УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ - ГРУПА ФИЗИКА

ДИПЛОМСКИ РАД

ТЕМА:

СПОЈ МЕТАЛ-ДИЕЛЕКТРИК И ЕЛЕМЕНТАРНЕ ЕКСИТАЦИЈЕ У ЊЕМУ

КАСАВИЦА Д. СЛОБОДАНКА

Захваљујем се професору dr Братиславу Тошићу на помоћи указаној при изради овог рада.

Садржај

Увод

У последњој деценији нагло је порасло интересовање за конструкцију супер проводних материјала који су суперпроводни и на вишим температурама од досад познатих. Познато је да досада највиша температура прелаза у нормално стање износи око 25°K.

Ово интересовање за високотемпературске суперпроводнике диктира нам потреба ракетне технике и космичке физике, јер је суперпроводник неопходан навигациони елеменат ракета и космичких бродова. Ниске температуре на којима егзистирају данас познати суперпроводници захтевају веома гломазне уређаје за хлађење и одржавање истих што самим тим (имајући у виду ракете и космичке бродове) повећава штетни терет и трошкове око њихове изградње.

Данас се скоро са сигурношћу може тврдити да суперпроводници типа метала или легура не могу да се конструишу на оним температурама на којима би њихова употреба била рентабилна. Због тога се приступило интензивном проучавању других механизама који могу да доведу до појаве суперкондуктивности, а то су утицаји дефеката и примеса или интеракција у слојевима метал-метал или метал-диелектрик.

Циљ овог дипломског рада је да се теоријском анализом појава у граничном слоју метал-диелектрик оцени како интеракција на граници споја утиче на елементарне ексцитације у металу и да ли овај утицај води ка образовању таквих елементарних ексцитација које собом носе наелектрисања, а крећу се без трења.

Све анализе бити ће извршене уопштено, без конкретизације типа метала, типа диелектрика и њихове узајамне динамичке повезаности.

11. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРИЈЕ МЕТАЛА

Чврста тела у којих су атоми или атомске скупине распоређени у простору према извесној правилности називају се кристали. Тела с атомима без правилне просторне распоређености називају се аморфна тела. Кристали по правилу поседују одговарајуће просторне облике и правилности, при чему је симетрија једна од главних карактеристика.

Кристал је састављен од атома, јона и молекула који су распоређени према извесним правилностима геометријских облика, те отуда и облик кристала. Они на тај начин сачињавају кристалну решетку која има разне геометријске облике. У погледу просторности кристална решетка се одликује периодичношћу. Распоред структурних елемената кристала у већини случајева одговара минималној слободној енергији тих честица.

Према својству електричне проводљивости материјалне средине су окарактерисане специфичним отпором ρ који представља отпор јединичног пресека по јединици дужине, односно специфичном проводљивошћу која је једнака реципрочној вредности специфичног отпора.

Свако чврсто тело садржи електроне. За електричну проводљивост је битно под којим околностима се део електрона у примењеном електричном пољу може сматрати као да је делимично слободан.

Према својству електричне проводљивости сва чврста тела се деле на проводнике, полупроводнике и изолаторе.

Метали су кристали са металном кристалном решетком. У ротљевима ове решетке смештени су позитивни јони, а у простору између њих крећу се слободни електрони. Такве слободне електроне називамо електронским гасом. Слободни електрони у металу дејствују електричним силама на позитивне јоне. Електронски гас у металу одржава позитивне јоне у решетци, а тиме условљава и стабилност металне решетке. Енергија везе у металним кристалима мања је од енергије везе у молекулу услед већег растојања међу атомима кристала у односу на одговарајуће растојање у молекулима.

Велики број важних физичких особина метала можемо разумети полазећи од модела слободног електрона. По том моделу најслабије везани електрони атома крећу се слободно кроз запремину кристала. Валентни електрони атома постају проводници електрицитета у металима и називају се проводним електронима. Силе између проводних електрона и јона занемарују се у апроксимацији слободних електрона. Проводан електрон у металу може имати дуг средњи слободни пут зато што слободни електрон не скреће под утицајем јона уређених у периодичну решетку, јер се таласи материје простиру слободно у периодичним структурама. Проводни електрон се ретко сударa са другим проводним електронима, што је последица Паулијевог принципа искључивости.

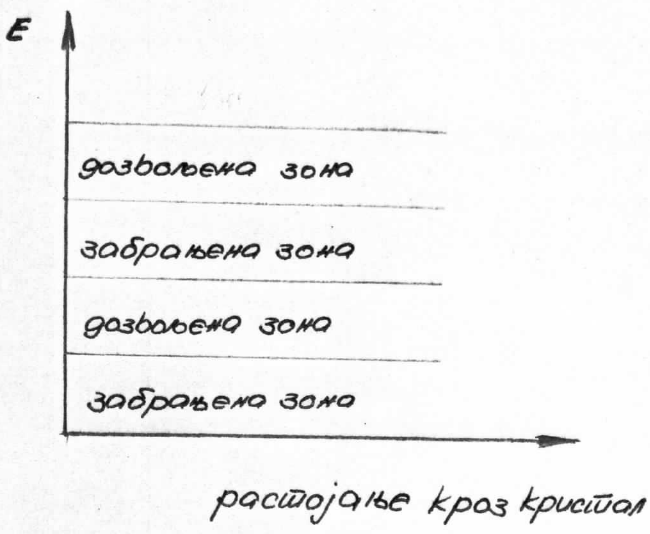
Може се сматрати да је број слободних електрона у јединици запремине метала константан и не зависи од спољашњих утицаја, значи ни од температуре. При томе настаје и рекомбинација електрона и јона, а такође и генерисање нових слободних електрона. Обе две појаве се квантитативно уравнотежавају.

Теорија енергетских зона која обухвата проучавање промена енергетских стања електрона у атомима кристалне решетке погодна је за анализу појава у вези са провођењем струје.

Енергетски нивои су одређени наелектрисањем језгра Ze и квантним бројевима n, l, m и s. Без утицаја спољњег поља енергија је одређена квантним бројевима n и $(l+s)$, а под утицајем поља и са m. Скуп ова четири квантна броја одређује квантно стање. Једно квантно стање може да буде попуњено највише једним електроном.

Ако се два атома са једнаким енергетским нивоима електрона приближе један другом, доћи ће услед међусобног утицаја до цепања сваког појединог енергетског нивоа у два, који су један према другом мало померени.

Квантна стања која су у изолованим атомима имала исте енергије, када су атоми у кристалној решетци, сачињавају на енергетској скали групу квантних стања на различитим, али блиским енергијама. Интервал енергије у којем се налази једна таква група квантних стања назива се дозвољена енергетока зона. Интервали енергија у којима нема квантних стања су забрањене зоне. Електрони се могу наћи само на оним енергијама на којима постоје квантна стања.



Иако се ради о енергетском интервалу, зона се представља помоћу скале која се најчешће представља вертикално као обична висинска скала.

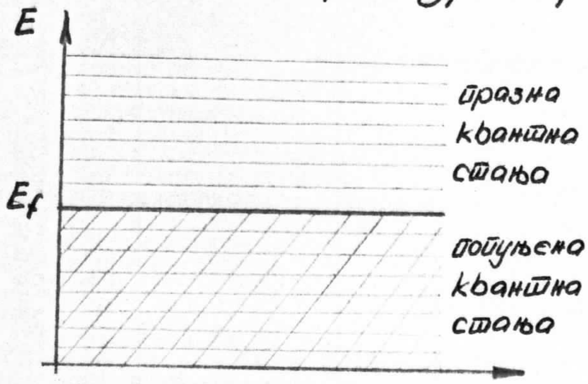
Кад се атоми почну приближавати један другоме долази до међусобног утицаја интеракције међу атомима. Услед тога се енергије појединих квантних стања смањују или повећавају, што зависи од интеракције.

Електрони са малим квантним бројем n су у знатној мери заштићени од утицаја околних атома, за разлику од електрона са највишим n, такозваних валентних електрона. Зато и квантна стања унутрашњих електрона трпе мања енергетска померања од валентних електрона.

Услед мале енергетске разлике између енергетских нивоа у дозвољеној зони електрони могу прелазити са једног нивоа на други. За такав прелаз они поседују топлотну енергију која је већа од разлике нивоа. Ако су сви нивои заузети електронима они могу само да мењају места, у оквиру који допушта Паулијев принцип.

Забрањене зоне се одређују према одговарајућим решењима једначина кретања у потенцијалном пољу. Скуповима вредности који нису решења Шредингерове једначине одговарају забрањене или недозвољене зоне.

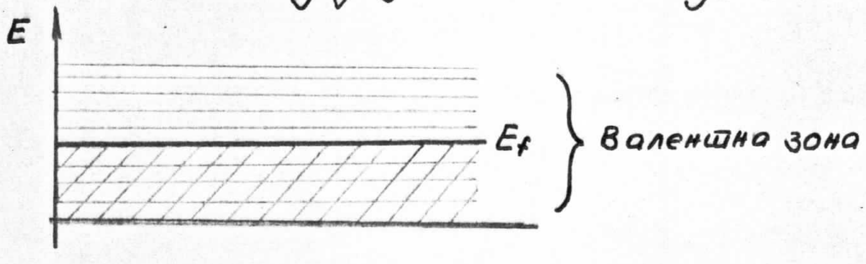
Електрони теже да заузму најниже могуће енергије, односно најнижа слободна квантна стања. У томе их спречавају различити процеси као например термичко кретање решетке кристала, апсорпција електромагнетних таласа, судари са енергетским честицама нуклеарних реакција. Када не постоје никакви процеси који би електроне одржавали на вишим енергијама, они би се спустили на најнижа могућа квантна стања. То је случај кад на решетку не делује никакво зрачење, а температура кристала је 0°K. Тада су



сва квантна стања по енергији нижа од Фермијевог нивоа на 0°K, тј. за $E < E_f$ попуњена електронима, а сва изнад E_f су празна. Електрона нема у зони где нема квантних стања иако се она може наћи испод E_f. Фермијев ниво је обично блага функција температуре. Он представља максималан енергетски ниво електрона на температури апсолутне нуле. Зона у којој се врши провођење електричне струје назива се проводна зона. Највиша зона која садржи електроне на 0°K је валентна зона. Обе ове зоне могу бити састављене од више основних од којих свака садржи 2N квантних стања које се међусобно преклапају.

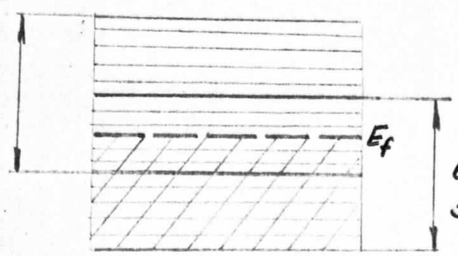
Сматрамо да се при апсолутној нули сви валентни електрони код метала налазе у валентној зони. За валентне електроне метала нема тешкоћа да из валентне зоне пређу у проводну јер и одговарајућа решења једначина показују да су дозвољени сви нивои енергија у тим зонама. Под дејством електричних поља валентни електрони се крећу од нижег потенцијала ка вишем. Заузимајући екситоване нивое електрони мењају енергију. Управо овај процес прелажења електрона у екситована енергетска стања изазива постојање електричне проводљивости метала. Попуњеност валентне енергетске зоне електронима, као и непопуњеност проводне зоне односе се на идеалан случај апсолутне нуле. Међутим, сви реални случајеви су изнад апсолутне нуле, па нити је валентна зона потпуно попуњена, нити је проводна зона потпуно слободна. Наиме, неки су електрони већ напустили основна и заузели екситована стања. Хоризонталним линијама обележавају се енергетски нивои, при чему су симболички приказани само неки од тих нивоа.

Код чврстих тела проводници су материјали који и на апсолутној нули имају слободне носиоце наелектрисања, а то су једновалентни и двовалентни метали.



Код једновалентних метала сваки од N атома доноси по један електрон у валентну зону. Како у овој зони постоји 2N стања, она је непопуњена, па је истовремено и проводна зона.

Двовалентни метали су проводници захваљују-



Ки томе што се валентна зона (која би иначе била попуњена) преклапа са вишом дозвољеном зоном. Фермијев ниво се налази на средини преклопа зоне.

12. ОПШТА ТЕОРИЈА ДИЕЛЕКТРИКА

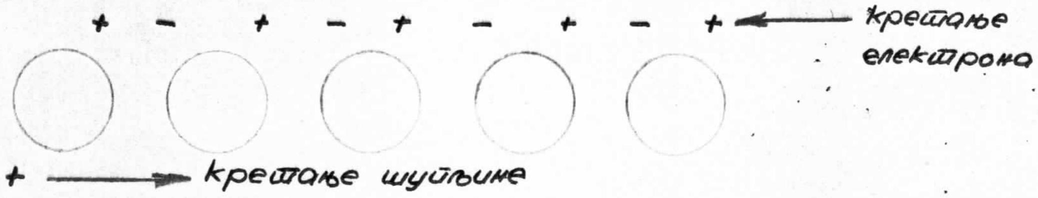
У колонама на левој страни таблице периодног система елемената налазе се метали који су електропозитивни. То значи да њихови атоми лако могу изгубити један или два електрона и постати позитивни јони. Они су добри проводници електрицитета јер је веза између атома и електрона у спољњој орбити слаба тако да се ови лако могу ослободити и постати слободни. Елементи у колонама на десној страни таблице периодног система имају електроне у спољашњим орбитама чврсто везане. Према томе, они су изолатори. У средњим колонама таблице налазе се елементи код којих је проводност знатно мања него код добрих проводника, а знатно већа него код изолатора. Они чине класу полупроводника. Материјали који електричној струји пружају релативно врло велики отпор зову се још диелектрици.

