UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNOMATEMATIČKI FAKULTET
KATEDRA ZA FIZIKU

PAVLE B. STOJAKOVIĆ

S I M E T R I J A U

F I Z I C I Č E S T I C A

DIPLOMSKI RAD

U NOVOM SADU, MAJA 1975.

MENTOR

DR MILAN NIKOLIĆ

VANREDNI PROFESOR

ZAHVALJUJEM SE PROFESORU
DR MILANU NIKOLIĆU NA POMOĆI
PRI IZBORU TEME, I POSEBNO NA
SAVETIMA KOJE MI JE DAVAO TO-
KOM IZRADE RADA. TAKODJE SE
ZAHVALJUJEM ASISTENTU DARKU
KAPORU NA SVESRDNOJ POMOĆI.

S A D R Ž A J

./.

S I M E T R I J A U F I Z I C I Č E S T I C A

U v o d :

Ako se neki fizički sistem u osnovi ne menja u odnosu na izvesne transformacije (razne rotacije, translacije itd.), kaže se da je invarijantan u odnosu na te transformacije. Invarijantnost postoji kao rezultat simetrije fizičkog sistema. Primenom principa invarijantnosti na izvesne relacije izmedju fizičkih veličina, koje se izražavaju jednačinama, dobijaju se zakoni konzervacije. U okviru klasične fizike invarijantnost se pojavljuje prilikom razmatranja dinamičkih zakona. U teoriji relativnosti invarijantnost se pojavljuje u kovarijantnoj formulaciji fizičkih zakona : Svaka relacija izmedju fizičkih veličina koja izražava neki fizički zakon mora biti izražena u vidu jednačine, čiji oblik ostaje invarijantan pri prelazu na nove fizičke veličine i nezavisno promenljive.

U klasičnoj mehanici, da bi neka simetrija vodila zakonima konzervacije, neophodno je da se ta simetrija može izraziti kao invarijantnost u odnosu na grupu kanoničnih transformacija. U kvantnoj mehanici, grupe kanoničnih transformacija zamenjene su grupama unitarnih transformacija. Principi simetrije, mogu se podeliti u četiri grupe:

1.- Kontinualne prostorno - vremenske simetrije
2.- Diskretne prostorno - vremenske simetrije
3.- Gradijentne (kalibracione) simetrije
4.- Unutrašnje simetrije

Sem ove klasifikacije simetrija, iste se mogu podeliti još u dve kategorije : spoljašnje i unutrašnje.

Pod spoljašnjom simetrijom podrazumevamo invarijantnost u odnosu na transformacije u prostoru i vremenu. Wigner ovu simetriju naziva geometrijskom simetrijom.

Pojam unutrašnje simetrije odnosi se na invarijantnost u odnosu na stepen slobode, koji nemaju veze sa prostorom i vremenom. Unutraš-

./.

nja simetrija se može posmatrati kao invarijantnost u odnosu na transformacije u abstraktnom ili internom prostoru. Wigner ove simetrije naziva dinamičke simetrije.

Neki zakoni konzervacije uvek važe, a neki samo pod odredjenim uslovima. U tabelama 1.a i 1.b dat je pregled principa simetrija i odgovarajućih kvantnih brojeva.

Tabela 1.a

Princip simetrije	Kvantni brojevi (konstante kretanja)	Tačnost (*) konzervacije
A. KONTINUALNE PROSTORNO-VREMENSKE SIMETRIJE		
1. Translaciona invarijantnost	P_μ - impuls	tačno (za izolovan sistem)
2. Rotaciona invarijantnost	$\vec{J}$ - moment impulsa	tačno
3. Lorentzova invarijantnost		tačno
B. DISKRETNE PROSTORNO-VREMENSKE SIMETRIJE		
4. Inverzija vremena (T)	nema (jer operator T nije unitaran, i $[S,T] \neq 0$)	nesigurno narušeno ako se CPT održava.
5. Prostorna inverzija (ne razlikovanje onoga što je posmatrano i njegove slike u ogledalu)	P	narušeno u slabim interakcijama
6. Konjugovanje naelektrisanja (ne razlikovanje čestice i njene antičestice)	C	narušeno slabim interakcijama. Ostali nivoi narušavanja nisu isključeni.
7. CP ($\sim$ T, ako se CPT očuvala)	CP	narušen u $K_2^0 \to 2\pi$ raspadu.
8. CPT (zahteva da čestica i antičestica imaju istu masu čak i ako je C narušeno)	CPT	ako je C jako narušeno onda posto ji jak dokaz za CPT iz razlike masa $K\bar{K}$: $m_{K_1} - m_{K_2} \sim 10^{-4}$ eV dok je $m_K \sim 5\cdot 10^{8}$ eV, tako da se CPT održava do ~ 1 u 10^{12}

(*) "tačno" uvek treba shvatiti kao: dotle, dokle dostiže današnje znanje.

./.

Tabela 1.b

Princip simetrije	Kvantni brojevi /konstante kretanja/	Tačnost /*/ konzervacije
<u>C. GRADIJENTNE /KALIBRACIONE/ SIMETRIJE</u>		
9. Opšta kovarijantnost	Ekvivalentan princip $m_{graviton} = 0$	Možda tačno
10. Gradijentna invarijantnost elektromagn.polja	$Q, \dot{Q} = 0$ /naboj/ $m_{\gamma} = 0$	veoma tačno
11. Gradijentna invarijantnost neutralnog vektorskog polja spregnutog sa barionskim brojem	N /barionski broj/	veoma tačno
12. Gradijentna invarijantnost drugih jako spregnutih polja	Y / hiper naboj / ili S / stranost /	narušen u slabim interakcijama.
13. γ_5 - invarijentnost neutrina	$m_{\nu} = 0$	
14. Gradijentna invarijantnost drugih vektorskih polja	Leptonski broj	
<u>D. UNUTRAŠNJE SIMETRIJE</u>		
15. Nezavisnost kod naelektrisanja	$\vec{I}^2$, I_3	veruje se da se očuvava u jakim interakcijama. Sigurno se zna da se narušava u elektromagnetnim interakcijama.
16. Invarijantnost G- parnosti	$G = Ce^{-i\pi I_2}$	Očuvava se kadgod se $\vec{I}^2$ i C oba očuvavaju.
17. Nezavisnost od hipernaboja /ili "unitarna simetrija" udružena sa SU /3/	niz od 8 očuvanih veličina, naime I_1, I_2, I_3, Y i još četiri druge	jako narušeno.

U daljem izlaganju biće posebno obradjeno :
- SIMETRIJA U KLASIČNOJ FIZICI
- SIMETRIJA U KVANTNOJ MEHANICI
- SIMETRIJA U KLASIČNOJ TEORIJI POLJA
- GRADIJENTNE TRANSFORMACIJE I GRUPE U /1/, SU /2/ i SU /3/

./.

I SIMETRIJA U KLASIČNOJ FIZICI

Cela klasična mehanika bazira na principima invarijantnosti. Mnogi principi / Jacobiev, Maupertuis - Lagrangeev i drugi / dobijaju svoj najsažetiji oblik u invarijantnosti integrala kretanja pri malim kontinualnim deformacijama ili po fiksiranoj orbiti i za fiksirane krajnje tačke. Medjutim, fiksiranje krajnjih tačaka onemogućuje jasno uočavanje veze izmedju invarijantnosti i zakona konzervacije. Posmatrajmo sada, kretanje sistema u spoljnom polju potencijalnih sila sa n- stepeni slobode. Tada je Lagrangian sistema L / q_i, $\dot{q}_i$, t /, a varijacija Hamiltonovog dejstva je:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L\,dt \qquad \text{I.1.}$$

gde je uzeto u obzir, da operacije variranja i integraljenja kao nezavisne operacije mogu izmeniti svoj red:

$$\int_{t_0}^{t_1}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\Big)dt \qquad \text{I.2.}$$

Da bismo se oslobodili varijacija generalisanih brzina $\dot{q}_i$, koje nisu nezavisne od varijacija q_i, transformišemo svaki integral u drugoj sumi na taj način što zamenjujemo :

$$\delta\frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt}\delta q_i \qquad \text{I.3.}$$

a potom parcijalno integralimo :

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta\dot{q}_i\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,d\delta q_i =$$

$$= \Big|\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\delta q_i\, d\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad \text{I.4.}$$

pošto je : $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$ integralisani deo otpada, pa imamo :

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\,dt \qquad \text{I.5.}$$

Tada je varijacija Hamiltonovog dejstva :

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big)\delta q_i\,dt \qquad \text{I.6.}$$

./.

