass shell*). Na emisiji i apsorpciji virtuelnih čestica zasnovani su praktično svi fizički procesi.

Ako na rastojanju čestica l_0 polje izvrši rad jednak $\lambda Pl_0 = E$, tada čestice mogu postati realne, a verovatnoća stvaranja realnog para je proporcionalna sa $\exp(-El_0 / \hbar c)$. Ova verovatnoća će imati termalni (Boltzmannov) oblik jedino ako rastojanje l_0 ne zavisi od energije E . To će biti moguće jedino u slučaju kada je konstanta interakcije čestice sa poljem proporcionalna njenoj ukupnoj energiji.

Od ovog Hawking-ovog otkrića, vodile su se mnoge diskusije na temu prirode zračenja crnih rupa, a u novijoj kosmologiji pojavile su se i postavke rešenja problema *paradoksa gubitka informacija* (ispituje tačnost tvrdnje da ne postoji nikakva informacija o sadržaju materije unutar crne rupe, i da, kada jednom crna rupa nestane, onda i sve informacije sa njom nestanu). Najveći zagovornici teorije po kojoj crne rupe ipak ne uništavaju sve što usisaju su John Preskill i Gerhard 't'Hooft. Naime, prema Hawking-u, zračenje koje crne rupe emituju, i koje ima samo termalni karakter, ne bi odavalo nikakvu bitnu informaciju (osim temperature), tako da bi dati model narušavao dalekosežni i veoma važni princip savremene fizike koji se naziva unitarnost. Hawking je 1975. godine postavio hipotezu da su crne rupe tako moćne da sve što pređe horizont događaja, zauvek nestane. Ali, nakon skoro 30 godina, on je priznao da je njegova teorija o crnim rupama kao "jamama bez dna u kosmosu, a koje proždiru svu materiju i energiju" bila pogrešna. Hawking sada veruje da informacija ipak iscuri tokom milijardi godina, kroz male nepravilnosti u njihovoj površini (horizontu događaja). Prema tom novom stavu, unitarnost izgleda da ostaje sačuvana, pošto je ekstra informacija "ispisana" po površini horizonta događaja. Ako bi unitarnost bila narušena, govorili su oponenti, poput Preskila i 't'Hoofta, to bi zaista imalo nesagledive posledice na naše poimanje vremena. Ako se informacije gube, onda bi to značilo da niko ne bi bio siguran šta se zbilo u prošlosti niti bi mogao da predvidi budućnost. U reviziji Hawking-ove teorije, crne rupe ne uništavaju potpuno sve što pređe horizont događaja. One nastavljaju još dugo da emituju radijaciju i možda se čak otvaraju i izbacuju informaciju iz svoje unutrašnjosti kroz zračenje u kasnijim fazama isparavanja.

Crna rupa emituje sa jednakom verovatnoćom svaku konfiguraciju čestica koja je u saglasnosti sa održanjem energije E , ugaonog momenta J i naelektrisanja Q . Kada bi crna rupa emitovala pojedine konfiguracije čestica sa većom verovatnoćom, posmatrač u beskonačnosti bi mogao da odredi talasne funkcije pojedinih čestica koje emituje crna rupa. Iako je verovatnoća emisije dve konfiguracije jednakih energija ista, verovatnoće da one dostignu beskonačnost su različite za pojedine konfiguracije, jer se izvan crne rupe nalazi potencijalna barijera koja može neke od njih da vrati nazad. Prema **klasičnoj teoriji**, crna rupa se ne može raspasti na dve crne rupe, jer bi, u tom slučaju, zbir površina njihovih horizonata događaja bio manji od površine horizonta događaja početne crne rupe, što je u suprotnosti sa klasičnim drugim zakonom mehanike crnih rupa. Prema **kvantnoj teoriji**, u zračenju emitovanom od strane crne rupe mogu se nalaziti i druge crne rupe. Verovatnoća ove emisije eksponencijalno opada sa porastom mase emitovane crne rupe. Zanimljivo je da se posmatrač, koji slobodno pada u crnu rupu (kreće se po geodeziku), nalazi u lokalno inercijalnom sistemu reference, pa gravitaciono polje za njega odsustvuje. Prema tome, on neće registrovati fluks energije emitovan od strane crne rupe.

Pošto crna rupa emituje energiju, njena masa se smanjuje, a samim tim i površina horizonta događaja. Ovo smanjenje horizonta A u suprotnosti je sa klasičnim drugim zakonom mehanike crnih rupa. Entropija crne rupe je srazmerna površini horizonta A (1.43), a to znači da se smanjuje i njena entropija. Zračenje koje crna rupa emituje poseduje određenu entropiju. Ova entropija je veća od gubitka entropije crne rupe, tako da ukupna entropija nije smanjena, već povećana. Ovo se može iskazati u obliku **uopštenog drugog zakona mehanike crnih rupa**: *Ukupna entropija zračenja i materije van crnih rupa, kao i entropija samih crnih rupa, nikada se ne smanjuje.* To je dato i izrazom

$$\delta(S + \frac{1}{4} A) \geq 0 \quad (1.44)$$

Ovde S predstavlja ukupnu entropiju zračenja i materije van crnih rupa, dok je A je ukupna površina horizonta svih crnih rupa.⁶

⁶ Crna rupa koja se nalazi u termodinamičkoj ravnoteži sa spoljašnjim zračenjem je u stanju nestabilne ravnoteže. Ona se ponaša sasvim drugačije od nekog običnog tela koje ima istu temperaturu. Ako se posmatra telo smešteno u kutiju sa zračenjem, kod sistema koji je u termodinamičkoj ravnoteži, apsorbovana energija jednaka je emitovanoj. Gustina energije će se menjati kada se taj sistem sa zračenjem otvori, pa ponovo zatvori. Doći će do emitovanja veće energije od one koja je apsorbovana, što će smanjiti temperaturu a povećati gustinu energije zračenja. Posle izvesnog vremena, sistem će se vratiti u ravnotežu, ali na nižoj temperaturi. Kod crnih rupa je drugačija situacija. Nakon otvaranja sistema (kutije), gustina zračenja će se smanjiti, i crna rupa će emitovati više energije nego što će apsorbovati, usled čega će se smanjiti njena masa. Kako je odnos mase i temperature dat izrazom (1.42), primetan je porast temperature crne rupe. Da li se sve se ovo nastavlja dok crna rupa potpuno ne iščezne? Ukoliko je kutija, koja sadrži crnu rupu i zračenje u termodinamičkoj ravnoteži, izolovana, tada može doći do fluktuacija koje dovode do situacije kada crna rupa emituje mnogo više energije nego što apsorbuje. U tom slučaju će spontano doći do opisane situacije - crna rupa će vremenom ispariti ostavljajući prostor ispunjen zračenjem. Ovo zračenje, posle određenog vremena, može ponovo da se koncentriše u nekom malom prostoru. Tada može doći do gravitacionog kolapsa i formiranja nove crne rupe.

2. Tamna energija

“Ni u šta se tako čvrsto ne veruje kao u ono o čemu se najmanje zna!”

Š. de Monteskje

Tokom devedesetih godina XX veka posmatranja Ia Supernovih⁷ od strane dva tima naučnika (Supernova Cosmology Project koji su vodili naučnici iz Lawrence Barkley National Laboratory i High-z Supernova Team) dovela su do saznanja o ubrazavajućem širenju Univerzuma, i pružila jedan od najdirektnijih dokaza za postojanje tamne energije. Tamna energija predstavlja hipotetički oblik energije koja prožima ceo Univerzum i odlikuje se snažnim negativnim pritiskom. Saglasno Opštoj teoriji relativnosti ovaj negativni pritisak je, na velikoj skali, kvalitativno jednak sili koja deluje nasuprot gravitaciji. Termin “tamna energija“ (*eng. Dark Energy*) prvi put je pomenut 1998. godine u radu "Prospects for Probing the Dark Energy via Supernova Distance Measurements" čiji su autori Huterer i Turner. Tačna priroda tamne energije je predmet mnogih naučnih spekulacija.

Postoje dva osnovna predložena oblika tamne energije:

◆ Kosmološka konstanta

Ona predstavlja konstantnu gustinu energije koja homogeno ispunjava prostor

◆ Kvintesencija (*eng. Quintessence*)

Dinamičko polje čija se gustina energije može menjati tokom vremena

⁷ Supernove predstavljaju snažne eksplozije ogromne energije. To je veoma složena pojava koja prati završni stadijum evolucije zvezde u čijem jezgru postoji zaostala količina nuklearnog goriva koje usled sažimanja brzo sagorava. Ovo gorivo može izgoreti veoma brzo, ili kao rezultat brzog sažimanja, ili kao posledica prolaska jakog udarnog talasa u toku razvoja supernove. Supernove tipa Ia su najkorisnije za kosmologe, zbog činjenice da sve imaju približno isti apsolutni sjaj. Ove supernove nemaju H i He linije u svom spektru, ali zato imaju jaku Si liniju na 615 nm. Prividni sjaj supernove odaje koliko je galaksija domaćin udaljena (na osnovu jednačina koje povezuju luminoznost, fluks energije i udaljenost), pa astronomi koriste upravo Ia supernove da utvrde vrednosti Hubble-ove konstante, Λ i Ω . To je moguće zbog velikih vrednosti energije koja iznosi $E \sim 10^{48} \text{ erg}$, pa su takve supernove vidljive na velikim vrednostima z . Za razliku od ovih vrsta, supernove nastale od masivnih zvezda vode poreklo od raznovrsnih zvezda, pa imaju različitu sjajnost, tako da nisu pogodne za kosmološka istraživanja.

Naravno, izbor između ove dve mogućnosti nameće i potrebu za što preciznijim merenjima ekspanzije Univerzuma, kako bi bilo potpunije i razumevanje načina na koji se Univerzum širi tokom vremena. Vrednost te ekspanzije je data kosmološkom jednačinom stanja, a određivanje jednačina stanja tamne energije predstavlja jedno od najvećih kosmoloških dostignuća današnjice. Dodavanjem kosmološke konstante standardnim kosmološkim teorijama (poput FRLW metrike⁸) došlo je do nastanka kosmološkog modela koji je poznat kao Λ -CDM model.

Kosmološki Λ -CDM model je model koji obuhvata šest parametara: $H, \Omega_b, \Omega_M, \tau, A_s, n_s$. Jedna od osnovnih postavki ovog modela je objašnjenje udela tamne energije ukupnoj gustini Ω_{tot} uticajem kosmološke konstante, pri čemu se ona uzima za vremenski nepromenljiv parametar. Tamna materija je hladna (što znači da je brzina mnogo manja od brzine c), a isto tako je i nebarionska (masivni neutritini, wimp-ovi, stringovi...), nekoliciona (čestice tamne materije interaguju jedino gravitacionom interakcijom) i ne rasipa se radijacijom fotona. Taj model se, skoro u potpunosti, slaže sa obavljenim kosmološkim posmatranjima, ali ne daje nikakva objašnjenja sa stanovišta fundamentalnog fizičkog porekla tamne energije i tamne materije.

Eksperimenti koji su ostvareni (u prvom redu WMAP - Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) potvrdili su, svojim rezultatima, da je geometrija našeg Univerzuma veoma bliska ravnoj, i da u njemu dominira upravo tamna energija i to nad celokupnom materijom koja uključuje tamnu materiju i barione.

WMAP je satelit koji je od strane NASA lansirao 2001.godine sa ciljem da meri temperaturu toplotnog zračenja poteklog od Big Bang-a. Podaci koji su prethodnih godina dobijeni analizom rezultata njegovih merenja dali su nekoliko ključnih kosmoloških zaključaka:

- Univerzum je star $13,73^{+0,13}_{-0,17}$ god
- Sastav Univerzuma je sledeći:
 - Gustina bariona $\Omega_b = 0,0444^{+0,0042}_{-0,0035}$
 - Gustina celokupne materije (barioni i tamna materija) $\Omega_M = 0,266^{+0,025}_{-0,040}$
 - Gustina tamne energije $\Omega_\Lambda = 0,732^{+0,040}_{-0,025}$
- Vrednost Hubbleove konstante je $H = 70,9^{+2,4}_{-3,2}$ km / sMpc

⁸ FRLW (Friedmann-Robertson-Lemaitre-Walker) metrika sadrži simetriju diktiranu kosmološkim principom, jer je linijski element dat izrazom $ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2$ neprimenljiv u prisustvu supstance što potvrđuje i opšta teorija relativnosti. Najopštiji oblik linijskog elementa u FRLW metrici je $ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t) du^2$, gde je du element rastojanja u 3D-spregnutom koordinatnom sistemu.

Proučavanje tamne energije koje se vršilo putem **Chandra-e** (Chandra X-ray Observatory) bazirano je na mogućnosti X-zraka da otkriju vreli gas u jatima galaksija. Iz ovako prikupljenih podataka, može se odrediti odnos između mase vrelog gasa i mase tamne energije u jatima galaksija. Dobijene vrednosti delova gasa zavise od pretpostavljene udaljenosti jata galaksija, koja opet zavisi od zakrivljenosti prostora i količine tamne energije u Univerzumu. Pošto su jata galaksija ogromna, mislilo se da ona predstavljaju najbolji i najtačniji uzorak sadržaja materije u Univerzumu. Ako je to tako, onda bi relativan iznos vrelog gasa i tamne materije trebalo da bude podjednak i za svako drugo jato galaksija. Uzimajući ovo kao pretpostavku, naučnici su odlučili da odrede koje od jata galaksija najpribližnije odgovara zadatom uzorku. Ovako merene razdaljine su pokazale da je širenje Univerzuma najpre bilo usporeno, a zatim je počelo da se ubrzava pre oko četiri milijarde godina. Posmatranja i rezultati koji su dobijeni se slažu sa rezultatima dobijenim posmatranjem supernova, uključujući i ona posmatranja koje je obavio Hubble svemirski teleskop (HST), koji je prvi pokazao da tamna energija utiče na ubrzano širenje Univerzuma. Rezultati koji su dobijeni putem Chandra-e su sasvim nezavisni, i nemaju nikakvu vezu sa tehnikom i metodom posmatranja i merenja koja su obavljana putem supernova, ali oba posmatranja su vršena na bazi merenja talasne dužine i posmatranog objekta.

Kosmolozi su procenili da je ubrzanje Univerzuma počelo pre oko četiri milijarde godina, a pre toga je širenje bilo u fazi usporavanja zbog privlačnog uticaja tamne materije i bariona. Gustina tamne materije se mnogo brže smanjuje u ekspandujućem Univerzumu nego gustina tamne energije, koja bi trebalo da očuvava svoju vrednost. To ukazuje i na eventualnu buduću dominaciju tamne energije.

Jedan predlog je da se tamna energija rasipa sa vremenom, i to je uslov koji se uzima pri tzv. Big-Crunch scenariju. To je scenario po kojem bi Univerzum doživeo urušavanje usled smanjenja tamne energije. Druga ideja je ona koja je razmatrana u četvrtom poglavlju ovog rada, a to je divergentno širenje Univerzuma uslovljeno tzv. fantomskom energijom. Ona ukazuje na mogućnost rasta sile te energije sa vremenom sve do momenta dok ne nadvlada sve ostale sile u Univerzumu (Big-Rip scenario). To bi značilo da ovakav oblik tamne energije može usloviti rastavljanje gravitaciono spregnutih objekata poput galaksija, a kasnije nadvladati i elektrostatičke i nuklearne sile, cepajući i same atome.

2.1. Kosmološka konstanta

Najjednostavnije objašnjenje tamne energije može se dati ako je ona predstavljena kosmološkom konstantom. Ona je proizvod vakuumskih fluktuacija u ranom Univerzumu, i ima negativan pritisak koji je jednak njenoj gustini energije, što je podatak kojim se može objasniti ubrzavanje širenja Univerzuma. Razlog zbog kojeg kosmološka konstanta ima negativan pritisak lako je shvatljiv ako se iskoristi klasična termodinamika. Razvoj fizike elementarnih čestica poslednjih decenija stvorio je uslov da se razume priroda interakcija čestica pri izuzetno visokim energijama, što je označilo i prodor u teoriji veoma guste materije. To omogućava stvaranje kvalitativne slike o ponašanju materije pri gustinama koje su bliske Planckovoj gustini ρ_{Pl} , pa samim tim i o procesima i evoluciji u najranijim stadijumima razvoja Univerzuma. Naročito značaj sa stanovišta kosmologije imaju rezultati velike teorije ujedinjenja (*eng. Grand Unified Theory – GUT*). Prema toj teoriji, utvrđeno je da pri promeni temperature izuzetno guste materije ($E \sim 10^{11} \text{ erg}$) dolazi do pojave spontanog narušavanja simetrije, odnosno faznih prelaza u kojima se svojstva materije bitno menjaju. Osnovna ideja je da u tako gustom stanju materije postoji potpuna simetrija između triju osnovnih sila, odnosno, da su one komponente jedne - ujedinjene sile. Snižavanjem temperature dolazi do spontanog narušavanja simetrije. To je pojava faznog prelaza posle kojeg pomenute sile postaju bitno različite po karakteru i jačini. Prema standardnom modelu, ovaj prelaz se dešava na kritičnoj temperaturi u trenutku $t \approx 10^{-35} \text{ s}$ nakon Velikog praska. Ideje koje su razmatrale probleme standardnog modela, uobličene su u tzv. Inflatorni model Univerzuma, koji su postavili Guth i Linde. Pri odgovarajućem izboru parametara u GUT fazni prelaz se može odvijati veoma sporo u odnosu na brzinu hlađenja (Univerzum se hladi usled širenja), pa se zbog toga oblast gasa koja predstavlja rani Univerzum može pothladiti znatno ispod kritične temperature faznog prelaza ($T \sim 10^{27} \text{ K}$), prelazeći u stanje tzv. lažnog vakuuma. Ovo stanje se, kao i mehanizam faznog prelaza, može opisati Higgsovim skalarnim poljem čija nulta vrednost odgovara gustini energije stanja lažnog vakuuma i koja je reda $\rho_f \sim 10^{93} \text{ erg/cm}^3$. Snižavanjem temperature, energija oblasti ranog Univerzuma prelazi u Higgsovo polje. Osnovna karakteristika lažnog vakuuma je negativna vrednost pritiska koji je jednak gustini energije. Kako je prema opštoj teoriji relativnosti gravitaciona sila proporcionalna zbiru pritiska i gustine, zbog negativne i velike vrednosti pritiska lažnog vakuuma ova sila postaje odbojna. Zbog toga će u stanju lažnog vakuuma ekspanzija biti ubrzana. Treba napomenuti da inflatorna era traje oko 10^{-32} s pri čemu se razmere posmatrane oblasti povećavaju i do 10^{50} puta, čak i više. Fazni prelaz se događa na kraju inflatorne ere, a energija lažnog vakuuma se oslobađa izazivajući enormnu produkciju čestica. Higgsova polja postaju različita od nule, oscilujući oko vrednosti koje odgovaraju realnom vakuumu. To se u kvantnoj verziji ove teorije tumači kao prisustvo Higgsovih čestica. Glavni problem koji ostaje je kako objasniti predviđanja većine kvantnih teorija polja koje predviđaju ogromnu kosmološku konstantu iz energije kvantnog vakuuma, veću čak 10^{120} puta nego što je pokazano [51], tako da mnoge teorije razmatraju ovaj problem.

Kao što je pomenuto, originalne Einsteinove jednačine polja su date izrazom $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$. Na velikim skalama Univerzum je prostorno homogen i izotropan, tako da je moguće ostvariti jednu odličnu aproksimaciju datu u obliku metrike Robertson-Walkera

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)R_0^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.1)$$

Faktor skaliranja a opisuje relativnu veličinu prostornog dela kao vremensku funkciju. Može se napisati u normalizovanoj formi $a(t) = R(t)/R_0$, gde indeks 0 označava njegovu vrednost u sadašnjem trenutku. Isto tako, moguće je povezati vrednost a sa crvenim pomakom z pomoću jednačine

$$a = \frac{1}{1 + z}, \quad (2.2)$$

što znači da faktor skaliranja ima jediničnu vrednost u sadašnjosti ($z = 0$).

Jednačine koje je postavio Einstein mogu se svesti na Friedmannove izraze

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \rho - \frac{k}{a^2 R_0^2} \quad (2.3)$$

gde figuriše Hublleov parametar $H \equiv \dot{a}/a$, i jednačinu

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) \quad (2.4)$$

Za konstrukciju statičkih rešenja Einstein je uveo još jedan parametar (Λ) koji je predstavljao kosmološku konstantu⁹. Modifikacija prethodnih rešenja je data jednačinama polja

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

⁹ Postojanje parametra Λ potvrđeno je otkrićem nehomogenosti u kosmičkoj mikrotalasnoj pozadini koju je prvi otkrio satelit COBE. Ponašanje ovih kosmičkih nehomogenosti u zavisnosti je od geometrije prostora, a noviji eksperimenti (BOOMERANG, MAXIMA, WMAP...) su pokazali da je geometrija našeg Univerzuma najpribližnija ravnoj, što je dovelo do zaključka da Λ zaista postoji, s obzrom da je nakon proučavanja supernova bila isključena mogućnost da Ω može imati visoke vrednosti.

Sa takvom modifikacijom, Friedmannova rešenja su

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2 R_0^2} , \quad (2.6)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$

Ove jednačine odražavaju statičku mogućnost sa pozitivnim prostornim zakrivljenjem i svim parametrima (ρ , p i Λ) različitim od nule. Ova mogućnost predstavlja Einsteinov statički Univerzum. Kasnije je Hubble otkrio ekspanziju Univerzuma, pa se javila sumnja u neophodnost postojanja jedne takve konstante, ali pomenuta merenja koja su sprovedena krajem 90-ih pokazala su da je njena vrednost zaista različita od nule. Procene su da Λ obično ne prelazi vrednosti od 10^{-57} cm^{-2} .