У пракси се под појмом полупроводника подразумевају проводници чије електричне отпорности на собној температури леже углавном у интервалу $(10^{-2} \div 10^{9})$ $[\Omega cm]$, на средини између добрих проводника $\div 10^{-6} [\Omega cm]$ и изолатора $(10^{14} \div 10^{22}) [\Omega cm]$.

Електрична отпорност полупроводника обично јако зависи од температуре. И у полупроводницима су електрони носиоци електричне струје. Концентрација електрона који се могу кретати кроз полупроводник зависи од температуре, у чему се они битно разликују од метала. Зависност концентрације електрона проводљивости у полупроводнику је функција температуре, $n=f(T)e^{-c/T}$. С је произвољна позитивна константа, а функција $f(T)$ сразмерна је $T^{3/2}$. Горња релација показује да се концентрација електрона код полупроводника смањује са смањењем температуре, а расте са повишењем температуре.

Савршен кристал полупроводника код кога сви валентни електрони образују валентне везе понаша се као изолатор јер нема слободних носилаца електрицитета потребних за провођење струје. Но, при нормалној собној температури, услед вибрација које настају од термичких треперења кристалне решетке неки од валентних електрона повећавају своју енергију до те мере да могу да се ослободе валентних веза и постају слободни електрони. Ослобађањем сваког електрона по једна валентна веза остаје непотпуна. Атом који је изгубио електрон постаје електрично позитиван са наелектрисањем по апсолутном износу једнаком наелектрисању електрона. Овом „електрону са позитивним оптерећењем" може се приписати одређена ефективна маса, брзина кретања и енергија, што значи да се може третирати као честица. Због овог настанка ову честицу називамо шупљином.

Атом, који је изгубио један електрон тежи да употпуни прекинуту валентну везу. Он „извлачи" електрон из неке оближње валентне везе у којој је електрон на вишем енергетском нивоу. На тај начин посматрани атом постаје неутралан, али се шупљина јавља на месту са кога је привучен електрон за неутрализацију.



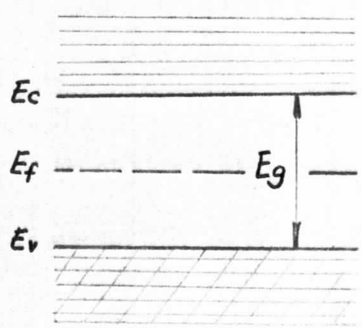
Слободни електрони и шупљине имају ограничен век јер се у кретању кроз кристал сусрећу и сједињавају успостављајући поново валентне везе. Термичко раскидање валентних веза расте са температуром, док је брзина поновног успостављања валентних веза сразмерна концентрацији слободних носилаца електрицитета. Због тога концентрације слободних електрона и шупљина при свакој температури имају ону вредност при којој се успоставља равнотежа између брзине раскидања и брзине поновног успостављања валентних нивоа. Процес раскидања валентних веза, као и рекомбинација слободних електрона и шупљина у валентне везе зависи и од постојања структурних несавршености кристала. Оне постоје на пример код кристала код којих се понеки атоми не налазе у кристалној решетци на местима која би заузимали кад би кристал био савршен. И површински слој кристала може имати сличан утицај као и структурне несавршености, што се сматра да је последица непотпуности валентних веза у површинском слоју. Присуством структурних несавршености не мења се концентрација слободних носилаца електрицитета јер структурне несавршености у истој мери потпомажу разбијање валентних веза као и њихово поновно успостављање. Ове несавршености само смањују време живота слободних електрона, односно шупљина.

Погледајмо сада како се полупроводници могу представити у светлу теорије зона.

При апсолутној нули цела валентна зона је потпуно заузета валентним електронима. Како се узима у обзир и спин електрона, сматра се да се на сваком од енергетских нивоа налазе по два електрона са супротно оријентисаним спиновима. Изнад ове налази се забрањена зона, тј. прекид у енергетским нивоима, а изнад ње проводна зона.

Електрони у валентној зони не могу учествовати у провођењу струје. Енергије електрона који се крећу и на тај начин стварају струју морале би се повећати под утицајем електричног поља. Када су у овој зони сви енергетски нивои попуњени, то се према Паулијевом принципу искључивости енергија једног електрона не може повећати ако се енергија другог не смањи у истом износу. Како у овој зони не може доћи до повећања енергије, овде нема ни струје.

Разлика између метала и полупроводника огледа се у забрањеној зони која постоји код полупроводника, а код метала је нема. Управо због тога полупроводник се на апсолутној нули понаша као изолатор иако је подвргнут дејству електричног поља. Да би прешао у проводну, екситовану зону електрон мора добити енергију која је бар једнака ширини забрањене зоне E_g. Фермијев ниво је отприлике на средини забрањене зоне.



Забрањена енергетска зона полупроводника обухвата интервал енергије од неколико десетих делова eV до 1,5 eV. У изолаторима је овај интервал већи него код полупроводника. При собној температури интервал забрањене зоне за електроне код изолатора велик је у односу на топлотну енергију kT. Већи је од 2 eV.

Полупроводници се данас много примењују у техници. Контролисаним поступком додају им се примесе и на тај начин добијају нови енергетски нивои у дотадашњој забрањеној зони чистог полупроводника. Концентрација атома примеса креће се од 10^{-10} до 10^{-3} по атому полупроводника, односно 10^{18} до 10^{25} атома примеса по кубном метру. За концентрације веће од наведених материјал губи особине полупроводника и на собној температури прелази у проводник металног типа. Концентрације мање од 10^{-10} по атому полупроводника практично се не могу контролисати.

13. ПРОБЛЕМ СУПЕРПРОВОДЉИВОСТИ

Капица је 1938. год. утврдио да течни $_2He^4$ протиче кроз капиларе без трења. Ова је појава названа суперпроводљивост течног хелијума. Посматрајмо под којим се условима може створити суперфлуидно стање. Стога уочимо количину течности масе M и брзине кретања $\vec{V}$. Њена количина кретања и кинетичка енергија су: $\vec{Q}=M\vec{V}$ и $E_0=\frac{1}{2}M\vec{V}^2=\frac{\vec{Q}^2}{2M}$. При протицању кроз капиларе течност се таре са зидовима суда предајући им део своје енергије. Након протицања кроз капилар, ако постоји трење, енергија течности $E<E_0$.

Промену енергије атома или молекула представљамо постојањем елементарних екситација тј. кваната побуђења атома у течности. Ради једноставности сматрамо да постоји само једна елементарна екситација импулса $\vec{p}$ и енергије $\varepsilon_{\vec{p}}$. Енергију целе количине течности увећану за енергију једне елементарне екситације представљамо као:

$$E=\frac{(\vec{Q}+\vec{p})^2}{2M}+\varepsilon_{\vec{p}}=\frac{\vec{Q}^2}{2M}+\frac{\vec{Q}\vec{p}}{M}+\frac{\vec{p}^2}{2M}+\varepsilon_{\vec{p}}=E_0+\vec{V}\vec{p}+\varepsilon_{\vec{p}}+\frac{\vec{p}^2}{2M}.$$

Члан $\frac{\vec{p}^2}{2M}$ занемарујемо јер је маса количине течности M реда величине $1[g]$ а ефективна елементарне екситације у најбољем случају је реда величине масе атома.

Због постојања трења $E<E_0$, а то даје $\vec{p}\vec{V}+\varepsilon_{\vec{p}}<0$. Оптималан случај за егзистенцију трења је да су $\vec{p}$ и $\vec{V}$ супротно усмерени:

$\frac{\varepsilon_{\vec{p}}}{p}<V$, где су $|\vec{p}|=p$ и $|\vec{V}|=V$.

Интензитет брзине V је позитивна величина јер у супротном случају кретање не би постојало. Зато супротна релација $\frac{\varepsilon_{\vec{p}}}{p} > V$ представља услов да се течност креће без трења. Још строжији услов је $\min \frac{\varepsilon_{\vec{p}}}{p} > 0$. Према томе, феномен суперпроводљивости јавља се када се услед трења у течности појављују такве елементарне ексцитације чији је минимум фазне брзине позитивна величина. Експерименти су показали да ову особину има течни $_2He^4$. Друге течности на нижим температурама прелазе у чврсто стање, а на вишим температурама код ексцитација се јавља изобличење.

Појава суперфлуидности откривена је у течном $_2He^4$ чији атоми имају укупан спин нула. Изотоп $_2He^3$ са спином $S=\frac{1}{2}$ не показује суперфлуидна својства. Имајући у виду својства Бозе и Ферми честица Богољубов претпоставља да су атоми $_2He^4$ честице бозонског карактера. Ове честице могу да се у неограниченом броју скупљају у једном квантном стању. За разлику од њих, једно квантно стање може попунити само једна Ферми честица. Готово сви бозони заузму нулти ниво импулса $\vec{p}=0$ и $E_k=0$. Постоји општа тежња у природи да систем заузме стање најниже енергије. Када не би било спољашњих утицаја сви би они имали импулс нула. Највећи број њих падне на нулти ниво.

Ако је N укупан број честица, N_0 њихов део са импулсом 0, тада је $N = \mathcal{N}_0 + \sum_{\vec{p}\neq 0} m_{\vec{p}}$.

Бозони који се налазе у стању са импулсом једнаким нули називају се кондензатни бозони, а сви заједно образују Бозе-кондензат. Бозони импулса $\vec{p}\neq 0$ су надкондензатни.

Ако систем атома $_2He^4$ схватимо као систем бозона са двочестичним интеракцијама, у репрезентацији друге квантизације хамилтонијан се може писати:

$$H = \sum_{\vec{p}} \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} b^+_{\vec{p}} b_{\vec{p}} + \frac{1}{2N} \sum_{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3 \vec{p}_4} W(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) b^+_{\vec{p}_1} b_{\vec{p}_2} b_{\vec{p}_3} b_{\vec{p}_4} \delta_{\vec{p}_1+\vec{p}_2, \vec{p}_3+\vec{p}_4}$$

где је m – маса атома $_2He^4$, а $W(\vec{p}_1-\vec{p}_3)$ – Фуријеов лик интеракције између хелијумових атома.

Апроксимирајмо да се сви атоми $_2He^4$ налазе у кондензату $b^+_0 b_0 = \mathcal{N}_0 \approx 10^{24}$, а $b_0 b^+_0 = \mathcal{N}_0 + 1 \approx \mathcal{N}_0$. Одавде је $b^+_0 b_0 = b_0 b^+_0$ што значи да се оператори кондензатних бозона понашају као обични бројеви.

У хамилтонијану издвајамо чланове са $\vec{p}=0$ и $\vec{p}\neq 0$ не узимајући у обзир чланове где су три импулса различита од нуле јер они дају поправке на спектар тек у другој апроксимацији теорије пертурбација. Одбацујући члан код кога су сва четири импулса различита од нуле, хамилтонијан можемо писати као:

$$H = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{N}_0}{N} W(0) + \sum_{\vec{p}\neq 0} \left[\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{\mathcal{N}_0}{N} W(\vec{p})\right] b^+_{\vec{p}} b_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{p}\neq 0} \frac{\mathcal{N}_0}{N} W(\vec{p}) (b^+_{\vec{p}} b^+_{-\vec{p}} +$$

$$+ b_{-\vec{p}} b_{\vec{p}}) + \frac{\mathcal{N}_0}{N} W(0) \sum_{\vec{p}=0} b^+_{\vec{p}} b_{\vec{p}}.$$

Узимајући у обзир $\mathcal{N}_0 = N - \sum_{\vec{p}\neq 0} b^+_{\vec{p}} b_{\vec{p}}$ и занемарујући квадрате малих величина коначан облик хамилтонијана је:

$$H=\frac{1}{2}NW(0)+\sum_{\vec{p}\neq 0}\left[\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}+\frac{N_0}{N}W(\vec{p})\right]b^+_{\vec{p}}b_{\vec{p}}+\frac{1}{2}\sum_{\vec{p}\neq 0}\frac{N_0}{N}W(\vec{p})(b^+_{\vec{p}}b^+_{-\vec{p}}+$$
$$+b_{-\vec{p}}b_{\vec{p}}).$$

Овај хамилтонијан дијагонализујемо прелазећи на нове Бозе-операторе $C_{\vec{p}}$ и $C^+_{\vec{p}}$; $b_{\vec{p}}=u_{\vec{p}}C_{\vec{p}}+v_{\vec{p}}C^+_{\vec{p}}$; $b^+_{\vec{p}}=u_{\vec{p}}C^+_{\vec{p}}+v_{\vec{p}}C_{-\vec{p}}$, где су u и v реалне и парне функције.

Услов каноничности трансформације је $u^2_{\vec{p}}-v^2_{\vec{p}}=1$.

Заменом у хамилтонијан добијамо:

$$H=\frac{1}{2}NW(0)+\sum_{\vec{p}\neq 0}[\alpha_{\vec{p}}v^2_{\vec{p}}+\beta_{\vec{p}}u_{\vec{p}}v_{\vec{p}}]+\sum_{\vec{p}\neq 0}[\alpha_{\vec{p}}(u^2_{\vec{p}}+v^2_{\vec{p}})+$$
$$+2\beta_{\vec{p}}u_{\vec{p}}v_{\vec{p}}]C^+_{\vec{p}}C_{\vec{p}}+\sum_{\vec{p}\neq 0}[\alpha_{\vec{p}}u_{\vec{p}}v_{\vec{p}}+\frac{1}{2}\beta_{\vec{p}}(u^2_{\vec{p}}+v^2_{\vec{p}})](C^+_{\vec{p}}C^+_{-\vec{p}}+C_{-\vec{p}}C_{\vec{p}}),$$

где је $\alpha_{\vec{p}}=\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}+\frac{N_0}{N}W(\vec{p})$; $\beta_{\vec{p}}=\frac{N_0}{N}W(\vec{p})$.