Zatim uzimajući u obzir Euler - Langrangeeve jednačine :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \qquad \text{I.7.}$$

dobija se :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0 \qquad \text{I.8.}$$

Pri kretanju mehaničkog sistema sa n-stepeni slobode, njegovo stanje je opisano sa 2n veličina / q_i , $\dot{q}_i$, i= 1.....n /. Te veličine zavise od 2n-1 konstanti i vremena.

$$q_i = q_i \; / \; t + t_0,\ C_1,\ C_2 \ldots\ldots\ldots C_{2n-1} /$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i \; / \; t + t_0,\ C_1\ \ C_2 \ldots\ldots\ldots C_{2n-1} \; / \qquad \text{I.9.}$$

gde je t_0 početno vreme. Funkcije od q_i i $\dot{q}_i$, koje zavise samo od početnih uslova i ostaju konstantne pri kretanju, nazivaju se integrali kretanja. Vezu izmedju C_i / i 1...2n-1 / i q_i , $\dot{q}_i$ dobijamo ako eliminišemo $t+t_0$ iz gornjih jednačina. Vidimo da su konstante C_i ustvari integrali kretanja. Posebno nas zanimaju konstante koje vode poreklo iz odnosnih svojstava prostora i vremena, homogenosti i izotropijå, a imaju svojstvo aditivnosti.

U daljem izlaganju primenjivaćemo odredjene simetrije, kao što su homogenost vremena, homogenost prostora, i izotropija prostora , na opšti izraz za $\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt$, a kao rezultat dobijaće se odgovarajući integrali kretanja.

I.I KONZERVACIJA ENERGIJE

Uzimajući prvu prostorno-vremensku simetriju - homogenost vremena dobijamo zakon konzervacije energije. Može se zaključiti da su zbog homogenosti vremena u konzervativnim sistemima dva različita trenutka ekvivalentna. Tada Lagrangian ne zavisi eksplicitno od vremena, pa je totalni izvod L po vremenu :

$$\frac{dL(q_i,\dot{q}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} \qquad \text{I.10.}$$

iz Euler - Lagrangeevih jednačina uzima se :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad \text{I.11.}$$

pa se može pisati : ./.

$$\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \qquad \text{I.12.}$$

tojest:

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

ili :

$$\frac{d}{dt}\left(L-\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0 \qquad \text{I.13.}$$

izraz u zagradi mora biti neka konstanta, koju ćemo nazvati - H

$$L-\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=-H$$

ili: I.14.

$$H=\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i p_i-L$$

To je jedan integral kretanja. Pokazaćemo da je to totalna energija sistema. Za sisteme u polju konzervativnih sila Lagrangian ima oblik

$$L=T(q_i,\dot{q}_i)-U(q_i) \qquad \text{I.15.}$$

Vidimo da za te sisteme potencijalna energija ne zavisi od generalisanih brzina, pa imamo :

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \qquad \text{I.16.}$$

Pošto je T homogena kvadratna funkcija od $\dot{q}_i$, a na osnovu Eulerove teoreme ima se :

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=2T \qquad \text{I.17.}$$

/ Ako je F homogena funkcija, reda n, od niza promenljivih q_i, tada je $\sum_{i=1}^{n}q_i\frac{\partial F}{\partial q_i}=nF$ /

To konačno za konstantu H imamo da je :

$$H=2T-L=2T-/T-U/=T+U \qquad \text{I.18.}$$

totalna energija sistema.

I.II KONZERVACIJA IMPULSA

Na osnovu homogenosti prostora mehanička svojstva izolovanog sistema ne menjaju se u odnosu na ma kakve translacije. Posmatrajmo infinitezimalnu transformaciju pri kojoj L ostaje ne promenjeno. Neka je ta transformacija obeležena sa vektorom $\vec{\varepsilon}$. Tom translacijom vektor $\vec{r}_a$ postaje :

$$\vec{r}_a\rightarrow\vec{r}_a+\vec{\varepsilon} \qquad \text{I.19.}$$

Usled toga menja se i L, pri čemu se ne menja brzina sistema :

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}\delta \vec{r}_a = \vec{\varepsilon} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \qquad \text{I.20.}$$

iz uslova $\delta L = 0$, a pošto je $\vec{\varepsilon}$ proizvoljno, dobija se :

$$\sum_a \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{d}{dt}\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = 0 \qquad \text{I.21.}$$

Ako označimo $\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}$ impulsom sistema, onda poslednji izraz predstavlja zakon konzervacije impulsa sistema pri translaciji.

U specijalnom slučaju kada Lagrangian ne sadrži koordinate q_i, tada se ta koordinata naziva ciklična. Pa se Lagrangeeva jednačina

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad \text{I.22.}$$

svodi na :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

ili

$$\frac{dp_i}{dt} = 0$$

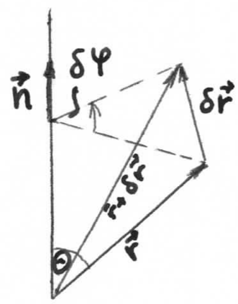
tj.

$$P_i = \text{const.} \qquad \text{I.23.}$$

Konzervacija svih komponenata vektora impulsa moguća je samo u slučaju izolovanog sistema. U slučaju da potencijalna energija ne zavisi od neke koordinate, duž te koordinate mehanička svojstva se ne menjaju, pa se i odgovarajuća projekcija impulsa na tu osu održava konstantnom.

I.III. KONZERVACIJA MOMENTA IMPULSA

Pored dve pomenute simetrije prostora, postoji još i izotropija prostora. To znači da se mehanička svojstva izolovanog sistema ne menjaju pri ma kako maloj rotaciji sistema.



Sl.1

Definišemo li tu infinitezimalnu rotaciju sa $\delta\vec{\varphi} = \vec{n}\,\delta\varphi$, gde je $\delta\varphi$ ugao rotacije, a $\vec{n}$ jedinični vektor ose rotacije, intenzitet promene radius vektora sa sl.1 je :

$$|\delta\vec{r}| = r \sin\Theta\, \delta\varphi \qquad \text{I.24.}$$

a vektorski proizvod mu odredjuje smer :

$$\delta\vec{r} = \vec{n} \times \vec{r} \qquad \text{I.25.}$$

./.

Pri ovom pomeranju menja se i brzina čestica :

$$\delta \vec{v} = \vec{n} \times \vec{v} \qquad \text{I.26.}$$

Postavimo uslov da se pri ovakvom pomeranju ne menja L sistema i formirajmo varijaciju Lagrangeeve funkcije

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \delta \vec{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \delta \vec{v}_a \right) = 0 \qquad \text{I.27.}$$

Na osnovu $\vec{P}_a = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}$ i Lagrangeevih jednačina dobija se:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \dot{\vec{P}}_a \qquad \text{I.28.}$$

pa je varijacija Lagrangeeve funkcije :

$$\delta L = \sum_a \left[\dot{\vec{P}}_a (\vec{n} \times \vec{r}_a) + \vec{P}_a (\vec{n} \times \vec{v}_a) \right] = 0 \qquad \text{I.29.}$$

Pošto je $\vec{n}$ = konst. dobija se :

$$\vec{n} \sum_a (\vec{r} \times \dot{\vec{p}}_a + \vec{v}_a \times \vec{p}_a) = \vec{n} \frac{d}{dt} \sum_a (\vec{r}_a \times \vec{v}_a) = 0 \qquad \text{I.30.}$$

Ako se obeleži suma sa $\vec{M}$ a pošto je $\vec{n}\delta\varphi = \delta\vec{\varphi}$ proizvoljno dobija se :

$$\vec{M} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a = const. \qquad \text{I.31.}$$

$\vec{M}$ je moment impulsa / ugaoni momenat / i ostaje konstantan pri rotaciji izolovanog sistema. Pod odredjenim uslovima $\vec{M}$ može da se održi i u spoljašnjem polju, tj. ako je dato polje simetrično u odnosu na neku osu, onda se projekcija momenta impulsa na tu osu održava. U tom slučaju moment impulsa mora biti definisan u odnosu na neku tačku na osi, u odnosu na koju je polje simetrično. U tom slučaju ma kakva rotacija oko te ose održava projekciju momenta impulsa na tu osu.

I.IV. HAMILTONOV FORMALIZAM

Iz ovog formalizma takodje slede isti zakoni konzervacije. On se bazira na pojmu kanoničnih transformacija i generatrisa kanoničnih transformacija.

./.

a./ Poissonove zagrade

U tesnoj vezi sa Hamiltonovim jednačinama stoje takozvane Poissonove zagrade, koje možmo izvesti na sledeći način. Uočimo ma kakvu mehaničku veličinu F koja je funkcija generalisanih koordinata, generalisanih impulsa i vremena:

$$F = F\,/q_i,\ p_i,\ t\,/ \qquad \text{I.32.}$$

i potražimo njen totalni izvod po vremenu :

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad \text{I.33.}$$

Ako gornjem izrazu zamenimo $\dot{q}_i$ i $\dot{p}_i$ prema Hamiltonovim jednačinama, dobija se :

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad \text{I.34.}$$

Iz prvog člana gornjeg izraza vidi se da ako uvedemo oznaku :

$$[u, v] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i} \right) \qquad \text{I.35.}$$

izraz I.34. može se napisati u konciznijem obliku :

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad \text{I.36.}$$

Prvi član zbira gornje jednačine naziva se Poissovona ~~xxxxxxx~~. zagrada funkcija F, H. Gornji izraz predstavlja totalni izvod po vremenu ma kakve funkcije oblika $F = F\,/\,q_i,\ p_i,\ t\,/$. Pošto su pri ovom izvodjenju korišćene Hamiltonove jednačine, poslednji obrazac je ekvivalentan njima, te se može smatrati i kao diferencijalna jednačina kretanja sistema čestica.