2.1.1. Energija vakuuma

Fizika elementarnih čestica, sa druge strane, dovela je još neke dodatne perspektive što se ovog pitanja tiče. Kosmološka konstanta upotrebljava se za merenje gustine energije vakuuma-stanja najmanje energije, i premda mi ne možemo računati energiju vakuuma sa nekom naročitom dozom poverljivosti, ta identifikacija nam omogućava da usvojimo jednu skalu različitih doprinosa koji određuju kosmološku konstantu. Ako usvojimo pojedinačno skalarno polje ϕ , sa potencijalnom energijom $V(\phi)$, možemo zapisati da je akcija jednaka [51]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (2.7)$$

Ovome odgovara tenzor energije-impulsa koji je sledećeg oblika:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} (g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi) g_{\mu\nu} - V(\phi) g_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

U ovoj teoriji, stanje se najnižom gustinom energije (ako ono postoji), biće ono u kojem nema doprinosa kinetičke energije, uključujući tu i $\partial_\mu \phi = 0$, za koje je $T_{\mu\nu} = -V(\phi_0) g_{\mu\nu}$, gde je ϕ_0 ona vrednost ϕ koja vrši minimizaciju $V(\phi)$. Nema principijelnih razloga zbog čega nestaje član $V(\phi_0)$.

Tenzor energije-impulsa za vakuum može se tada napisati kao

$$T_{\mu\nu}^{VAC} = -\rho_{VAC} g_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

Vakuum, takođe, može da se zamisli kao idealan fluid za koji važi

$$p_{VAC} = -\rho_{VAC} \quad (2.10)$$

Uključivanjem kosmološke konstante u prethodni izraz dobija se da je

$$\rho_{VAC} = \rho_V \equiv \frac{\Lambda}{8\pi} \quad (2.11)$$

Poreklo **identifikovanja kosmološke konstante sa energijom vakuuma** nalazi se upravo u gornjoj jednačini. Akcija koja se dobija u opštoj teoriji relativnosti u prisustvu najmanje, tzv. prazne (*eng. bare*) kosmološke konstante Λ_0 je

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda_0) \quad (2.12)$$

Zanimljivo je da se sprovođenjem određenih operacija na ovoj akciji (povećanje odgovarajućih članova materije), mogu dobiti jednačine polja (2.5). Na taj način, kosmološka konstanta je zamišljena kao jednostavna, konstantna veličina. Pored prazne kosmološke konstante, susrećemo se i sa pojmom tzv. efektivne kosmološke konstante. U opštoj teoriji relativnosti ona je definisana izrazom $\Lambda_{eff} = \Lambda = \Lambda_0 + \frac{8\pi G}{c^4} \langle \rho_{VAC} \rangle$. U klasičnom smislu, efektivna kosmološka konstanta predstavlja sumu prazne kosmološke konstante Λ_0 i potencijalne energije $V(\phi)$, gde se ta potencijalna energija kasnije može menjati sa vremenom pri prolasku Univerzuma kroz različite faze. Kvantna mehanika dodaje još jedan doprinos, od energije nulte tačke povezane sa fluktuacijama vakuuma. Ako usvojimo jednostavni harmonijski oscilator, na primer česticu sa jednodimenzionalnom promenom potencijala oblika $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$, u klasičnom tumačenju, vakuum će predstavljati stanje u kojem je čestica sa minimumom pokretljivosti i sa minimalnim potencijalom $x=0$, usled čega energija tog sistema iščezava. Kvantno-mehanički, pak, princip neodređenosti ne dozvoljava nam da sa jednakom verovatnoćom odredimo položaj i impuls izolovane čestice, tako da se nalazi da je najniže energetske stanje potencijala $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Ovde je važno da se istakne da energija nulte-tačke zavisi od sistema, u ovom slučaju od frekvencije. Potpuna analogija dešava se i u kvantnoj teoriji polja. Slobodno kvantno polje može se zamisliti kao kolekcija jednog beskonačnog broja harmonijskih oscilatora u prostoru impulsa. Formalno, nulta energija svake od beskonačnih kolekcija biće beskonačna.

Povezanost kvantne teorije polja i opšte teorije relativnosti u slučaju gustine energije vakuuma može se dati sledećim prikazom

$$(\rho_{VAC}) = \left(\begin{array}{c} \text{Energija nulte tačke vakuuma} \\ + \text{ fluktuacije} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{QCD gluon} \\ + \text{ i kvark kondenzati} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Higsovo} \\ \text{polje} \end{array} \right) + \dots$$

Sprovodeći analizu, dolazi se do saznanja da, u svetlu gravitacije, ukupna gustina energije koja je data izrazom $\rho_{\Lambda} \sim \hbar k_{\max}^4$ ne proizvodi značajne efekte i tradicionalno se odbacuje. Ali, u svakom slučaju, gravitacija ovde egzistira, i aktuelna vrednost energije vakuuma nosi veoma važne posledice. Isto tako i fluktuacije između samih vakuuma su veoma realne, što je potvrđeno i tzv. Casimirovim efektom¹⁰. Ukupna kosmološka konstanta (*eng. Net Cosmological Constant*), sa ove tačke gledišta, predstavlja sumu svih doprinosa u koje se ubrajaju i doprinos potencijalne energije iz skalarnih polja i fluktuacija nulte tačke (*eng. zero-point fluctuations*). Pri tome je bitno istaći narušavanje simetrije u standardnoj kvantnoj teoriji polja koje. Na primer, u Weinberg-Salam elektroslabom modelu, faze narušene i nenarušene simetrije su karakterisane razlikom potencijala koja za dati model iznosi $M_{EW} \cong 0,320 \text{ erg}$. Efektivna kosmološka konstanta ima različite vrednosti za dve različite epohe. Jedna vrednost je za fazu nenarušene simetrije koja je bila uspostavljena u ranom Univerzumu, pri dominaciji visokih temperatura, dok je druga vrednost za fazu narušene simetrije koja egzistira tokom današnje epohe i u kojoj su temperature niske. Na osnovu elektroslabe teorije, očekivana vrednost energije vakuuma je $\rho_{\Lambda}^{EW} \sim (200 \text{ GeV})^4 \sim 3 \cdot 10^{47} \text{ erg/cm}^3$. Ako bi koristili kvantnu hromodinamiku, vrednost koja se očekuje je $\rho_{\Lambda}^{QCD} \sim 1,6 \cdot 10^{36} \text{ erg/cm}^3$, a ako bi uspeali da koristimo običnu kvantnu teoriju polja sve do Planckove skale M_P , možemo očekivati vrednost $\rho_{\Lambda}^{Pl} \sim 2 \cdot 10^{110} \text{ erg/cm}^3$. Sa druge strane, dosadašnja kosmološka posmatranja ukazuju na vrednost od $|\rho_{\Lambda}^{OBS}| \sim 2 \cdot 10^{-10} \text{ erg/cm}^3$, koja je znatno manja nego bilo koja vrednost iznesena na osnovu različitih teorija. Ova velika razlika između merene i očekivane vrednosti predstavlja aktuelni problem koji se u teoriji naziva problem kosmološke konstante.

¹⁰ Casimirov efekat je rezultat kvantne teorije polja koja omogućava da u svakom fundamentalnom polju (poput EM-polja) može da se kvantizuje bilo koja tačka prostora. Holandski fizičar B. Casimir je uzračunao silu koja deluje između paralelnih ploča izloženih vakuumske fluktuacijama. Prisustvo metala i dielektrika menja očekivanu vrednost vakuuma za energiju EM-polja. Dobijena promena sile je data izrazom $F_c / A = -\hbar c \pi^2 / 240 a^2$, gde su A - površina ploče i a - rastojanje između ploča. Kada se one pomeraju jedna prema drugoj energija se smanjuje. Ovaj efekat iskorišćen je i za sličnu analizu Hawkingovog efekta koji uslovljava isparavanje crnih rupa, pri kojem jedna od čestica virtuelnog para biva zahvaćena od strane crne rupe dok druga odlazi van horizonta događaja.

2.1.2. Kosmološki parametri sa kosmološkom konstantom

Iz Friedmannovih jednačina (2.3) uvek možemo odrediti kritičnu vrednost gustine energije za koju je geometrija ravna ($k = 0$) i to za bilo koju vrednost Hubbleovog parametra. U pomenute jednačine ćemo, od sada, uključiti i efekte kosmološke konstante (kao i energije ρ_Λ u ukupnu energiju vakuuma). Kritična gustina je određena jednačinom

$$\rho_{crit} \equiv \frac{3H^2}{8\pi} \quad (2.14)$$

Uvek je mnogo prikladnije meriti ukupnu gustinu energije, pa se, u tom slučaju, pojavljuje i parametar Ω_{tot}

$$\Omega_{tot} \equiv \frac{\rho_{tot}}{\rho_{crit}} = \left(\frac{8\pi}{3H^2} \right) \rho_{tot} = \sum_{i=1}^n \Omega_i, \quad (2.15)$$

gde su Ω_i - delovi kritične gustine dati određenim komponentama (fotoni, barioni...).

Jedna vrlo korisna stvar koja proizilazi iz ove parametrizacije je direktna veza između vrednosti Ω i prostorne geometrije

$$k = \text{sgn}(\Omega_{tot} - 1) \quad (2.16)$$

Generalno, gustina energije ρ će uključivati doprinose različitih komponenti. Sa tačke gledišta kosmologije, relevantna osobina svake komponente je način na koji se njihova gustina energije razvija pri ekspanziji Univerzuma. Na sreću, to je često slučaj kada individualne komponente i imaju veoma jednostavne jednačine stanja oblika

$$p_i = w_i \rho_i, \quad (2.17)$$

gde je komponenta w_i konstantna. Uvrštavanjem ove jednačine stanja u jednačinu održanja energije-impulsa $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$, nalazimo da je zavisnost gustine energije data sa

$$\rho_i \propto a^{-n_i}, \quad (2.18)$$

gde je eksponent n_i povezan sa jednačinom stanja:

$$n_i = 3(1 + w_i) \quad (2.19)$$

Parametar gustine Ω_i je, očigledno, u svakoj komponenti definisan izrazom

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{crit}} = \left(\frac{8\pi}{3H^2} \right) \rho_i, \quad (2.20)$$

mada se češće koristi u nešto drugačijem obliku

$$\frac{\Omega_i}{\Omega_j} \propto a^{-(n_i - n_j)} \quad (2.21)$$

Najprostiji primer primene je za skup masivnih čestica sa zanemarljivim relativnim brzinama. Gustina energije za svaku od čestica može se odrediti na osnovu prethodnih jednačina. Energija zračenja je tako proporcionalna $\rho_R \propto a^{-4}$, dok je energija vakuuma koja se ne menja pri ekspanziji Univerzuma $\rho_\Lambda \propto a^0$. Iz jednačine (2.19) proizilazi negativni pritisak kada je energija vakuuma pozitivna. Konačno, u nekim slučajevima, korisno je naglasiti da član $-k/a^2 R_0^2$ u jednačini (2.6) predstavlja efektivnu gustinu energije u krivini, i definiše se sa $\rho_k \equiv -(3k/8\pi R_0^2)a^{-2}$. Trenutno postoje čvrsti razlozi da se veruje da je doprinos gustine energije zračenja manji nego gustine materije. To je zbog toga što fotoni ostvaruju doprinos u iznosu $\Omega_\gamma \sim 5 \cdot 10^{-5}$, uglavnom na temperaturi kosmičkog mikrotalasnog zračenja od $2,73^\circ\text{K}$. Usled ovoga se smatra da je parametrizacija Univerzuma sa stanovišta tih izvora određena izrazom u kojem figurišu vrednosti Ω_M i Ω_Λ . Pri tome je

$$\Omega_k = 1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{tot} \quad (2.22)$$

Tabela 1. Vrednosti parametara w_i i n_i za različite izvore energije

Izvori energija	w_i	n_i
materija	0	3
zračenje	1/3	4
zakrivljenje	-1/3	2
vakuum	-1	0

Naravno, mogućnosti nekih iznenađenja su uvek prisutne. Kao što je rečeno, merenja koja su se sprovodila u poslednje vreme (COBE¹¹, Ia Supernovae, Chandra, WMAP...) pokazuju da je oko 74% Univerzuma izgrađeno od tamne energije, negde oko 22% predstavlja doprinos hladne tamne materije, dok je ostatak dat učešćem obične barionske materije u obliku gasa i zvezda. Na osnovu jednačine (2.22) moguće je ispitati ponašanje Univerzuma, pri čemu treba znati da se pojedinačne komponente te jednačine menjaju sa vremenom. Koristeći se jednačinom (2.21) imamo da je

$$\Omega_{\Lambda} \propto a^2 \Omega_k \propto a^3 \Omega_M \quad (2.23)$$

Na primer, za vrednost parametra gustine $\Omega_{\Lambda} < 0$ predložen je pomenuti model Big-Crunch, po kojem će Univerzum doživeti rekolaps, dok bi za $\Omega_{\Lambda} > 0$ Univerzum imao večnu ekspanziju.

2.2. Kvintesencija

Kvintesencija predstavlja drugi oblik tamne energije. Postulirana je kao dinamičko, skalarno polje koje polako smanjuje svoj potencijal. U Univerzumu koji se ubrzano širi, prostorno homogeni skalar sa potencijalom $V(\phi) = V_0 e^{-\lambda \phi / m_P}$ pokorava se zakonu

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (2.24)$$

Ova jednačina se dobija korišćenjem prikaza interakcije skalarnog polja i skalarnog potencijala, pri čemu se uzima da je skalarno polje nepokretni, idealni gas.

Za takav slučaj, dat u teoriji skalarnih polja, komponente tenzora energije-impulsa su

$$\begin{aligned} T_{ii} &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V(\phi), \\ \rho &\equiv \langle T_{00} \rangle, \\ p &\equiv \langle T_{ii} \rangle \end{aligned} \quad (2.25)$$

¹¹ COBE - Cosmic Background Explorer, predstavlja satelit lansiran 1989. godine. Imao je ulogu u ispitivanju kosmičke mikrotalasne pozadine. Otkrićem njenog talasanja 1992.godine, po prvi put su "viđeni" ostaci Big-Banga. Smatra se da je to jedno od najbitnijih otkrića u istoriji kosmologije.

Na osnovu uzete aproksimacije, pritisak i gustina su dati jednačinama

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V(\phi), \quad (2.26)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi)$$

Na osnovu ovoga, Friedmannova rešenja data jednačinom (2.6) mogu se napisati u obliku

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V(\phi) \right] - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.28)$$

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V(\phi) \right] + \frac{\Lambda}{3}$$

Rešavanjem jednačine stanja za relativističku supstancu $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$, uz korišćenje navedenih vrednosti (2.28) dobija se jednačina vremenske evolucije skalarnog polja

$$\ddot{\phi} + 3H \left(\dot{\phi} + \frac{(\nabla\phi)^2}{\dot{\phi}} \right) + m^2\phi + V'(\phi) = 0 \quad (2.29)$$

Ovde tačke označavaju izvod po vremenu, a primom je označen izvod po potencijalu ϕ . Ako se zanemare masa i prostorni izvodi dobija se da je $\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0$, što je upravo jednačina (2.24). Isto tako, izrazi za ρ i p postaju:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi} + V(\phi), \quad (2.30)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi} - V(\phi)$$

Ovde je vredno istaći da se Hubbleov parametar H ponaša poput trenja: kada je $H > \sqrt{V''(\phi)}$, polje će biti skoro konstantno, dok će za $H < \sqrt{V''(\phi)}$ biti slobodno kotrljajuće.

Kako je gustina energije $\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$, a pritisak $p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$, tada je definisan parametar jednačine stanja koji se, u opštem slučaju, menja sa vremenom

$$w = \frac{p}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (2.31)$$

Za ovaj oblik tamne energije predviđeno je postojanje pritiska i gustine koji se menjaju tokom vremena, za razliku od standardne kosmološke konstante koja je opisana u prethodnom poglavlju. Mnogi modeli koji koriste kvintesenciju mogu da reše problem kosmološke konstante. Jedan od specijalnih slučajeva kvintesencije je i *k-essence*, što je skraćenica od Kinetic Quintessence, koji se odlikuje nestandardnim oblikom kinetičke energije. Tako, za slabo menjajuće polje i $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, imamo slučaj da je $w \sim -1$, i potencijal skalarnog polja se ponaša poput kosmološke konstante.

Postoji više razloga zbog kojih se usvaja dinamička tamna energija kao alternativa kosmološkoj konstanti. Prvi, i osnovni, je taj da to može biti logička mogućnost sa velikom dozom tačnosti, i da je u skladu sa verovanjem da konačna energija vakuuma ipak mora biti jednaka nuli. Međutim, još jedna vrlo značajna mogućnost je proizašla iz ovog modela: zamenjivanje konstante Λ dinamičkim poljem može nam olakšati neke od teškoća koje su vezane za modele se kosmološkom konstantom i to tzv. *tracking* postupkom koji se sve više upotrebljava u kosmologiji.

Međutim, i model kvintesencije ima dosta nejasnoća i nedostataka. Jedan od njih je i problem njegovog implementiranja u kontekst realističnih modela. Problem se nalazi u tome da kvintesenciono polje mora biti veoma slabo podložno bilo kakvom sparivanju sa običnom materijom. Taj problem ima nekoliko oblika, a jedan od njih je i zahtev da polje kvintesencije mora biti veoma slabo, jer se QCD teorijom¹² dobija da je efektivna masa fluktuacija u skalarnom polju svega $m_\phi \sim 10^{-33} eV$, što je izuzetno mala masa za standarde fizike elementarnih čestica. Drugačija verzija za funkcionisanje kvintesencionog modela predložena tzv. Pseudo-Goldston bozon modelom kvintesencije pokušava da reši ovu situaciju. Tu je bitno napomenuti da je pseudo-Goldstonove bozone možda moguće detektovati, jer imaju svojstvo da rotiraju polarizovano zračenje iz galaksija i mikrotalasnog pozadinskog zračenja, tako da u budućnosti treba očekivati zanimljiv rezultat iz ove oblasti.

¹² QCD (eng. *Quantum Chromodynamics*) je skraćenica za kvantnu hromodinamiku. Ona predstavlja kvantnu teoriju gluonskih i kvarkovskih polja, i njihovih interakcija uslovljenih nabojem boja.

2.3. Stvaranje tema za naredne debate

Grupa Britanskih astronoma objavila je krajem 2004.godine da je pronašla dokaze po kojima je prvobitni mikrotalasni eho možda promenjen, ili čak u iskrivljenom obliku stigao do nas na putu do Zemlje dugom 13 milijardi godina.

Rezultati dobijeni od tima naučnika sa Univerziteta u Durham-u, predvođeni profesorom Tom Shanksom, se baziraju na novim analizama podataka dobijenim od WMAP satelita. Navedeni tim je pronašao da se najbliže jata galaksija nalazi u delu neba gde je mikrotalasna temperatura znatno niža od prosečne. Ovo stanje se može pripisati vreloj gasu koji se nalazi u jatu galaksija. Taj gas stupa u interakciju sa fotonima nastalim Velikom Praskom, koji prolaze i na taj način ometaju njihovu informaciju koja se nalazi u ehu prvobitnog praska. Ruski fizičari Rašid A. Sunjajev i Jakov B. Zeldovič su predvideli ovakav efekat još ranih 1970-ih, odmah nakon otkrića mikrotalasnog zračenja. Efekat koji su otkrili Rusi je prethodno bio viđen u slučaju detaljnog posmatranja pozadinskog mikrotalasnog zračenja u blizini nekoliko veoma velikih jata galaksija, a i sam tim WMAP-a je podneo izveštaj kada je opazio isti efekat u blizini centra galaktičkog jata.

Naučni tim iz Durham-a je pronašao dokaze da vrelo gas u galaktičkim jatima može da utiče na mikrotalasnu mapu pozadine i do jednog stepena od centra galaktičkog jata, što je mnogo veća oblast nego što je ranije bilo otkriveno. Ovo sugeriše da i pozicija "jata sačinjenih od jata" ili takozvana super jata galaksija, mogu takođe da se podudaraju sa hladnim tačkama u uzorku fluktuacije mikrotalasnog pozadinskog zračenja. Elektroni iz obližnjih jata galaksija u sudaru sa fotonima koji dolaze iz pozadinskog mikrotalasnog zračenja razbijaju - rasejavaju fotone, što prouzrokuje veoma bitne promene na zračenje dok ono putujući kroz "vreme" stigne do nas. Ako jata galaksija koja su locirana nekoliko milijardi svetlosnih godina od nas, takođe imaju isti efekat, onda se mora modifikovati dosadašnje tumačenje mapa mikrotalasnog pozadinskog zračenja.

Ukoliko rezultati naučnog tima iz Darema budu potvrđeni, onda bi za kosmologiju moglo biti od izuzetnog značaja da objašnjenje za postojanje tamne materije i energije leži u samoj strukturi čestica - talasa kojim se Univerzum širio. Oni su otkriveni u mikrotalasnom pozadinskom zračenju. Sadašnja merenja mikrotalasnog eha prvobitnog praska je možda neka vrsta kompromisa koji se odigrao u toku procesa formiranja galaksija u nekom srednjem vremenskom periodu sveukupne istorije univerzuma. Naučnici su podneli dokaze da je gas koji je bio zagrevan u prvorodenim zvezdama nastalim u galaksijama i kvazarima, možda takođe uticao da se ometa mikrotalasni signal, kada je univerzum bio 10 do 20 puta manji, nego što je danas, što navodi na zaključak da je mikrotalasni eho Big Banga morao da prođe kroz mnogo više prepreka na svom putu do Zemlje nego što se to ranije mislilo, sa posledicama mogućeg iskrivljenja prvobitnog signala. Ovi rezultati mogu konačno da uzdrmaju verovanje da u Univerzumu dominira nevidljiva-neuhvatljiva tamna materija, i još zagonetnija tamna energija.