Да би се ослободили недијагоналних чланова по операторима C, поставља се услов $\alpha_{\vec{p}}u_{\vec{p}}v_{\vec{p}}+\frac{1}{2}\beta_{\vec{p}}(u^2_{\vec{p}}+v^2_{\vec{p}})=0$.

За енергију елементарних екситација у течном $_2He^4$ добијамо: $\varepsilon_{\vec{p}}=\sqrt{\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\right)^2+\frac{N_0}{N}W(\vec{p})\frac{\vec{p}^{\,2}}{m}}$.

Уместо $W(\vec{p})$ узимамо неку средњу вредност ове величине $\overline{W}$ која у моделу тврдих сфера треба да буде позитивна и пропорционална дужини растојања. Закон дисперзије за елементарну екситацију у течном $_2He^4$ може се написати као: $\varepsilon_{\vec{p}}=p\sqrt{\frac{p^2}{4m^2}+\frac{N_0}{mN}\overline{W}}$.

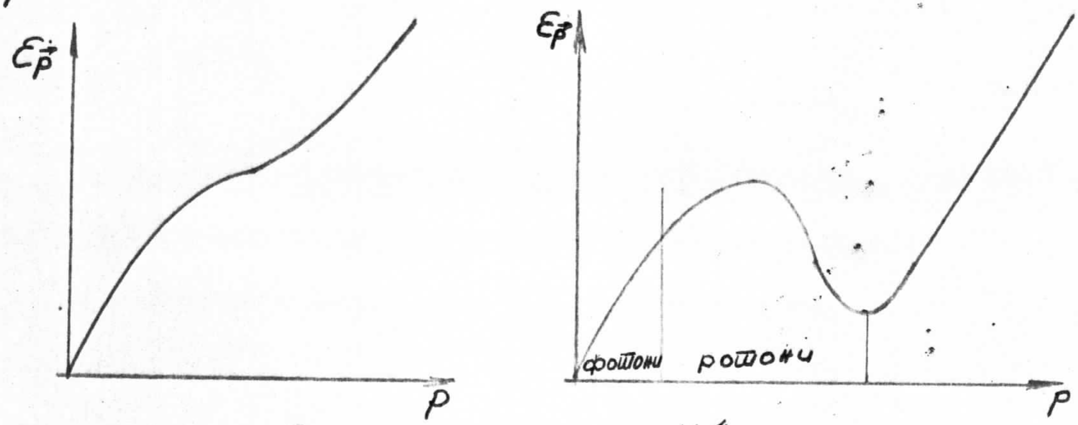
Фазна брзина је: $\frac{\varepsilon_{\vec{p}}}{p}=\sqrt{\frac{p^2}{4m^2}+\frac{N_0}{mN}\overline{W}}$ и има минимум за $p=0$.

$\min\frac{\varepsilon_{\vec{p}}}{p}=\sqrt{\frac{N_0}{N}\cdot\frac{\overline{W}}{m}}=C_{_2He^4}$.

Минимум фазне брзине елементарних екситација у течном $_2He^4$ је већи од нуле и представља брзину звука у течном $_2He^4$. Експериментално је нађено да је $C_{He^4}=240\left[\frac{m}{s}\right]$.

У области малих импулса $\varepsilon_{\vec{p}} \approx p\sqrt{\frac{N_0}{N}\frac{\overline{W}}{m}}$ тј. елементарне ексцитације имају звучни закон дисперзије и понашају се као фотони.

У случају великих импулса $\varepsilon_{\vec{p}} \approx \frac{p^2}{2m}$ тј. елементарне ексцитације имају квадратни закон дисперзије-ротони.



Спектар течног $_2He^4$

Појаву суперпроводљивости експериментално је открио Камерлинг Онес 1913. год. Феномен се састоји у томе да неким проводницима отпор пада на нулту вредност при температурама нешто вишим од апсолутне нуле. Суперпроводници прве врсте су неки чисти метали. Већина од њих на собној температури имају релативно слабу проводљивост. Ту не спадају метали који су добри проводници електрицитета на собној температури као на пример бакар, сребро или злато.

У суперпроводнике друге врсте спадају нека хемијска једињења и легуре. Ови су бројнији од суперпроводника прве врсте.

Ова појава је парадоксална јер се према класичним законима о промени отпора са температуром $R=R_0(1+\alpha t)$; $\alpha=\frac{1}{273,16}$ $[1/°C]$; $t=T-273,16$ $[°C]$ очекивало даће то бити управо на апсолутној нули.

Супертроводљивост представљамо као суперфлуидност наелектрисаних честица. Одсуство отпора значи да се флуид слободних електрона креће кроз кристал без трења тј. без судара са јонима решетке. Ова аналогија доводи до новог парадокса. Атоми ${}_2He^4$ су бозони док су електрони Ферми-честице па према томе не постоји могућност њихова кондензовања на најнижем енергетском нивоу.

За ефекат суперкондуктивности одговорни су парови електрона са супротним спиновима тзв. куперовски парови. Фрелих је показао да интеракција између електрона и фонона решетке може под извесним условима да између електрона изазове привлачне силе које су веће од одбојних. Показао је да на ниским температурама ова иста интеракција делује у обрнутом смеру тј. ствара услове да се систем електрона креће без отпора.

На основу до сада утврђених чињеница зна се да је суперкондуктивност последица образовања електронских парова са нултим спином (куперовски парови), који имају бозонско својство па могу да образују кондензат, а елементарне ексцитације могу да се крећу без трења због позитивног минимума фазне брзине.

У кристалу се образују куперовски парови чија је енергија везе последица ексцитон-фонон интеракције. При укључењу спољашњег електричног поља, пар се разграђује и распада на два електрона чији је закон дисперзије другачији од оног који имају електрони који нису настали разграђивањем пара. Обичан слободни електрон има кинетичку енергију $\frac{\vec{p}^2}{2m}$ и за овај закон дисперзије минимум фазне брзине је нула, па он не може да се креће без трења. Електрон који је настао разграђивањем пара, поред кинетичке енергије има још и додатак енергије, око половине енергије везе у пару. Овакав закон дисперзије, константе увећане за кинетичку енергију, даје позитиван минимум фазне брзине па електрони настали разграђивањем пара могу да се крећу без трења, тј. доводе до суперпроводљивости.

С друге стране фонони интерагујући са електронима доводе до стварања парова и на тај начин кваре услове за егзистенцију суперпроводног стања. При повишењу температуре број фонона у систему расте и ова топлотна енергија смањује енергију везе пара, тако да ова на некој критичној температури постаје једнака нули. Кад електрон губи константни додатак енергије, минимум фазне брзине постаје једнак нули и појава суперпроводљивости ишчезава. Експериментални подаци показују да су за метале критичне температуре /оне на којима енергија везе пара постаје једнака нули) од $1 \div 10\,[^\circ K]$. За легуре и интерметална једињења ове критичне температуре су нешто више и крећу се до $20[^\circ K]$.

На основу Фрелихових радова Бардин, Купер и Шрифер формирали су свој модел суперпроводника. У њиховом моделу између електрона са супротним импулсима у области импулса која је блиска граници ферми-сфере постоји привлачна сила која их везује у парове. Ти се парови називају куперовским, јер је Купер дао прорачун за енергију везе и остале особине таквог једног пара. Електрони имају спин који може бити $\pm\frac{1}{2}$, па су Бардин, Купер и Шрифер узели у обзир ефекте спин-спин интеракције између електрона. Између електрона са супротним спиновима делују привлачне силе измене, док између електрона са паралелним спиновима делују одбојне силе. У том смислу су ова тројица научника модификовала резултате Фрелиха сумирајући интеракцију по свим супротно усмереним спиновима. На основу овога дат је моделни хамилтонијан:

$$H_{BCS} = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} \left[a^+_{\vec{k}(\frac{1}{2})} a_{\vec{k}(\frac{1}{2})} + a^+_{-\vec{k}(-\frac{1}{2})} a_{-\vec{k}(-\frac{1}{2})} \right] - \frac{1}{N} \sum_{\vec{k},\vec{q}} W(\vec{k},\vec{q}) \cdot$$

$$a^+_{\vec{k}(\frac{1}{2})} a^+_{-\vec{k}(\frac{1}{2})} a_{-\vec{q}(-\frac{1}{2})} a_{\vec{q}(\frac{1}{2})}.$$

Функција $W(\vec{k},\vec{q})$ је позитивна и парна у интервалу импулса $p_F - p_0 \leq \hbar k \leq p_F + p_0$; $p_F - p_0 \leq hq \leq p_F + p_0$, где је p_F гранични импулс ферми сфере, а p_σ представља половину дебљине слоја око граничног импулса p_F. Ван овог интервала према BCS моделу функција је једнака нули. Ова се функција споро мења са променом импулса, па се у конкретном рачуну често замењује константом.

Анализу хамилтонијана можемо извршити методом коју је предложио Боголубов. Од ферми оператора $a^+_{\vec{k}(\frac{1}{2})}$ и $a^+_{-\vec{k}(-\frac{1}{2})}$ каноничном трансформацијом прелази на нове ферми операторе $A^+_{\vec{k}}(0)$ и $A^+_{\vec{k}}(1)$:

$$a_{\vec{k}(\frac{1}{2})}=u_{\vec{k}}A_{\vec{k}}(0)+v_{\vec{k}}A^+_{\vec{k}}(1);\quad a_{-\vec{k}(-\frac{1}{2})}=u_{\vec{k}}A_{\vec{k}}(1)-v_{\vec{k}}A^+_{\vec{k}}(0);$$

$$a^+_{\vec{k}(\frac{1}{2})}=u_{\vec{k}}A^+_{\vec{k}}(0)+v_{\vec{k}}A_{\vec{k}}(1);\quad a^+_{-\vec{k}(-\frac{1}{2})}=u_{\vec{k}}A^+_{\vec{k}}(1)-v_{\vec{k}}A_{\vec{k}}(0).$$

Функције $u_{\vec{k}}$ и $v_{\vec{k}}$ су реалне и парне. Услов каноничности даје $u^2_{\vec{k}}+v^2_{\vec{k}}=1$.

Заменом у хамилтонијан у коме се задржавамо само на квадратним члановима по операторима A добијамо:

$H_{BCS}=H_0+H_d+H_{nd}$, где су:

$$H_0=\sum_{\vec{k}}\left\{2E_{\vec{k}}v^2_{\vec{k}}-u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}W(\vec{k},\vec{q})u_{\vec{q}}v_{\vec{q}}\right\}$$

$$H_d=\sum_{\vec{k}}\left\{E_{\vec{k}}(u^2_{\vec{k}}-v^2_{\vec{k}})+2u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}W(\vec{k},\vec{q})u_{\vec{q}}v_{\vec{q}}\right\}\left[A^+_{\vec{k}}(0)A_{\vec{k}}(0)+A^+_{\vec{k}}(1)A_{\vec{k}}(1)\right]$$

$$H_{nd}=\sum_{\vec{k}}\left\{2E_{\vec{k}}u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}-(u^2_{\vec{k}}-v^2_{\vec{k}})\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}W(\vec{k},\vec{q})u_{\vec{q}}v_{\vec{q}}\right\}\left[A^+_{\vec{k}}(0)A^+_{\vec{k}}(1)+A_{\vec{k}}(1)A_{\vec{k}}(0)\right].$$

Функције u и v одредићемо тако да недијагонални део хамилтонијана, H_{nd} буде једнак нули. Уводећи ознаку $\Delta_{\vec{k}}=\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}W(\vec{k},\vec{q})u_{\vec{q}}v_{\vec{q}}$ и користећи услове за $u^2_{\vec{k}}-v^2_{\vec{k}}=1$ и $u_{\vec{k}},v_{\vec{k}}$ које даје једнакост $H_{nd}=0$, добијамо:

$$H_0=\sum_{\vec{k}}E_{\vec{k}}\left(1-\frac{2E_{\vec{k}}+\Delta_{\vec{k}}}{\sqrt{E^2_{\vec{k}}+\Delta^2_{\vec{k}}}}\right),$$

$$H_d = \sum_{\vec{k}} \sqrt{E_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2}\,[A_{\vec{k}}^+(0)A_{\vec{k}}(0) + A_{\vec{k}}^+(1)A_{\vec{k}}(1)].$$

Пре анализе спектра H_d треба испитати величину $\Delta_{\vec{k}}$ која фигурише у изразу за енергије елементарних ексцитација.

Енергија слободних електрона $E_{\vec{k}}$ дата у репрезентацији хемијског потенцијала је $E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} - \mu$, где је m^* – ефективна маса електрона $m^* = m\left(1 + \frac{Va^2 m}{\hbar^2}\right)^{-1}$, μ – хемијски потенцијал електрона који се приближно може узети $\mu = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*}$; $k_F = \frac{p_F}{\hbar}$.

Тада је $E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2}{2m^*}(k^2 - k_F^2) = \frac{\hbar^2}{2m^*}(\vec{k} - \vec{k}_F)(\vec{k} + \vec{k}_F)$.

Пошто цео модел има смисла за узани слој у сфери импулса, $\vec{k} \approx k$, а $\vec{k}_F \approx k_F$ и $E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2}{m^*} k_F (k - k_F)$.