Ispitajmo još slučaj kad funkcija F ostaje stalna u toku vremena:

$$F\,/q_i, p_i,\ t/ = \text{const.}$$

tj. kad je:

$$\frac{dF}{dt} = 0 \qquad \text{I.37.}$$

Takva funkcija F naziva se konstanta kretanja , a uslov I.37. predstavlja prvi integral kretanja. U tom slučaju može se pisati :

$$[F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \qquad \text{I.38.}$$

./.

Dakle svaka konstanta kretanja mora zadovoljavati uslov I.38., koji predstavlja potreban i dovoljan uslov da neka mehanička veličina bude konstanta kretanja. Ukoliko pored toga funkcija F ne zavisi eksplicitno od vremena, otpada parcijalni izvod po vremenu, pa se prethodni uslov svodi na jednostavniji:

$$[F,H]=0 \qquad \text{I.39.}$$

Prema tome, svaka konstanta kretanja, koja ne zavisi eksplicitno od vremena, mora zadovoljavati gornji uslov, tj. njena Poissonova zagrada sa Hamiltonovom funkcijom mora biti jednaka nuli. Na primer: ako za funkciju F uzmemo Hamiltonovu funkciju H, pošto je identički $[H,H]=0$ dobija se da je :

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t} \qquad \text{I.4o.}$$

Odavde se vidi da ako Hamiltonova funkcija ne zavisi eksplicitno od vremena, ona je konstanta kretanja, koja predstavlja energiju sistema.

b./ Infinitezimalne transformacije, konstante kretanja i simetrične osobine

Ostale osobine Poissonovih zagrada su otkrivene uvodjenjem koncepta infinitezimalnih transformacija. Posmatrajmo infinitezimalne rotacije kao transformacije u kojima se nove koordinate razlikuju od starih samo za infinitezimalu. Transformacione jednačine mogu biti pisane u formi :

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i+\delta q_i \\ P_i &= p_i+\delta p_i \end{aligned} \qquad \text{I.41.}$$

gde su δq_i i δp_i jednostavne infinitezimalne promene koordinata i impulsa,a ne virtualna pomeranja. A funkcija generatrisa se menja za infinitezimalnu vrednost:

$$F_2=\sum_i q_i P_i+\varepsilon G\,(q_i,P) \qquad \text{I.42.}$$

gde je ε infinitezimalni parametar transformacije. Transformacione jednačine za nove impulse P_i su nadjene kao :

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i}=p_i=P_i+\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}$$

ili

$$P_i-p_i=\delta p_i=-\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_i} \qquad \text{I.43.}$$

./.

Slično, transformacione jednačine za Q_i su dobijene kao:

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

ili

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \qquad \text{I.44.}$$

Pošto se P_i razlikuje od p_i samo za infinitezimalnu veličinu, P_i možemo da zamenimo sa p_i, i tada je $G = G/q_i, p_i/$, a

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \qquad \text{I.45.}$$

Posmatrajmo neku funkciju U $/q_i, p_i/$ i posmatrajmo promenu ove funkcije pri infinitezimalnoj kanoničnoj transformaciji :

$$\delta U = U(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i) - U(q_i, p_i)$$

odnosno I.46.

$$\delta U = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial U}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

Ako zamenimo prethodno dobivene izraze za δq_i i δp_i dobijamo:

$$\delta U = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \qquad \text{I.47.}$$

ili konačno kao:

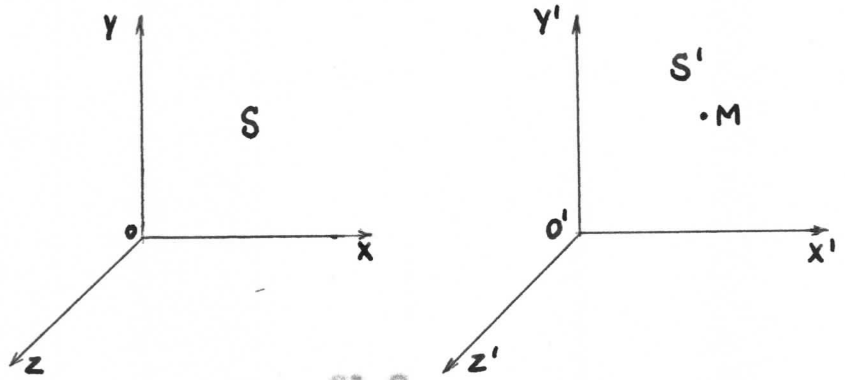
$$\delta U = \varepsilon \, [U, G], \ \text{Ako } U = H \rightarrow \delta H = \varepsilon [H, G] \qquad \text{I.48.}$$

Bilo je već pokazano da ako je funkcija G $/q_i, p_i/$ konstanta kretanja, njena Poissonova zagrada sa H je O. Gornja jednačina tvrdi da takve konstante, generatrise infinitezimalnih kanoničnih transformacija, ne menjaju vrednost Hamiltonijana. Ekvivalentno, konstante kretanja su funkcije generatrise čije infinitezimalne kanonične transformacije Hamiltonijan održavaju nepromenjenim. Simetrične osobine sistema odredjuju koje su to transformacije koje ne menjaju vrednost H. Jasno, ako je fizički sistem simetričan u odnosu na datu operaciju Hamiltonijan mora ostati ne promenjen u odnosu na tu transformaciju. Sada se mogu odrediti sve konstante kretanja ispitivanjem simetričnih osobina Hamiltonijana. Ovo nije prvi primer veze izmedju konstanti kretanja i simetričnih osobina. Medjutim, ovo je mnogo elegantniji, i takodje kompletniji, jer obuhvata sve konstante kretanja.

./.

I.V. LORENTZOVE TRANSFORMACIJE

Svaki dogadjaj može se posmatrati u odnosu na jedan odredjeni koordinatni sistem, u kome se on dešava na odredjenom mestu i u odredjenom trenutku. Ako imamo dva inercijalna sistema S i S' , ovaj dogadjaj za nekog posmatrača A u sistemu S dešava se na izvesnom mestu /x,y,z/ u trenutku t, a ovaj isti dogadjaj za nekog posmatrača B u sistemu S' dešava se na nekom drugom mestu /x',y',z'/ u nekom drugom trenutku t'. Brzina prostiranja svetlosnog signala u oba sistema mora biti ista. Potražimo sad vezu izmedju prostornih koordinata i vremena u ova dva inercijalna sistema :



Sl.2

Pošto se ma kakvo uniformno kretanje sistema u odnosu na drugi može razložiti na tri uniformna kretanja duž koordinatnih osa ovog drugog sistema, posmatrajmo samo kretanje duž x ose. Neka se sistem S' kreće uniformno duž x ose sistema S sa relativnom brzinom "u." Vremena se u oba sistema računaju od trenutka kad su se njihovi koordinatni počeci O i O' poklapali. Tada je očigledno da važi :

$$y' = y \qquad \text{i} \qquad z' = z \tag{I.49.}$$

Pošto je naš prostor homogen i izotropan, a uniformnost mora ostati sačuvana, izmedju apscisa i vremena u oba sistema moraju postojati linearne relacije, a obzirom na naš uslov o početku računanja vremena, ove relacije moraju biti i homogene:

$$x' = a_{11}x + a_{12}t \qquad t' = a_{21}x + a_{22}t \tag{I.50.}$$

Početak O' sistema S' u ovom sistemu ima uvek apscisu $x' = 0$, a u sistemu S je $x = ut$. Kada to uvrstimo u I.50. dobija se :

./.

$$0 = a_{11}ut + a_{12}t \qquad \text{I.51.}$$

otuda je: $a_{12} = -a_{11}u$

pa je prvi obrazac dobio oblik:

$$x' = a_{11}/x-ut/ \qquad \text{I.52.}$$

Ako posmatrano kretanje sistema S i S' shvatimo kao kretanje sistema S u odnosu na sistem S' sa relativnom brzinom -u, u poslednjem obrascu treba zameniti /x,t/ sa /x',t'/ i obrnuto uz istovremenu zamenu u sa -u

$$x = a_{11}/x' + ut'/ \qquad \text{I.53.}$$

čime je izbegnuta druga jednačina u I.5o. i broj nepoznatih koeficijenata je sveden na 1.