Mada su dokazi koji se traže kod izvršenih posmatranja za standardni model kosmologije i dalje veoma strogi, sadašnji model Univerzuma sadrži i vrlo neprijatne aspekte. Ovo proizilazi prevashodno iz činjenice da se današnje teorije baziraju na dva elementa koja se smatraju kao neotkriveni deo fizike: hladnoj tamnoj materiji i tamnoj energiji koje do sada nisu bile otkrivene u laboratorijama. I zaista, uvođenjem ove dve nove komponente bi se prilično iskomplikovala dosadašnja uverenja o standardnom modelu širenja Univerzuma nakon Velikog Praska.

Jedna od novijih ideja je ona koja povezuje tamnu energiju sa neutrinima, subatomske čestice koje retko stupaju u interakciju sa drugom materijom, ali koje imaju određenu masu. Neutrini se generišu na Suncu i na drugim zvezdama, i smatra se da su produkt Velikog Praska. Konvencionalna teorija smatra da se masa neutrina ne menja tokom vremena, dok u najnovijoj teoriji neutrinu dobijaju u masi sa povećanjem prostora koji se nalazi između njih. U vreme ranog Univerzuma, neutrinu su bili upakovani relativno zgusnuto. Danas su oni dosta razdvojeni, udaljeni jedni od drugih, tako da je svaki neutrino dobio dosta na masi, kako sugerise nova teorija. Kako se sve više udaljavaju, tako se povećava i sila zatezanja između njih. Neutrini stvaraju polje ubrzanja, kao što na primer čestice pod nabojem stvaraju električno polje (sa izuzetkom što je ova sila kod neutrina uvek privlačna sila). Neutrini koji su preostali od momenta Velikog Praska su stvorili jedno ravnomerno polje ubrzanja kroz ceo Univerzum, a energija toga polja daje "silu ubrzanja" koja bi mogla da doprinosi širenju Univerzuma. Opšta teorija relativnosti predviđa da je jačina-koncentracija energije u Univerzumu u direktnoj relaciji sa stopom ekspanzije. Kako se Univerzum širi, snaga energije opada, i Univerzum bi trebalo da usporava širenje, međutim, pošto se širenje ubrzava, verovatno onda neka druga forma energije i njena snaga vrše uticaj na ubrzano širenje Univerzuma. Ekspanzijom Univerzuma, masa neutrina takođe raste. Teorija takođe predviđa da će neutrinu promeniti masu u zavisnosti u kakvoj zbijenoj okolini obične materije se nalaze, slično tome kako svetlost izgleda drugačije ako prolazi kroz vazduh, vodu ili kroz prizmu. Možda će to uskoro moći da se izmeri u nekim velikim laboratorijama sa jakim akceleratorima čestica (CERN-Švajcarska), nuklearnim reaktorima, ili čak merenjem mase neutrina koji nam dolaze sa Sunca. Poput i drugih teorija o tamnoj energiji, ni ova se ne može dokazati upravo sada, pa su naučnici veoma oprezni i rezervisani u njenom procenjivanju. Robert Scherrer profesor na Vanderbilt Univerzitetu, nedavno je izneo mišljenje da je tamna energija u uskoj povezanosti sa tamnom materijom. Na primer, tamna materija nam možda nudi objašnjenje zašto se zvezde neke pojedinačne galaksije drže zajedno grupisane u vrtlogu spirale, umesto da se udaljavaju.

Problem tamne energije praktično doseže veoma duboko. Na primer, posmatrana gustina je toliko mala da bi mogla biti na nivou kvantne mehanike nestabilna. Ona takođe zadaje probleme i teoriji kvantne gravitacije, koja nam nameće razmišljanja da možda živimo u Univerzumu koji ima mnogo više dimenzija, koje su sve skupljene u prostoru i vremenu. Mnogi teoretičari bi voleli da nauka nađe neki novi pristup objašnjenja modela univerzuma, koji bi se razlikovao od dosadašnjeg standardnog modela poznatog u kosmologiji, i oni sa nestrpljenjem očekuju da vide u kom će pravcu dalje ići diskusija.

3. Zračenje izolovane crne rupe

U ovom delu biće analizirano zračenje izolovane crne rupe (crne rupe koja ne apsorbuje spoljašnje zračenje ili materiju). Pokazano je da crna rupa poseduje entropiju i temperaturu, a proračuni su se odnosili na crnu rupu čiji se parametri M, J, Q ne menjaju tokom vremena. Kako crna rupa emituje zračenje, njena masa (a u opštem slučaju i J, Q) se smanjuje. Ovde dolazi do promene veličina S i T , što ukazuje da stacionarna Schwarzschildova metrika (1.1) ne opisuje realnu situaciju. U realnosti, masa crne rupe nije konstantna već se menja tokom vremena. Da bi se našla vremenska zavisnost promene mase crne rupe može se poći od toga da spektar elementarnih čestica koje crna rupa emituje zavisi od njene temperature. Emitovanje čestica određenog tipa postaje znatno tek kada je $k_B T \sim E$, gde je sa E označena energija mirovanja tih čestica. Za crne rupe zvezdanih masa, temperatura je u početnoj fazi izuzetno niska pa zato treba očekivati da su emitovane čestice uglavnom fotoni i neutrimi. Kako crna rupa emituje energiju, tako i njena temperatura raste. Zato će vremenom ona emitovati sve veći broj vrsta čestica.

Pretpostavimo da zračenje crne rupe ima termalni karakter, tako da se mogu primeniti zakoni zračenja crnog tela. Crna rupa mase M ima temperaturu

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \quad (3.1)$$

Pretpostavimo, isto tako, da crna rupa emituje samo fotone. Tada ona sa jedinice površine horizonta događaja u jedinici vremena emituje energiju

$$P = \sigma T^4 = \sigma \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B} \right)^4 \frac{1}{M^4} \quad (3.2)$$

U slučaju Schwarzschildove crne rupe, površina horizonta događaja A je

$$A = 4\pi R_g^2 = \frac{16\pi G^2}{c^4} M^2 \quad (3.3)$$

Energija koju crna rupa emituje sa površine horizonta događaja, u toku vremena dt , jednaka je

$$dE = APdt = \frac{\sigma \hbar^4 c^8}{256\pi^3 G^2 k_B^4} \frac{1}{M^2} dt \quad (3.4)$$

Gubitak energije crne rupe jednak je energiji emitovanoj u obliku fotona. Pošto je ukupna energija mirovanja koju crna rupa poseduje jednaka Mc^2 , može se napisati da je gubitak energije $c^2 dM = -dE$, pa je

$$dM = -\frac{\sigma \hbar^4 c^6}{256\pi^3 G^2 k_B^4} \frac{1}{M^2} dt \quad (3.5)$$

Rešavanjem ove diferencijalne jednačine, uz početan uslov da je $M = M_0$ za $t = 0$ dobija se zavisnost mase od koordinatnog vremena t :

$$M(t) = M_0 (1 - \beta t)^{\frac{1}{3}} \quad (3.6)$$

gde je $\beta = \frac{3\sigma \hbar^4 c^6}{256\pi^3 G^2 k_B^4} \frac{1}{M_0^3}$. Treba naglasiti da ova vrednost β ne predstavlja isti parametar koji se pojavljuje u II poglavlju!

Za vreme života crne rupe dobija se vrednost (izražena u sunčevim masama M_s)

$$t_i = 6 \cdot 10^{74} \left(\frac{M_0}{M_s} \right)^3 s \quad (3.7)$$

Kako je u pitanju koordinatno vreme t , ovo je vreme života koje meri posmatrač koji miruje (r, θ, φ su konstantni) na nekom rastojanju $r \gg 2M$, što bi predstavljalo rastojanje u beskonačnosti. Na osnovu jednačine (3.7) moguće je izvesti zaključak da je vreme života crne rupe veoma veliko. Za crne rupe solarnih masa ovo vreme je $t \sim 10^{74} s$, što je neuporedivo veće od procenjene starosti Univerzuma ($t \sim 10^{17} s$). Astrofizičke crne rupe nastaju gravitacionim kolapsom zvezda koje imaju mase veće od tri sunčeve mase. U tom slučaju je i vreme života još veće. Iz ovoga jasno sledi da nijedna crna rupa u Univerzumu koja je nastala kolapsom neke zvezde još nije isparila. Za to je potrebna crna rupa mnogo manje mase. Jednačina (3.7) daje vrednost ove kritične mase, i ona iznosi $M \sim 10^{12} kg$. Iako je ova kritična masa makroskopski velika, radijus koji joj odgovara je mikroskopski mali $R \sim 10^{-15} m$. Na ovim rastojanjima kvantna mehanika sigurno igra veliku ulogu, tako da dalji procesi zavise od detalja fizike elementarnih čestica. Crne rupe ovih masa (primordijalne crne rupe) mogle su nastati u početnoj fazi širenja Univerzuma usled lokalnih fluktuacija gustine [44], [45], [48], [60]. U svom poslednjem stadijumu, neposredno pre iščeznuća, crna rupa emituje veliku količinu energije u vidu eksplozije. Oslobođena energija je jednim delom i u vidu γ -zračenja i radio-talasa i u vidljivom delu spektra, što daje mogućnost eksperimentalnog otkrivanja ovih izvora.

Ostaje, znači, pitanje minimalne mase crne rupe. Naime, da li crna rupa u potpunosti ispari ostavljajući za sobom prostor ispunjen zračenjem, ili joj se masa smanji na neku minimalnu vrednost i ona postane stabilna? Prema nekim teorijama, ne postoji minimalna masa crne rupe. U tom slučaju bi bio moguć proces kojim neka elementarna čestica tunel-efektom prelazi u crnu rupu i zatim isparava u iz nje u vidu zračenja. Druga mogućnost je da je minimalna masa crne rupe jednaka Planckovoj masi ($M_p \sim 2 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$). U ovom slučaju, kada se ta vrednost dostigne, crna rupa nestaje u vidu eksplozije zračenja. Ova mogućnost je u ovom radu prihvaćena. U nekoj drugoj varijanti, crna rupa Planck-ove mase bi bila stabilna i predstavljala bi elementarnu crnu rupu-tzv.maksimon.

Kao što je navedeno, metrika data izrazom (1.2) opisuje stacionarnu crnu rupu konstantne mase. Postavlja se pitanje pronalaženja metričke forme u slučaju kada se masa crne rupe smanjuje usled emitovanja čestica. Da bi se ovaj problem rešio potrebno je pronaći tenzor energije-impulsa za crnu rupu promenljive mase. Kada se ovaj tenzor uvrsti u jednačine polja (2.5) dobija se sistem diferencijalnih jednačina čijim se rešavanjem, u principu, može dobiti metrički tenzor $g_{\mu\nu}$. U okviru kvantne teorije polja u zakrivljenom prostor-vremenu mogu se dobiti izvesni oblici ovog tenzora energije-impulsa (De Witt, 1975.godine). Oni zavise od detalja teorije i u opštem slučaju ne moraju biti međusobno saglasni. Problemi se sastoje u izboru osnovnog vakuumske stanja polja u zakrivljenom prostor-vremenu i od načina regularizacije tenzora energije-impulsa. Poreg toga, ovi proračuni su vršeni za slučaj metrike (1.2) sa konstantnom masom. Zbog toga je u ovom proračunu korišćen prikaz metričke forme sa promenljivom masom kao sukcesivan niz stacionarnih Schwarzschildovih rešenja sa masom $M(\tau)$, gde je τ neki afini parametar koji karakteriše datu hiperpovrš. Pošto je početno stanje sferno simetrično, a i zračenje koje potiče od rupe izotropno, može se očekivati i da rešenja na narednim hiperpovršima budu sferno-simetrična. Metrika se može napisati kao

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M(\tau)}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M(\tau)}{r}\right)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.8)$$

Ovaj oblik metrike je samo aproksimativan i ne mora, u opštem slučaju, potpuno odgovarati stvarnom rešenju. Prema teoremi Birkhova svaka sferno-simetrična metrika koja predstavlja rešenje jednačina polja (2.5) u vakuumu, mora se opisivati Schwarzschild-ovom metrikom. U našem slučaju prostor oko crne rupe neće biti potpuno prazan, već će sadržati emitovane čestice. Uticaj ovih čestica na metriku može se zanemariti u ovoj aproksimaciji.

Sada se postavlja pitanje izbora afinog parametra τ . Ukoliko se za afini parametar izabere koordinatno vreme t , masa će biti funkcija oblika (3.6), dok će metrika biti

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M_0(1-\beta t)^{\frac{1}{3}}}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M_0(1-\beta t)^{\frac{1}{3}}}{r} \right)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.9)$$

Izborom koordinatnog vremena za parametar τ , metrika (3.8) i dalje je singularna, ali više ne na konstantnom rastojanju $r = 2M_0$, već na promenljivom rastojanju $r = 2M(t)$. Koordinatni sistem (t, r, θ, φ) nije zbog toga povoljan za opisivanje metrike u blizini horizonta. Ovde je od interesa realna astrofizička situacija, odnosno crna rupa nastala gravitacionim kolapsom zvezde. U tom slučaju prostor-vreme se može podeliti na nekoliko oblasti. Prva oblast predstavlja prostor-vreme izvan zvezde pre njenog kolapsa i ona je opisana metrikom (1.2). Unutar kolapsirajuće zvezde je druga oblast i ona je opisana metrikom (1.1), dok je nakon formiranja crne rupe (treća oblast) ona data u obliku (3.9). Konačno, crna rupa isparava i ostaje prostor ispunjen zračenjem-četvrta oblast.

Ukoliko se komponente metričkog tenzora $g_{\mu\nu}$, dobijene iz jednačine (3.9), uvrste u desnu stranu jednačina polja (3.5), može se dobiti tenzor energije-impulsa u slučaju crne rupe sa promenljivom masom. Za dobijeni oblik tenzora energije-impulsa metrika (3.9) će predstavljati tačno rešenje. Da bi se dobio taj tenzor, može se početi od sledećeg razmatranja. Posmatrajmo najpre sferno-simetričnu metriku u obliku

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Psi} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.10)$$

gde je

$$\Phi = \Phi(r, t) \quad \Psi = \Psi(r, t) \quad (3.11)$$

U koordinatnom bazu su bazisne 1-forme date izrazima

$$\omega^t = dt \quad ; \quad \omega^r = dr \quad ; \quad \omega^\theta = d\theta \quad ; \quad \omega^\varphi = d\varphi \quad (3.12)$$

sa prisutnim tzv. Cartanovim operatorom spoljašnjeg izvoda d

Pri proračunu je mnogo jednostavnije preći na ortonormirani bazis, a sve veličine u njemu će biti označavane indeksima sa $\hat{}$. Metrika (3.10) se može napisati u ortonormiranom bazisu 1-formi $\omega^{\hat{\mu}}$ u obliku

$$ds^2 = -(\omega^{\hat{t}})^2 + (\omega^{\hat{r}})^2 + (\omega^{\hat{\theta}})^2 + (\omega^{\hat{\phi}})^2 \quad (3.13)$$

$$\omega^{\hat{t}} = e^{\Phi} dt \ ; \ \omega^{\hat{r}} = e^{\Psi} dr \ ; \ \omega^{\hat{\theta}} = r d\theta \ ; \ \omega^{\hat{\phi}} = r \sin \theta d\theta \quad (3.14)$$

Veza između ortonormiranog i koordinatnog bazisa data je preko relacija

$$\omega^{\mu} = \Psi_{\hat{\nu}}^{\mu} \omega^{\hat{\nu}} \quad (3.15)$$

gde su koeficijenti transformacije, na osnovu (3.12) i (3.14), dati izrazima

$$\Psi_{\hat{t}}^t = e^{-\Phi} \ ; \ \Psi_{\hat{r}}^r = e^{-\Psi} \ ; \ \Psi_{\hat{\theta}}^{\theta} = \frac{1}{r} \ ; \ \Psi_{\hat{\phi}}^{\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \quad (3.16)$$

Ostale komponente Ψ jednake su nuli. Za nalaženje vrednosti tenzora energije-impulsa potrebno je izračunati levu stranu jednačina polja, odnosno Einstein-ov tenzor $G^{\mu\nu}$. To se može uraditi na sledeći način:

2-forma krivine $\mathfrak{R}_{\nu}^{\mu}$ definisana je jednačinom

$$\mathfrak{R}_{\mu}^{\nu} \equiv d\omega_{\nu}^{\mu} + \omega_{\alpha}^{\mu} \wedge \omega_{\nu}^{\alpha} \quad (3.17)$$

$$\omega_{\nu}^{\mu} \equiv \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} \omega^{\lambda}$$

gde su $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ komponente afile koneksije. U jednačini (3.17) pojavljuje se $\wedge$ - oznaka za tzv. kosi proizvod tenzora¹³. Ova 2-forma krivine povezana je sa Rimanovim tenzorom krivine $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$ na sledeći način

$$\mathfrak{R}^{\mu\nu} = R^{\mu\nu}_{[\alpha\beta]} \omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \quad (3.18)$$

¹³ Ako se uvede tenzorski proizvod $u \otimes v$ pri čemu je $g = \eta_{\mu\nu} \omega^{\mu} \otimes \omega^{\nu} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}$, kosi proizvod tenzora $\alpha \wedge \beta$ se može zapisati u obliku $\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$.

Ovde vertikalne crte $||$ označavaju da se sumiranje po indeksima α, β vrši samo za $\alpha < \beta$. Na ovaj način se izračunavanjem 2-forme krivine (3.17) mogu iz jednačine (3.18) dobiti komponente Riemannovog tenzora krivine. Sam tenzor $G^{\mu\nu}$ može se dobiti iz Riemannovog tenzora

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &\equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R, \\ R_{\mu\nu} &\equiv R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}, \\ R &\equiv R^{\mu}_{\mu} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ukoliko se jednačine (3.17) iskoriste u slučaju bazisa 1-formi oblika (3.14) može se dobiti 2-forma krivine u ovom ortonormiranom bazisu koja je data na sledeći način

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^{\hat{t}}_{\hat{r}} &= E \omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{r}}, & \mathfrak{R}^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}} &= F \omega^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} \\ \mathfrak{R}^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} &= \bar{E} \omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} + H \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\theta}}, & \mathfrak{R}^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} &= \bar{F} \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} - H \omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} \\ \mathfrak{R}^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} &= \bar{E} \omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} + H \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}, & \mathfrak{R}^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} &= \bar{F} \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} - H \omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ostale komponente su jednake nuli, izuzev onih koje slede na osnovu antisimetrije 2-forme krivine

$$\mathfrak{R}^{\mu\nu} = -\mathfrak{R}^{\nu\mu} \quad (3.21)$$

Ovde su E, F i H funkcije r i t , i date su sledećim jednačinama

$$\begin{aligned} E &= e^{-2\Phi} \left(\ddot{\Psi} + \dot{\Psi}^2 - \dot{\Psi}\dot{\Phi} \right) - e^{-2\Psi} \left(\Phi'' + \Phi'^2 - \Psi'\Phi' \right), \\ \bar{E} &= -\frac{1}{r} e^{-2\Psi} \Phi', \\ F &= \frac{1}{r^2} \left(1 - e^{-2\Psi} \right), \\ \bar{F} &= \frac{1}{r} e^{-2\Psi} \Psi', \\ H &= -\frac{1}{r} e^{-\Psi-\Phi} \dot{\Psi}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

Tačka označava diferenciranje po koordinati t , dok je oznakom $'$ označeno diferenciranje po koordinati r .