Брзина електрона на граници Ферми сфере је $V_F = \frac{\hbar k_F}{m^*}$, а енергија $E_{\vec{k}} = \hbar V_F (k - k_F)$. Пошто се функција $W(\vec{k}, \vec{q})$ споро мења у малој области импулса око границе Ферми сфере, можемо је сматрати константном, $W(\vec{k}, \vec{q}) \approx W$ што заменом у одговарајуће једначине даје:

$$\Delta_{\vec{k}} = \frac{W}{2N} \sum_{\vec{q}} \frac{\Delta_{\vec{q}}}{\sqrt{\hbar^2 V_F^2 (q - q_F)^2 + \Delta_{\vec{q}}^2}}.$$

Пошто $\Delta_{\vec{k}}$ слабо зависи од импулса можемо сматрати да је $\Delta_{\vec{k}} \approx \Delta$, а $\frac{\partial \Delta}{\partial k} = 0$, што даје:

$$1 = \frac{W}{2N} \sum_{\vec{q}} \frac{1}{\sqrt{\hbar^2 V_F^2 (q - q_F)^2 + \Delta^2}}.$$

Добијени израз има смисла само за $W > 0$ јер сума сигурно има позитивну вредност. С друге стране позитивност величине W означава да досадашњи резултати имају смисла само ако је интеракција између електрона привлачна.

Прелазом са суме на интеграл $\frac{1}{N}\sum_{\vec q} \to \frac{a^3}{2\pi^2}\int_{q_F-q_G}^{q_F+q_G} q^2\,dq$, где је a^3 запремина елементарне ћелије кристала. Овде је одмах извршена интеграција по угловима јер израз под знаком суме зависи само од интензитета q. На основу претпоставке BCS модела границе интеграције су:

$$W(\vec k, \vec q) = \begin{cases} W;\ q_F - q_G \le q \le q_F + q_G \\ 0;\ q < q_F - q_G \ \text{и}\ q > q_F + q_G \end{cases}$$

Након интеграције апроксимирајући $q_G \gg \frac{\Delta}{\hbar v_F}$ добијамо: $\ln\left(1 + \frac{4\hbar^2 v_F^2 q_G^2}{\Delta^2}\right) = \frac{4\pi^2 \hbar v_F}{W a^3 q_F^2}$. Како је $\frac{4\hbar^2 v_F^2 q_G^2}{\Delta^2} \gg 1$ и занемарујући јединицу добијамо $\Delta = 2\hbar v_F q_G \cdot \exp\left\{-\frac{4\pi\hbar^2 v_F}{W a^3 q_F^2}\right\}$.

Спектар елементарних екситација добијамо као:

$\varepsilon_{\vec k}(0) = \frac{\partial H_d}{\partial A^+_{\vec k}(0) A_{\vec k}(0)} = \sqrt{E^2_{\vec k} + \Delta^2_{\vec k}}$ и $\varepsilon_{\vec k}(1) = \frac{\partial H_d}{\partial A^+_{\vec k}(1) A_{\vec k}(1)} = \sqrt{E^2_{\vec k} + \Delta^2_{\vec k}}$, што значи да обе врсте фермиона $A(0)$ и $A(1)$ имају исти закон дисперзије, $\varepsilon_{\vec k} = \sqrt{E^2_{\vec k} + \Delta^2_{\vec k}}$.

Узимајући у обзир да је $\hbar(k - k_F) = p - p_F$ и апроксимирајући $p^2 \sim p_F^2$ добијамо $\frac{\varepsilon_p}{p} \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta}{p_F}\right)^2 + \left(\frac{v_F}{p_F}\right)^2 (p - p_F)^2}$ и за $p = p_F$, $\frac{d}{dp}\left(\frac{\varepsilon_p}{p}\right)$ даје $\min \frac{\varepsilon_p}{p} = \frac{\Delta}{p_F} > 0$.

Одавде видимо да је минимум фазне брзине позитиван докле год је величина Δ различита од нуле. То нам указује на чињеницу да величина Δ игра главну улогу у ефекту суперкондуктивности. Овај ефекат нестаје на некој температури T_c на којој величина Δ постаје једнака нули.

На основу досада познатих чињеница познати су нам услови које морају испуњавати добри супертроводници:

a) да имају ферми сфере великог радијуса

b) да електрон-фонон интеракција буде јака

c) да има високу Дебајеву фреквенцу што грубо говорећи значи да има велику густину.

Феномен суперкондуктивности може се објаснити на следећи начин:

a) На ниским температурама електрон-фонон интеракција доводи до спаривања електрона у куперовске парове који се кондензују на импулсу p_F.

b) Супертроводност се не реализује кретањем куперовских парова, већ кретањем електрона јер је закон дисперзије у том облику добијен као закон дисперзије за ферми честице.

c) Величина Δ се може схватити као енергија везе два електрона у куперовском пару.

d) Суперкондуктивни ефекат се реализује преко оних електрона који настају разграђивањем куперовског пара јер они поред кинетичке енергије носе собом и део енергије везе /грубо узевши $\frac{\Delta}{2}$/, а за такав закон дисперзије електрона задовољен је услов кретања без трења. Електрони који нису настали разбијањем куперовског пара не могу бити супертроводни.

e) Разграђивање куперовског пара постиже се спољашњим електричним пољем (или магнетним), које истовремено доводи до кретања електрона тј. до струје.

f) Енергија везе Δ је opадајућа функција температуре. Када је једнака нули ефекат суперпроводљивости нестаје.

g) Експериментално је установљено да је критична температура за чисте метале око 10 [°K], а за легуре и интерметална једињења око 20 [°K].

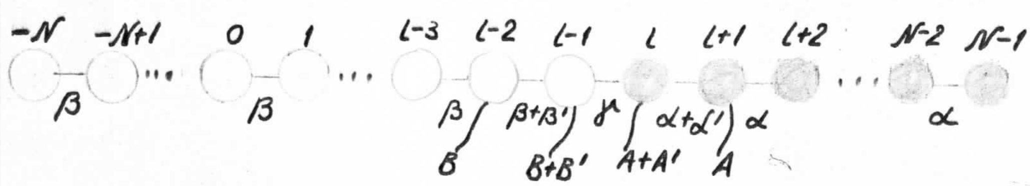
Резултате BCS теорије могуће је добити и прелазом на Паули-операторе. Разлика се састоји у томе што суперфлуидно кретање по овој слици не врше два типа ферми побуђења већ паулионска побуђења са супротно усмереним спиновима. За анализу термодинамичких карактеристика суперпроводника згодније је користити други начин. На основу резултата термодинамичке анализе дошло се до аналогије између феромагнетика и суперпроводника. Код суперпроводника постоји аналог Кири–Вајсовог закона, а у извесним случајевима и аналог фазног прелаза из феромагнетне у парамагнетну фазу.

II ЕЛЕМЕНТАРНЕ ЕКСИТАЦИЈЕ У СПОЈУ МЕТАЛ–ДИЕЛЕКТРИК

II1. ОПШТА ТЕОРИЈА У ЈЕДНОЈ, ДВЕ И ТРИ ДИМЕНЗИЈЕ ПРЕДСТАВЉЕНА $H_{id}+H_{int}$ ФУРИЈЕ ЛИКОМ

Посматрајмо један систем састављен од два подсистема; један је нека од металних структура, а друга диелектрик. Занима нас шта се дешава на граничном слоју споја метал—диелектрик. Проблем ћемо разматрати у једној, две и три димензије.

Нека су црним кружићима означени структурни елементи металне кристалне решетке, а белим диелектрични јони. Овај низ садржи $2N$ јона при чему је за вредност $l=0$ једнак број диелектричних—бозона и металних—фермиона. Ради простијих израчунавања претпоставља се да оба дела једнодимензионе структуре имају исту константу a.



Да бисмо написали хамилтонијан система, уведимо прво ознаке:

A—енергија изолованог фермиона

B—енергија изолованог бозона

α—коефицијент интеракције електрона у металу

β—коефицијент интеракције електрона у диелектрику.

Цео рачун проведен је у апроксимацији најближих суседа.

Користећи ове ознаке за сваки подсистем посебно можемо писати:

$$H_0 = A\sum_{n=l}^{N-1} a_n^+ a_n + \alpha \sum_{n=l}^{N-1} a_n^+ (a_{n+1} + a_{n-1})$$

$$H_0 = B\sum_{n=-N}^{l-1} b_n^+ b_n + \beta \sum_{n=-N}^{l-1} b_n^+ (b_{n+1}+b_{n-1})$$

Оператори a_n^+ и a_n су креациони и анихилациони Ферми оператори; a_n^+ ствара честицу на n-том месту, а a_n је анихилира. За разлику од њих b_n^+ и b_n су Бозе-оператори; b_n^+ ствара честицу на n-том месту а b_n је анихилира. Ови оператори су изабрани у оваквој комбинацији због својих својстава.

Хамилтонијан целог система обухвата и додатне интеракције услед површинских ефеката

$$H = (A+A')a_l^+ a_l + A\sum_{n=l+1}^{N-1} a_n^+ a_n + \alpha a_{l+1}^+ a_{l+2} + (\alpha+\alpha')a_{l+1}^+ a_l + (\alpha+\alpha')a_l^+ a_{l+1} + \alpha\sum_{n=l+2}^{N-1} a_n^+(a_{n+1}+a_{n-1}) + B\sum_{n=-N}^{l-2} b_n^+ b_n + (B+B')\cdot$$
$$\cdot b_{l-1}^+ b_{l-1} + (\beta+\beta')b_{l-2}^+ b_{l-1} + \beta b_{l-2}^+ b_{l-3} + \beta\sum_{n=-N}^{l-3} b_n^+(b_{n+1}+b_{n-1}) +$$
$$+\gamma(a_l^+ b_{l-1} + b_{l-1}^+ a_l) \qquad /III\ 1.1/$$

Коефицијент γ је коефицијент интеракције између бозона и фермиона на месту њиховог додира. A', B', α' и β' су корекције на одговарајуће енергије изолованих јона и коефицијенте интеракције услед површинских ефеката.

Додавањем и одузимањем израза

$$A\sum_{n=-N}^{l} a_n^+ a_n + \alpha\sum_{n=-N}^{l+1} a_n^+(a_{n+1}+a_{n-1}) + B\sum_{n=l-1}^{N-1} b_n^+ b_n + \beta\sum_{n=l-2}^{N-1} b_n^+(b_{n+1}+b_{n-1})$$

изразу /III 1.1/ и сређивањем тог израза хамилтонијан можемо представити у облику $H_{id} + H_{int}$, ако су:

$$H_{id} = \sum_{n=-N}^{N-1}\left[A a_n^+ a_n + \alpha a_n^+(a_{n+1}+a_{n-1}) + B b_n^+ b_n + \beta b_n^+(b_{n+1}+b_{n-1})\right]$$

$$H_{int} = A' a_l^+ a_l + \alpha'\left[a_{l+1}^+ a_l + a_l^+ a_{l+1}\right] - \alpha a_l^+ a_{l-1} - A\sum_{n=-N}^{l-1} a_n^+ a_n -$$
$$-\alpha\sum_{n=-N}^{l-1} a_n^+(a_{n+1}+a_{n-1}) + \gamma(a_l^+ b_{l-1} + b_{l-1}^+ a_l) + B' b_{l-1}^+ b_{l-1} +$$

$+\beta'(b_{l-2}^+ b_{l-1} + b_{l-1}^+ b_{l-2}) - \beta b_{l-1}^+ b_l - B\sum_{n=l}^{N-1} b_n^+ b_n - \beta \sum_{n-l}^{N-1} b_n^+$
$(b_{n+1} + b_{n-1})$

Код Фурије трансформација оператора a_n^+ и a_n треба обратити пажњу на то да је укупан број јона $2\mathcal{N}$. Ради једноставности пишемо $N=2\mathcal{N}$:

$$a_n^+ = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_q a_q^+ e^{-ildq} \;;\; a_n = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k a_k e^{ildk}.$$

Фурије трансформације оператора b_n^+ и b_n су:

$$b_n^+ = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_q b_q^+ e^{-ildq} \;,\; b_n = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k b_k e^{ildk},$$ па је

$H_{id} = \sum_k [E^{(A)}(k) a_k^+ a_k + E^{(B)}(k) b_k^+ b_k]$, где су $E^{(A)}(k) = A + 2\alpha\cos kd$ и $E^{(B)}(k) = B + 2\beta\cos kd$.