U cilju odredjivanja koeficijenata a_{11}, posmatrajmo prostiranje svetlosnog signala duž X ose i neka je ovaj signal ispaljen u trenutku kada su se koordinatni početci O i O' poklapali. Brzine prostiranja ovog svetlosnog signala oba sistema mora biti ista i to je bitan uslov koji odredjuje karakter ovih transformacija. Na osnovu toga jednačine prostiranja ovog svetlosnog signala u posmatranim sistemima glase:

$$x = ct \qquad x' = ct' \qquad \text{I.54.}$$

ako to uvrstimo u obrasce I.52. i I.53. dobija se :

$$ct' = a_{11}/ct-ut/ \qquad ct = a_{11}/ct' + ut'/ \qquad \text{I.55.}$$

a množenjem ovih jednačina :

$$c^2tt' = a_{11}^2 tt'/c^2-u^2/ \qquad \text{I.56.}$$

i rešavanjem po a_{11}^2 dobija se:

$$a_{11}^2 = \frac{c^2}{c^2-u^2} = \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}} \quad ; \quad a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad \text{I.57.}$$

Na osnovu ovog obrazac I.51. može se napisati u obliku :

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad \text{I.58.}$$

Da bi našli i drugi obrazac I.5o. u eksplicitnoj formi, polazimo od obrasca I.52. i uvrstimo u njega umesto $\hat{x}$ izraz I.51.

$$x = a_{11}\left[a_{11}(x-ut)+ut'\right] \qquad \text{I.59.}$$

a otuda :

$$t' = \frac{1}{a_{11}u}\left[a_{11}^2 ut + (1-a_{11}^2)x\right] = a_{11}\left[t+\frac{1}{u}\left(\frac{1}{a_{11}^2}-1\right)x\right]$$

Ako ovde umesto a_{11} stavimo izraz I.57. dobija se :

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left[t+\frac{1}{u}\left(1-\frac{u^2}{c^2}-1\right)x\right]$$

odnosno I.6o.

$$t' = \frac{t-\frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

skup dobijenih rezultata

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \;;\quad y'=y\;;\quad z'=z\;;\quad t' = \frac{t-\frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad \text{I.61.}$$

predstavlja tražene transformacione obrasce, koji povezuju prostorne koordinate i vremena u dva inercijalna sistema, od kojih se drugi kreće translatorno duž X ose prvog, pri čemu treba imati na umu i uslov o početku računanja vremena. Inverzne obrasce možemo dobiti uzajamnom izmenom /x,y,z,t/ i /$\hat{x}$,$\hat{y}$,$\hat{z}$,$\hat{t}$/ uz istovremenu zamenu u sa -u :

$$x = \frac{x'+ut'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \;;\quad y=y'\;;\quad z=z'\;;\quad t = \frac{t'+\frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad \text{I.62.}$$

To su takozvane Lorentzove transformacije.

Da bi se izbegla asimetrija izmedju prostornih koordinata i vremena, polazimo od osnovne invarijante za beskonačno bliske dogadjaje, koju pišemo :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + d/ict/^2 \qquad \text{I.63.}$$

Gornji izraz možemo da shvatimo kao metriku pseudo Euklidovog prostora sa koordinatama x,y,z,ict. Stoga uvodimo četvorodimenzioni prostor u kome se tačka definiše kao skup :

$$x_\mu = /x, y, z, ict/ \qquad \text{I.64.}$$

a metrika obrascem:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \qquad \text{I.65.}$$

Takav prostor čija svaka tačka odgovara jednom dogadjaju, predstavlja kompleksan pseudo Euklidov prostor i naziva se svet Minkowskog.

Formulišimo sada Lorentzove transformacije I.61. u ovim koordinatama. Ako ih napišemo u obliku:

$$x'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \frac{i\,u/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \cdot x_4$$

$$x'_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_4$$

$$x'_3 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$x'_4 = \frac{-i\,u/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \cdot x_4$$

i uvedemo oznake:

$$\jmath = \frac{u}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad \text{I.66.}$$

vidimo da su one potpuno odredjene šemom odgovarajućih elemenata:

$$a = a_{\lambda\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\jmath\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\jmath\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad \text{I.67.}$$

tada Lorentzove transformacije dobijaju koncizan oblik:

$$x'_\lambda = a_{\lambda\alpha} \cdot x_\alpha \qquad \text{I.68.}$$

Prethodni izraz možemo da pišemo i kao:

$$x' = a x \qquad \text{odnosno} \qquad x = a^{-1} x' \qquad \text{I.69.}$$

Transformaciona matrica a ima odredjene osobine na osnovu kojih se vrši klasifikacija Lorentzovih transformacija. Može se pokazati da važi:

$$a_{\lambda\alpha} a_{\lambda\jmath} = \delta_{\alpha\jmath} \qquad \text{I.70.}$$

na osnovu čega se pokazuje druga osobina da je det$a = \pm 1$. Neka je transponovana matrica "$\overset{T}{a}$" definisana tako da su joj elementi :

$$a_{\lambda\alpha} = a^{T}_{\alpha\lambda} \tag{I.71.}$$

Sada jednačina I.7o. postaje :

$$a^{T}_{\alpha\lambda} a_{\lambda\gamma} = \delta_{\alpha\gamma} \tag{I.72.}$$

Ovo je pravilo za množenje dve matrice, i jasno da je det/$\delta_{\alpha\gamma}$/ = 1. Ako sa simbolom $\hat{1}$ označimo jediničnu matricu, imamo da je :

$$a^{T} a = \hat{1} \tag{I.73.}$$

$$\det(a^{T} a) = \det a^{T} \det a = +1 \tag{I.74.}$$

Vrednost determinante se ne menja zamenom vrsta i kolona, pa je

$$\det a^{T} = \det a \tag{I.75.}$$

tj. / deta/^{2}= 1 odnosno deta = ± 1

Transformaciona matrica rotacije I.67. ispunjava uslov deta = 1. Dalje, refleksija ovih prostornih koordinata

$$a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{I.76.}$$

i refleksija vremenske koordinate :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{I.77.}$$

zadovoljavaju uslov deta = -1.

Na osnovu ovih osobina možemo da izvršimo klasifikaciju Lorentzovih transformacija kao što je dato u sledećoj tabeli :

klasa	1	2	3	4
deta	1	-1	-1	1
a_{44}	>0	>0	<0	<0

gde su :

klasa 1 prave Lorentzove transformacije /ograničena Lorentzova grupa/

klasa 2 prostorna inverzija

klasa 3 inverzija vremena

klasa 4 prostorno-vremenska inverzija.

Prave Lorentzove transformacije se odnose na stanja, koja se postižu integracijom serije infinitezimalnih transformacija / napr. rotacija/. One se dele na homogene /čista rotacija/ i na nehomogene /rotacija i translacija/. Klase 2,3 i 4 su diskontinualne i nemogu se postići sumom infinitezimalnih transformacija. Kod klasa 1 i 2 ne postoji inverzija vremena i one su ortohrone. Na osnovu ortohronih Lorentzovih transformacija može se izvršiti klasifikacija fizičkih veličina. Neka su Ω i Ω' vrednosti neke fizičke veličine u dva koordinatna sistema, tada možemo pisati

$$\Omega_i' = L\,\Omega_i' \qquad \text{I.78.}$$

gde je L funkcija matrica $a_{\lambda\alpha}$. Klasifikacija fizičke veličine Ω vrši se na osnovu ponašanja L :

a./ skalari $\dot{S}=S$, $L=1$ / jedinična matrica/

b./ pseudoskalari $\dot{P}=LP$, $L=\det a_{\lambda\alpha}$, gde je $\det a_{\lambda\alpha}=+1$ za prave Lorentzove transformacije a $\det a_{\lambda\alpha} = -1$ za inverziju prostornih koordinata.

c./ Vektori $\dot{V}_\lambda = a_{\lambda\alpha} \cdot V_\alpha$, $L = a_{\lambda\alpha}$

d./ Pseudo/ aksialni / vektori $\dot{A}_\lambda = L A_\alpha$, $L = /\det a/ a_{\lambda\alpha}$, te prostorna komponenta aksialnog vektora menja znak pri refleksiji koordinata.

e./ tenzori $\dot{T}_{\lambda\varkappa\rho}\ldots = a_{\lambda\alpha}\, a_{\varkappa\gamma}\, a_{\rho\gamma}\ldots T_{\alpha\gamma\gamma}$

f./ pseudo tenzori, transformaciona matrica ista je kao za tenzore pomnožena sa deta.