Na osnovu jednačina (3.22), (3.20) i (3.18) mogu se naći komponente Riemannovog tenzora $R^\mu_{\nu\alpha\lambda}$, a zatim i Einsteinovog tenzora $G^{\mu\nu}$ u ortonormiranom bazu (3.14)

$$\begin{aligned}
 G^{\hat{t}\hat{t}} &= -G^{\hat{t}}_{\hat{t}} = F + 2\bar{F}, \\
 G^{\hat{t}\hat{r}} &= G^{\hat{t}}_{\hat{r}} = 2H, \\
 G^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} &= G^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} = 0, \\
 G^{\hat{r}}_{\hat{r}} &= -(2\bar{E} + F), \\
 G^{\hat{\theta}}_{\hat{\theta}} &= G^{\hat{\phi}}_{\hat{\phi}} = -(E + \bar{E} + \bar{F}), \\
 G^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} &= G^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = G^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}} = 0
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ostale komponente mogu se dobiti na osnovu simetrije Einsteinovog tenzora $G^{\mu\nu} = G^{\nu\mu}$. Svi dosadašnji rezultati mogu se sada primeniti na specijalan slučaj metrike oblika (3.8). U tom slučaju, funkcije Ψ i Φ su date sledećim izrazom

$$\Phi(r, t) = -\Psi(r, t) = \frac{1}{2} \ln \left| 1 - \frac{2M(t)}{r} \right| \tag{3.24}$$

Na osnovu ovoga, sada se mogu pronaći izvodi funkcija Ψ i Φ po promenljivima r i t , što je neophodno za izračunavanje veličina E, F i H . Ovi izvodi su jednaki

$$\begin{aligned}
 \Phi'(r, t) &= \frac{M(t)}{r^2} \left(1 - \frac{2M(t)}{r} \right)^{-1}, \\
 \Phi''(r, t) &= -\frac{2M(t)}{r^3} \left(1 - \frac{2M(t)}{r} \right)^{-1} \left[1 + \frac{M(t)}{r} \left(1 - \frac{2M(t)}{r} \right)^{-1} \right], \\
 \dot{\Phi}(r, t) &= -\frac{\dot{M}(t)}{r} \left(1 - \frac{2M(t)}{r} \right)^{-1}, \\
 \ddot{\Phi}(r, t) &= -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{2M(t)}{r} \right)^{-1} \left[\ddot{M}(t) + \frac{2\dot{M}^2(t)}{r} \left(1 - \frac{2M(t)}{r} \right)^{-1} \right]
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Svi izvodi funkcije $\Psi(r,t)$ su jednaki odgovarajućim izvodima $\Phi(r,t)$, ali uzetim sa suprotnim znakom, što sledi na osnovu (3.24). Uzimajući ovo u obzir, kao i jednačine (3.25), mogu se sada izračunati funkcije E, F i H . Konačno, one su date sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned}
 E(r,t) &= \left(1 - \frac{2M(t)}{r}\right)^{-2} \left[\frac{2\dot{M}(t)}{r^2} \left(1 - \frac{2M(t)}{r}\right)^{-1} \right] + \\
 &+ \left[\frac{1}{r} \left(\ddot{M}(t) + \frac{2\dot{M}^2(t)}{r} \left(1 - \frac{2M(t)}{r}\right) \right) + \frac{2M(t)}{r^3} \right], \\
 \bar{E}(r,t) &= \bar{F}(r,t) = -\frac{M(t)}{r^3}, \\
 H(r,t) &= -\frac{\dot{M}(t)}{r^2} \left(1 - \frac{2M(t)}{r}\right)^{-1}, \\
 F(r,t) &= \frac{2M(t)}{r^3}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

U svim dosadašnjim izrazima za E, F i H uzet je opšti slučaj da je $M(t)$ neka proizvoljna funkcija koordinatnog vremena t . Sada se za $M(t)$ može uzeti funkcija oblika (3.6), pa je stoga potrebno naći izvode $M(t)$ po koordinatnom vremenu t . Dobija se da je

$$\begin{aligned}
 \dot{M}(t) &= -\frac{1}{3} \beta M_0 (1 - \beta t)^{-\frac{2}{3}}, \\
 \ddot{M}(t) &= -\frac{2}{9} \beta^2 M_0 (1 - \beta t)^{-\frac{5}{3}}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Uvrštavanjem izraza (3.27) u jednačine (3.26) dobija se konkretan oblik funkcija E, F i H . Njihovim uvrštavanjem u (3.23) nalaze se komponente Einstein-ovog tenzora u ortonormiranom bazu (3.14). Na osnovu jednačina polja (2.5) i definicije Einstein-ovog tenzora (3.19), posle nešto dužeg računa, konačno se mogu pronaći komponente tenzora energije-impulsa u slučaju Schwarzschildove crne rupe koja emituje zračenje.

$$T^{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \frac{G^{\hat{\theta}\hat{\theta}}}{8\pi} = -\frac{\beta^2 M_0}{36\pi r} (1-\beta t)^{-\frac{4}{3}} \left[1 - \frac{2M_0}{r} (1-\beta t)^{\frac{1}{3}} \right]^{-2} \left\{ -(1-\beta t)^{-\frac{1}{3}} + \right. \\ \left. + \frac{M_0}{r} \left[\left(1 - \frac{2M_0}{r} (1-\beta t)^{\frac{1}{3}} \right) + \left(1 - \frac{2M_0}{r} (1-\beta t)^{\frac{1}{3}} \right)^{-1} \right] \right\}, \quad (3.28)$$

$$T^{\hat{\phi}\hat{\phi}} = T^{\hat{\theta}\hat{\theta}}, \quad (3.29)$$

$$T^{\hat{r}\hat{t}} = \frac{1}{8\pi} G^{\hat{r}\hat{t}} = \frac{\beta M_0}{12\pi r^2} (1-\beta t)^{-\frac{2}{3}} \left[1 - \frac{2M_0}{r} (1-\beta t)^{\frac{1}{3}} \right]^{-1} \quad (3.30)$$

Sve ostale komponente su za dati tenzor energije–impulsa jednake nuli.

Da bi se našao oblik tenzora energije-impulsa u koordinatnom sistemu (r, t, θ, φ) može se iskoristiti veza sa ortonormiranim sistemom

$$T^{\mu\nu} = \Psi_{\hat{\alpha}}^{\mu} \Psi_{\hat{\beta}}^{\nu} T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \quad (3.31)$$

Polazeći od izraza za komponente Ψ , i izraza (3.16) i (3.31) sledi :

$$T^{tr} = \Psi_{\hat{\alpha}}^t \Psi_{\hat{\beta}}^r T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \Psi_{\hat{t}}^t \Psi_{\hat{r}}^r T^{\hat{t}\hat{r}} = T^{\hat{t}\hat{r}}, \\ T^{\theta\theta} = \Psi_{\hat{\alpha}}^{\theta} \Psi_{\hat{\beta}}^{\theta} T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \Psi_{\hat{\theta}}^{\theta} \Psi_{\hat{\theta}}^{\theta} T^{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \frac{1}{r^2} T^{\hat{\theta}\hat{\theta}}, \\ T^{\varphi\varphi} = \Psi_{\hat{\alpha}}^{\varphi} \Psi_{\hat{\beta}}^{\varphi} T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \Psi_{\hat{\phi}}^{\varphi} \Psi_{\hat{\phi}}^{\varphi} T^{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} T^{\hat{\phi}\hat{\phi}} \quad (3.32)$$

Konačno se, na osnovu veze između koordinatnog i ortonormiranog bazisa (3.32), kao i na osnovu (3.28)-(3.30), mogu dobiti komponente tenzora energije-impulsa crne rupe koja emituje zračenje, i to u koordinatama (r, t, θ, φ)

$$T^{rt} = T^{tr} = \frac{\beta M_0}{12\pi r^2} (1-\beta t)^{-\frac{2}{3}} \left[1 - \frac{2M_0}{r} (1-\beta t)^{\frac{1}{3}} \right]^{-1}, \quad (3.33)$$

$$T^{\theta\theta} = -\frac{\beta^2 M_0}{36\pi r^3} (1-\beta t)^{-\frac{4}{3}} \left[1 - \frac{2M_0}{r} (1-\beta t)^{\frac{1}{3}} \right]^{-2} \left\{ -(1-\beta t)^{-\frac{1}{3}} + \right. \\ \left. + \frac{M_0}{r} \left[\left(1 - \frac{2M_0}{r} (1-\beta t)^{\frac{1}{3}} \right) + \left(1 - \frac{2M_0}{r} (1-\beta t)^{\frac{1}{3}} \right)^{-1} \right] \right\}, \quad (3.34)$$

$$T^{\varphi\varphi} = -\frac{\beta^2 M_0}{36\pi r^3 \sin^2 \theta} (1-\beta t)^{-\frac{4}{3}} \left[1 - \frac{2M_0}{r} (1-\beta t)^{\frac{1}{3}} \right]^{-2} \left\{ -(1-\beta t)^{-\frac{1}{3}} + \right. \\ \left. + \frac{M_0}{r} \left[\left(1 - \frac{2M_0}{r} (1-\beta t)^{\frac{1}{3}} \right) + \left(1 - \frac{2M_0}{r} (1-\beta t)^{\frac{1}{3}} \right)^{-1} \right] \right\} \quad (3.35)$$

Preostale komponente tenzora energije-impulsa $T^{\mu\nu}$ su jednake nuli.

Komponenta T^{tr} predstavlja fluks energije kroz jediničnu površinu normalnu na radijalan pravac. Ovaj fluks odgovara emitovanom zračenju od strane crne rupe. Primećuje se da je ta veličina uvek pozitivna, što i treba očekivati, jer se u ovom delu radi samo o emitovanom, a ne i o apsorbovanom zračenju. Na osnovu (3.33) sledi da gustina fluksa opada obrnuto proporcionalno kvadratu rastojanja, što ukazuje da je ukupan fluks kroz površinu sfere radijusa r konačan kada $r \rightarrow \infty$.

Ukupna masa koju crna rupa emituje u beskonačnost u jedinici vremena tada je

$$\frac{dM_e}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T^{tr} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 T^{tr} = \\ = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \beta M_0 (1-\beta t)^{-\frac{2}{3}} \left[1 - \frac{2M_0}{r} (1-\beta t)^{\frac{1}{3}} \right]^{-1}, \\ \Rightarrow \frac{dM_e}{dt} = \frac{1}{3} \beta M_0 (1-\beta t)^{-\frac{2}{3}} \quad (3.36)$$

Da bi se izračunala celokupna masa koju crna rupa emituje u beskonačnost u toku celog svog postojanja, potrebno je izvršiti integraciju izraza (4.36) po vremenu, u granicama od $t = 0$ (početak emisije zračenja), do trenutka nestanka crne rupe, $t = t_i = \frac{1}{\beta}$.

Tada se dobija da je

$$M_e = \frac{1}{3} \int_0^{1/\beta} \beta M_0 (1 - \beta t)^{-\frac{2}{3}} dt = M_0 \quad (3.37)$$

Dobijen je potpuno očekivan rezultat koji pokazuje da je ukupna emitovana masa jednaka početnoj masi crne rupe. Ovaj rezultat odnosi se na posmatrača u beskonačnosti, jer je sama masa M i definisana u odnosu na njega. Tenzor energije-impulsa (3.33)-(3.35) je singularan za $r = 2M$, kao i metrika (3.9), usled nepovoljnog izbora koordinatnog sistema. Metrika (3.9) je asimptotski ravna, kao i Schwarzschildova, jer $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ kada $r \rightarrow \infty$. Međutim, za ovu metriku je invarijantni skalar krivine R različit od nule, za razliku od Schwarzschildove metrike (1.2) gde je $R = 0$. U metrici (3.9), za crnu rupu koja emituje zračenje postoji još jedna invarijantna veličina različita od nule. To je trag tenzora energije-impulsa, i on je jednak

$$T = T^\mu_\mu = \frac{1}{8\pi} G^\mu_\mu = \frac{1}{4\pi} G^{\hat{\theta}\hat{\theta}} \quad (3.38)$$

Za kvantne teorije polja sa konformno invarijantnim lagranžijanom, trag tenzora energije-impulsa jednak je nuli. Međutim, postoje i neke teorije polja koje su konformno invarijantne iako je trag tenzora energije-impulsa različit od nule (anomalija traga). U slučaju (3.38) nije potpuno jasno da li je to posledica nekih kvantnih efekata. Neki detaljniji proračuni ukazuju da postoji veza između Hawkingovog isparavanja crnih rupa i anomalija traga tenzora energije-impulsa.

Ako se izvrše aproksimacije za komponente tenzora energije-impulsa, i to takve da je dat slučaj vremena t bliskog vremenu iščeznuća crne rupe $t_i = 1/\beta$, njihovom kombinacijom sa jednačinama (3.33)-(3.35) mogu se dobiti uprošćene vrednosti tih komponenti:

$$T^{tr} \approx \frac{\beta M_0}{12\pi r^2} (1 - \beta t)^{-\frac{2}{3}}, \quad (3.39)$$

$$T^{\theta\theta} = \sin^2 \theta T^{\varphi\varphi} \approx \frac{\beta^2 M_0}{36\pi r^3} (1 - \beta t)^{-\frac{4}{3}} \left[(1 - \beta t)^{\frac{1}{3}} - \frac{2M_0}{r} \right] \quad (3.40)$$

Ukoliko se pretpostavi da do iščezavanja crne rupe dolazi pri Planck-ovoj masi M_P , tada sam trenutak iščeznuća crne rupe neće biti $t_i = \frac{1}{\beta}$, već će biti

$$\bar{t}_i = \frac{1}{\beta} \left(1 - \left(\frac{M_P}{M_0} \right)^3 \right) \quad (3.41)$$

U tom slučaju, $\beta t = 1$ nikad neće biti ostvareno, već će se razlikovati od te vrednosti-komponente tenzora energije-impulsa će imati neku veliku, ali konačnu vrednost. Kako T^{rr} predstavlja gustinu fluksa energije, to znači da će crna rupa neposredno pre svog nestanka emitovati veliku količinu energije, najčešće u obliku neke eksplozije. To se dešava zbog toga što se sa povećanjem njenog zračenja povećava i brzina tog zračenja, pa će u jednom momentu ona izračiti ogromnu količinu energije u kretkom vremenskom intervalu. Da bi se ova energija izračunala, potrebno je znati vrednost T^{rr} u trenutku iščeznuća crne rupe t_i .

Na osnovu poznavanja te vrednosti, i na osnovu jednačina (3.4)-(3.6), može se pokazati da emitovana energija i snaga eksplozije ne zavise od početne mase M_0 , već su neke konstantne veličine koje su iste za sve crne rupe. Ovo je razumljivo ako se uzme u obzir da je pretpostavka da crne rupe iščezavaju na masi M_P , bez obzira na početnu masu¹⁴. Ako bi se za ovu kritičnu masu uzela neka druga vrednost, veličine ΔE i ΔP (emitovana energija i snaga eksplozije) bile bi drugačije. Iako je trenutna vrednost snage eksplozije velika, emitovana energija i masa su male prema astrofizičkim merilima, na primer u odnosu na eksploziju supernove.

¹⁴ Primordijalne crne rupe malih masa mogle su ispariti u početku širenja Univerzuma. Taj proces je mogao da utiče na temperaturu pozadinskog zračenja, što je efekat koji je sada moguće meriti. Broj takvih crnih rupa zavisi od stepena nehomogenosti u početnoj fazi širenja, pa bi njegovo određivanje moglo dati podatak o strukturi ranog Univerzuma.

4. Analiza uticaja akrecije tamne energije na evoluciju crnih rupa

U ovom delu rada će biti analizirano kako se menja masa crnih rupa pri akreciji različitih oblika tamne energije.

*Some say the world will end in fire;
Some say in ice*

R.Frost (*Fire and Ice*)

4.1 Eventualni porast crnih rupa na račun energije vakuuma

U svojim radovima krajem devedesetih, Fred C.Adams, Manasse Mbonye i G.Laughlin izveli su zaključak da u Univerzumu u kojem dominira energija vakuuma, crne rupe koje su od astrofizičkog interesa (praktično sve poznate crne rupe) nikad neće iščeznuti Hawkingovim efektom, već će se uvećavati (povećanjem svoje mase) na račun akrecije energije iz vakuuma. Te crne rupe koje bi vršile akreciju energije, nastavile bi u budućnosti da emituju čestice poput protona, neutrina i hipotetičkih gravitona kroz Hawkingov proces, ali sa smanjenjem temperature. Prema tom scenariju, ako bi crne rupe nastavile da vrše akreciju, horizonti bi iščezli ako bi se masa crne rupe približila nekoj kritičnoj masi M_* koja je uporediva sa masom horizonta u sadašnjem trenutku. Ceo ovaj evolucioni scenario baziran je na validnosti jednačine za efektivnu luminoznost crne rupe

$$L = 4\pi \left(r_{AH}^- \right)^2 \left(T_H^4 - T_{VAC}^4 \right) \quad (4.1)$$

gde su: r_{AH}^- - unutrašnji horizont događaja,

T_H - Hawkingova temperatura,

T_{VAC} - efektivna temperatura za kosmološku energiju vakuuma, i ovde se uzima da je negde oko 0,003 eV [33],[47],[66].

U jednačini (4.1) prvi član predstavlja Hawkingov radijacioni fluks koji ističe iz crne rupe, dok drugi član predstavlja ulaznu energiju koja se uvlači akrecijom iz vakuuma.

Linijski element za crnu rupu koja zrači sa doprinosom energije vakuuma može se, na osnovu radova R.L.Malleta [64],[65], napisati u obliku

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM(v)}{r} - \chi^2 r^2\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \quad (4.2)$$

Naravno, ovde je $d\Omega^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$. Jednačina (4.2) je karakteristična po tome što se u njoj pojavljuje efektivna kosmološka konstanta pridružena de-Sitterovoj inflatornoj eri. Inflacija se događa kada temperatura okolnog Univerzuma padne ispod kritične temperature $T_{GUT} \sim 10^{14} GeV$. Tada Univerzumom dominira gustina energije vakuuma određena pomenutom efektivnom kosmološkom konstantom koju smo ovde označili sa χ . Treba istaći da je u ovom odeljku uzeto da je $c = \hbar = k = 1$, $G = 1/M_P^2$.

Parametar χ definisan je relacijom

$$\chi = \left(\frac{2\pi^3}{45}\right)^{1/2} \frac{T_{VAC}^2}{M_P} \quad (4.3)$$

Horizont događaja je, za crnu rupu koja zrači i čiji je linijski element dat izrazom (4.2), određen uslovom

$$1 - \frac{2GM(v)}{r} - \chi^2 r^2 = 0 \quad (4.4)$$

Ovde je Adams istakao da za crne rupe od astrofizičkog interesa, čije mase se nalaze u intervalu između $1M_S < M_{BH} < 10M_S$. Za sugerisane vrednosti T_{VAC} unutrašnji horizont događaja je veoma blizak Schwarzschildovom radijusu. Direktan akrecioni tok koji je iniciran jednačinom (4.1) može biti podstaknut jednostavnom koncepcijom koja je analogna onoj koja dovodi do Hawkingovog efekta¹⁵.

¹⁵ Hawkingova temperatura za unutrašnji horizont događaja data je opštim izrazom $T_H = K/2\pi$, gde je $K = M/(r_{AH}^-)^2 - \chi^2 r_{AH}^-$. Kada $T_{GUT} \rightarrow 0$, temperatura $T \rightarrow 1/8\pi M$. Za takvu situaciju, izračunato je da je zračenje crne rupe u inflatornom scenariju $L = 4\pi(r_{AH}^-)^2 |T_H^4 - T_{GUT}^4|$. Neinflatorna luminoznost, sa druge strane, definisana je jednačinom $L_n = 4\pi(2M) \cdot (1/8\pi M)$. Mallet je predvideo dve mogućnosti: jednu u kojoj je masa crne rupe u intervalu $10^{-1}g < M < 10^4g$, tako da dovodi do slučaja kada je $T_H < T_{GUT}$, i drugu, u kojoj je $T_H > T_{GUT}$. To je ostvareno za $M > 10^{-1}g$, i crne rupe isparavaju. Ako bi masa crne rupe bila tačno jednaka toj kritičnoj vrednosti, tada bi neinflatorna luminoznost L_n bila veća od inflatorne.

Razmatra se zapremina prostora koji se nalazi nešto malo izvan horizonta događaja. Zapremina je ispunjena virtuelnim česticama karakteristične energije T_{VAC} i talasne dužine $\lambda = 1/T_{VAC}$. Ako data čestica ima veliku neodređenost Δr u svom radijalnom stanju, tada se može desiti da ona leži unutar horizonta crne rupe i može biti privučena direktno. Dakle, pretpostavimo da čestica nema veliku neodređenost u svom radijalnom stanju. Delimično, ona mora biti pronađena (lokalizovana) tako da bude $\Delta r < \lambda$. U tom slučaju, princip neodređenosti implicira da radijalni moment p_r zadovoljava uslov $p_r \approx \Delta p_r > 1/\Delta r > 1/\lambda = T_{VAC}$. U proseku, momenti za polovinu takvih čestica će biti usmereni u direktnom radijalnom pravcu. Ovaj direktni moment implicira mrežni akrecioni fluks od $\sim np_r/2$, gde je $n \approx T_{VAC}^3$ brojna gustina čestica. Sa ovim fluksom, i sa oblasti dejstva $4\pi(r_{AH}^-)^2$ horizonta crne rupe, vrednost mrežne akrecije, u saglasnosti sa jednačinom (4.1), postaje

$$\dot{M} = 4\pi(r_{AH}^-)^2 T_{VAC}^4 \approx 9,51 \cdot 10^{-11} \text{ kg/s } h^2 \left(\frac{M}{1M_S} \right)^2 \quad (4.5)$$

Poređenja radi, istaknimo da de-Sitterov prostor bez crnih rupa daje termalno zračenje sa efektivnom temperaturom od $T_{dS} \sim \chi \sim T_{VAC}^2 / M_P$, kao što je pokazano od strane Fullinga i Daviesa sedamdesetih godina prošlog veka. Ovo zračenje rezultuje iz efekta nalik Hawkingovom, u kojem kosmološki horizont na $r = 1/\chi$ u Univerzum emituje zračenje blisko termalnom. Crne rupe, prema Adamsu, Mbonyeu i Laughlinu mogu da privuku ovu energiju, pa zbog toga jednačina (4.1) treba da sadrži dodatni član $\propto \chi^4$. Ovo zračenje ima manju energiju, i to za 31 red veličine manje nego što je to slučaj kod energetske skale vakuuma, tako da se njegov doprinos zanemaruje. Ovaj problem, kao što je istaknuto, sadrži važno vrednovanje kritične mase crne rupe M_c .

Zaključak koji su Adams, Mbonye i Laughlin izveli ukazuje da će dovoljno male crne rupe zaista doživeti Hawkingovo isparavanje i da na njih ne utiče postojanje kosmološke konstante. Za velike crne rupe (one od astrofizičkog interesa), Hawkingova temperatura je manja od T_{VAC} , i takve crne rupe će pre uzimati energiju iz vakuuma nego li ispariti. Kritična vrednost mase bi se dobila stavljajući $T_H = T_{VAC}$.

Tada je

$$M_C = \frac{1}{8\pi G T_{VAC}} \approx 4 \cdot 10^{21} \text{ kg} \approx 2 \cdot 10^{-9} M_S \quad (4.6)$$

Prema ovome, sve crne rupe koje su masivnije od te vrednosti kritične mase, pre će uzimati energiju nego što će ispariti. Schwarzschildov radijus takve crne rupe bio bi svega 6 mikrona.