Hint представљамо у облику:

$$H_{int} = H_{int}^{(A)} + H_{int}^{(B)} + H_{int}^{(AB)} + H_{int}^{(BA)} \qquad /III\ 1.2./$$

где је: $H_{int}^{(A)} = \frac{1}{N}\sum_{kq} \phi_l^{(A)}(k,q)\, a_q^+ a_k$

$$\phi_l^{(A)}(k,q) = [A' + \alpha'(e^{ikd} + e^{-iqd}) - \alpha e^{-ikd}]\, e^{-ild(k-q)} - \sum_{n=-\mathcal{N}}^{l-1} E^{(A)}(k)\, e^{ind(k-q)}.$$

Аналогно за $H_{int}^{(B)}$ добијамо:

$$H_{int}^{(B)} = \frac{1}{N}\sum_{kq} \phi_l^{(B)}(k,q)\, b_q^+ b_k$$

$$\phi_l^{(B)}(k,q) = [B^+ + \beta'(e^{-ikd} + e^{iqd}) - \beta e^{ikd}]\, e^{i(l-1)d(k-q)} - \sum_{n=l}^{N-1} E^{(B)}(k)\, e^{ind(k-q)}.$$

У изразу /III 1.2./ преостала су још два сабирка која се односе на интеракције бозона и фермиона. Пишемо их на сличан начин као и претходне:

$$H_{int}^{(AB)} = \frac{1}{N}\sum_{kq} \phi_l^{(AB)}(k,q)\, a_q^+ b_k \;;\; \phi_l^{(AB)}(k,q) = \gamma e^{ild(k-q)} e^{-ikd};$$

$$H_{int}^{(BA)} = \frac{1}{N}\sum_{kq} \phi_l^{(BA)}(k,q)\, b_q^+ a_k \;;\; \phi_l^{(BA)}(k,q) = \gamma e^{ild(k-q)} e^{iqd}.$$

Ако ово све вратимо у /III 1.2./ добијамо:

$$H_{int}=\frac{1}{N}\sum_{k,q}[\Phi_l^{(A)}(k,q)a_q^+a_k+\Phi_l^{(B)}(k,q)b_q^+b_k+\Phi_l^{(AB)}(k,q)\cdot$$
$$a_q^+b_k+\Phi_l^{(BA)}(k,q)b_q^+a_k] \qquad /III\ 1.3./$$

Ако су $\Psi_A(\nu)=a_\nu^+|0\rangle=|1a\,0b\rangle$ и $\Psi_B(\nu)=b_\nu^+|0\rangle=$ $=|0a\,1b\rangle$ таласне функције својствени проблем је:

$$Ha_\nu^+|0\rangle+Hb_\nu^+|0\rangle=E\,a_\nu^+|0\rangle+E\,b_\nu^+|0\rangle.$$

Користећи релације за ферми и бозе операторе налазимо комутаторе:

$$[b_k^+,b_q]=b_k^+b_q-b_qb_k^+=\delta_{kq}$$

$$[a_k^+,a_q]=a_k^+a_q+a_qa_k^+=\delta_{k,q}.$$

Оператори a и b међусобно комутирају:

$$[a_\nu^+,a_k^+a_k]\longrightarrow -a_k^+\delta_{\nu k}$$

$$[a_\nu^+,a_q^+a_k]\longrightarrow -a_q^+\delta_{\nu k}$$

$$[a_\nu^+,a_q^+b_k]\longrightarrow 0$$

$$[a_\nu^+,b_q^+a_k]\longrightarrow -b_q^+\delta_{\nu k}.$$

Ове комутационе релације у својственом проблему дају:

$$Ea_\nu^+|0\rangle=E^{(A)}(\nu)a_\nu^+|0\rangle+\frac{1}{N}\sum_q[\Phi_l^{(A)}(\nu,q)a_q^+|0\rangle+\Phi_l^{(BA)}(\nu,q)b_q^+|0\rangle] \qquad /III\ 1.4/$$

Даљим рачуном

$$[b_\nu^+,b_k^+b_k]\rightarrow -b_k^+\delta_{\nu k}$$

$$[b_\nu^+,b_q^+b_k]\rightarrow -b_q^+\delta_{\nu k}$$

$$[b_\nu^+,a_q^+b_k]\rightarrow -a_q^+\delta_{\nu k}$$

$$[b_\nu^+,b_q^+a_k]\rightarrow 0$$ добијамо:

$$Eb_\nu^+|0\rangle=E^{(B)}(\nu)b_\nu^+|0\rangle+\frac{1}{N}\sum_q[\Phi_l^{(B)}(\nu,q)b_q^+|0\rangle+\Phi_l^{(AB)}(\nu,q)a_q^+|0\rangle] \qquad /III\ 1.5./$$

Ако тражимо таласне функције $\Psi_A(\nu)$ и $\Psi_B(\nu)$

из /III 1.4./ и /III 1.5./ налазимо:

$$[E - E^{(A)}]\Psi_A(\nu) = \frac{1}{N}\sum_{q}[\Phi_l^{(A)}(\nu,q)\Psi_A(q) + \Phi_l^{(BA)}(\nu,q)\Psi_B(q)]$$

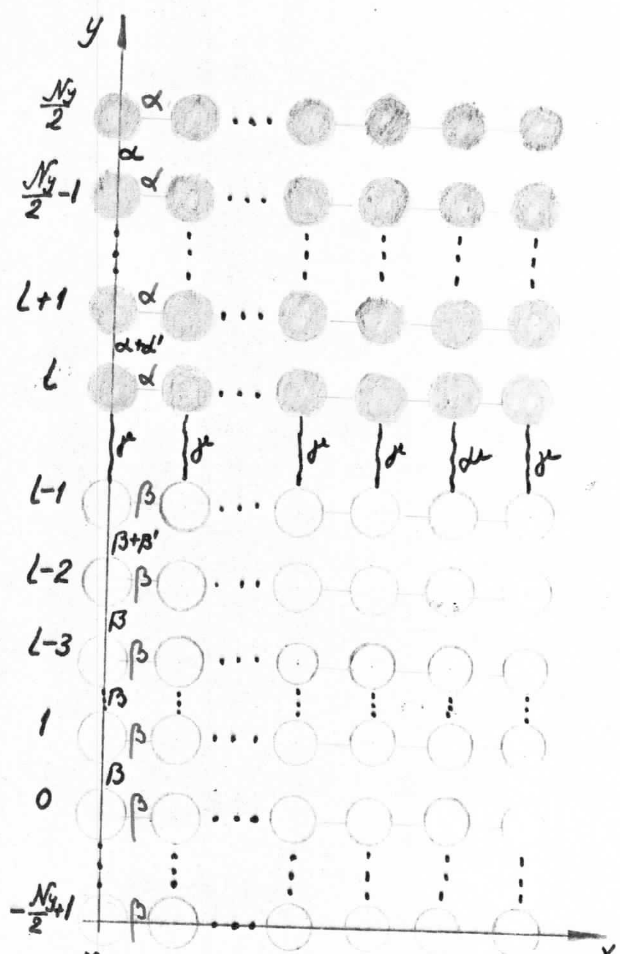
$$[E - E^{(B)}]\Psi_B(\nu) = \frac{1}{N}\sum_{q}[\Phi_l^{(AB)}(\nu,q)\Psi_A(q) + \Phi_l^{(B)}(\nu,q)\Psi_B(q)].$$

Из ових израза добијамо систем хомогених интегралних једначина:

$$\left.\begin{aligned}\Psi_A(\nu) &= \frac{1}{N}\sum_{q}\left[\frac{\Phi_l^{(A)}(\nu,q)}{E-E^{(A)}(\nu)}\Psi_A(q) + \frac{\Phi_l^{(BA)}(\nu,q)}{E-E^{(A)}(\nu)}\Psi_B(q)\right]\\ \Psi_B(\nu) &= \frac{1}{N}\sum_{q}\left[\frac{\Phi_l^{(AB)}(\nu,q)}{E-E^{(B)}(\nu)}\Psi_A(q) + \frac{\Phi_l^{(B)}(\nu,q)}{E-E^{(B)}(\nu)}\Psi_B(q)\right]\end{aligned}\right\} \quad /III\ 1.6./$$

Решењем једначина /III 1.6./ можемо да дођемо до података о енергији система у граничном слоју.

Сада уопштимо разматрање на дводимензиони проблем. Уместо низа посматрамо мрежу јона где је нарушење симетрије дуж y-осе.



Промена матричних елемената α и β занемарује се у x-правцу слоја l.

$$H=\sum_{n_x=-\frac{N_x}{2}+1}^{\frac{N_x}{2}}\Big[(A+A')a^+_{n_x l}a_{n_x l}+A\sum_{n_y=l+1}^{\frac{N_y}{2}}a^+_{n_x n_y}a_{n_x n_y}+\alpha\sum_{n_y=l+2}^{\frac{N_y}{2}}a^+_{n_x n_y}(a_{n_x+1,n_y}+$$

$$+a_{n_x-1,n_y}+a_{n_x n_y+1}+a_{n_x n_y-1})+\alpha\, a^+_{n_x l+1}a_{n_x l+2}+\alpha\, a^+_{n_x l}(a_{n_x+1,l}+$$

$$+a_{n_x-1,l})+\alpha\, a^+_{n_x l+1}(a_{n_x+1,l+1}+a_{n_x-1,l+1})+(\alpha+\alpha')\,a^+_{n_x l+1}a_{n_x l}+$$

$$+(\alpha+\alpha')\,a^+_{n_x l}a_{n_x l+1}+\gamma(a^+_{n_x l}b_{n_x l-1}+b^+_{n_x l-1}a_{n_x l})+(B+B')\,b^+_{n_x l-1}b_{n_x l-1}+$$

$$+B\sum_{n_y=-\frac{N_y}{2}+1}^{l-2}b^+_{n_x n_y}b_{n_x n_y}+(\beta+\beta')\,b^+_{n_x l-2}b_{n_x l-1}+\beta\sum_{n_y=-\frac{N_y}{2}+1}^{l-3}b^+_{n_x n_y}$$

$$(b_{n_x+1 n_y}+b_{n_x-1,n_y}+b_{n_x,n_y+1}+b_{n_x,n_y-1})+\beta\, b^+_{n_x l-2}b_{n_x l-3}+$$

$$+\beta\, b^+_{n_x l-1}(b_{n_x+1,l-1}+b_{n_x-1,l-1})+\beta\, b^+_{n_x,l-2}(b_{n_x+1,l-2}+b_{n_x-1,l-2})+$$

$$+(\beta+\beta')\,b^+_{n_x l-1}b_{n_x,l-2}\Big] \qquad /III\ 1.7./$$

Да бисмо хамилтонијан представили као суперпозицију ($H_{id}+H_{int}$), изразу /III 1.7./ додајемо и одузимамо

$$A\sum_{n_x=-\frac{N_x}{2}+1}^{N_x/2}\ \sum_{n_y=-\frac{N_y}{2}+1}^{l_y}a^+_{n_x n_y}+\alpha\sum_{n_x}\sum_{n_y=-\frac{N_y}{2}+1}^{l+1}a^+_{n_x n_y}[a_{n_x+1,n_y}+a_{n_x-1,n_y}+$$

$$+a_{n_x,n_y+1}+a_{n_x,n_y-1}]+B\sum_{n_x}\sum_{n_y=l-1}^{N_y/2+1}b^+_{n_x n_y}b_{n_x n_y}+\beta\sum_{n_x}\sum_{n_y=l-2}^{N_y/2+1}b^+_{n_x n_y}$$

$$(b_{n_x+1,n_y}+b_{n_x-1,n_y}+b_{n_x,n_y+1}+b_{n_x,n_y-1}).$$

Након сређивања тако проширеног израза /III 1.7./ добијамо:

$$H_{id}=\sum_{n_x}\sum_{n_y}\{A\,a^+_{n_x n_y}+\alpha\, a^+_{n_x n_y}[a_{n_x+1,n_y}+a_{n_x-1,n_y}+a_{n_x n_y+1}+$$

$$+a_{n_x,n_y-1}]+B\,b^+_{n_x n_y}b_{n_x n_y}+\beta\, b^+_{n_x n_y}[b_{n_x+1,n_y}+b_{n_x-1,n_y}+b_{n_x,n_y+1}+$$

$$+b_{n_x,n_y-1}]\}.$$ У складу са /III 1.2./ имамо:

$$H^{(A)}_{int}=\sum_{n_x}\{A'a^+_{n_x,l}a_{n_x l}+\alpha'[a^+_{n_x l}a_{n_x,l+1}+a^+_{n_x l+1}a_{n_x l}]+$$

$$+\alpha[a^+_{n_x l}(a_{n_x+1,l}+a_{n_x-1,l})+a^+_{n_x,l+1}(a_{n_x+1,l+1}+a_{n_x-1,l+1})-a^+_{n_x l}$$

$$\cdot a_{n_x l-1}]-\alpha\sum_{n_y=-\frac{N_y}{2}+1}^{l-1}a^+_{n_x n_y}[a_{n_x+1,n_y}+a_{n_x-1,n_y}+a_{n_x,n_y+1}+a_{n_x,n_y-1}]-$$

$$-A\sum_{n_y=-\frac{N_y}{2}+1}^{l-1}a^+_{n_x n_y}a_{n_x n_y}.$$

Остали сабирци H_{int} су:

$$H^{(B)}_{int}=\sum_{n_x}\{B'b^+_{n_x l-1}b_{n_x l-1}+\beta'[b^+_{n_x l-1}b_{n_x l-2}+b^+_{n_x l-2}b_{n_x l-1}]+$$

$$+\beta[b^+_{n_x l-1}(b_{n_x+1,l-1}+b_{n_x-1,l-1})+b^+_{n_x l-2}(b_{n_x+1,l-2}+b_{n_x-1,l-2})-$$

$$-b^+_{n_x,l-1}b_{n_x l}]-\beta\sum_{n_y=l}^{N_y/2+1}b^+_{n_x n_y}[b_{n_x+1,n_y}+b_{n_x-1,n_y}+b_{n_x,n_y+1}+$$

$$+b_{n_x,n_y-1}] - B\sum_{n_y=2}^{N_y/2} b^+_{n_x n_y} b_{n_x n_y}\}$$

$$H^{(AB)}_{int} = \gamma\, a^+_{n_x,l}\, a_{n_x,l-1}$$

$$H^{(BA)}_{int} = \gamma\, b^+_{n_x,l-1}\, a_{n_x l}\,.$$

Фурије трансформације за дводимензиони проблем дају:

$$a^+_{n_x n_y} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{q_x q_y} a^+_{q_x q_y} e^{-ia(n_x q_x + n_y q_y)}$$

$$a_{n_x n_y} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k_x k_y} a_{k_x k_y} e^{ia(k_x n_x + k_y n_y)}.$$

Овде N означава укупан број јона, $N = N_x N_y$, где је N_x број јона дуж x, а N_y број јона дуж y-осе.