I.VI. RELATIVISTIČKA MEHANIKA

a./ Kovarijantna formulacija fizičkih zakona

Pošto smo našli Lorentzove transformacije i uveli svet Minkowskog, možemo sad i matematički formulisati princip ekvivalentnosti inercijalnih sistema, tj.zahtev da svi fizički zakoni moraju imati isti oblik u svim inercijalnim sistemima. Invarijantnost fizičkih zakona lakše je uspostaviti ako ih izrazimo u svetu Minkowskog. Svaki fizički zakon ima oblik izvesnih relacija izmedju raznih fizičkih veličina. Neka su N,M... takva grupa fizičkih veličina, koja posmatrač meri u izvesnom sistemu S i koje mogu biti izvesne funkcije koordinata i vremena. Na osnovu toga posmatrani zakon ima oblik jedne ili više jednačina tipa:

$$F\left(N, M, \cdots, \frac{\partial N}{\partial x_\mu}, \frac{\partial M}{\partial x_\mu}, \cdots\right) = 0 \qquad \text{I.79.}$$

koje mogu sadržati izvode prvog i višeg reda. Posmatrač vezan za neki drugi inercioni sistem S', koristiće se istim metodama merenja, naći će neke druge vrednosti N', M' ... za gornje fizičke veličine, pri čemu treba imati u vidu da posmatrač ovde koristi i nove nezavisno promenljive x'. Fizički zakon u sistemu S' imaće oblik

$$F\left(N', M', \cdots, \frac{\partial N'}{\partial x'_\mu}, \frac{\partial M'}{\partial x'_\mu}, \cdots\right) = 0 \qquad \text{I.8o.}$$

gde prema navedenom zakonu funkcija F mora biti ista funkcija argumenata N', M', ..., kao i prvobitna funkcija F od argumenata N,M,...

$$F\left(N', M', \cdots, \frac{\partial N'}{\partial x'_\mu}, \frac{\partial M'}{\partial x'_\mu}, \cdots\right) = F\left(N, M, \cdots, \frac{\partial N}{\partial x_\mu}, \frac{\partial M}{\partial x_\mu}, \cdots\right) \qquad \text{I.81.}$$

tj., svaka relacija izmedju fizičkih veličina, koja izražava neki fizički zakon mora biti izražena u vidu jednačine, čiji oblik ostaje invarijantan pri prelazu na nove fizičke veličine i nezavisno promenljive. To je takozvana kovarijantna formulacija fizičkih zakona. Naprimer ako imamo jednakost dvaju tenzora :

$$A_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}$$

obe se strane transformišu na isti način, prelazeći u $A_{\mu\nu}' = B_{\mu\nu}'$, te oblik jednačine ostaje ne promenjen. Uopšte, možemo reći da neki zakon predstavlja samo tada pravi fizički zakon, ako se može formulisati u vidu jedne ili više jednačina, čiji su svi članovi tenzori istog reda u svetu Minkowskog. To je kriterium ispravnosti relativističke formulacije fizičkih zakona.

./.

b./ Osnovna jednačina relativističke dinamike

Pri ovom razmatranju ograničićemo se samo na kretanje jedne čestice, tj. takvog tela čije se dimenzije mogu zanemariti, jer u slučaju sistema čestica već nailazimo na znatne teškoće.

U dinamici očekujemo korenite promene u odnosu na klasičnu mehaniku, pošto jednačine klasične mehanike nisu invarijantne u odnosu na Lorentzove transformacije. Medjutim i pored toga nemožemo potpuno odbaciti klasičnu mehaniku, ona mora biti sadržana u relativističkoj kao prva aproksimacija, što će nam biti jedan od kriteriuma ispravnosti pojmova i jednačina relativističke dinamike. Ideja vodilja u traženju zakona dinamike mora biti kovarijantna formulacija fizičkih zakona i dopunski uslov da dinamičke veličine u svim inercijalnim sistemima moraju biti povezane istim relacijama kao i u klasičnoj mehanici.

Osnovni pojam relativističke dinamike, kao i klasične, je masa, čiji smisao se sastoji u tome da ona predstavlja meru inercije čestice. Medjutim, nesmemo tvrditi da ona mora biti konstantna. Drugi pojam, koji se može svesti na masu i kinematičke pojmove je sila, koja nam omogućava da formulišemo osnovnu jednačinu dinamike ; ali i ovaj pojam postaje ovde znatno složeniji. Za nalaženje relativistički invarijantnog oblika osnovne jednačine dinamike, neophodno je naći odgovarajuću jednačinu u kovarijantnom, kvadrivektorskom obliku.
(Đ.MUŠICKI)

Zamislimo sada neku česticu, za koju u beskonačno malom vremenskom intervalu / t,t+ dt/ možemo uvek uzeti da se kreće uniformno, i sistem S vezan za ovu česticu. Po analogiji sa impulsom u klasičnoj mehanici uvedimo skup

$$P_\mu = m_0 V_\mu \qquad \text{I.82.}$$

gde je "m_0" masa u sistemu koji se kreće zajedno sa uočenom česticom, takozvana sopstvena masa. Pošto je m_0 skalar /invarijanta /, ovaj skup predstavlja vektor u svetu Minkowskog i naziva se kvadrivektor impulsa. Njegove komponente su date kao :

$$P_K = \frac{m_0 v_K}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad P_4 = \frac{icm_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{I.83.}$$

Kao prirodnu relativističku generalizaciju osnovne jednačine dinamike klasične mehanike

$$\frac{d}{dt}(m v_k) = f_k(x_i, v_i, t)$$

ovde moramo uzeti :

$$\frac{d}{dt_0}(m_0 V_\mu) = F_\mu(x_\nu, V_\nu, t_0) \qquad \text{I.84.}$$

gde je F_μ neki kvadrivektor, takozvani kvadrivektor sile, ili sila Minkowskog, koja mora zavisiti od promenljivih analognih onima u klasičnoj mehanici. Kovarijantni oblik ove jednačine neposredno sledi iz toga što na obema stranama stoje vektori u svetu Minkowskog, a u graničnom slučaju $v/c \to 0$ prve tri jednačine prelaze u odgovarajuće jednačine klasične mehanike. Stoga se gornja jednačina naziva osnovna jednačina relativističke dinamike.

c./ <u>Transformacije dinamičkih veličina</u>

Na osnovu Einsteinove relacije :

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{I.85.}$$

možemo četvrtu komponentu kvadrivektora impulsa, odredjenu obrascem I.83., izraziti pomoću energije:

$$P_4 = \frac{i c m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{i}{c}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

tojest I.86.

$$P_4 = \frac{i}{c} E$$

na osnovu našeg dopunskog uslova dobijamo za kvadrivektor impulsa:

$$P_\mu = (p_x, p_y, p_z, \frac{i}{c} E) \qquad \text{I.87.}$$

što se može napisati u sažetijem obliku :

$$P_\mu = (\vec{P}, \frac{i}{c} E) \qquad \text{I.88.}$$

Odavde se vidi da su komponente impulsa i energije uzajamno povezane u jednu neraazdvojnu celinu. Kvadrat ovog vektora prema datim obrascima biće:

$$P_\mu^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + (\frac{i}{c} E)^2$$

tojest I.89.

$$P_\mu^2 = P^2 - \frac{E^2}{c^2}$$

./.

pa imamo :

$$P^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = \frac{m_o^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{m_o^2 c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = -m_o^2 c^2$$

ili

$$P_\mu^2 = -m_o^2 c^2 \qquad \text{I.90.}$$

što je invarijanta, jer je jednaka konstantnoj veličini. Iz poslednja dva obrasca sledi :

$$\frac{E^2}{c^2} - P^2 = m_o^2 c^2 \qquad \text{I.91.}$$

a otuda:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_o^2 c^4} \qquad \text{I.92.}$$

čime je energija čestice izražena kao funkcija njene sopstvene mase i impulsa.

Na osnovu opšteg zakona transformacije ma kog vektora možemo naći kako se transformišu i komponente vektora P_μ pri prelazu na drugi inercijalni sistem, koji se u odnosu na prvi kreće uniformno duž X ose brzinom u. Tako dobijamo:

$$P_x' = \frac{P_x + i\frac{u}{c} i\frac{E}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \; ; \; P_y' = P_y \; ; \; P_z' = P_z \; ; \; i\frac{E'}{c} = \frac{i\frac{E}{c} - i\frac{u}{c} P_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

tojest I.93.

$$P_x' = \frac{P_x - \frac{u}{c^2} E}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \; ; \; P_y' = P_y \; ; \; P_z' = P_z \; ; \; E' = \frac{E - u P_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Ovi obrasci predstavljaju transformacije komponenata impulsa i energije pri prelazu iz jednog inercijalnog sistema u drugi.