Postoji i druga karakteristična vrednost mase. Za dovoljno masivne crne rupe, jednačina (4.4) nema realnih, pozitivnih rešenja i horizonti događaja nestaju. Ovo stanje će definisati drugu kritičnu masu M_* , datu jednačinom

$$M_* = \frac{1}{3\sqrt{3}\chi G} \approx 6 \cdot 10^{52} \text{ kg} \approx 3 \cdot 10^{22} M_S \quad (4.7)$$

Evolucion i tok na osnovu ovih jednačina, ukazuje na postojanje određenog vremena tokom kojeg će crne rupe izvršiti akreciju dovoljnu da dostignu tu drugu kritičnu masu. To navodi na stvaranje teorije prema kojoj bi crne rupe imale tačno određen dinamički scenario, prema kojem bi relativno velike crne rupe, sa inicijalnom masom $M_{0BH} > M_C$, rasle do maksimuma date skale $M_* \sim 10^{53} \text{ kg}$, dok bi se manje crne rupe (sa masama manjim od kritične) kroz Hawkingov efekat sve više smanjivale, sve do dostizanja Planckove mase.

4.1.1 Teorija Dalal-Griesta

Jednačina (4.1) predstavlja pojednostavljenu sliku te rezultat izveden iz takvog razmatranja, u opštem slučaju, ne mora da važi. Ovde je ispitivanje validnosti te jednačine učinjeno na osnovu 2-D aproksimacije za crne rupe koje isparavaju, a korišćene su i jednačine kojima je za date slučajeve određen tenzor energije-impulsa.

Poznato je da crne rupe mase M u, na neki način, praznom prostor-vremenu zrače kao crna tela na Hawkingovoj temperaturi

$$T_H = \frac{1}{8\pi GM} = 6,15 \cdot 10^{-8} (M_S / M) \text{ K} \quad (4.8)$$

Isto tako je veoma zastupljeno stanovište da neki inercijalni posmatrač u de-Sitterovom Univerzumu sa kosmološkom konstantom ima osećaj kao da je uronjen u jedno more termalnih čestica na Gibbons-Hawkingovoj temperaturi [71]

$$T_{GH} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{3}\right)} \approx 2,3 \cdot 10^{-30} \left(\frac{\Omega_V}{0,7}\right) \left(\frac{h}{0,7}\right)^2 \text{ K} \quad (4.9)$$

Ako usvojimo sada crnu rupu u de-Sitter-ovom Univerzumu, gde je horizont crne rupe određen aproksimativno sa $r_s = \sqrt{3/\Lambda}$, i ako su dva horizonta dovoljno međusobno udaljeni (što znači da je $r_s \gg r_{ds}$), tada se u prvoj aproksimaciji može očekivati da se Gibbons-Hawkingovo zračenje i Hawkingovo zračenje crnih rupa suštinski ne menjaju. Crne rupe mogu vršiti akreciju dela Gibbons-Hawkingovog zračenja, i tako je mrežna vrednost gubitka mase smanjena. Uprošćeno, promena mase crne rupe je data sa $\dot{M} \approx 4\pi\sigma r_H^2 (T_{GH}^4 - T_H^4)$, tako da prvobitni utisci zaista navode da je moguće izbegavanje potpunog isparavanja za crne rupe čije su veličine uporedive sa de-Sitterovim horizontom. Za dobijanje vrednosti isparavanja crne rupe može se koristiti renormalizovana očekivana vrednost tenzora $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ kojom je obuhvaćen protok energije i izvan i unutar crne rupe. Račun je daleko lakši ako se kalkulacija vrši u 2-D prostor-vremenu, kako bi se iskoristila njihova prostorno-vremenska konformna trivijalnost. Za sferno-simetričnu geometriju, moguće je reducirati dimenzionalnost problema na 2-D, i to ako se "ponište" uglovne koordinate. Ford i Parker su pokazali da je ta kalkulacija istovetna 4-D kalkulacijama.

Imajući to na umu moguće je izračunati dvodimenzionalni tenzor $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Crna rupa koja je “umetnuta” u de-Sitterovo prostor-vreme može se opisati Schwarzschild-de-Sitterovom geometrijom

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + [f(r)]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.10)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda r^3}{3} = \frac{\Lambda}{3r} (r - r_H)(r_c - r)(r + r_H + r_c) \quad (4.11)$$

Ovde treba napomenuti da su r_H i r_c radijusi horizonta crne rupe i kosmološkog horizonta respektivno.

Vrednost i značenje komponenata tenzora $\langle T_{\mu\nu} \rangle$

Jedan od važnijih problema za razumevanje kvantno-mehaničke emisije termalnog zračenja crnih rupa jeste upravo izračunavanje tenzora $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ tog zračenja. Pri tome je regularizacija tenzora $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ u nekom proizvoljnom 2-D prostor-vremenu jedno od najvažnijih dostignuća.

Neka se za crnu rupu usvoji neka “opšta” metrika $ds^2 = -f(r)dt^2 + [f(r)]^{-1} dr^2$. Ovde se naravno usvaja da je $f(r) \rightarrow 1$, kada $r \rightarrow \infty$, što predstavlja asimptotski ravan prostor. Za $r = r_H$ dobija se da je $f(r_H) = 0$, i površina sa takvim radijusom predstavlja horizont događaja za 2-D crnu rupu. Na osnovu proračuna Hiscocka i P.Daviesa [63],[67], mogu se dobiti očekivane vrednosti vakuuma za tenzor $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ koje će biti i korišćene u nastavku ovog poglavlja. U ovom momentu je važno objasniti njihovo značenje, kao i značenje jednačina u kojima figuriše površinska gravitacija. One pokazuju da sve dvodimenzionalne crne rupe, koje su opisane metrikom koja je data prvom jednačinom, ostvaruju zračenje nastalo iz vakuuma i to intenzitetom koji je jednak zračenju crnog tela na temperaturi proporcionalnoj površinskoj gravitaciji crne rupe. Tako se uočava da je termalno zračenje crnih rupa veoma opšta pojava pri dvodimenzionalnom modelu, i ne zavisi od bilo koje specijalne mogućnosti metričkih funkcija. Ovi proračuni su i bili polazna osnova za ukazivanje na neslaganje nekih rešenja jednačina koje su potencirali Adams i Mallet, u odnosu na rešenja jednačina u kojima je bilo pretpostavljeno da crne rupe ne vrše akreciju kojom će izbeći isparavanje kroz Hawkingov proces.

Na osnovu pomenutih radova Hiscocka i P.Daviesa komponente tenzora energije-impulsa su:

$$T_{vv} = \frac{1}{192\pi} \left[2f(r) \frac{d^2 f}{dr^2} - \left(\frac{df}{dr} \right)^2 + \left(\frac{df}{dr} \Big|_{r=r_c} \right)^2 \right], \quad (4.12)$$

$$T_{uu} = \frac{1}{192\pi} \left[2f(r) \frac{d^2 f}{dr^2} - \left(\frac{df}{dr} \right)^2 + \left(\frac{df}{dr} \Big|_{r=r_H} \right)^2 \right], \quad (4.13)$$

$$T_{uv} = \frac{1}{96\pi} f(r) \frac{d^2 f}{dr^2} \quad (4.14)$$

Ako usvojimo da je u izlazna koordinata, tada T_{uu} predstavlja izlazni tok energije, a shodno tome i tenzor T_{vv} predstavlja ulazni tok energije. Zapišemo li da je $\Lambda = 0$, vrednost T_{uu} je data konstantnom vrednošću za velike udaljenosti od rupe. To je Hawkingov član koji predstavlja 2D zračenje na Hawkingovoj temperaturi. Površinska gravitacija je na osnovu radova Cartera i Hiscocka [63],[67] određena izrazom

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{df}{dr} \Big|_{r=r_H} \quad (4.15)$$

Tada, u skladu sa Hawkingovom analizom, temperatura svake crne rupe je određena izrazom $T = \kappa / 2\pi$, tako da je integralni fluks zračenja dat sa

$$\frac{\pi}{12} T_H^2 = \frac{1}{192\pi} \left(\frac{df}{dr} \Big|_{r=r_H} \right)^2 \quad (4.16)$$

Ako se napiše da je $\sigma_{2D} = \frac{\pi}{12}$, tada izraz (4.16) postaje

$$\sigma_{2D} T_H^2 = \frac{1}{192\pi} \left(\frac{df}{dr} \Big|_{r=r_H} \right)^2 \quad (4.17)$$

U skladu sa kosmološkim članovima, taj izlazni fluks pozitivne energije je tačno uravnotežen ulaznim fluksom negativne energije T_{vv} za slučaj kada je $r = r_H$.

Na osnovu ovih razmatranja, mogu se zapisati redukovane vrednosti navedenih tenzora, za slučaj kada u Univerzumu ne bi bilo crnih rupa ($M=0$), i one iznose $T_{uu}=T_{vv}=0$, $T_{uv}=f''f/96\pi$. To je ono što se i očekivalo, da je tenzor energije-impulsa izotropan i proporcionalan metričkom tenzoru. Zaključak Adamsa zasnivao se delimično na pomenutim proračunima Malletta, koji je odbacio granične članove i nije dobio da je $T_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$ za $\Lambda=0$.

Sada je potrebno da se ubaci potrebna forma za funkcije f kako bi se dobile komponente tenzora energije-impulsa za nemasivna polja. Naročito nam je zanimljiva vrednost T_{vv} za $r=r_H$, jer ćemo tada dobiti odgovore na pitanje kakve su vrednosti izlaznog fluksa energije koji teče prema horizontu. Polazeći od jednačine (4.12) može se pisati da je:

$$T_{vv}(r_H) = \frac{1}{192\pi} \left[\left(\frac{df}{dr} \Big|_{r=r_c} \right)^2 - \left(\frac{df}{dr} \Big|_{r=r_H} \right)^2 \right] = \sigma_{2D} (T_{GH}^2 - T_H^2) \quad (4.18)$$

Ubacujući izraze za r_c i r_H , i deljenjem sa 2π , dobijaju se izrazi za T_{GH} i T_H . Tačan izraz je preglomazan, ali se razvojem egzaktnog izraza u red oko $GM\sqrt{\Lambda}$, mogu dobiti temperature horizonta koje tada iznose

$$T_H = \frac{1}{8\pi GM} \left[1 - \frac{16G^2 M^2 \Lambda}{3} + \dots \right], \quad (4.19)$$

$$T_{GH} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \left[1 - 2GM \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} + \dots \right] \quad (4.20)$$

Od vrednosti gde je $GM\sqrt{\Lambda} \approx 1,6 \cdot 10^{-23} (M/M_s) \ll 1$, za sve poznate crne rupe, korekcija na njihovu prirodnu temperaturu je zanemarljiva. *Jasno je da će sve crne rupe kad-tad ispariti.*

4.1.2 Poređenje navedenih teorija

Koristeći jednačinu (4.18) mi možemo naći kritičnu masu iznad koje će crna rupa vršiti akreciju energije, i prema tome, stiče se utisak da neće ispariti. Čini se da se to događa za slučaj kada je $T_{vv}(r_H)=0$, implicirajući da su temperature dva horizonta jednake. Evaluacijom površinskih gravitacija dva horizonta i njihovim izjednačavanjem za $r_c = r_H$, dobija se da je kritična masa ona na kojoj radijus crne rupe postaje kosmološki radijus. To se dešava za $M_{crit} = \frac{1}{3G\sqrt{\Lambda}} \approx 2,1 \cdot 10^{22} M_S$, u saglasnosti sa rezultatom koji se dobija pri pojednostavljenom razmatranju koje je gore i spomenuto. Za tu vrednost mase je $f=0$ i navedena analiza bi bila pogrešna zbog neslaganja koordinatnog sistema. Međutim, Bousso i Hawking su sprovedi detaljnu analizu za crne rupe sa masama bliskim i jednakim M_{crit} , i ova gore navedena razmatranja su validna za sve slučajeve u kojima je $M < M_{crit}$, i pokazuju da Hawkingovo zračenje prevazilazi Gibbons-Hawkingovu akreciju. Na osnovu toga je izveden zaključak da sve crne rupe sa navedenim vrednostima mase isparavaju.

Kao što je rečeno, Adams, Mbyonye i Laughlin diskutovali su Gibbons-Hawkingovu korekciju za Hawkingovo zračenje, i na osnovu uzete vrednosti za kosmološku konstantu dobili su izraz

$$\dot{M}_H \approx 4\pi\sigma r_H^2 (T_{VAC}^4 - T_H^4), \quad (4.21)$$

gde je temperatura T_{VAC} pronađena na osnovu jednakosti $\rho_V = aT_{VAC}^4$, gde je $a = 4\sigma = \pi^2/15$.

Tako je $T_{VAC} = 30(\Omega_V/0,7) K$, a odgovarajuća kritična masa crne rupe za $\dot{M} = 0$ je $M_{crit} = 2,1 \cdot 10^{-9} M_S$. Ta kritična veličina crne rupe implicira da sve poznate crne rupe vrše akreciju energije vakuuma u vrednostima koje su veće nego što je to vrednost emitovanog Hawking-ovog zračenja, i na taj način izbegavaju isparavanje. Zaključak ovih naučnika zasnovan je na radu Malletta koji je razmatrao isparavanje crnih rupa kroz GUT skalu inflacije, i posebno na njegovoj jednačini $L = 4\pi (r_{AH}^-)^2 (T_H^4 - T_{GUT}^4)$, koja je identična sa jednačinom (4.21) za slučaj kada se T_{VAC} zameni sa T_{GUT} . Jasno je, da u slučaju kada su te dve temperature različite, jednačine nisu saglasne. I Dalal i Griest smatraju da su Mallettove jednačine netačne. Oni tvrde da je njihov argument ojačan sa činjenicom da je Mallett dobio izraz za T_{vv} koji ima isti oblik kao i Dalal-Griestova vrednost u odgovarajućoj granici, i koji bliže određuje upravo istu kritičnu masu koju su oni izračunali. Na taj način Mallettova jednačina $L = 4\pi (r_{AH}^-)^2 (T_H^4 - T_{GUT}^4)$ nije saglasna sa njegovim izračunavanjem T_{vv} .

Ovim se može zaključiti da je energija apsorbirana od strane crnih rupa u de-Sitter-ovom Univerzumu određena veoma malom Gibbons-Hawkingovom temperaturom koja nije jednaka temperaturi radijacionog polja sa gustinom energije vakuuma koja je sugerisana u Mallettovom radu. Jedan argument protiv te ideje potiče od razlike između očekivane vrednosti vakuuma (*eng.* Vacuum Expectation Value-VEV) $\langle\phi\rangle$ i njegovog potencijala $V(\langle\phi\rangle)$. Adams je sa saradnicima istakao da more virtuelnih čestica mora da sadrži pozitivnu vrednost gustine energije mreže, ali ta činjenica je irelevantna po mišljenju Dalala i Griesta.

Ono šta je značajno za Λ , ne određuje samo energija vakuuma, već renormalizovana energija vakuuma koja ne mora biti pozitivna bez obzira na očekivanu vrednost vakuuma koja je različita od nule. Zapravo, čak i ako je $\Lambda = 0$, tamo nastavljaju da postoje polja sa nenultom vrednošću VEV, kao što je to slučaj sa Higgsovim kondenzatom. Bez obzira na ova razmatranja, postoji još jedan podatak protiv pretpostavki koje podržavaju teorije sa rastom mase crnih rupa. Tu se karakteriše neočekivan rast mase crnih rupa na osnovu njihovog proždiranja virtuelnih čestica. Prihvatajući taj podatak, može se zapisati da, ako bi bilo ikakvog efekta na crne rupe pri tom heurističkom opisu, te virtuelne čestice moraju otići izvan površine mase (*eng.* mass shell). Taj zahtev za tim “on-shell” kontekstom je i objašnjenje zbog čega crne rupe zrače kroz Hawkingov proces. Jedan član virtuelnog para odlazi na površinu unutar horizonta, ostvaruje negativnu energiju sa tačke gledišta smeštene u beskonačnosti, dok njegov partner odlazi na površinu sa pozitivnom energijom i nastavlja dalje prema beskonačnosti. U prirodnom Hawking-ovom procesu (bez Λ), crne rupe ne mogu povećavati masu tim procesom, čestice sa negativnom energijom ne mogu prolaziti izvan horizonta, i ako se čestice sa pozitivnom energijom pridruže svom partneru iz virtuelnog para, bivaju progutane i ništa se ne menja. Adams i saradnici su pretpostavili da kosmološka konstanta menja taj proces tako da tok termalnih čestica na temperaturi od skoro 30 K može otići prema rupi. Ako uzmemo da nema restrikcije na čestice sa pozitivnom energijom, čestice mogu egzistirati dovoljno dobro kako blizu horizonta, tako i u beskonačnosti. To bi značilo da se one čestice sa temperaturom od 30 K mogu očekivati i blizu crne rupe, ali i na velikim udaljenostima od nje, na primer u okolini naše planete, što bi bilo u potpunoj kontradikciji sa eksperimentom! *Sve ovo navodi na zaključak da u Univerzumu sa kosmološkom konstantom, ne dolazi do povećanja mase crnih rupa na račun akrecije energije vakuuma!*

Radi potpune kompletnosti razmatranja, treba istaći da crne rupe mogu vršiti apsorpciju i energije kosmičkog mikrotalasnog zračenja, zračenja zvezda i drugih privremenih izvora, kao i interstelarnog gasa (V.Dodatak 2). Kosmičko mikrotalasno pozadinsko zračenje potiče iz početnog širenja Univerzuma. Od trenutka kada je on postao transparentan za zračenje ono je nastavilo da se širi kroz prostor. Talasna dužina ovog zračenja se povećava usled ekspanzije Univerzuma, tako da temperatura opada. U sadašnjoj epohi fotoni mikrotalasnog zračenja imaju efektivnu temperaturu $T_{CMB} = 2,74\text{K} \approx 0,0024\text{eV}$, što je negde deset puta manje od temperature vakuuma¹⁶. Kao rezultat, ovaj dodatni doprinos akrecionom fluksu je približno 10^4 puta manji od onog koji daje T_{VAC}^4 . Dakle, akrecija energije iz kosmičke pozadine biće manje bitna pošto se Univerzum širi, a fotoni doživljavaju crveni pomak.

¹⁶ Termodinamika nalaže da toplota može prelaziti samo iz toplije u hladniju sredinu. Kako crne rupe zrače energiju one imaju temperaturu, kako je i pokazano. Velike crne rupe imaju mnogo manje temperature od crnih rupa masa Sunca, na primer. Vrednost tih temperatura je značajno manja od temperature kosmičke pozadine, i u ovom vremenu toplota ističe iz Univerzuma u crne rupe. Ovaj efekat omogućava da crne rupe postanu masivnije. Kako Univerzum bude stario, polje pozadinskog zračenja će se razvlačiti na sve veće talasne dužine i temperatura će se smanjivati.

4.2 Promena mase crne rupe usled akrecije tamne energije

Na osnovu novijih kosmoloških istraživanja potencirane su zanimljive mogućnosti za evoluciju crnih rupa pri akreciji određene forme tamne energije koja se pojavljuje u slučaju kada je parametar $w < -1$.

Neke od sekvenci koje će uticati na dalje razmatranje su:

- Ispitivanje mogućnosti da parametar jednačine stanja može biti $w < -1$
- Koncept Big Rip scenarija
- Promena mase crnih rupa pri akreciji tamne energije
- Dalji evolucionni put crnih rupa u okviru Big Rip scenarija

4.2.1 Ispitivanje mogućnosti za postojanje tamne energije za koju je $w < -1$

Razumevanje Hubbleovog otkrića kosmološke ekspanzije dobilo je, kao što je istaknuto ranije, jedan dodatni segment nakon novijih eksperimenata (naročito je značajan pomenuti WMAP). Njima je pokazano da ubrzavajuće kosmičko širenje nije određeno materijom koja se može smatrati fluidom zanemarljivog pritiska, kao što je to slučaj kod Galaksija, već dodatno sadrži i jedan oblik tamne energije sa negativnim pritiskom. Tamna energija je najčešće opisana sa parametrom $w \equiv p / \rho$, gde su vrednosti $w < -1/3$ odgovorne za kosmičko ubrzavanje. Najjednostavnije objašnjenje za tamnu energiju je kosmološka konstanta o kojoj je bilo govora u trećem poglavlju, i za koju je parametar jednačine stanja $w = -1$.

Kosmološka konstanta je 120 reda veličina manja od vrednosti koja se očekuje kvantnom gravitacijom [72],[78]. Tako, iako smo dodali ovaj član jednačinama polja, on postaje jedino okvir kojim će se bolje razumeti pojava negativnog pritiska. Druga mogućnost koja je pre nekoliko godina postala naročito zastupljena je kvintesencija, odnosno kosmičko skalarno polje koje ima svojstvo da se polako približava minimumu svog potencijala. U svakom slučaju, u svakom od tih modela je odnos $-1 < w < -1/3$, dok gustina tamne energije opada sa faktorom skaliranja $a(t)$ kao $\rho_Q \propto a^{-3(1+w)}$.

Sasvim opravdano, ovde se može postaviti pitanje: *Šta se zbiva ako je vrednost $w < -1$?*

Tamna energija sa parametrom $w < -1$ naziva se “**fantomska energija**” (eng. Phantom Energy), i za nju su teoretičari vezali neke od neobičnih mogućnosti. Jedna od njih je i povećanje gustine ove energije tokom vremena.