За H_{id}, добијамо:

$$H_{id} = \sum_{k_x k_y}[E^{(A)}(k_x,k_y)\, a^+_{k_x k_y} + E^{(B)}(k_x,k_y)\, b^+_{k_x k_y} b_{k_x k_y}]$$

$$E^{(A)}(k_x,k_y) = A + 2\alpha(\cos k_x a + \cos k_y a)$$

$$E^{(B)}(k_x,k_y) = B + 2\beta(\cos k_x a + \cos k_y a).$$

Хамилтонијан H_{int} представимо као и код једнодимензионе структуре, облика представљеног изразом /III 1.3./ имајући у виду да ће се овде појавити неке измене:

$$H_{int} = \frac{1}{N}\sum_{n_x}\sum_{k_x k_y q_x q_y}[\Phi^{(A)}_l(k_x,k_y,q_x,q_y)\, a^+_{q_x q_y} a_{k_x k_y} +$$

$$+\Phi^{(B)}_l(k_x,k_y,q_x,q_y)\, b^+_{q_x q_y} b_{k_x k_y} + \Phi^{(AB)}_l(k_x,k_y,q_x,q_y)\, a^+_{q_x q_y}\cdot$$

$$\cdot b_{k_x k_y} + \Phi^{(BA)}_l(k_x,k_y,q_x,q_y)\, b^+_{q_x q_y} a_{k_x k_y}].$$

Ради једноставнијег означавања уведимо ознаке:

$$L_1 = (k_x - q_x)n_x + (k_y - q_y)l \quad \text{и} \quad L_2 = (k_x - q_x)n_x + (k_y - q_y)n_y.$$

Тада су:

$$\Phi^{(A)}_l = e^{iaL_1}\{A' + \alpha'[e^{iak_y} + e^{-iaq_y}] + \alpha[2\cos ak_x - e^{iak_y} +$$

$$+e^{-iaq_y}[e^{ia(k_x+k_y)}+e^{ia(k_y-k_x)}]\}-\sum_{n_y=-\frac{N_y}{2}+1}^{l-1}E^{(A)}(k_x,k_y)e^{iaL_2}$$

$$\phi_l^{(B)}=e^{iaL_1}\{B'e^{ia(q_y-k_y)}+\beta'[e^{ia(q_y-2k_y)}+e^{ia(2q_y-k_y)}]+$$

$$+\beta[e^{iaq_y}(e^{ia(k_x-k_y)}+e^{-ia(k_x+k_y)}-1)+e^{2iaq_y}(e^{ia(k_x-2k_y)}+$$

$$+e^{-ia(k_x+2k_y)})]\}-\sum_{n_y=l}^{N_y/2}E^{(B)}(k_x,k_y)e^{iaL_2}.$$

$$\phi_l^{(AB)}=\gamma e^{ia(L_1-k_y)}$$

$$\phi_l^{(BA)}=\gamma e^{ia(L_1+q_y)}.$$

Својствени проблем за дводимензионо представља-ње своди се на:

$$Ha^+_{\nu_x,\nu_y}|0\rangle+Hb^+_{\nu_x\nu_y}|0\rangle=Ea^+_{\nu_x\nu_y}|0\rangle+Eb^+_{\nu_x,\nu_y}|0\rangle.$$

Одговарајуће комутационе релације су:

$$[a^+_{\nu_x\nu_y},a^+_{k_xk_y}a_{k_xk_y}]\to-a^+_{k_xk_y}\delta_{k_xk_y,\nu_x\nu_y}$$

$$[a^+_{\nu_x\nu_y},a^+_{q_xq_y}a_{k_xk_y}]\to-a^+_{q_xq_y}\delta_{k_xk_y,\nu_x\nu_y}$$

$$[a^+_{\nu_x\nu_y},a^+_{q_xq_y}b_{k_xk_y}]\to0$$

$$[a^+_{\nu_x\nu_y},b^+_{q_xq_y}a_{k_xk_y}]\to-b^+_{q_xq_y}\delta_{k_xk_y,\nu_x\nu_y}$$

$$[b^+_{\nu_x\nu_y},b^+_{k_xk_y}b_{k_xk_y}]\to-b^+_{k_xk_y},\delta_{\nu_x\nu_y,k_xk_y}$$

$$[b^+_{\nu_x\nu_y},b^+_{q_xq_y}b_{k_xk_y}]\to-b^+_{q_xq_y},\delta_{k_xk_y},\nu_x\nu_y$$

$$[b^+_{\nu_x\nu_y},a^+_{q_xq_y}b_{k_xk_y}]\to-a^+_{q_xq_y},\delta_{k_xk_y},\nu_x\nu_y$$

$$[b^+_{\nu_x\nu_y},b^+_{q_xq_y}a_{k_xk_y}]\to0$$

Својствени проблем се, с обзиром на комутацио-не релације, након једноставних рачунских операција своди на:

$$Ea^+_{\nu_x\nu_y}|0\rangle=E^{(A)}(\nu_x,\nu_y)a^+_{\nu_x\nu_y}|0\rangle+\frac{1}{N}\sum_{n_x}\sum_{q_xq_y}[\phi_l^{(A)}(\nu_x,\nu_y,q_x\,q_y)\cdot$$

$$\cdot a^+_{q_yq_y}|0\rangle+\phi_l^{(BA)}(\nu_x,\nu_y,q_x,q_y)\,b^+_{q_xq_y}|0\rangle] \qquad /III\,1.8./$$

$$Eb^+_{\nu_x\nu_y}|0\rangle=E^{(B)}(\nu_x,\nu_y)\,b^+_{\nu_x\nu_y}|0\rangle+\frac{1}{N}\sum_{n_x}\sum_{q_xq_y}[\phi_l^{(B)}(\nu_x,\nu_y,q_x,q_y)$$

$$\cdot b^+_{q_xq_y}|0\rangle+\phi_l^{(AB)}(\nu_x,\nu_y,q_x,q_y)\,a^+_{q_xq_y}|0\rangle]. \qquad /III\,1.8/$$

Таласне функције у дводимензионом простору су:

$\Psi_A(\nu_x,\nu_y)=a^+_{\nu_x\nu_y}|0\rangle$; $\Psi_B(\nu_x,\nu_y)=b^+_{\nu_x\nu_y}|0\rangle$.

Једначине /III.8./ дају систем интегралних једначина:

$$\Psi_A(\nu_x,\nu_y)=\frac{1}{N}\sum_{n_x}\sum_{q_xq_y}\Big[\frac{\Phi_l^{(A)}(\nu_x,\nu_y,q_x,q_y)}{E-E^{(A)}(\nu_x,\nu_y)}\Psi_A(q_x,q_y)+$$

$$+\frac{\Phi_l^{(BA)}(\nu_x,\nu_y,q_x,q_y)}{E-E^{(A)}(\nu_x,\nu_y)}\Psi_B(q_x,q_y)\Big] \qquad /III\ 1.9./$$

$$\Psi_B(\nu_x,\nu_y)=\frac{1}{N}\sum_{n_x}\sum_{q_xq_y}\Big[\frac{\Phi_l^{(AB)}(\nu_x,\nu_y,q_x,q_y)}{E-E^{(B)}(\nu_x,\nu_y)}\Psi_A(q_x,q_y)+$$

$$+\frac{\Phi_l^{(B)}(\nu_x,\nu_y,q_x,q_y)}{E-E^{(B)}(\nu_x,\nu_y)}\Psi_B(q_x,q_y)\Big] \qquad /III\ 1.9./$$

Коначно, размотримо овај проблем и у три димензије. Најједноставније је овај дводимензиони случај представити у три димензије остављајући му нарушење симетрије дуж y-осе.

$$H=\sum_{n_xn_z}\Big\{(A+A')a^+_{n_xln_z}a_{n_xln_z}+A\sum_{n_y=l+1}^{N_y/2}a^+_{n_xn_yn_z}a_{n_xn_yn_z}+$$
$$+\alpha a^+_{n_x,l+1,n_z}a_{n_x l+2,n_z}+(\alpha+\alpha')a^+_{n_x,l+1,n_z}a_{n_xln_z}+(\alpha+\alpha')a^+_{n_xln_z}a_{n_xl+1,n_z}+$$
$$+\alpha\sum_{n_y=l+2}^{N_y/2}a^+_{n_xn_yn_z}(a_{n_x+1,n_yn_z}+a_{n_x-1,n_yn_z}+a_{n_x,n_y+1n_z}+a_{n_x,n_y-1n_z}+$$
$$+a_{n_xn_y,n_z+1}+a_{n_xn_y,n_z-1})+\alpha a^+_{n_xln_z}(a_{n_x+1,ln_z}+a_{n_x-1,ln_z}+$$
$$+a_{n_xl,n_z+1}+a_{n_xl,n_z-1})+\alpha a^+_{n_xl+1,n_z}(a_{n_x+1,l+1,n_z}+a_{n_x-1,l+1,n_z}+$$
$$+a_{n_x,l+1,n_z+1}+a_{n_x,l+1,n_z-1})+\gamma\big[a^+_{n_xln_z}b_{n_x,l-1,n_z}+b^+_{n_xl-1,n_z}a_{n_xln_z}\big]+$$
$$+B\sum_{n_y=-\frac{N_y}{2}+1}^{l-2}b^+_{n_xn_yn_z}b_{n_xn_yn_z}+(B+B')b^+_{n_x,l-1,n_z}+(\beta+\beta')b^+_{n_x,l-2,n_z}\cdot$$
$$b_{n_x,l-1,n_z}+\beta\sum_{n_y=-\frac{N_y}{2}+1}^{l-3}b^+_{n_xn_yn_z}(b_{n_x+1,n_yn_z}+b_{n_x-1,n_yn_z}+b_{n_xn_y+1n_z}+$$
$$+b_{n_xn_y-1n_z}+b_{n_xn_yn_z+1}+b_{n_xn_yn_z-1})+\beta b^+_{n_x,l-1n_z}(b_{n_x+1,l-1,n_z}+$$
$$+b_{n_x-1,l-1,n_z}+b_{n_xl-1,n_z+1}+b_{n_x,l-1,n_z-1})+\beta b^+_{n_xl-2,n_z}(b_{n_x+1,l-2,n_z}+$$

$$+ b_{n_x-1,l-2,n_z} + b_{n_x,l-2,n_z+1} + b_{n_x l-2,n_z-1}) + \beta b^+_{n_x,l-2,n_z} b_{n_x l-3,n_z} +$$

$$+ (\beta+\beta') b^+_{n_x l-1,n_z} b_{n_x,l-2,n_z} \Big\} . \qquad /III 1.10/$$

Ради допуне до идеалне структуре изразу /III 1.10/ додаје се и одузима:

$$\sum_{n_x n_z} \Big\{ A \sum_{n_y=-\frac{N_y}{2}+1}^{l} a^+_{n_x n_y n_z} a_{n_x n_y n_z} + \alpha \sum_{n_y=-\frac{N_y}{2}+1}^{l+1} a^+_{n_x n_y n_z} (a_{n_x+1,n_y n_z} +$$

$$+ a_{n_x-1\, n_y n_z} + a_{n_x,n_y+1,n_z} + a_{n_x n_y-1\, n_z} + a_{n_x n_y n_z+1} + a_{n_x n_y n_z-1}) +$$

$$+ B \sum_{n_y=l-1}^{N_y/2} b^+_{n_x n_y n_z} b_{n_x n_y n_z} + \beta \sum_{n_y=l-2}^{N_y/2} b^+_{n_x n_y n_z} (b_{n_x+1,n_y n_z} +$$

$$+ b_{n_x-1,n_y n_z} + b_{n_x n_y+1,n_z} + b_{n_x n_y-1,n_z} + b_{n_x n_y n_z+1} + b_{n_x n_y n_z-1}) \Big\} .$$

Као и у претходна два случаја хамилтонијан пишемо у облику $H_{id} + H_{int}$, где су:

$$H_{id} = \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \Big\{ A a^+_{n_x n_y n_z} a_{n_x n_y n_z} + \alpha a^+_{n_x n_y n_z} \cdot (a_{n_x+1,n_y n_z} +$$

$$+ a_{n_x-1,n_y n_z} + a_{n_x,n_y+1,n_z} + a_{n_x,n_y-1,n_z} + a_{n_x n_y n_z+1} + a_{n_x n_y n_z-1}) +$$

$$+ B b^+_{n_x n_y n_z} b_{n_x n_y n_z} + \beta b^+_{n_x n_y n_z} (b_{n_x+1,n_y n_z} + b_{n_x-1,n_y n_z} +$$

$$+ b_{n_x,n_y+1,n_z} + b_{n_x,n_y-1,n_z} + b_{n_x n_y,n_z+1} + b_{n_x n_y n_z-1}) \Big\}$$

$$H_{int} = \sum_{n_x n_z} \Big\{ A' a^+_{n_x l n_z} a_{n_x l n_z} + \alpha' [a^+_{n_x l n_z} a_{n_x l+1,n_z} + a^+_{n_x l+1,n_z} \cdot$$

$$\cdot a_{n_x l n_z}] + \alpha [a^+_{n_x l n_z} (a_{n_x+1,l n_z} + a_{n_x-1,l,n_z} + a_{n_x,l\, n_z+1} +$$

$$+ a_{n_x l n_z-1} - a_{n_x,l-1,n_z}) + a^+_{n_x l+1,n_z} (a_{n_x+1,l+1,n_z} + a_{n_x-1,l+1,n_z} +$$

$$+ a_{n_x,l+1,n_z+1} + a_{n_x,l+1,n_z-1})] + \gamma' (a^+_{n_x l n_z} b_{n_x,l-1,n_z} +$$

$$+ b^+_{n_x,l-1,n_z} a_{n_x l n_z}) - A \sum_{n_y=-\frac{N_y}{2}+1}^{l-1} a^+_{n_x n_y n_z} a_{n_x n_y n_z} -$$

$$- \alpha \sum_{n_y=-\frac{N_y}{2}+1}^{l-1} a^+_{n_x n_y n_z} (a_{n_x+1,n_y n_z} + a_{n_x-1,n_y n_z} + a_{n_x n_y+1,n_z} +$$

$$+ a_{n_x n_y-1,n_z} + a_{n_x n_y n_z+1} + a_{n_x n_y n_z-1}) - B \sum_{n_y=l}^{N_y/2} b^+_{n_x n_y n_z} b_{n_x n_y n_z} -$$

$$- \beta \sum_{n_y=l}^{N_y/2} b^+_{n_x n_y n_z} (b_{n_x+1,n_y n_z} + b_{n_x-1,n_y n_z} + b_{n_x n_y+1,n_z} + b_{n_x n_y-1,n_z} +$$

$$+ b_{n_x n_y,n_z+1} + b_{n_x n_y n_z-1}) + B' b^+_{n_x,l-1,n_z} b_{n_x l-1,n_z} + \beta' [b^+_{n_x l-2\, n_z}$$

$$b_{n_x l-1\, n_z} + b^+_{n_x l-1\, n_z} b_{n_x l-2\, n_z}] + \beta [b^+_{n_x l-1\, n_z} (b_{n_x+1\, l-1\, n_z} +$$

$$+ b_{n_x-1,l-1\, n_z} + b_{n_x\, l-1,n_z+1} + b_{n_x l-1\, n_z-1} - b_{n_x l n_z})] +$$

$$+\beta b^+_{n_x\, l-2\, n_z}\left(b_{n_x+1\, l-2\, n_z} + b_{n_x-1\, l-2\, n_z} + b_{n_x\, l-2\, n_z+1} +\right.$$
$$\left.+ b_{n_x\, l-2\, n_z-1}\right)\Big\}$$