II S I M E T R I J A U K V A N T N O J M E H A N I C I

II.I. TIPOVI TRANSFORMACIJA

Mnogi kvantno-mehanički problemi su pojednostavljeni sa ispitivanjem ponašanja stanja i dinamički promenljivih sistema u odnosu na izvesne transformacije. Najjednostavnije transformacije su transformacije koordinata kao što su transformacije iz Dekartovih u sferne koordinate, ili kanonične transformacije. Te transformacije mogu biti ~~xx~~ primenjene na bilo koji sistem i korisne su ako transformišu Hamiltonijan ili jednačine kretanja u jednostavniju formu. Hamiltonijan menja svoju formu po takvim transformacijama i talasna funkcija pre i posle transformacije izgleda sasvim drugačija. Na primer linija $x=$ const ima različite fizičke osobine od linije $r=$ const. Tojest prava linija je moguća putanja za kretanje u odsustvu sile, dok druga to nemože biti. Talasna funkcija e^{ixk} je ravan talas, koji je moguće stanje za slobodnu česticu. Talasna funkcija e^{ikr} / a ne e^{ikr}/r / je svojstvena sferna funkcija, koja nije moguće stanje za slobodnu česticu. Linija $x =$ const. ~~je~~ i ravan talas e^{ikx} mogu biti predstavljeni u sfernim koordinatama. Medjutim, to predstavljanje ima drugačiju formu i uključuje sve polarne promenljive r, θ, i ϕ . Te koordinate i kanoničke transformacije su u vezi sa različitim opisima istih fizičkih stanja i istih dinamičkih promenljivih. Upotrebom tih transformacija ne menjamo stanja ili dinamičke promenljive, nego samo način na koji ih opisujemo.

Kanonične transformacije mogu biti predstavljene dejstvom unitarnog operatora e^{is} . Talasna funkcija se transformiše kao:

$$\psi' \to e^{is}\,\psi \qquad \text{II.1.}$$

Predstavljanje observable tim transformacijama je :

$$A' \to e^{is} A\, e^{-is} \qquad \text{II.2.}$$

Pošto se observable u fizici predstavljaju ermitskim operatorima, u specijalnom slučaju kad je A ermitski operator, takav je i $\grave{A}$. Iz ovoga sledi da su dva fizička sistema ekvivalentna ukoliko se medju njima može uspostaviti veza pomoću unitarnih transformacija.

./.

Kada je kanonična transformacija izvršena, stanja i operatori su transformisani. Dakle mada stanja i operatori menjaju svoju formu, svi matrični elementi ostaju invarijantni. Najvažnije kanonične transformacije su one, koje korespondiraju simetriji sistema. One uključuju translacije, rotacije, prostornu i vremensku inverziju. U odnosu na simetrične transformacije, koje ne zavise eksplicitno od vremena, forma Hamiltonijana i jednačine kretanja ostaju invarijantne. Suprotno slučaju transformacije sfernih koordinata već razmatranih, linije $x=$ const. i $y=$ const. predstavljaju moguće putanje kretanja u odsustvu sila i obe talasne funkcije e^{ikx} i e^{iky} predstavljaju ravne talase koji su moguća stanja kretanja kroz slobodnu česticu. Dakle rotacija za 90° oko z ose, koja transformiše x u y ne menja formu jednačina kretanja slobodne čestice, njenu moguću putanju kretanja ili svojstvene funkcije Hamiltonijana. Te transformacije mogu biti interpretirane na tri načina, kao transformacije koordinatnog sistema bez menjanja fizičkog sistema, kao transformacije fizičkog sistema bez menjanja koordinatnog sistema, ili kao transformacije fizičkog sistema i koordinatnog sistema. Ta tri načina interpretacije tih transformacija su predstavljene formalno, upotrebljavajući transformacije II.1. i II.2.

A. Fizički sistem je promenjen bez promene koordinatnog sisteme.

Talasna funkcija se menja saglasno sa II.1., a operatori su predstavljeni u istom koordinatnom sistemu i ne menjaju se. Matrični elementi operatora tada podležu transformaciji :

$$\langle \Psi' | A | \Psi \rangle \rightarrow \langle \Psi' e^{-iS} | A | e^{iS} \Psi \rangle = \langle \Psi' | e^{-iS} A e^{iS} | \Psi \rangle \qquad \text{II.3.}$$

Matrični elementi su promenjeni sa transformacijom, sem ako operator A. komutira sa transformacijom S.

B. Fizički sistem je ne promenjen, ali koordinatni sistem je promenjen.

Talasna funkcija ostaje ista, ali operatori su predstavljeni putem novog koordinatnog sistema i menjaju se prema obrascu II.2. Matrični elementi tada podležu transformaciji:

$$\langle \Psi' | A | \Psi \rangle \rightarrow \langle \Psi' | e^{iS} A e^{-iS} | \Psi \rangle \qquad \text{II.4.}$$

Ponovo matrični elementi su promenjeni sa transformacijom sem ako operator komutira sa transformacijom S.

./.

C. Fizički sistem i koordinatni sistem su promenjeni.

Talasne funkcije i operatori su transformisani sa jednačinama II.1. i II.2. Matrični elementi su tada ne promenjeni:

$$\langle \Psi' | A | \Psi \rangle \rightarrow \langle \Psi' e^{-is} | e^{is} A e^{-is} | e^{is} \Psi \rangle = \langle \Psi' | A | \Psi \rangle \qquad \text{II.5.}$$

To je upravo obična kanonična transformacija slično kao što je prelaz sa Dekartovih na sferne koordinate, koje nam dozvoljavaju proračun istih rezultata na različit način. Relacije II.3. i II.4. opisuju transformacije koje menjaju matrične elemente neke observable. Možemo se zapitati: kako se svaka pojedinačna observabla transformiše po datom transformacijom. Pod rotacijom napr., matrični elementi izvesnih operatora mogu biti invarijantni ili se mogu transformisati slično komponentama vektora ili tenzora. Ako je Hamiltonijan invarijentan u odnosu na neku transformaciju, tada je i Schrödingerova jednačina invarijentna, i transformacija opisuje simetriju sistema. Operator S je tada konstanta kretanja i definiše zakon konzervacije.

Izmedju te dva tipa transformacija nalaze se gradijentne transformacije. Slično koordinatnom ili kanoničnom transformisanju i različito od simetričnih transformacija, translacija i rotacija, gradijentna transformacija može samo biti interpretirana kao promena u opisu datog fizičkog stanja. Nemože biti interpretirana kao transfirmacija samog fizičkog stanja u drugo~~m~~.

Specijalna klasa simetričnih transformacija sa interesantnim osobinama su one, koje zavise eksplicitno~~m~~ od vremena, kao što su Galilean ili Lorentz transformacije. Te vremenski zavisne transformacije mogu biti interpretirane ili kao promena, izmedju dva koordinatna sistema, koji se kreću relativno jedan u odnosu na drugi, ili kao promena fizičkog sistema dajući mu brzinu. Jednačine II.1-5. sve pripadaju tom slučaju, ali operator S zavisi eksplicitno od vremena. Invarijentnost u odnosu na te transformacije znači u prvoj interpretaciji da su zakoni prirode isti za sve observable, koje se kreću relativno jedna u odnosu na drugu sa konstantnom brzinom. Druga interpretacija govori nam da bilo koje moguće stanje kretanja za sistem, možemo uspostaviti drugim mogućim stanjima kretanja, dajući sistemu kao celini dodatnu uniformnu brzinu. U kvantnoj mehanici poslednja interpretacija govori nam kako transformišemo stanje, koje je svojstvena funkcija Hamiltonijana u drugo stanje, koje je takodje svojstvena funkcija Hamiltonijana, ali sa različitim svojstvenim vrednostima.

II.II. KONTINUALNE TRANSFORMACIJE

Ove transformacije se dobijaju ponavljanjem delovanja infinitezimalnog operatora, koji je unitaran:

$$S = 1 - iA \qquad \text{II.6.}$$

gde $A \to 0$ i A je ermitski / observabla / operator. A se naziva generator infinitezimalne transformacije. Ako generator zadovoljava uslov:

$$[A, H] = 0 \qquad \text{II.7.}$$

tada je $\langle A \rangle$ konzervativna za sistem, odnosno konstanta kretanja. Ako A prikažemo u obliku:

$$A = G\,\delta\lambda \qquad \text{II.8.}$$

gde je $\delta\lambda \to 0$ realno, a $G = G^+$, onda takodje važi:

$$[A, H] = [G, H] = 0 \qquad \text{II.9.}$$

pa je i G konstanta kretanja.

II.III. DISKRETNE TRANSFORMACIJE

Kod ovih transformacija dvostruko primenjivanje operatora transformacije daje početno stanje :

$$SSAS^{-1}S^{-1} = A \qquad \text{II.10.}$$

što je ispunjeno ako je $S^2 = \hat{1}$, pa su suprotne vrednosti operatora S jednake ± 1. Sada je operator S unitaran i ermitski, pa je i samo S dinamička promenljiva. U tom slučaju je :

$$[S, \mathcal{L}] = [S, H] = 0 \qquad \text{II.11.}$$

tojest S je konstanta kretanja. Njegova sopstvena vrednost naziva se " dobar " kvantni broj, kao sopstvena vrednost svake konstante kretanja. Dve važne vrste diskretnih transformacija su :

a./ Prostorna inverzija $\vec{x} \to \vec{x}\,' = -\vec{x}$

b./ Vremenska inverzija $t \to t' = -t$

Postoji još jedna diskretna transformacija, koja ne zavisi od prostorno-vremenskih osobina i naziva se:

c./ Konjugacija naelektrisanja / koja pretvara česticu u njenu antičesticu/.