Dakle, za ovu vrednost parametra w budućnost Univerzuma se može smatrati fantastično neobičnom i kompletno drugačijom od svih do sada razmatranih. Ako razmotrimo šta se sa ravnim ili otvorenim Univerzumom dešava ako izuzmemo tamnu energiju, dobija se zaključak da se ekspanzija večno nastavlja i horizont raste mnogo brže nego faktor skaliranja. Univerzum postaje tamniji i hladniji, ali tokom vremena zapremina opservabilnog Univerzuma raste tako da i broj vidljivih galaksija raste. Ako se ekspanzija ubrzava, pod uticajem tamne energije čiji se parametar nalazi u vrednostima $-1 \leq w < -1/3$, imamo ponovo slučaj večnog nastavka ekspanzije. U ovom primeru faktor skaliranja ima mnogo izrazitiji rast nego horizont, tako da će nakon određenog vremena galaksije nestati iza horizonta i Univerzum će postati neverovatno taman. Gravitaciono vezane strukture poput naše Galaksije ili Lokalne grupe postaće razjedinjene.

U slučaju fantomske energije, Friedmannova jednačina (2.6) ima oblik [16],[17]

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_M}{a^3} + (1 - \Omega_M) a^{-3(1+w)} \right]. \text{ Ako je } \Omega_M \cong 0,3 \text{ Univerzum je već pod}$$

dominirajućim uticajem tamne energije, i za vrednosti $w < -1$ on će biti pod još jačim uticajem te energije u budućnosti! Na osnovu mišljenja R.Caldwella, može se uvesti aproksimacija za odgovarajuću evoluciju faktora skaliranja pri čemu je zanemaren prvi član sa desne strane. Nakon potrebnih izračunavanja, nalazi se da faktor skaliranja nestaje

u vremenu $t_{RIP} - t_0$, gde je $t_{RIP} - t_0 \cong \frac{2}{3} [1 + w]^{-1} H_0^{-1} (1 - \Omega_M)^{-1/2}$. Korišćenjem ove

aproksimacije može se, na primer za $w = -3/2$ i $H_0 = 70 \text{ km/sMpc}$, dobiti preostalo vreme za koje će Univerzum nestati u tom “Velikom rascepu” (*eng. Big-Rip*), i koje tada iznosi $22 \cdot 10^9 \text{ god}$. Hubbleov parametar širenja raste sa vremenom za razliku od slučaja kada je u optičaju kosmološka konstanta. Stavka koja je najviše intrigantna kod ovog modela je ta da porast gustine tamne energije na kraju dovodi do rastavljanja gravitaciono (a zatim i drugačije) povezanih objekata!

U Univerzumu sa konstantnom vrednošću Λ faktor skale raste mnogo brže od Hubbleovog rastojanja H^{-1} i galaksije se rasipaju iza horizonta. Sa fantomskom energijom vrednost širenja H raste tokom vremena, Hubbleovo rastojanje opada, pa je nestajanje galaksija ubrzano sa približavanjem horizonta prema nama. U prvoj aproksimaciji, vezani objekti poput zvezda, globularnih jata, galaksija i galaktičkih jata su nalik na male mehure koji se nalaze u razređenom fluidu. Njihova unutrašnja dinamika je odvojena od globalnog širenja. Naravno, danas je prisutna tamna energija i u našem Sunčevom sistemu, i to u uniformnoj vrednosti, a njena trenutna vrednost u vezanim objektima je mala da bi uticala na unutrašnju dinamiku tih objekata. Za tamnu energiju za koju je $w \geq -1$ tamo ni u budućnosti neće biti unutrašnje dinamike jer je $\rho = \text{const}$. Za fantomsku energiju gde je $w < -1$ gustina se povećava tokom vremena. Na taj način se omogućuje da fantomska polja ostvare ogroman uticaj na internu dinamiku objekata nagomilavanjem fantomske energije izvan njih i njenim rastom tokom vremena.

Ukoliko iskoristimo i opštu teoriju relativnosti, izvor gravitacionog potencijala je zapreminski integral $\rho + 3p$. Tako, na primer, planeta koja se nalazi u kružnoj orbiti radijusa R oko neke zvezde mase m , biće razdvojena od takvog sistema kada bude ispunjen uslov $-\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p)R^3 \approx m$. Sa tamnom energijom za koju je $w \geq -1$, vrednost člana $-(\rho + 3p)$ će se smanjivati tokom vremena, pa je tako vrednost mase m veća od vrednosti $-\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p)R^3$ što bi značilo da bi svi vezani sistemi (poput zvezda, globularnih jata, galaksija ...) mogli večno da opstanu.

Sa druge strane, ako imamo fantomsku energiju, faktor $-(\rho + 3p)$ će se povećavati vremenom, tako da će dovesti do tačno određene tačke na vremenskoj skali u kojoj će određeni sistem biti rascepljen. Poznavanjem vremenske evolucije faktora skale i gustine fantomske energije, mi možemo naći vremenski trenutak razdvajanja nekog gravitaciono (i drugačije) vezanog sistema. Tako će gravitaciono vezan sistem mase m i radijusa R biti rastavljen za vreme [9],[17] $t \cong P\sqrt{2|1+3w|}/[6\pi|1+w|]$, gde je P - period kružne orbite oko sistema. Interesantno je primetiti da ovo vreme nije zavisno od parametara H_0 i Ω_M . Ako imamo, na primer, da je $w = -3/2$, interval za koji će se desiti rastavljanje je $t \cong 0,3P$ pre Big-Rip-a. Na osnovu navedenih razmatranja, moguće je navesti približna vremena rascepa svih važnijih sistema u Univerzumu, što je dato u narednoj tabeli, za uzetu vrednost parametra $w = -3/2$.

Tabela 2. Istorija i budućnost našeg Univerzuma sa fantomskom energijom $w = -3/2$

Vreme	Događaj
$\sim 10^{-43} s$	Planckova era
$\sim 10^{-36} s$	Inflacija
Prve tri minute	Formiranje svetlih elemenata
$\sim 10^5 god$	Formiranje atoma
$\sim 1 \cdot 10^9 god$	Formiranje prvih galaksija
$\sim 15 \cdot 10^9 god$	Današnji Univerzum
$t_{rip} - 1 \cdot 10^9 god$	Nestanak galaktičkih jata
$t_{rip} - 1 \cdot 10^6 god$	Uništenje naše galaksije
$t_{rip} - 1/4 god$	Rascepljenje Sunčevog sistema
$t_{rip} - 10^{-19} s$	Disocijacija atoma
$t_{rip} = 35 \cdot 10^9 god$	Big-Rip

4.2.2 Smanjenje mase crnih rupa pri akreciji tamne energije

Naravno, nama je ovde najzanimljivije pronalaženje odgovora na pitanje šta će se desiti sa crnim rupama u Univerzumu sa dominirajućom “fantomskom energijom“. Najpre treba naći rešenja pri stacionarnoj akreciji idealnog relativističkog fluida sa proizvoljnom jednačinom stanja $p(\rho)$ nad Schwarzschildovom crnom rupom. Korišćenjem te mogućnosti, pokazaće se da masa crnih rupa postaje znatno smanjena sa akrecijom “fantomске energije“, dok za Big-Rip scenario one postepeno teže nuli. Michel je 1972. godine prvi određivao analitička rešenja za akreciju nad Schwarzschildovom crnom rupom, ali njegova rešenja nisu primenljiva za opšti slučaj akrecije tamne energije. Odgovarajuću generalizaciju tih rešenja našli su Babichev, Dokuchaev i Eroshenko 2004.godine modeliranjem tamne energije u gravitacionom polju crne rupe [30],[31].

Oni su ispitivali idealni fluid sa negativnim pritiskom koji ima proizvoljnu jednačinu stanja $p(\rho)$ i tenzor energije-impulsa $T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$, gde su p i ρ pritisak i gustina tamne energije, a $u^\mu = dx^\mu / ds$ je kvadrivektor brzine fluida.

Integraljenjem nulte (vremenske) komponente zakona održanja $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ dobija se prvi integral kretanja za stacionarnu, sferosimetričnu akreciju. To je Bernoullijeva relativistička jednačina

$$(p + \rho) \left(1 - \frac{2}{x} + u^2 \right)^{\frac{1}{2}} x^2 u = C_1, \quad (4.22)$$

gde su $x = r / M$, $u = dr / ds$, a r -radijalna Schwarzschildova komponenta.

Da bi se pronašao drugi integral kretanja potrebno je koristiti projekciju jednačine održanja na kvadrivektor brzine $u_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$. U našem slučaju to je jednačina

$$u^\mu \rho_{;\mu} + (p + \rho) u^\mu_{;\mu} = 0 \quad (4.23)$$

Za datu jednačinu stanja $p = p(\rho)$ pomoćna funkcija n je definisana relacijom

$$\frac{d\rho}{p + \rho} = \frac{dn}{n} \quad (4.24)$$

Pomoćna funkcija je identična za čestičnu koncentraciju atomskog gasa, ali isto tako može opisivati i kontinualnu sredinu koja ne sadrži nijednu česticu. U takvoj situaciji se radi o formalnoj pomoćnoj funkciji.

Za proizvoljnu jednačinu stanja $p(\rho)$ može se dobiti rešenje korišćenjem jednačine (4.24)

$$\frac{n(\rho)}{n_\infty} = \exp \left(\int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho' + p(\rho')} \right) \quad (4.25)$$

Korišćenjem ovog izraza može se naći traženi drugi integral kretanja. On predstavlja jednačinu fluksa energije

$$\frac{n(\rho)}{n_\infty} u x^2 = -A \quad (4.26)$$

U jednačini (4.26) n_∞ je koncentracija tamne energije u beskonačnosti, dok je A numerička konstanta koja ima vrednosti veće od nule za slučaj kada je tok fluida u pravcu crne rupe, pri čemu je $u = dr/ds < 0$.

Iz jednačina (4.22) i (4.26) jednostavno se može pronaći da je

$$\frac{p + \rho}{n} \left(1 - \frac{2}{x} + u^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C_2 \quad (4.27)$$

Vrednost C_2 je data sa

$$C_2 = \frac{\rho_\infty + p(\rho_\infty)}{n(\rho_\infty)} \quad (4.28)$$

Sprovedimo sada postupak izračunavanja radijalnih komponentata kvadrivektora i gustine fluida na horizontu događaja crne rupe $r = 2M$. Uzimajući $x = 2$, iz jednačina (4.26), (4.27) i (4.28) dobijamo da je

$$\frac{A}{4} \frac{\rho_H + p(\rho_H)}{\rho_\infty + p(\rho_\infty)} = \frac{n^2(\rho_H)}{n^2(\rho_\infty)} \quad (4.29)$$

gde je ρ_H gustina na $x = 2$ horizontu.

Koristeći ovu jednačinu možemo izračunavati gustinu fluida na horizontu crne rupe ako imamo vrednosti ρ_∞ , jednačinu stanja $p = p(\rho)$ i fluks A , uz upotrebu jednačine (4.24). Nalaženjem gustine horizonta ρ_H , i uz korišćenje jednačine (4.26), prilično jednostavno se izračunavaju radijalne komponente kvadrivektora brzine fluida na horizontu:

$$u_H = -\frac{A}{4} \frac{n(\rho_\infty)}{n(\rho_H)} \quad (4.30)$$

Kao što smo videli, konstanta koja određuje fluks energije nad crnom rupom može biti izračunata za stabilan hidrodinamički idealan fluid sa $\frac{\partial p}{\partial \rho} > 0$. Ona može biti, prema pomenutom radu Michela, određena fiksiranjem parametara u kritičnim tačkama. Prateći metode u tom radu, nalaze se veze između parametara u kritičnim tačkama, a samim tim i potpuna rešenja za fluks energije.

Nakon određenih aproksimacija dobija se izraz koji daje pomenutu vezu i koji ustanovljava gustinu fluida u kritičnoj tački (ρ_*) za proizvoljnu jednačinu stanja $p = p(\rho)$

$$\frac{\rho_* + p(\rho_*)}{n(\rho_*)} = \left[1 + 3c_s^2(\rho_*)\right]^{\frac{1}{2}} \frac{\rho_\infty + p(\rho_\infty)}{n(\rho_\infty)} \quad (4.31)$$

Ovde je sa c_s^2 obeležen kvadrat brzine zvuka u datoj sredini $\left(c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}\right)$.

Na osnovu ovoga, Babichev, Dokuchaev i Eroshenko su zaključili da za brzine $c_s^2 < 0$ ili $c_s^2 > 1$, nema kritičnih tačaka iza horizonta događaja crne rupe, implicirajući tako da fluks tamne energije nad crnom rupom zavisi od početnih uslova za nestabilan idealan fluid $c_s^2 < 0$, ili za superluminalni fluid $c_s^2 > 1$. Ovaj rezultat može da se opiše jednostavnom fizičkom interpretacijom: *Fluid koji se akretuje ima kritičnu tačku ako se njegova brzina povećava od subsoničnih do supersoničnih vrednosti dok se približava crnoj rupi.*

Jednačine (4.23), (4.25), (4.26) i (4.27) definišu vrednost akrecije nad crnom rupom. Te jednačine su valjane za idealni fluid sa proizvoljnom jednačinom stanja $p = p(\rho)$, tačnije, za gas čestica bez mase (termalizovano zračenje) i za gas čestica sa masom. Za gas masivnih čestica, sistem jednačina (4.26) i (4.27) dovodi do sličnog sistema jednačina koje je dobio i Michel u svom radu, ali treba istaći i da je sistem jednačina (4.23), (4.25), (4.26) i (4.27) validan i ako se upotrebi tamna energija, uključujući i fantomsku energiju sa $\rho + p < 0$. U takvoj situaciji, koncentracija $n(\rho)$ je pozitivna za svako ρ sve dok je konstanta C_2 negativna. Vrednost promene mase crne rupe (ili energetskog fluksa nad njom) kroz proces akrecije, data je jednačinom

$$\dot{M} = -4\pi r^2 T_0^r \quad (4.32)$$

Gornji izraz se može napisati u nešto drugačijem obliku. Naime, na osnovu jednačina (4.26) i (4.27) imamo

$$ux^2 \exp \left[\int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho' + p(\rho')} \right] = -A ,$$

i

$$(p + \rho) \left(1 - \frac{2}{x} + u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho' + p(\rho')} \right] = C_2$$

To nam pomaže da jednačinu (4.32) zapišemo kao

$$\dot{M} = 4\pi AM^2 [\rho_\infty + p(\rho_\infty)] \quad (4.33)$$

- Na osnovu ove važne jednačine, može se primetiti da bi se masa crne rupe povećavala sa akrecijom gasa kada bi bilo ispunjeno da je $p > 0$, ali se isto tako zaključuje i da će se masa crne rupe smanjivati ako imamo slučaj tamne energije sa $\rho + p < 0$. *Tačnije, to nam ukazuje da se mase crnih rupa moraju smanjivati u Univerzumu koji je ispunjen fantomskom energijom, i u prirodi taj rezultat je opšteg karaktera.*

Ovaj rezultat ne zavisi od karakterističnog oblika jednačine stanja $p = p(\rho)$, već je jedino bitno ispunjenje uslova $\rho + p < 0$. Fizički razlog smanjenja mase crne rupe je u činjenici da fantomska energija pada prema crnoj rupi, ali je energetski fluks koji joj je pridružen usmeren od crne rupe. Ako bismo ignorisali kosmološku evoluciju gustine ρ_∞ , tada nalazimo da će zakon promene mase crne rupe biti

$$M = M_i \frac{1}{1 - t/\tau} \quad (4.34)$$

gde je M_i početna masa crne rupe, a τ je skala vremenske evolucije koja je data izrazom

$$\tau = \frac{1}{4\pi AM_i [\rho_\infty + p(\rho_\infty)]} \quad (4.35)$$

4.2.3 Evolucija crnih rupa u Big-Rip scenariju

Usvojicemo, najpre, model tamne energije sa linearnom zavisnošcu gustine od pritiska

$$p = \alpha(\rho - \rho_0) \quad (4.36)$$

gde su α i ρ_0 konstantne vrednosti.

Ovaj model opisuje ultrarelativistički gas ($p = \rho/3$), gas sa jednačinom stanja ($p = \rho$) i najjednostavniji model tamne energije za koji su $\rho_0 = 0$ i $\alpha < 0$. Treba samo istaci da je konstanta α povezana sa parametrom w relacijom $w = \alpha(\rho - \rho_0)/\rho$.

Jednačina stanja za $w < 0$ se najčešće uzimala za analizu kosmoloških modela kroz kosmološku evoluciju. Materija sa jednom takvom jednačinom stanja je hidrodinamički nestabilna i može egzistirati jedino u nekom kratkom periodu. Naša jednačina stanja (4.36) za $\alpha > 0$ nema taj nedostatak! Za tako uzetu vrednost dozvoljen je slučaj hidrodinamički stabilne fantomske energije, što nije slučaj ako se koristi jednačina stanja sa $w = const. < -1$. U realnom Univerzumu jednačina stanja se menja sa vremenom (w je zavisno od t). Linearni model (4.36) opisuje fantomsku energiju kada je $\rho_\infty/\rho_0 < \alpha(1 + \alpha)$, i u tom slučaju je, znači, $\rho + p < 0$.

- U kosmološkom scenariju Velikog Rascepa (*eng. Big Rip*), imamo rast faktora skaliranja $a(t)$ do beskonačnosti u nekom konačnom vremenskom intervalu. Pri ovom razmatranju koristiće se samo forma tamne energije, tako da će, zbog pojednostavljenja, biti isključeni ostali oblici energije. Kao što je rečeno, u linearnom modelu (4.36) Big Rip se pojavljuje kada su ispunjeni uslovi $\rho + p < 0$ i $\alpha < -1$. Potrebna relacija može biti izvedena iz Friedmann-ovih jednačina u slučaju kada je linearna jednačina stanja

$$|\rho + p| \propto a^{-3(1+\alpha)} \quad (4.37)$$

Ako zbog jednostavnosti uzmemo da je $\rho_0 = 0$, mi nalazimo odgovarajući evolucionni zakon u takvom Univerzumu. Ovde će biti data samo krajnja jednačina. Treba napomenuti da je za određene vrednosti parametra α moguće analitičkim putem odrediti vrednosti $\rho(x)$ i $u(x)$.

Dakle, za $\alpha < -1$ evolucioni zakon gustine fantomske energije je dat jednačinom

$$\rho_{\infty} = \frac{\rho_{\infty, i}}{\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^2} \quad (4.38)$$

Ovde je $\tau^{-1} = -\frac{3(1+\alpha)}{2} \left(\frac{8\pi}{3} \rho_{\infty, i}\right)^{\frac{1}{2}}$, a $\rho_{\infty, i}$ predstavlja inicijalnu fantomsku energiju.

Vrednost inicijalnog vremena se bira tako da se Big Rip desi za vreme τ .

Primetno je iz jednačina (4.35) i (4.38) da se Big Rip dešava za $\alpha \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho} < -1$, tako

da, u osnovi, uslov $\rho + p < 0$ nije sam dovoljan da odredi kraj kosmološke evolucije sa Big-Rip scenarijom. Naravno, kombinovanjem izraza (4.33) i (4.38), moguće je dobiti izraz koji određuje evoluciju mase crne rupe

$$M = M_i \left(1 + \frac{M_i}{\dot{M}_0 \tau} \frac{t}{\tau - t}\right)^{-1} \quad (4.39)$$

gde je $\dot{M}_0 = (3/2) A^{-1} |1 + \alpha|$, a M_i je inicijalna masa crne rupe

Ako se uzme da je $\alpha = -2$, i tipična vrednost $A = 4$ (što odgovara vrednosti $u_H = -1$), dobija se da je $\dot{M}_0 = \frac{3}{8}$. U graničnom slučaju kada $t \rightarrow \tau$ (na primer, blizu Big-Ripa), zavisnost mase crne rupe od t postaje linarna, $M \approx \dot{M}_0(\tau - t)$.

Dakle, kada se vreme t približi vremenu τ , vrednost smanjenja mase crne rupe prestaje da zavisi od inicijalne mase crne rupe i gustine fantomske energije. *Drugim rečima, mase svih crnih rupa blizu trenutka Velikog Rascepa biće približno jednake i težiće nuli.* Time bi se pokazalo da je akrecija fantomske energije izrazitija od procesa isparavanja crnih rupa Hawkingovim efektom za model u kojem se mase crnih rupa smanjuju do Planckove mase! Tačnije, sve crne rupe u Univerzumu će u potpunosti ispariti Hawkingovim procesom u tzv. Planckovom vremenu¹⁷, pre nego što nastupi Big-Rip.

¹⁷ Planckovo vreme predstavlja najkraću dužinu vremena za koje se primenjuje klasična teorija gravitacije. Ispod te vrednosti opšta teorija relativnosti uključuje kvantne efekte. Jednačina kojom je određeno Planckovo vreme je $t_p = l_p / c \cong 5,4 \cdot 10^{-44} s$.

4.2.4 Neke moguće posledice ovih procesa

U ovom delu ćemo izvršiti poređenje dobijenih rezultata za idealni fluid sa sličnim proračunima koji se odnose na akreciju skalarnog polja nad crnom rupom. Tamna energija je modelovana skalarnim poljem sa potencijalom $V(\phi)$. Lagranžijan skalarnog polja je opisan jednačinom $L = K - V$, gde su K i V kinetički član i potencijal, respektivno. Jacobson je pronašao rešenje za skalarno polje u Schwarzschildovoj metrici za nulti potencijal, i ono je dato izrazom $\phi = \dot{\phi}_\infty [t + 2M \ln(1 - 2M/r)]$, gde zapažamo da se pojavljuje izvod skalarnog polja $\dot{\phi}_\infty$ u beskonačnosti. Pokazano je da je tenzor energije-impulsa za ovo rešenje, identičan tenzoru energije-impulsa za idealan fluid sa jednačinom stanja $p = \rho$, nakon što se uvedu smene $p_\infty \rightarrow \dot{\phi}_\infty^2/2$ i $\rho_\infty \rightarrow \dot{\phi}_\infty^2/2$.