Ако је N укупан број јона, онда је $N=2N_x N_y N_z$. Фурије трансформације су

$$a^+_{n_x n_y n_z}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{q}} a^+_{\vec{q}}\, e^{-ia\vec{q}\vec{n}}; \quad a_{n_x n_y n_z}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}\, e^{ia\vec{k}\vec{n}}$$

$$b^+_{n_x n_y n_z}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{q}} b^+_{\vec{q}}\, e^{-ia\vec{q}\vec{n}}; \quad b_{n_x n_y n_z}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{k}} b_{\vec{k}}\, e^{ia\vec{k}\vec{n}}.$$

Тада је:

$$H=\sum_{\vec{k}}\left[E^{(A)}(\vec{k})\, a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + E^{(B)}(\vec{k})\, b^+_{\vec{k}} b_{\vec{k}}\right].$$

Изрази $E^{(A)}(\vec{k})$ и $E^{(B)}(\vec{k})$ су:

$$E^{(A)}(\vec{k})=A+2\alpha(\cos k_x a+\cos k_y a+\cos k_z a)$$

$$E^{(B)}(\vec{k})=B+2\beta(\cos k_x a+\cos k_y a+\cos k_z a).$$

Као и код дводимензионог представљања ради једноставности уводимо ознаке:

$$k_1=(k_x-q_x)n_x+(k_y-q_y)l+(k_z-q_z)n_z$$

$$k_2=(k_x-q_x)n_x+(k_y-q_y)n_y+(k_z-q_z)n_z$$

$$H_{int}=\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}\vec{q}}\sum_{n_x n_z}\left[\Phi_l^{(A)}(\vec{k},\vec{q})\, a^+_{\vec{q}} a_{\vec{k}} + \Phi_l^{(B)}(\vec{k},\vec{q})\, b^+_{\vec{q}} b_{\vec{k}} +\right.$$
$$\left.+\,\Phi_l^{(AB)}(\vec{k},\vec{q})\, a^+_{\vec{q}} b_{\vec{k}} + \Phi_l^{(BA)}(\vec{k},\vec{q})\, b^+_{\vec{q}} a_{\vec{k}}\right]$$

$$\Phi_l^{(A)}(\vec{k},\vec{q})=e^{iak_1}\Big\{A'+\alpha'(e^{iak_y}+e^{-iaq_y})+\alpha\left[2(\cos k_x a+\cos k_z a)-\right.$$
$$\left.-\,e^{iak_y}\right]+\alpha e^{-iaq_y}\left[e^{ia(k_x+k_y)}+e^{ia(k_y-k_x)}+e^{ia(k_y+k_z)}+e^{ia(k_y-k_z)}\right]\Big\}-$$
$$-\sum_{n_y=-\frac{N_y}{2}+1}^{l-1} E^{(A)}(\vec{k})\, e^{iak_2}$$

$$\Phi_l^{(B)}(\vec{k},\vec{q})=e^{iak_1}\Big\{B' e^{ia(q_y-k_y)}+\beta'\left[e^{ia(2q_y-k_y)}+e^{ia(q_y-2k_y)}\right]+$$
$$+\beta e^{iaq_y}\left[e^{ia(k_x-k_y)}+e^{-ia(k_x+k_y)}+e^{ia(k_z-k_y)}+e^{-ia(k_z+k_y)}-1\right]+$$
$$+\beta e^{2iaq_y}\left[e^{ia(k_x-2k_y)}+e^{-ia(k_x+2k_y)}+e^{ia(k_z-2k_y)}+e^{-ia(k_z+2k_y)}\right]\Big\}-$$
$$-\sum_{n_y=l}^{N_y/2} E^{(B)}(\vec{k})\, e^{iak_2}$$

$$\Phi_l^{(AB)}(\vec{k},\vec{q}) = \gamma\, e^{ia(k_1-k_y)}$$

$$\Phi_l^{(BA)}(\vec{k},\vec{q}) = \gamma\, e^{ia(k_1+k_y)}.$$

Својствени проблем:

$$H a^+_{\vec{\nu}}|0\rangle + H b^+_{\vec{\nu}}|0\rangle = E a^+_{\vec{\nu}}|0\rangle + E b^+_{\vec{\nu}}|0\rangle.$$

Таласне функције су $\Psi_A(\vec{\nu}) = a^+_{\vec{\nu}}|0\rangle$ и $\Psi_B(\vec{\nu}) = b^+_{\vec{\nu}}|0\rangle$.

Ако тражимо таласне функције добијамо систем хомогених интегралних једначина:

$$\Psi_A(\vec{\nu}) = \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}\sum_{n_x n_z}\left\{\frac{\Phi_l^{(A)}(\vec{\nu},\vec{q})}{E-E^{(A)}(\vec{\nu})}\Psi_A(\vec{q}) + \frac{\Phi_l^{(BA)}(\vec{\nu},\vec{q})}{E-E^{(A)}(\vec{\nu})}\Psi_B(\vec{q})\right\} \quad /III\ 1.11./$$

$$\Psi_B(\vec{\nu}) = \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}\sum_{n_x n_z}\left\{\frac{\Phi_l^{(AB)}(\vec{\nu},\vec{q})}{E-E^{(B)}(\vec{\nu})}\Psi_A(\vec{q}) + \frac{\Phi_l^{(B)}(\vec{\nu},\vec{q})}{E-E^{(B)}(\vec{\nu})}\Psi_B(\vec{q})\right\}. \quad /III\ 1.11./$$

Решавањем једначина /III 1.6./, /III 1.9./ и /III 1.11./ налазимо енергије елементарних екситација у једнодимензионој, дводимензионој и тродимензионој структури.

II2. ЕЛЕМЕНТАРНЕ ЕКСИТАЦИЈЕ У ЈЕДНОДИМЕНЗИОНОЈ СТРУКТУРИ

У претходном параграфу постављени су системи интегралних једначина за таласне функције у једној, две и три димензије. Решавањем тих једначина налазимо енергије елементарних екситација.

С обзиром на сложен математички апарат који је потребан за налажење решења у дво- и тродимензионом случају ограничићемо се на решавање система једначина у једнодимензионој структури.

Прелазимо на Гринове функције. Реални део пола функције Грина у E равни представља енергију елементарних екситација, а имагинарни део пола у комплексној равни представља реципрочно време живота елементарних екситација.

Ако тражимо Гринове функције $G_A(\nu) = \langle 0 | a_\nu | a_\nu^+ | 0 \rangle$ и $G_B(\nu) = \langle 0 | b_\nu | b_\nu^+ | 0 \rangle$, где $G_A(\nu)$ антикомутирају, а $G_B(\nu)$ комутирају:

$$G_A(\nu) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{E - E^{(A)}(\nu)} + \frac{1}{N} \sum_q \left[\frac{\Phi_l^{(A)}(\nu, q)}{E - E^{(A)}(\nu)} G_A(q) + \frac{\Phi_l^{(BA)}(\nu, q)}{E - E^{(A)}(\nu)} G_B(q) \right] \quad /II\ 2.1./$$

$$G_B(\nu) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{E - E^{(B)}(\nu)} + \frac{1}{N} \sum_q \left[\frac{\Phi_l^{(AB)}(\nu, q)}{E - E^{(B)}(\nu)} G_A(q) + \frac{\Phi_l^{(B)}(\nu, q)}{E - E^{(B)}(\nu)} G_B(q) \right] \quad /II\ 2.1./$$

Уведимо нове ознаке:

$$G_1(\nu) = G_A(\nu); \; G_2(\nu) = G_B(\nu); \; G_1^{(0)}(\nu) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{E - E^{(A)}(\nu)};$$

$$G_2^{(0)}(\nu) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{E - E^{(B)}(\nu)}$$

$$\Phi_l^{(A)}(\nu, q) = W_{11}(\nu, q, l)\left[E - E^{(A)}(\nu)\right] = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{G_1^{(0)}(\nu)} W_{11}(\nu, q, l)$$

$$\Phi_l^{(BA)}(\nu, q) = W_{12}(\nu, q, l)\left[E - E^{(A)}(\nu)\right] = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{G_1^{(0)}(\nu)} W_{12}(\nu, q, l)$$

$$\Phi_l^{(AB)}(\nu, q) = W_{21}(\nu, q, l)\left[E - E^{(B)}(\nu)\right] \frac{i}{2\pi} \frac{1}{G_2^{(0)}(\nu)} W_{21}(\nu, q, l)$$

$$\Phi_l^{(B)}(\nu,q)=W_{22}(\nu,q,l)\left[E-E^{(B)}(\nu)\right]=\frac{i}{2\pi}\,\frac{1}{G_2^{(0)}(\nu)}\,W_{22}(\nu,q,l)$$

У складу са овим ознакама систем једначина /III 2.1/ представљамо у облику:

$$\begin{bmatrix}G_1(\nu)\\ G_2(\nu)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_1^{(0)}(\nu)\\ G_2^{(0)}(\nu)\end{bmatrix}+\frac{1}{N}\sum_q\begin{bmatrix}W_{11}(\nu,q,l) & W_{12}(\nu,q,l)\\ W_{21}(\nu,q,l) & W_{22}(\nu,q,l)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}G_1(q)\\ G_2(q)\end{bmatrix}. \qquad /III\ 2.2/$$

Нулто решење система /III 2.2./ је:

$$\begin{bmatrix}G_1^{(0)}(\nu)\\ G_2^{(0)}(\nu)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_1^{(0)}(\nu)\\ G_2^{(0)}(\nu)\end{bmatrix}.$$

Решење прве апроксимације је:

$$G_1^{(1)}(\nu)=\frac{G_1^{(0)}(\nu)}{1+\frac{2\pi i}{N}\sum_q\left[\Phi_l^{(A)}(\nu,q)\,G_1^{(0)}(q)+\Phi_l^{(BA)}(\nu,q)\,G_2^{(0)}(q)\right]}$$

$$G_2^{(1)}(\nu)=\frac{G_2^{(0)}(\nu)}{1+\frac{2\pi i}{N}\sum_q\left[\Phi_l^{(AB)}(\nu,q)\,G_1^{(0)}(q)+\Phi_l^{(B)}(\nu,q)\,G_2^{(0)}(q)\right]}$$

Осим полова $E_1=E^{(A)}(\nu)$ и $E_2=E^{(B)}(\nu)$ систем има и допунске полове одређене условом:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{N}\sum_q\left[\frac{\Phi_l^{(A)}(\nu,q)}{E-E^{(A)}(q)}+\frac{\Phi_l^{(BA)}(\nu,q)}{E-E^{(B)}(q)}\right]=1\\ &\frac{1}{N}\sum_q\left[\frac{\Phi_l^{(AB)}(\nu,q)}{E-E^{(A)}(q)}+\frac{\Phi_l^{(B)}(\nu,q)}{E-E^{(B)}(q)}\right]=1\end{aligned}\right\} \qquad /III\ 2.3./$$

Први корак у решавању једначина /III 2.3./ је прелаз са суме на интеграл:

$$\frac{1}{N}\sum_q\Phi(qd)\rightarrow\frac{Nd}{2\pi N}\int_{-\pi/d}^{\pi/d}\Phi(qd)\,dq=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(y)\,dy,$$

ако је $y=qd$. Производ νd обележимо као $x=\nu d$. На овај начин трансформишимо скуп једначина /III 2.3/:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{A'e^{il(x-y)}+\alpha'[e^{ix(l+1)}e^{-ily}+e^{ilx}e^{-i(l+1)y}]-\alpha e^{ix(l-1)}e^{-ily}}{E-E^{(A)}(y)}\,dy+\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma e^{ilx}e^{-i(l-1)y}}{E-E^{(B)}(y)}\,dy\right\}=1 \qquad /II\ 2.4/$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{B'e^{i(l-1)(x-y)}+\beta'[e^{i(l-2)x}e^{-i(l-1)y}+e^{i(l-1)x}e^{-i(l-2)y}-\beta e^{ilx}e^{-i(l-1)y}}{}\,dy+\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma e^{il(x-y)}e^{iy}}{E-E^{(A)}(y)}\,dy\right\}=1 \qquad /II\ 2.4./$$