./.

a./ Parnost i prostorna inverzija.

Parnost ili operator prostorne inverzije P je definisan sa relacijom

$$P\psi(x,y,z)=\psi(-x,-y,-z) \tag{II.12.}$$

Za bilo koje stanje ψ kvantno mehaničkog sistema, možemo definisati drugo stanje sa operatorom parnosti II.12. Pogledajmo kako se razne fizičke veličine ponašaju u odnosu na ovu transformaciju. Impuls čestice je proizvod njene mase i brzine:

$$p = mv = m\dot{x} \tag{II.13.}$$

zbog toga se komponente impulsa menjaju pod ovom transformacijom saglasno sa

$$p \to -p \tag{II.14.}$$

sledi da se energija menja kao :

$$E \to E \tag{II.15.}$$

Ugaoni moment / $\vec{M} = \vec{x} \times \vec{p}$/ u odnosu na inverziju koordinata ostaje isti

$$\vec{M} \to \vec{M} \tag{II.16.}$$

takodje i spin čestice ostaje ne promenjen:

$$\sigma \to \sigma \tag{II.17.}$$

Četvoropotencijal elektromagnetnog polja menja se kao :

$$\vec{A} \to -\vec{A} \qquad A_4 \to A_4 \tag{II.18.}$$

sledi da električno polje menja znak, dok magnetno polje ostaje isto

$$\mathcal{E} \to -\mathcal{E} \quad ; \quad \mathcal{H} \to \mathcal{H} \tag{II.19.}$$

Veličine koje pri inverziji prostora menjaju znak su pseudoskalari i polarni vektori, dok veličine koje pri inverziji prostora ne menjaju znak su skalari i pseudo vektori.

Operator parnosti ima posebno značenje u fizičkim problemima ako je konstanta kretanja, tj. ako komutira sa Hamiltonijanom sistema:

$$[H,P] = 0 \tag{II.20.}$$

u tom slučaju parnost je očuvana i Hamiltonijan je invarijantan u odnosu na prostornu inverziju. Ako je bilo koje stanje ψ rešenje Schrödingerove jednačine, vremenski zavisno ili nezavisno, stanje $P\psi$ je takodje rešenje. Ako dva puta primenimo operator P dobijamo:

$$P^2|\Psi\rangle = |\Psi\rangle \qquad \text{II.21.}$$

Zaključujemo da su sopstvene vrednosti operatora $P = \pm 1$, tj.

$$P|\Psi\rangle = \pm|\Psi\rangle \qquad \text{II.22.}$$

gde je $|\Psi\rangle$ sopstveno stanje za P, a + odgovara parnoj parnosti, - odgovara neparnoj parnosti. Očuvanje parnosti pomaže u rešavanju Schrödingerove jednačine, zbog toga što možemo posmatrati istovremeno svojstvene funkcije od H i P. Ako izaberemo kao osnovne funkcije,za rešavanje Schrödingerove jednačine, niz funkcija, koje su već svojstvene funkcije od P, skraćujemo rad na pola, zato što Hamiltonijan nemože mešati parne i neparne stanja. Dokle god je $[H,P] = 0$ za totalni Hamiltonijan, uključujući sve perturbacije, nemože biti prelaza izmedju parnih i neparnih stanja, tj. parnost je očuvana u svim prelazima.

Takodje možemo klasifikovati operatore kao parne ili neparne u odnosu na parnost, saglasno da li komutiraju ili antikomutiraju sa P. Bilo koji operator A može biti pisan kao suma parnog dela A_+ i neparnog dela A_- :

$$A = A_+ + A_- \qquad \text{II.23.}$$

$$A_+ = \frac{1}{2}(A + PAP) \qquad \text{II.24.}$$

$$A_- = \frac{1}{2}(A - PAP) \qquad \text{II.25.}$$

Parni ili neparni operatori zadovoljavaju relacije:

$$PA_+P = A_+ \qquad \text{II.26.}$$

$$PA_-P = -A_- \qquad \text{II.27.}$$

1956.godine Lee i Yang su primetili da ne postoje nikakvi eksperimentalni dokazi za očuvanje P u slabim interakcijama. Md.Wu i saradnici su eksperimentisali sa kobaltom / β- raspad polarisanog Co^{60}/ i pokazali su da slabe interakcije nisu invarijantne u odnosu na ogledalsku sliku. Dakle, postoji narušavanje parnosti u slabim interakcijama, dok u jakim i elektromagnetskim interakcijama parnost se očuvava.

./.

II.b./I. INVERZIJA VREMENA

U formulaciji zakona prirode mi neizbežno nailazimo na problem izbora sistema reference; Sistem reference je, u stvari, konvencija koju mi udružujemo sa svakom tačkom dogadjaja /tj.odredjen položaj u trenutku vremena/. Prirodno moramo raditi sa četvorodimenzionalnim sistemom prostor-vreme. Pored prostorne inverzije treba razmatrati transformaciju vremenske inverzije:

$$\hat{x}_k = x_k$$

$$\hat{x}_4 = -x_4 \qquad \hat{t} = -t \qquad \text{II.28.}$$

Ova transformacija menja smer toka vremena, i iz toga takodje,pravac kretanja čestice, $p_k = -p_k$, i znak imaginarne komponente kvadrivektora. Kompleksna veličina prelazi u njoj konjugovano kompleksnu veličinu $\psi' = \psi^*$. Ostale fizičke veličine se ponašaju u odnosu na ovu transformaciju kao:

$$E \to E$$

$$\vec{M} \to -\vec{M}$$

$$\vec{A} \to \vec{A} \qquad A_4 \to -A_4 \qquad \text{II.29.}$$

Zakoni klasične mehanike i elektromagnetizma su invarijantni u odnosu na operaciju inverzije vremena, što znači da se sistem kreće unazad u vremenu, na isti način kao što se kreće unapred u vremenu. Operator inverzije vremena T, ne komutira sa operatorom angularnog momenta J, jer sa inverzijom vremena, pored izmene pravca impulsa čestice, anglarni moment takodje menja smisao. Otuda za spin , koji može da odredi angularni moment, dobijamo sledeću antikomutacionu relaciju:

$$TST^{-1} = -S \qquad \text{II.30.}$$

I zakoni kvantne mehanike su takodje invarijantni u odnosu na operaciju inverzije vremena. Pokažimo to na primeru nerelativističke vremenski zavisne Schrödingerove jednačine. Nemoguće je definisati operator T takav da je $T\psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r},-t)$. Medjutim ako posmatramo Schrödingerovu jednačinu i njenu kompleksnu konjugaciju :

$$H\psi(\vec{r},t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad \text{II.31.}$$

$$H^*\psi^*(\vec{r},t) = -i\hbar \frac{\partial \psi^*(\vec{r},t)}{\partial t}$$

./.

Ako poslednju jednačinu napišemo u obliku :

$$H^{*}\psi^{*}(\vec{r},t) = i\hbar \frac{\partial \psi^{*}(\vec{r},t)}{\partial(-t)} \qquad \text{II.32.}$$

Obzirom da je H realno, $H^{*} = H$. Dakle, $\psi^{*}(\vec{r},t)$ predstavlja sistem koji se kreće unazad u vremenu, na isti način kao što $\psi(\vec{r},t)$ opisuje sistem koji se kreće unapred u vremenu. Onda sledi, ako je $\psi(\vec{r},t)$ rešenje Schrödingerove jednačine, tada je $\psi'(\vec{r},t) = \psi^{*}(\vec{r},-t)$ takodje rešenje. Jednačina je zadovoljena ako pretpostavimo da je operator T takav da važi:

$$T\psi(\vec{r},t) = \psi^{*}(\vec{r},-t) \qquad \text{II.33.}$$

Ovako definisan operator T je uniteran i antilinearan. Operator T je još nazvan i antiunitaran. Osobina linearnog operatora je:

$$U(C_1\psi_1 + C_2\psi_2) = C_1U\psi_1 + C_2U\psi_2 \qquad \text{II.34.}$$

a za antiuniteran je:

$$T(C_1\psi_1 + C_2\psi_2) = C_1^{*}T\psi_1 + C_2^{*}T\psi_2 =$$

$$= C_1^{*}\psi_1^{*} + C_2^{*}\psi_2^{*} \qquad \text{II.35.}$$

a skalarni proizvod transformiše se kao:

$$(T\psi_1 T\psi_2) = (\psi_2\psi_1) = (\psi_1\psi_2)^{*} \qquad \text{II.36.}$$

Ovako definisan operator može da se napiše u obliku proizvoda dva operatora U i K

$$T = U \cdot K \qquad \text{II.37.}$$

gde je U uniteran, a K je operator, koji svaku veličinu menja u njoj kompleksno konjugovanu. Ako je sistem invarijentan u odnosu na T imamo da je:

$$THT^{-1} = H \qquad \text{II.38.}$$

U novije vreme je dokazano da se T narušava u slabim interakcijama / pogledaj II.V./

c./ Konjugacija naelektrisanja.