Da bi se opisala fantomska energija Lagranžijan skalarnog polja mora imati negativan kinetički član. U slučaju negativnog kinetičkog člana (na primer $K = -\frac{1}{2}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}$) i nultog potencijala, pojavljuje se slučaj u kojem skalarno polje opisuje akretovanu fantomsku energiju za koju je $\rho > 0$ i $p = -\rho$. Tada se vrednost smanjenja mase crne rupe određuje jednačinom

$$\dot{M} = -4\pi (2M)^2 \dot{\phi}_\infty^2 \quad (4.40)$$

Na osnovu ovog izraza, može se istaći veoma dobro slaganje proračuna opisanih u prethodnom odeljku i onih koji koriste akreciju skalarnog polja nad crnom rupom. Ovakvi modeli mogu, čak i pri jednostavnijim primerima fantomske kosmologije (na primer za skalarno polje sa potencijalom $V = m^2\phi^2/2$), dati dobre procene za odgovarajući energetska fluks nad crnom rupom. Samim tim će se moći proceniti i efektivno vreme smanjenja mase, i sigurno će se sve više proveravati u budućnosti.

Moguća fizička interpretacija zbog čega se gubi masa crnih rupa pri ovoj akreciji, leži u činjenici da akretujuće čestice fantomskog skalarnog polja imaju negativnu ukupnu energiju. Slične čestice sa negativnom energijom se formiraju u procesu Hawkingovog zračenja. Tačnije rečeno, mase crnih rupa se smanjuju pri akreciji fantomske energije zbog gubljenja uslova energetske dominacije u fantomskoj energiji.

Zaključak

It will be necessary to modify the adopted slogan among cosmic futurologist - "Some say the world will end in fire; Some say in ice" - for a new fate may await our world.

R.R.Caldwell

Poslednjih godina intenzivno se povećavaju naučni napor u pravcu rešavanja problema vezanih za postojanje tamne energije. Podaci koji su nam do sada bili dostupni pokazuju da naš Univerzum nudi bogatstvo različitosti u svakom mogućem pogledu, a to znači i u pogledu sastava tamne energije. Pri tome se sučeljavaju modeli fantomske energije, kosmološke konstante i kvintesencije. Otkrivanje prave prirode tamne energije treba tek očekivati, a mnogi eksperimenti služe toj svrsi (WMAP, PLANCK...). Sa druge strane, crne rupe privlače veliku pažnju naučnika još od sedamdesetih godina prošlog veka, ta pažnja je pojačana postavljanjem modela sa crnom rupom u centru aktivnih galaktičkih jezgara, velikom debatom koja se vodi po pitanju eventualnog dobijanja informacija iz zračenja crne rupe, kao i radovima koji su pokušali da predvide njen evolucioni put u Univerzumu u kojem dominira tamna energija.

U poglavlju 4.1 ovog rada razmatrana su dva različita koncepta o uticaju akrecije energije vakuuma, pod pretpostavkom da je ona dominantna u Univerzumu. Jedan koncept prihvata mogućnost da masa crne rupe raste akrecijom energije vakuuma, dok drugi tu mogućnost ne dozvoljava pri datim uslovima. Zaključeno je da tada crne rupe najverovatnije, u potpunosti isparavaju.

Mogućnost prisustva tamne energije sa negativnim pritiskom dovela je do novih kosmoloških scenarija, uključujući i tzv. Big-Rip. Determinisanje evolucije crnih rupa pri tom scenariju ovde je obrađeno u poglavlju 4.2 korišćenjem sferno-simetrične, stacionarne akrecije tamne energije, koja je modelovana kao idealan fluid. Do sada je, u većini slučajeva, korišćena standardna akrecija energije za koju važi $p + \rho > 0$, i za njen doprinos je zaključeno da se masa crnih rupa povećava. Međutim, sasvim drugačiji rezultat se dobija ako se ispituje akrecija energije sa jednačinom stanja koja karakteriše fantomsku energiju. Na osnovu radova nekolicine naučnika (Odintsev, Babichev, Dokuchaev, Eroshenko, Gonzales-Diaz, Nojiri i dr.) dobijene su jednačine koje opisuju akreciju idealnog fluida nad Schwarzschildovom crnom rupom, i one su ovde korišćene da bi se izvršila procena promene mase. Zaključak je da se masa crnih rupa tada smanjuje, odnosno da je akrecija fantomske energije izrazitija od procesa isparavanja crnih rupa Hawkingovim efektom za model u kojem se mase crnih rupa smanjuju do Planckove mase! Isto tako, u radu je pomenuta i povezanost akrecije tamne energije koja je modelovana kao idealan fluid, i akrecije skalarnog polja, pri čemu je istaknuta приметna saglasnost rezultata.

Najjednostavniji primer kosmologije sa fantomskom energijom je realizovan skalarnim poljem sa potencijalom $V = m^2 \phi^2 / 2$, gde je $m \sim 10^{-33} eV$ [26],[31]. Nakon kratkog perioda tranzicije, taj kosmološki model se približava asimptotskom stanju sa $H \cong m\phi / \sqrt{3}$, $\dot{\phi} \cong 2m / \sqrt{3}$. Za izračunavanje odgovarajućeg energetskog fluksa nad crnom rupom mogu se iskoristiti jednačine Klein-Gordona [49]. U tim jednačinama je član m^2 jednak ostalim članovima jedino na rastojanjima bliskim kosmološkom horizontu. Tada je moguće dobiti promenu mase crne rupe koje iznosi $\dot{M} = -4\pi(2M)^2 \dot{\phi}_\infty^2 = -64M^2 m^2 / 3$. Ukoliko je $M_0 = M_s$, i ako je $m \sim 10^{-33} eV$, tada se dobije efektivno vreme gubitka mase crnih rupa koje iznosi $\tau = (3/64)M^{-1}m^{-2} \sim 10^{32} god$. To znači da bi, prema ovom modelu, sve crne rupe usled akrecije fantomske energije i sve većeg smenjenja apsorpcionog dejstva pozadinskih zračenja, trebalo da ispare za vremenski interval $t_{rp} - \tau$.

Moguća fizička interpretacija zbog čega se gubi masa crnih rupa pri ovoj akreciji leži u činjenici da akretujuće čestice fantomskog skalarnog polja imaju negativnu energiju. Čestice sa sličnom negativnom energijom nastale su u Hawkingovom procesu isparavanja i učestvuju u Penroseovom mehanizmu ekastrakcije rotacione energije iz crnih rupa. Postojanje horizonta nije od presudnog značaja za dešavanje procesa pri kojem će crne rupe gubiti masu akrecijom fantomske energije. Jednosmernost membrane horizonta čini da je proces akrecije neizbežan i nepovratan. Na osnovu predloženih primera i rešenja nameće se zaključak da bilo koji objekat može gubiti svoju masu ako je sposoban da zarobi fantomsku energiju.

Dodatak 1

Svojstva crnih rupa

Einsteinove jednačine gravitacionog polja su nelinearne i zbog toga se ne mogu rešiti u opštem obliku. Zbog toga se ne može koristiti ideja superpozicije, osim u slučaju slabih gravitacionih polja. Jedna od posledica je da se gravitaciono polje više objekata ne može dobiti kao zbir polja podsistema, što znatno otežava njihovo rešavanje. Zato je nalaženje tačnih rešenja relativističkih jednačina veoma teško. Ovaj zadatak je rešen, međutim, za neke interesantne fizičke situacije. Naime, u slučaju statičkog, sferno-simetričnog gravitacionog polja koje formira mirujuće sferno-simetrično telo rešenje se nalazi bez većih teškoća. Koristeći Einsteinove jednačine moguće je za poznatu fizičku situaciju (poznati raspored masa, tenzor energije-impulsa) odrediti metrički tenzor i time formulisati dinamiku.

Prvi koji dobio tačno rešenje jednačina gravitacionog polja i izraza za kvadrat linijskog elementa ds^2 za navedene uslove bio je Schwarzschild. On je pretpostavio da na dovoljno velikim udaljenostima od ove mase prostor-vreme prelazi u prostor Minkowskog (ravan prostor). Rešenje samo po sebi ima ogroman značaj zato što se pomoću njega može opisati gravitaciono polje Sunca i izvesti jednačine za tri klasična eksperimenta kojima se pokazuje razlika u predviđanjima klasične gravitacije i opšte teorije relativnosti.

Da bi se dobio izraz za kvadrat linijskog elementa ds^2 potrebno je posmatrati sfernu, nerotirajuću i nenaelektrisanu masu sa sferno-simetričnom distribucijom mase u njoj. Uslov stacionarnosti i statičnosti označava da u koordinatnom sistemu komponenta g_{00} ne zavisi od vremena x^0 (ili t) i da je $g_{0i} = 0$. Sferna simetrija gravitacionog polja ukazuje da metrika prostor-vremena treba da bude ista u svim tačkama koje se nalaze na istom rastojanju od centra izvora polja.

Tada je najopštiji izraz za metriku dat izrazom (1.1). U toj jednačini $A(r)$ i $B(r)$ su nepoznate funkcije od $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$.

Detaljno izvođenje rešenja za pretpostavljene uslove dato je u referenci [79]. Ovde samo treba naglasiti da pri velikim vrednostima r (daleko od masa) prostor-vreme Schwarzschilda prelazi u prostor-vreme Minkowskog. Na taj način prostor-vreme definisano jednačinom (1.1) ima sledeću metriku:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C_1}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{C_1}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Iz prethodnog izraza može se zaključiti da je $g_{00} = -\left(1 + \frac{C_1}{r}\right)$, gde konstantu C_1 možemo odrediti iz zahteva da na velikim rastojanjima od date mase ($r \rightarrow \infty$) važi njutnovska aproksimacija. Na osnovu izraza za Poasonov potencijal treba da bude $g_{00} = -(1 + 2\phi)/c^2$, gde je ϕ potencijal jednak svom njutnovskom izrazu $\phi = -GM/r$. Znači, dolazi se do zaključka da je $C_1 = -\frac{2GM}{c^2}$. Pokazuje se da ova konstanta ima dimenzije dužine, i tako se dobija vrednost **gravitacionog radijusa** $R = 2GM/c^2$, odnosno u našem slučaju ($G = c = 1$) gravitacioni radijus je $R = 2M$.

Nalaženje crnih rupa

Crnu rupu je teško zapaziti jer ne odaje svetlost, u stvari gotovo ništa. Ni do danas nijedna crna rupa nije zasigurno detektovana, jer se direktno teleskopom ne može videti. One se gotovo sigurno otkrivaju indirektnim putem, tj. njihovim gravitacionim uticajem na okolne objekte. Novorođena crna rupa može da "luta" svemirom, usamljena i nevidljiva, ali mnoge rupe nisu same već su članovi dvojnog sistema čiji je jedan član vidljiv i tada se može detektovati njena lokacija. Ti dvojni sistemi otkrivaju se čudnim ponašanjem vidljivih tela. Pri analizi spektra zvezde zapaža se regularni pomak u spektralnim linijama ka plavoj i ka crvenoj. Izračunavanjem kolika ih gravitacija ometa može se zaključiti kakav im je nevidljivi pratilac (npr. crna rupa ili neko drugo telo).

Akrecioni disk - crna rupa svojom gravitacijom utice na okolne objekte, zarobljava gas i drugu materiju sa svog vidljivog pratioca. Time oko sebe formira dodatni disk tj. akrecioni disk (akrecija predstavlja sakupljanje). Otkrivanjem takvog efekta, otkriva se skriveni pratilac. Ta materija se sliva kao kroz levak ka crnoj rupi i dok ne dosegne horizont događaja odaje neko zračenje. Gravitaciono polje u blizini horizonta je jako veliko i materijal koji upada u crnu rupu ima veliku brzinu (blizu brzini svetlosti) i ubrzanje - čestice koje se slivaju međusobno se sudaraju i to žestokim sudarima kao u nuklearnom akceleratoru, pa zato akrecioni disk odaje elektromagnetno zračenje visokih energija, najverovatnije X - zračenje.

Oko sistema dvojnih zvezda se može opisati putanja koja određuje domen gravitacionog dejstva svake zvezde. Materija koja se nađe unutar petlje pripada zvezdi koja se nalazi u centru te petlje. Ako se iz nekog razloga materija nađe van petlje, onda je ona izgubljena za datu zvezdu. Zbog različite brzine rotacije unutrašnjeg i spoljašnjeg sloja diska dolazi do velikog zagrevanja gasa usled trenja, kao i do ubrzanog pada velikih količina ove materije na površinu zvezde. Nas svakako interesuje šta se događa ako je jedna od dvojnih zvezda upravo crna rupa. Dodatnom analizom ponašanja akrecionog diska u čijem se centru verovatno nalazi crna rupa ustanovljeno je da će, pored stalnog X zračenja, ovaj sistem svakog stotog dela sekunde izračiti u vidu bljeska dodatno intenzivno X zračenje. Magnetne sile usled spiralnog spuštanja materije čupaju mlazeve atoma. Dakle, moguće je imati direktne dokaze za postojanje crne rupe.

Svetlosni zrak koji je dosta udaljen kretaće se skoro pravolinijski jer je prostor-vreme skoro ravno. Kako se bude približavao crnoj rupi zrak će zakrivljivati svoju putanju. Na određenom rastojanju od crne rupe zrak bi bio zahvaćen u cirkularnu orbitu koja se zove fotonski krug. Razumljivo je da svaka zvezda šalje bar nekoliko zraka na tačno određenom rastojanju od rupe, koji zato kruže ovim cirkularnim orbitama. Ove orbite u fotonskoj sferi nisu stabilne. I najmanja perturbacija izbaciće zrak ili natrag u vasionu, ili dole u rupu.

Kvazari – kvazari (eng. Quasi Stellar Objects) otkriveni su 1963. godine i nalaze se gotovo na samom horizontu dostupnog Univerzuma. Izračivanje energije tj. X zračenja ovih objekata zavisi od njihove mase. Naučnici smatraju da masu kvazara mora da nosi neko centralno telo, a da se energija dobija neprekidnim upadanjem nove materije u to centralno telo. Richard Lovelace smatra da se u središtu kvazara nalazi crna rupa koja bi bila najstabilnije centralno telo i najefikasniji pokretač svih procesa u kvazarima. Pretpostavlja se da crne rupe zrače kroz kvazare, odnosno da je zračenje kvazara u stvari zračenje akrecionog diska crne rupe. Kvazari ispuštaju uske snopove materije kroz parne jake radio izvore širine $3^{\circ} - 5^{\circ}$, što pokazuje da postoji uski kanal kroz koji se materija izbacuje. Radijacija se emituje u pravcu ose diska koji okružuje crnu rupu "kanalom" koji stvaraju jake elektromagnetne sile. To elektromagnetno polje ubrzava čestice i izbacuje ih.

Decembra 1970. godine lansiran je satelit Uhuru sa dva teleskopa za detektovanje samo X-zraka. U toku naredne dve godine detektovano je preko 300 izvora X-zraka. Jedan od tih izvora je iz sazvežđa Cygnus (sada poznat izvor kao Cygnus X-1). Ličio je na dvojnu zvezdu sa jednim nevidljivim članom. Vidljivi član toga sistema je plava zvezda devete magnitude (poznata kao HDE 226868), udaljena 8200 svetlosnih godina i oko 23 puta je veća od Sunca. Svakih 5-6 dana ona je pravila pun krug oko svog nevidljivog partnera, čija je masa bila 10 puta veća od Sunčeve, što je bilo previše za neutronske zvezde, pa su zaključili da je to verovatno crna rupa. Osim toga, zvezda obično ne emituje X zračenje. (To je energija 10 000 puta veća od one koju emituje Sunce). Kad se posmatra sazvežđe Labud, taj vidljivi član-zvezda je izdužena, jer njen pratilac ispoljava ogromnu gravitaciju. Osim toga, vrlo je moguće da su crne rupe još LMCX-3, AO620-00, kao i LMCX-1 i SS433. Pretpostavlja se da se i u Magelanovim oblacima nalaze crne rupe. Raspolaze se i sa izvesnim podacima da se crna rupa nalazi u centru naše galaksije (kao što je moguće i za druge galaksije), sa masom koja iznosi oko stotine hiljada Sunčevih. Pretpostavka je da crne rupe iz centra galaksije nastaju otprilike u isto vreme kad i galaksija i to od gasa koji se sleže u centru. Gas pređe tačku posle koje ne može formirati zvezdu, ali se kontrahuje u jedan oblak koji postaje jedna vrsta velike zvezde a ona potom kolapsira u supermasivnu crnu rupu.

Elementi crne rupe

Nakon formiranja crne rupe, tj. nakon kolapsa zvezde, ona se vrlo brzo smesti u stacionarno stanje, pošto pri svakoj kretnji emisija gravitacionih talasa odnosi energiju. Za vreme kolapsa zvezde i nastajanja crne rupe, sva materija se kreće jako brzo, tako da se i energija brzo odliva. Od nekadašnje zvezde zadržavaju se *masa, ugaoni momenat i ukupno naelektrisanje*.

Može se reći da masa "remeti" gravitaciono polje i time izaziva gravitacione talase, kao što se elektromagnetni talasi mogu predstaviti periodičnim uzburkavanjima električnog polja. Ti "poremećaji" se odnose na geometriju prostor-vremena. Masa koja se nađe na putu gravitacionom talasu biće periodično zbijena, pa rastegnuta silama plime, kako talas prolazi kroz nju, jer gravitaciono polje nije uniformno. Ovo zbijanje i rastezanje prenosi energiju od izvora gravitacionog talasa do tela koje je apsorbuje. Međutim, jačina gravitacionih talasa je mala. Oni sami jos nisu detektovani na Zemlji, ali bi mogli mnogo reći o događajima koji su npr. vezani za crne rupe.

Israel je došao do zaključka da, ako je neutralna i ne rotira, crna rupa je jednostavan objekat koji se može opisati samo jednim parametrom - svojom masom. One bi se mogle opisati pomenutim oblikom Einsteinovih jednačina do kojih je došao još Schwarzschild. Rotirajuća crna rupa nastaje od rotirajuće zvezde. Uglavnom sve zvezde rotiraju, pa se pretpostavlja da su i većina crnih rupa rotirajuće i da se odlikuju masom i ugaonim momentom. Brzina rotiranja prilikom kolapsa se naglo povećava, što znači da crna rupa mnogo brže rotira od bivše zvezde. Kod rotirajućih crnih rupa takođe postoji Schwarzschildov radijus, ali izvan njega se nalazi i tzv. stacionarna granica, koja obrazuje polutarno ispupčenje oko crne rupe koje je uslovljeno centripetalnom silom. Objekat koji se nađe na stacionarnoj granici, ali izvan Schwarzschildovog radijusa, samo je delimično zarobljen i ima šanse da se izbavi. Ako bi se objekat kretao u smeru rotiranja crne rupe, ona bi ispoljila težnju da ga zavrtla poput kamena iz praćke dajući mu pritom više energije nego što je imao prilikom ulaska. Time se smanjuje ugaoni momenat crne rupe tj. ona usporava jer je deo ugaonog momenta prešao na objekat. Kada bi se ugaoni momenat istrošio ostala bi samo masa.

Naelektrisanje materije u crnoj rupi je obično nula, jer je zvezda uglavnom elektroneutralna. Odnosno, ako je upadnuta materija elektroneutralna crna rupa neće imati naelektrisanje i obrnuto. Crna rupa koja bi i imala naelektrisanje bila bi zbog toga okružna električnim poljem ogromne jačine i ono bi lako jonizovalo atome međuzvezdanog gasa i prašine. Na taj način bi crna rupa ubrzo postala elektroneutralna.

Iz svega toga sledi "no-hair" teorema, jer veličina i oblik crne rupe zavise samo od mase i brzine rotiranja, a ne od prirode tela. To bi značilo da su sve informacije o kolapsirajućem telu izgubljene, ali i da crna rupa ipak nije sasvim crna. Međutim, kvantnom gravitacijom se radi na tome da se detekcijom gravitacionih talasa ipak možda dođe do nekakve informacije o preminuloj zvezdi i sazna šta se nalazi unutar crne rupe.

Vrste crnih rupa

Moguće je i da postoje crne rupe sa masama znatno manjim od Sunčeve. One ne bi mogle da nastanu usled gravitacionog kolapsa, zato što im se mase nalaze ispod Chandrasekharove granice, već jedino ako im je materija sabijena do ogromnih gustina veoma velikim spoljnim pritiscima. Na primer, ovakvi uslovi mogu da nastanu u izuzetno velikoj vodoničnoj bombi.

Praktična mogućnost na koju je 1971. godine ukazao Hawking jeste da je spoljna sila te veličine postojala u trenutku Velikog praska i prilikom formiranja Univerzuma. Delovi materije su se međusobno sudarali i mogli su biti podvrgnuti stravičnim temperaturama i pritiscima sa svih strana. Vasiona nije bila ravnomerna i jednoobrazna, već nejednake gustine što je gotovo sigurno, jer se u protivnom ne bi ni galaksije ni drugi objekti formirali. Vreme života praiskopskih crnih rupa trebalo bi da bude oko 10 milijardi godina [44], što znači da su nastale otprilike kad i Veliki prasak. Te "praiskopske" crne rupe se mogu otkriti jedino njihovim uticajem na okolinu i ne zna se koliko ih ima. Pretpostavlja se da su retke.