Из теорије комплексних бројева познато је да комплексни број $\varepsilon = a e^{i\varphi}$, где су a и φ реални бројеви, e основа природних логаритама, а $i=\sqrt{-1}$ имагинарна јединица, може да се представи у облику $\varepsilon = a(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Када подинтегралну функцију представимо у облику тригонометријских функција, изједначавањем реалног и имагинарног дела леве и десне стране једначина /II 2.4/ добијамо нови систем једначина:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{A'\cos l(x-y)+\alpha'\cos[(l+1)x-ly]+\alpha'\cos[lx-(l+1)y]-\alpha\cos[(l-1)x-ly]}{E-A-2\alpha\cos y}\,dy+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\gamma\cos[lx-(l-1)y]}{E-B-2\beta\cos y}\,dy=1 \qquad /II\ 2.5./$$

$$\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{A'\sin l(x-y)+\alpha'\sin[(l+1)x-ly]+\alpha'\sin[lx-(l+1)y]-\alpha\sin[(l-1)x-ly}{E-A-2\alpha\cos y}\,dy+$$

$$+\frac{\gamma i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin[lx-(l-1)y]}{E-B-2\beta\cos y}\,dy=0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{B'\cos(l-1)(x-y)+\beta'\cos[(l-2)x-(l-1)y]+\beta'\cos[(l-1)x-(l-2)y]-\beta\cos[lx-(l-1)y]}{E-B-2\beta\cos y}\,dy+$$

$$+\frac{\gamma}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos[lx-(l-1)y]}{E-A-2\alpha\cos y}dy=1 \qquad /III\,2.5./$$

$$\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{B'\sin(l-1)(x-y)+\beta'\sin[(l-2)x-(l-1)y]+\beta'\sin[(l-1)x-(l-2)y]-\beta\sin[lx-(l-1)y]}{E-B-2\beta\cos y}dy+$$

$$+\frac{\gamma i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin[lx-(l-1)y]}{E-A-2\alpha\cos y}dy=0$$

Даље ћемо разматрати само нехомотене једначине. Даљим трансформацијама тригонометријских функција, изостављајући чланове облика $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\alpha x}{E-E(x)}dx$ који су једнаки нули зато што је бројиоц непарна, а имениоц парна функција, изрази /III 2.5./ се редукују на облик:

$$\left.\begin{aligned} &f(x)C_1+\varphi(x)C_2+\psi(x)D_1=1\\ &f_1(x)D_1+\varphi_1(x)D_2+\psi_1(x)C_1=1, \end{aligned}\right\} \qquad /III\,2.6./$$

где су:

$$f(x)=A'\cos lx+\alpha'\cos(l+1)x-\alpha\cos(l-1)x$$

$$\varphi(x)=\alpha'\cos lx$$

$$\psi(x)=\gamma\cos lx$$

$$f_1(x)=B'\cos(l-1)x+\beta'\cos(l-2)x-\beta\cos lx$$

$$\varphi_1(x)=\beta'\cos(l-1)x$$

$$\psi_1(x)=\gamma\cos(l-1)x$$

$$C_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos ly}{E-A-2\alpha\cos y}dy;\quad C_2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(l+1)y}{E-A-2\alpha\cos y}dy;$$

$$D_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(l-1)y}{E-B-2\beta\cos y}dy;\quad D_2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(l-2)y}{E-B-2\beta\cos y}dy.$$

Систем /III 2.6./ је систем интегралних једначина са непознатим C_1, C_2, D_1 и D_2. Тај систем решавамо за вредност $l=0$. То значи да је исти број фермиона и бозона у посматраном низу јона. Интеграле C_1, C_2, D_1 и D_2 решавамо сменом $x = tg\frac{y}{2}$, $\cos y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Они су:

$$C_1 = \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{\sqrt{\theta_A^2-1}} \quad ; \quad C_2 = \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{\theta_A+1}\left(\frac{\theta_A}{\sqrt{\theta_A^2-1}}-1\right)$$

$$D_1 = \frac{1}{2\beta}\frac{1}{\theta_B+1}\left(\frac{\theta_B}{\sqrt{\theta_B^2-1}}-1\right); \quad D_2 = \frac{1}{2\beta}\left(\frac{2\theta_B^2-1}{\sqrt{\theta_B^2-1}}-2\theta_B\right).$$

Са θ_A и θ_B смо означили величине:

$$\theta_A = \frac{E-A}{2\alpha}; \quad \theta_B = \frac{E-B}{2\beta}.$$

Имајући ово у виду, систем једначина /III 2.6./ постаје:

$$\frac{f(x)}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\theta_A^2-1}} + \frac{\varphi(x)}{\alpha}\frac{1}{\theta_A+1}\left(\frac{\theta_A}{\sqrt{\theta_A^2-1}}-1\right) + \frac{\psi(x)}{\beta}\frac{1}{\theta_B+1}\left(\frac{\theta_B}{\sqrt{\theta_B^2-1}}-1\right) = \frac{1}{2} \qquad /III\ 2.7/$$

$$\frac{f_1(x)}{\beta}\frac{1}{\theta_B+1}\left(\frac{\theta_B}{\sqrt{\theta_B^2-1}}-1\right) + \frac{\varphi_1(x)}{\beta}\left(\frac{2\theta_B^2-1}{\sqrt{\theta_B^2-1}}-1\right) + \frac{\psi_1(x)}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\theta_A^2-1}} = \frac{1}{2}, \qquad /III\ 2.8./$$

ако су:

$f(x) = A' + (\alpha' - \alpha)\cos x$ $\qquad$ $f_1(x) = B'\cos x + \beta'\cos 2x - \beta$

$\varphi(x) = \alpha'$ $\qquad$ $\varphi_1(x) = \beta'\cos x$

$\psi(x) = \gamma$ $\qquad$ $\psi_1(x) = \gamma\cos x$.

Како алгебарске једначине /III 2.7./ и /III 2.8./ не можемо да решимо ниједном другом методом, решаваћемо је у неколико граничних случајева. За вредности $\theta_A = 1$ и $\theta_B = 1$ добијамо неодређености облика $\frac{0}{0}$ па се стога задржавамо само на вредностима $\theta_A = 0$ и $\theta_B = 0$.

Једначина /III 2.7./ редуцира се ако је $\theta_A = 0$, а то значи да је $E_1 = A$: $\frac{f(x)}{\alpha}\frac{1}{i} - \frac{\varphi(x)}{\alpha} + \frac{\psi(x)}{\beta}\frac{1}{\theta_B+1}\left(\frac{\theta_B}{\sqrt{\theta_B^2-1}}-1\right) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ /III 2.9./

Изједначавањем реалног и имагинарног дела леве и десне стране једначине /III 2.9./ добијамо две једначине, од којих разматрамо: $\sqrt{\theta_B^2-1}\,[a\beta(\theta_B+1) + \psi(x)] = \psi(x)\theta_B$ ако је $a = \frac{1}{2} + \frac{\varphi(x)}{\alpha}$.

Ако је $\psi(x)\approx 0$, $\sqrt{\theta_B^2-1}\cdot \alpha\beta(\theta_B+1)=0$, те као решења обе једначине добијамо $\theta_B=\pm 1$:

а) $\theta_B=-1$. С обзиром на то да је $E_2=A-2\alpha$ ово решење одбацујемо јер оно не даје услов за егзистенцију суперкондуктивности.

b) Решење $\theta_B=1$ даје релацију $E_2=A+2\alpha$.

Ако уврстимо вредност $\theta_A=0$ у /III 2.8./ једно од решења је $E_1=A$, а друго добијамо из једначине:

$$\frac{f_1(x)}{\beta}\frac{1}{\theta_B+1}\left(\frac{\theta_B}{\sqrt{\theta_B^2-1}}-1\right)+\frac{\varphi_1(x)}{\beta}\left(\frac{2\theta_B^2-1}{\sqrt{\theta_B^2-1}}-1\right)+\frac{\psi_1(x)}{\alpha}\frac{1}{i}=\frac{1}{2} \qquad \text{/III 2.10./}$$

Једначина /III 2.10./ даје допунски услов $\psi_1(x)=\gamma^{\mu}\cos x=0$. Имајући у виду да је коефицијент интеракције $\gamma^{\mu}\neq 0$, мора бити $\cos x=0$. Користећи овај допунски услов реални део ирационалне једначине /III 2.10./ након једноставних рачунских операција има облик:

$$\frac{\beta^2}{4}\theta_B^4+\beta\theta_B^3\left[\frac{\beta}{2}-(\beta'+\beta)\right]-\beta(\beta'+\beta)\theta_B^2-\beta\theta_B\left[\frac{\beta}{2}-(\beta'+\beta)\right]-$$
$$-\left[\frac{\beta}{2}-(\beta'+\beta)\right]^2=0.$$

Специјално за $\frac{\beta}{2}-(\beta'+\beta)=0$ редукована једначина $\beta\theta_B^2\left[\frac{\beta}{4}\theta_B^2-(\beta'+\beta)\right]=0$ даје решења $\theta_B=\pm 2\sqrt{1+\frac{\beta'}{\beta}}$. Пошто решење $\theta_B<0$ не даје услов за егзистенцију суперфлуидног стања, решење је $E_2=B+4\beta\sqrt{1+\frac{\beta'}{\beta}}$.

Погледајмо сада какве вредности енергија елементарних ексцитација добијамо из једначина /III 2.7./ и /III 2.8./ ако је једно од решења $E_2=B$.

Једначина /III 2.7./ за вредност $\theta_B=0$ добија облик:

$$\frac{f(x)}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\theta_A^2-1}}+\frac{\psi(x)}{\alpha}\frac{1}{\theta_A+1}\left(\frac{\theta_A}{\sqrt{\theta_A^2-1}}-1\right)=b,$$ ако је $b=\frac{1}{2}+\frac{\psi(x)}{\beta}$.

ЗАКЉУЧАК

За случај да је поправка на константу интеракције α' занемарљиво мала у односу на остале, из једначине $(\theta_A+1)^2\{[f(x)]^2-\alpha^2 b^2(\theta_A^2-1)\}=0$, одбацујући решења $\theta_B<0$ као једино решење остаје $E_1=A+2\alpha\sqrt{1+\frac{[f(x)]^2}{\alpha^2 b^2}}$. Ако је $\frac{[f(x)]^2}{\alpha^2 b^2}\ll 1$ тада је $E_1=A+2\alpha\left\{1+\frac{1}{2}\frac{[f(x)]^2}{\alpha^2 b^2}\right\}$. Величина $\delta E=\frac{1}{\alpha}\frac{[f(x)]^2}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha'}{\beta}\right)^2}$, а $f(x)=A'-\alpha\cos x$, је фундаментална поправка на електронске енергије.

Преостаје нам још да видимо шта се добија као друго решење једначине /III 2.8./ ако је једно од њих $E_2=B$. Како је $\theta_B=0$ једначина /III 2.8./ се знатно редукује: $\frac{\varphi_1(x)}{\beta}i+\frac{\psi_1(x)}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\theta_A^2-1}}=\frac{1}{2}+\frac{f_1(x)}{\beta}$. Изједначавањем реалног и имагинарног дела с обе стране једнакости добија се допунски услов $\varphi_1(x)=\beta'\cos x=0$. Користећи идентитет $\cos x=0$ решење једначине је $\theta_A=1 \Longrightarrow E_2=A+2\alpha$.

Општи закључак који је овде добијен, а то је, да елементарне ексцитације повећавају своју енергију наводи на помисао да је ово повишење резултат везивања електрона у парове, па према томе у споју метал-диелектрик у принципу је могућ феномен супер проводљивости који се јавља као резултат интеракције метал-диелектрик. Важно је нагласити да допунски члан у енергији електрона не потиче од механизма електрон-фонон интеракције као што то бива у идеалној металној структури.

У раду је анализиран спој метал–диелектрик. Анализа је извршена за спој два проста једнодимензиона ланца, затим за спој две дводимензионалне мреже и за спој два просторна дела просте кубне структуре. Ради упрошћавања рачуна узимало се у свим случајевима да су константе решетке метала и диелектрика приближно једнаке.

За сва три поменута случаја постављене су основне једначине из којих се може одредити енергија елементарних побуђења која се појављују услед интеракције између метала и диелектрика. Експлицитни изрази за енергију нису се могли добити у аналитичкој форми због изванредно гломазних интеграла елиптичног типа, који фигуришу у једначини за одређивање енергије. Овај рачун би се могао извести нумерички уз велике материјалне трошкове. Због тога је извршена анализа само у случају једне димензије, а и тада уз мноштво упрошћења. Ова анализа има само квалитативни карактер али ипак недвосмислено показује да слободни електрони у металу добијају у близини границе споја допунску енергију која је позитивна ако је $\frac{A'}{\alpha} > 1$.

Уколико је овај услов испуњен лако се показује да елементарне екситације имају позитиван минимум фазне брзине па се, према томе, могу кретати без трења. Анализа формула за енергију суперкондуктивних екситација показује да је суперкондуктивни геп утолико већи уколико имамо слабо везан слој слабо везаног метала и слабо везаног диелектрика. Другим речима, суперкондуктивни геп расте када се α, β и γ смањују.

На основу резултата који су добијени у доста грубим апроксимацијама може се закључити да се на граници слоја појављује елементарна екситација која има позитиван минимум фазне брзине уколико је $\frac{A'}{\alpha} > 1$. Према томе, у систему је могућа суперкондуктивност ако су промене површинских електронских карактеристика такве да превишавају ширину електронске зоне.

Треба напоменути да овај закључак важи за једнодимензиони низ и да се не би могао аутоматски пренети на вишедимензионе структуре.

Литература

1. C. Kittel: Uvod u fiziku čvrstog stanja, Savremena administracija, Beograd 1970.

2. Dr. inž. D. Ivanović – inž. V. Vučić: Atomska i nuklearna fizika, Naučna knjiga, Beograd 1970.

3. Dr. M. Pavlov: Elektronika, I deo, Novi Sad 1973.

4. Dr. ing. B. Raković: Elektronika I, Naučna knjiga, Beograd 1972.

5. Dr. inž. D. Ivanović: Kvantna mehanika, Naučna knjiga, Beograd 1974.

6. A. C. ДАВЫДОВ: КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА, ГИФМЛ, МОСКВА 1963.