Galaktičke i supergalaktičke (supermasivne) crne rupe

Obična galaksija sadrži oko hiljadu milijardi tela tako da je jako teško predvideti njihovo ponašanje. To je sistem koga čini gusto centralno jezgro sastavljeno iz zvezda s manje gustim zvezdanim haloom oko sebe, odnosno manjim brojem zvezda razbacanim unaokolo. Vremenom će se i ta konfiguracija menjati. Tela će se sudarati, neka će steći veću brzinu, većina će ostati u galaksiji, dok će neke postati deo haloa, a neke će čak sudarima dostići toliku brzinu da će napustiti galaksiju. Ostatak zvezda će izgraditi veoma gusto centralno jezgro, koje će se sabijati u sve manju zapreminu, stapaće se u veće zvezde, i srašće u crnu rupu. Prilikom formiranja jedne ovakve supermasivne crne rupe bliski sudari će proizvesti neku vrstu vatrometa, tj. centar galaksije će isijavati svetlost i druge oblike zračenja. Okolina centra galaksije će ličiti na kvazar, jer će crna rupa gutati okolne zvezde svojom plimskom gravitacijom, a one će zauzvrat emitovati energiju kao kvazari, spuštajući se u rupu. Ako se pretpostavi da galaktička crna rupa proguta samo 1% zvezda, a da 99% zvezda uspe da pobjegne, crna rupa će imati masu oko milijardu puta veću od Sunčeve. Širenjem Univerzuma verovatno da će neke galaksije ostati u skupini pod uticajem međusobne gravitacije. Ako se uzme u obzir jato galaksija koje se sastoji od stotinu galaksija vremenom će se svaka galaksija svesti na galaktičku crnu rupu, a u dugom vremenskom periodu jato će u celini evoluirati u jednu supergalaktičku crnu rupu. Za sve ove događaje potrebno je vreme od 10^{18} do 10^{27} godina.

Dodatak 2

Uticaj pozadinskih zračenja na evoluciju crnih rupa

U ovom dodatku će se razmatrati neki alternativni (a ipak važni) elementi koji utiču na evoluciju crnih rupa. Jedan od najvažnijih kosmičko mikrotalasno pozadinsko zračenje.

Kao što je rečeno, *kosmičko mikrotalasno pozadinsko zračenje* potiče iz početnog perioda širenja Univerzuma. Na samom početku širenja elektromagnetno zračenje i neutrini su bili u termodinamičkoj ravnoteži sa supstancom. Temperatura materije je opadala i u jednom momentu dostigla kritičnu vrednost pri kojoj je zračenje prestalo da interaguje sa supstancom. Od tog trenutka je Univerzum postao transparentan za zračenje. Usled širenja Univerzuma, talasna dužina ovog zračenja se povećava tokom vremena-dolazi do crvenog pomaka. Kako osnovni energijski sadržaj u ranom Univerzumu čine visokoenergetski fotoni, zakon očuvanja energije date oblasti u spregnutom koordinatnom sistemu u širećem Univerzumu izražen je kao $\frac{d}{dt}[R^3(t)B(\nu(t))]=0$. Spektar prvobitnog zračenja ostaje ravnotežni, ali sa nižom temperaturom. anašnja temperatura kosmičkog mikrotalasnog zračenja je oko 2,74 K. Spektar zračenja u trenutku t_0 dat je izrazom

$$B(\nu)_{t_0} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[\exp\left(\frac{h\nu}{k_b T_0}\right) - 1 \right]$$

Uzmimo da imamo slučaj homogenog i izotropnog Univerzuma. Metrika za takav slučaj je data u formi FRLW metrike (2.1) pri čemu je $R(t)$ faktor skale koji zavisi od izbora modela Univerzuma. Metrika koja je pomenuta opisuje Univerzum u kojem j materija homogeno raspoređena u prostoru. Na makro planu (rastojanjima većim od $10Mpc$ i većim) ovaj uslov je ispunjen, dok na lokalnom nivou postoje nehomogenosti u obliku galaksija (i zvezda u njima) koje predstavljaju kondenzovanu materiju. Ove lokalne nehomogenosti dovešće do toga da metrika prostor-vremena odstupa lokalno od oblika (2.1). Posmatrajmo sada crnu rupu u Univerzumu koji je ispunjen zračenjem. Crna rupa će emitovati zračenje (poseduje temperaturu), ali će i apsorbovati kosmičko mikrotalasno pozadinsko zračenje. Oba zračenja imaju termalni spektar pa se mogu porediti. Energija apsorbovanog kosmičkog mikrotalasnog pozadinskog zračenja zavisi od njegove temperature i od površine horizonta događaja crne rupe.

Temperatura kosmičkog pozadinskog zračenja T_γ može se dati izrazom koji uključuje i faktor skaliranja

$$T_\gamma(t) = T_{\gamma_0} \frac{R(t_0)}{R(t)},$$

gde su T_{γ_0} i $R(t_0)$ temperatura kosmičkog pozadinskog zračenja i faktor skaliranja u trenutku t_0 . Pri širenju Univerzuma faktor skaliranja se povećava, pa na osnovu prethodne jednačine sledi da se temperatura kosmičkog pozadinskog zračenja smanjuje tokom vremena.

Količina energije koju crna rupa apsorbira u jedinici vremena jednaka je $dE_{aps} = \sigma A T_\gamma^4(t) dt$, dok je energija koju crna rupa emituje u istom vremenskom intervalu $dE_{em} = \sigma A T^4(t) dt$. Ovde je T temperatura crne rupe, dok je A površina horizonta događaja. Na osnovu ovih jednačina, ukupna promena energije crne rupe u toku vremena dt je

$$dE = dE_{aps} - dE_{em} = \sigma A (T_\gamma^4(t) - T^4) dt$$

U FRLW kosmološkom modelu, promena faktora skaliranja $a(t)$ data je eksponencijalnom zavisnošću oblika $\sim e^{Ht}$, tako da je iz ovoga zaključiti koliko brzo će se smanjivati uticaj ove apsorpcije u dalekoj budućnosti usled smanjenja temperature T_γ .

Kako Univerzum bude stario, rašće i značaj drugih izvora pozadinskog zračenja. Trenutno, zvezde neprekidno izbacuju energiju u obliku svetlosti, a uticaj kosmičkog pozadinskog zračenja slabi zbog navedenih efekata. Pozadinsko more zračenja koje potiče od zvezda će nadjačati zračenje preostalo od Velikog praska tokom 12. kosmološke deke (kada Univerzum bude star 10^{12} god). U bliskoj budućnosti će to zračenje poticati uglavnom od crvenih patuljaka koji predstavljaju najmanje zvezde. Ove relativno hladne zvezde proizvode zračenje karakteristične talasne dužine od oko $1\mu m$. Kako se Univerzum bude širio talasna dužina i ovog zračenja će se razvući na skoro $10^{37} sg$ do početka 101. kosmološke deke kada bi trebalo da nastupi doba u kojem će preostati samo sporedni produkti procesa isparenja protona i crnih rupa. Zadržavanje i anihilacija čestica tamne materije u belim patuljcima predstavlja još jedan značajan izvor zračenja u budućem Univezumu. Krajnji rezultat ovog procesa je pretvaranje znatne količine energije mase galaktičkih haloa u zračenje koje će biti dominantno tokom 17. kosmološke deke. Talasna dužina ovog zračenja bi trebalo da bude oko $50\mu m$. I ovi fotoni će se razvlačiti sa širenjem Univerzuma.

Kraj degenerativnog doba Univerzuma obeležiće *raspad protona*. Prema teorijama, raspad protona traje više od 30 kosmoloških dekada (najverovatnije 10^{32} god). Proton može da se raspadne na mnogo načina, pa shodno tome može stvoriti mnogo različitih proizvoda raspada. Jedan od mogućih raspada protona je onaj u kojem su krajnji rezultat pozitron i neutralni pion. Pion je vrlo nestabilan i brzo prelazi u zračenje. Ako se raspad odvija u gustoj sredini kao što je beli patuljak, pozitron će se brzo anihilirati sa elektronom i proizvesti dva fotona još više energije. Obična barionska materija se tako pretvara u zračenje, i ako se uzme u obzir prosečno vreme života protona, ovaj izvor energije zračenja postaće dominantan u pozadini Univerzuma nakon 31.kosmološke dekade. Najverovatnija talasna dužina tog zračenja će iznositi oko $2,5\text{ cm}$, a zatim će se povećavati sa povećanjem ekspanzije Univerzuma.

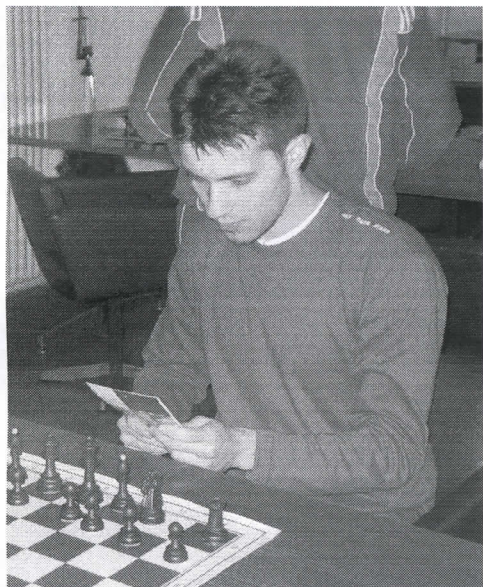
Literatura:

- [1] N. Bahcall, J. P. Ostriker, S. Perlmutter, and P. J. Steinhardt, *Science* **284**, (1999)
- [2] A. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, et al., *Astron. J.* **116**, 1009 (1998)
- [3] S. J. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, et al., *Astro-phys. J.* **517**, 565 (1999)
- [4] C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, et al., *Astro-phys. J., Suppl. Ser.* **148**, (2003)
- [5] C. Wetterich, *Nucl. Phys. B* **302**, 668 (1988)
- [6] P. J. E. Peebles and B. Ratra, *Astrophys. J.* **325**, L17 (1988)
- [7] B. Ratra and P. J. E. Peebles, *Phys. Rev. D* **37**, 3406 (1988)
- [8] J. A. Frieman, C. T. Hill, A. Stebbins, and I. Waga, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2077 (1995)
- [9] R. R. Caldwell, R. Dave, and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582 (1998).
- [10] A. Albrecht and C. Skordis, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2076 (2000)
- [11] C. Armendariz-Picon, T. Damour, and V. Mukhanov, *Phys. Lett. B* **458**, 209 (1999)
- [12] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4438
- [13] T. Chiba, T. Okabe, and M. Yamaguchi, *Phys. Rev. D* **62**, 023511 (2000)
- [14] I. Zlatev, L. Wang, and P. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 896 (1999)
- [15] P. Steinhardt, L. Wang, and I. Zlatev, *Phys. Rev. D* **59**, 123504 (1999)
- [16] R. R. Caldwell, *Phys. Lett. B* **545**, 23 (2002)
- [17] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski, and N. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 7 (2003)
- [18] B. McInnes, *J. High Energy Phys.* **0208**, 029 (2002)
- [19] U. Alam, V. Sahni, T. D. Saini, and A. A. Starobinsky, *astro-ph/0311364*.
- [20] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B* **562**, 147 (2003)
- [21] I. Brevik, S. Nojiri, S. D. Odintsov, and L. Vanzo, *hep-th/0401073*.
- [22] M. Visser, S. Kar, and N. Dadhich, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 201102 (2003)
- [23] P. F. Gonzalez-Diaz, *Phys. Rev. D* **68**, 084016 (2003)
- [24] T. Jacobson, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2699 (1999)
- [25] R. Bean and J. Magueijo, *Phys. Rev. D* **66**, 063505 (2002).
- [26] A. Frolov and L. Kofman, *J. Cosmol. Astrophys. Phys.* **5**, 9 (2003)
- [27] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **14**, 3251 (1976)
- [28] L. A. Urena-Lopez and A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **66**, 083005 (2002)
- [29] M. Yu. Kuchiev and V. V. Flambaum, *gr-qc/0312065*.
- [30] E. O. Babichev, V. I. Dokuchaev, and Yu. N. Eroshenko, *Phys. Rev. Lett.* **93**, (2004)
- [31] E. O. Babichev, V. I. Dokuchaev, and Yu. N. Eroshenko, *Class.Quantum Grav.* **22**, 143,(2005)
- [32] H. Bondi, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **112**, 195 (1952)
- [33] F. C. Michel, *Astrophys. Space Sci.* **15**, 153 (1972)
- [34] B. J. Carr and S. W. Hawking, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **168**, 399 (1974)
- [35] M. C. Begelman, *Astron. Astrophys.* **70**, 583 (1978)
- [36] D. Ray, *Astron. Astrophys.* **82**, 368 (1980)
- [37] K. S. Thorne, R. A. Flammang, and A. N. Zytlow, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **194**, 475 (1981)
- [38] E. Bettwieser and W. Glatzel, *Astron. Astrophys.* **94**, 306 (1981)
- [39] K. M. Chang, *Astron. Astrophys.* **142**, 212 (1985)
- [40] U. S. Pandey, *Astrophys. Space Sci.* **136**, 195 (1987)

- [41] L. I. Petrich, S. L. Shapiro, and S. A. Teukolsky, Phys. Rev. Lett. **60**, 1781 (1988)
- [42] B. J. Carr and S. W. Hawking, Mon. Not. R. Astron. Soc. **168**, 399 (1974)
- [43] E. Bettwieser and W. Glatzel, Astron. Astrophys. **94**, 306 (1981)
- [44] S.W.Hawking and G.F.R.Ellis, The Large Scale Structure of Space-Time (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973), Chap. 4.3.
- [45] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, Gravitation (Freeman, San Francisco, 1973)
- [46] J. C. Fabris and J. Martin, Phys. Rev. D **55**, 5205 (1997)
- [47] S. M. Carroll, M. Hoffman, and M. Trodden, Phys. Rev. D **68**, 023509 (2003)
- [48] V. N. Lukash, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **79**, 1601 (1980)
- [49] P. F. Gonzalez-Diaz, Phys. Lett. B **586**, 1 (2004)
- [50] M. Sami and A. Toporensky, Mod. Phys. Lett. A **19**, 1509 (2004)
- [51] S. M. Carroll, Phys. Rev. Lett. **81**, 3067 (1998)
- [52] T. Chiba, Phys. Rev. D **60**, 083508 (1999)
- [53] R. Horvat, Mod. Phys. Lett. A **14**, 2245 (1999)
- [54] A. Lue, L. Wang and M. Kamionkowski, Phys. Rev. Lett. **83**, 1506 (1999)
- [55] J. Bardeen, B. Carter, S. Hawking, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973)
- [56] S. Hawking, W. Israel, eds, General Relativity (1979)
- [57] M. C. Bento and O. Bertolami, Gen. Rel. Grav. **31**, 1461 (1999)
- [58] K. Benakli, Phys. Rev. D **60**, 104002 (1999)
- [59] R.L.Davis Phys. Rev. D **35**, 3705, (1987)
- [60] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology (1972)
- [61] S. Perlmutter et al. Nature **391**, 51 (1998)
- [62] N. Dalal and K. Griest, Phys. Letters B **490**, 1-5 (2000)
- [63] W.A. Hiscock, Phys. Rev. D **16** (1977)
- [64] R.L. Mallett, Phys. Rev. D **34**, 1916 (1986)
- [65] R.L. Mallett, Phys. Rev. D **33**, 2201 (1986)
- [66] F.C. Adams, M. Mbonye, G. Laughlin, Phys. Rev. B **450**, 339 (1999)
- [67] P.C.W. Davies, S.A. Fulling, W.G. Unruh, Phys. Rev. D **13**, 2720 (1976)
- [68] R. Bousso, S.W. Hawking, Phys. Rev. D **57** (1998).
- [69] Albrecht A. & Steinhardt P.J. Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982)
- [70] Alcock C. & Paczynski B. Nature **281**, 358, (1979)
- [71] S.W. Hawking, G. Gibbons, Phys. Rev. D **15**, 2725 (1977)
- [72] P.J.E. Peebles. Principles of Physical Cosmology, Princeton University Press (1993)
- [73] P.J.E. Peebles. ApJ **284**, 439 (1984)
- [74] J.C. Niemeyer and K. Jedamzik, Phys. Rev. Lett. **80**, 5481 (1998)
- [75] K. Jedamzik and J.C. Niemeyer, Phys. Rev. D **59**, 124014 (1999)
- [76] T. Bringmann, C. Kiefer, and D. Polarski, astro-ph/0109404.
- [77] S. Dodelson, M. Kaplinghat, and E. Stewart, Phys. Rev. Lett. **85**, 5276 (2000)
- [78] M.M. Čirković and N. Bostrom, Cosmological Constant and the Final Anthropic Hypothesis, Astrophys. Space Sci. gr-gc 9906042, (2000)
- [79] M. Pantić "Uvod u Ajnštajnovu teoriju gravitacije", PMF, Novi Sad (2005)
- [80] A.R. Liddle and A. Green, Phys. Rep. **307**, 125 (1997)



Kratka biografija



Darko Donevski je rođen 9.03.1980. godine u Vršcu. Kao učenik generacije završio je Osnovnu školu "Dositej Obradović" u Plandištu i matematičko usmerenje Gimnazije "Borislav Petrov Braca" u Vršcu. Nakon završene gimnazije upisuje Fakultet Tehničkih Nauka u Novom Sadu (odsek za elektroniku, elektroenergetiku i telekomunikacije), a 2002. godine i Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer Astronomija sa astrofizikom na Departmanu za fiziku.

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

<i>Redni broj:</i>	
RBR	
<i>Identifikacioni broj:</i>	
IBR	
<i>Tip dokumentacije:</i>	Monografska dokumentacija
TD	
<i>Tip zapisa:</i>	Tekstualni štampani materijal
TZ	
<i>Vrsta rada:</i>	Diplomski rad
VR	
<i>Autor:</i>	Darko Donevski, br. dos. 903/02
AU	
<i>Mentori:</i>	Prof. Dr Milan Pantić, redovni profesor na PMF-u u Novom Sadu
MN	Prof. Dr Milan Ćirković, vanredni profesor na PMF-u u Novom Sadu
<i>Naslov rada:</i>	Uticaj tamne energije na evoluciju crnih rupa
NR	
<i>Jezik publikacije:</i>	srpski (latinica)
JP	
<i>Jezik izvoda:</i>	srpski/engleski
JI	
<i>Zemlja publikovanja:</i>	Srbija
ZP	
<i>Uže geografsko područje:</i>	Vojvodina
UGP	
<i>Godina:</i>	2007.
GO	
<i>Izdavač:</i>	Autorski reprint
IZ	
<i>Mesto i adresa:</i>	Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA	
<i>Fizički opis rada:</i>	4/84/80/2/0
FO	
<i>Naučna oblast:</i>	Fizika
NO	
<i>Naučna disciplina:</i>	Astrofizika, Kosmologija
ND	
<i>Predmetna odrednica/ ključne reči:</i>	Evolucija crnih rupa, Hawkingovo zračenje, tamna energija
PO	
UDK	
<i>Čuva se:</i>	Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu
ČU	
<i>Važna napomena:</i>	nema
VN	
<i>Izvod:</i>	Analizirani su modeli uticaja različitih oblika tamne energije na proces evolucije crnih rupa
IZ	
<i>Datum prihvatanja teme od NN veća:</i>	7.05.2007. godine
DP	
<i>Datum odbrane:</i>	9.08.2007. godine
DO	
<i>Članovi komisije:</i>	
KO	
<i>Predsednik:</i>	Prof. Dr Svetlana Lukić, redovni profesor na PMF-u u Novom Sadu
<i>Član:</i>	Prof. Dr Milan Pantić, redovni profesor na PMF-u u Novom Sadu
<i>Član:</i>	Prof. Dr Milan Ćirković, vanredni profesor na PMF-u u Novom Sadu
<i>Član:</i>	Prof. Dr Tijana Prodanović, docent na PMF-u u Novom Sadu

KEY WORDS DOCUMENTATION

<i>Accession number:</i>	ANO
<i>Identification number:</i>	INO
<i>Document type:</i>	Monograph publication
DT	
<i>Type of record:</i>	Textual printed material
TR	
<i>Content code:</i>	Final paper
CC	
<i>Author:</i>	Darko Donevski, 903/02
AU	
<i>Mentors/comentors:</i>	Prof. Dr Milan Pantić
MN	Prof. Dr Milan Ćirković
<i>Title:</i>	The Influence of Dark Energy on the Evolution of Black Holes
TI	
<i>Language of text:</i>	Serbian (Latin)
LT	
<i>Language of abstract:</i>	English
LA	
<i>Country of publication:</i>	Serbia and Montenegro
CP	
<i>Locality of publication:</i>	Vojvodina
LP	
<i>Publication year:</i>	2007.
PY	
<i>Publisher:</i>	Author's reprint
PU	
<i>Publication place:</i>	Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP	
<i>Physical description:</i>	4/84/80/2/0
PD	
<i>Scientific field:</i>	Physics
SF	
<i>Scientific discipline:</i>	Astrophysics, Cosmology
SD	
<i>Subject/ Key words:</i>	Black Holes Evolution, Hawking radiation, Dark Energy
SKW UC	
<i>Holding data:</i>	Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4
HD	
<i>Note:</i>	N none
<i>Abstract:</i>	This paper describes the stationary, spherically symmetric accretion of dark energy onto a Schwarzschild black hole. The accretion process is studied in detail for two dark energy models: cosmological constant and phantom energy. The approximation of an ideal fluid is used to model the dark energy. It is shown that in the Universe dominated by vacuum energy, all isolated black holes will eventually evaporate through the Hawking process. Accretion of phantom energy, in which the sum of the pressure and energy density is negative, is accompanied by the gradual decrease of the black hole mass. Masses of all black holes tend to zero in the phantom energy Universe approaching the Big-Rip.
AB	
<i>Accepted by the Scientific Board:</i>	7.05.2007.
ASB	
<i>Defended on:</i>	9.08.2007.
DE	
<i>Thesis defend board:</i>	DB
<i>President:</i>	Dr Svetlana Lukić, full professor
<i>Member:</i>	Dr Milan Pantić, full professor
<i>Member:</i>	Dr Milan Ćirković, associate professor
<i>Member:</i>	Dr Tijana Prodanović, assistant professor