Posmatrajmo čestice koje imaju naboj Q, koji je strogo kvantiziran. Razmotrimo šta se dešava sa fizičkim stanjem čestice ako menjamo njeno naelektrisanje od Q u -Q / antičestica /. Uvedimo operator konjugacije naelektrisanja C za koji pišemo:

$$C|\Psi(Q)\rangle = |\Psi(-Q)\rangle \qquad \text{II.39.}$$

gde $|\Psi(Q)\rangle$ opisuje stanje čestice sa impulsom p i spinom S. Važno je da operator C komutira sa operatorom impulsa, energije i spinom. Sa druge strane konjugacija naelektrisanja dovodi do promene u znaku barionskog / leptonskog / broja, treće komponente izospina I_z i stranosti S. Pošto operator C komutira sa Hamiltonijanom

$$[C,H] = 0 \qquad CHC^{-1} = H \qquad \text{II.40.}$$

svojstvene vrednosti operatora C su " dobar "" kvantni broj za opisivanje stanja čestice / tj. takve svojstvene vrednosti su konstante kretanja / Operator C ne komutira sa operatorom naelekrisanja $\hat{Q}$ koji je definisan kao:

$$\hat{Q}|\Psi(Q)\rangle = Q|\Psi(Q)\rangle \qquad \text{II.41.}$$

Svojstvene vrednosti $\hat{Q}$ su brojne vrednosti naelektrisanja čestice. Za operator $\hat{Q}$ važe sledeće komutacione relacije:

$$[\hat{Q},H] = 0 \qquad \hat{Q}H\hat{Q}^{-1} = H \qquad \text{II.42.}$$

Oba operatora C i C^{-1} karakterišu supstituciju čestica-anti čestica /i obrnuto/ i operatori $\hat{Q}$ i C su povezani antikomutatorom :

$$C\hat{Q}C^{-1} = -\hat{Q} \qquad \text{II.43.}$$

U slučaju električno neutralne čestice $\hat{Q}$ i C očevidno komutiraju. Šta više, operator C ne komutira sa operatorom N/barionski broj/ stranošću S i sa trećom komponentom izospina I_z. To je bio razlog za uvodjenje G parnosti.

II. IV. CPT TEOREMA

Teorema koja uspostavlja vezu izmedju C, P i T u fizici elementarnih čestica naziva se Schwinger - Lüders - Paulieva teorema, ili CPT teorema. Prema toj teoremi Lagrangian interakcije za lokalno interegujuća polja, koja su hermitska i invarijantna u odnosu na prave Lorentzove transformacije, komutira sa bilo kojim od 6 operatora, koji mogu da se formiraju kao proizvod C,P i T u bilo kom redosledu. U novom fizičkom sistemu moraju da važe isti zakoni kao u prvobitnom.

./.

Može se desiti da neki oblici interakcije čestica nisu invarijentni prema posebnim transformacijama C,P ili T ili njihovim različitim kombinacijama CP,CT, ili PT, ove interakcije su medjutim invarijantne prema kombinovanoj CPT transformaciji. Od posledica CPT teoreme nabrajamo jednakost masa čestice - antičestice, jednakost vremena života za nestabilnu česticu i njenu antičesticu i suprotnu orijentaciju magnetnog momenta antičestice. Sve te karakteristike su eksperimentalno proverene. Landau je prvi ustanovio, da je na osnovu relativističke teorije polja moguće opisati takve interakcije, koje narušavaju bilo koju C,P ili T ili neku kombinaciju dve od njih. Medjutim, nemoguće je da relativistička invarijantna teorija narušava njihov proizvod CPT. Takva teorija, koja bi narušavala proizvod CPT morala bi da bude veoma različita od bilo koje današnje šeme.

II. V. NARUŠENJE T INVARIJANTNOSTI

Do sada su P i C transformacije posmatrane odvojeno, ili u kombinaciji sa CPT. Na osnovu postojećih eksperimentalnih rezultata može se zaključiti da ne postoji narušavanje C i P, odvojeno u jakim elektromagnetnim interakcijama. Za slabe interakcije ustanovljena je neinvarijantnost u odnosu na C i P. Zbog toga je zgodno postaviti pitanje: Kako se slabe interakcije ponašaju pri kombinovanoj operaciji CP. Medjutim, 1956.-1964.god. na osnovu eksperimentalnih rezultata utvrdjeno je da se CP narušava u raspadu neutralnog K mezona. Pošto predpostavljamo invarijantnost CPT, /jer je nemoguće formulisati relativističku kvantno-mehaničku teoriju,koja ne bi uključivala i CPT invarijantnost/, onda i T mora biti narušeno. Neinvarijantnost T je i direktno eksperimentalno potvrdjena. Narušenje T invarijantnosti u raspadu neutralnog K mezona biće ovde kratko opisano. Kaoni se proizvode u jakim interakcijama sudarima hadrona / pod imenom hadrona podrazumevaju se jako interagujuće čestice: barion, mezon ili antibarion/. Dva tipa neutralnih kaona se proizvode, K^0 sa stranošću +1 i $\bar{K}^0$ sa stranošću -1. U odsustvu slabih interakcija, mogu biti stabilne i imati istu masu. Efekti slabe interakcije su dvostruki: One mešaju dva stanja K^0, $\bar{K}^0$ sa rezultujućim prelazima izmedju njih / napomena: stranost se ne očuvava u slabim interakcijama/ i one su uzrok raspada neutralnih kaona u pione i/ili leptone.

./.

U opšte stanje neutralnog kaona može biti pisano:

$$|\Psi\rangle = a_1|K^\circ\rangle + a_2|\bar{K}^\circ\rangle \qquad \text{II.44.}$$

amplitude a_1, a_2 menjaju se sa vremenom saglasno sa nizom linearnih jednačina koje mogu biti pisane u matričnoj formi:

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{II.45.}$$

F_{ij} su kompleksne konstante. Matrica $/F_{ij}/$ ima dve kompleksne svojstvene vrednosti $m_S + i\gamma_S/2$, $m_L + i\gamma_L/2$. Odgovarajući svojstveni vektori definišu stanja kao-na $|K_S^\circ\rangle$, $|K_L^\circ\rangle$ čija je vremenska zavisnost eksponencialna :

$$|K_S^\circ\rangle \exp(-im_S t - \tfrac{1}{2}\gamma_S t)$$

$$|K_L^\circ\rangle \exp(-im_L t - \tfrac{1}{2}\gamma_L t) \qquad \text{II.46.}$$

Ta su svojstvena stanja raspada, sa masama i vremenima života date respektivno sa $/\hbar = c = 1/$

$$m_S \simeq m_L \simeq 498\ MeV, \quad m_L - m_S = 3{,}4\cdot 10^{-12} MeV = 0{,}54\cdot 10^{10}\ s^{-1}$$

$$\gamma_S^{-1} = 0{,}86\cdot 10^{-10}\ s, \quad \gamma_L^{-1} = 0{,}52\cdot 10^{-7}\ s \qquad \text{II.47.}$$

K_S° je kratko živeći neutralni kaon, K_L° je dugoživeći neutralni kaon. K_S° raspadi su obilni sa $\pi^+\pi^-$. Otkriće 1964. da K_L° raspad sadrži 0,2% $\pi^+\pi^-$, daje razlog za jednostavno objašnjenje da je CP invarijantnost narušena u raspadu neutralnog kaona. Zaista, $\pi^+\pi^-$ stanje raspada ima CP = 1, i pod CP invarijantnošću jedno od stanja $K_{S,L}^\circ$ mora imati CP = 1, a drugo CP = -1. Iz merenja broja raspada za različite mešavine K°, $\bar{K}^\circ$, možemo dobiti informaciju o svim elementima matrice $/F_{ij}/$, tako na primer :

i./ T invarijantnost upućuje da je $|F_{12}| = |F_{21}|$

ii./ CPT invarijantnost upućuje da je $F_{11} = F_{22}$

iii./ CP invarijantnost upućuje da je $F_{11} = F_{22}$ i $|F_{12}| = |F_{21}|$

Medjutim, eksperimentalno je utvrdjeno da je $|F_{12}| \neq |F_{21}|$, više precizno pronadjeno je:

$$|F_{12}| - |F_{21}| \simeq 10^{-3}\,(|F_{12}| + |F_{21}|)$$

./.

dokazujući da je T narušeno / i potvrdjujući CP narušavanje /. Eksperimentalno je potvrdjeno da je $F_{11} = F_{22}$, tj. CPT invarijantnost. Veruje se da su za narušavanje T invarijantnosti odgovorne neke veoma slabe sile.

II. VI. IZOTOPNI SPIN I IZOTOPNI MULTIPLETI

a./ Izotopni spin :

Pojam izotopnog spina I/ili izospina/ uveo je Heisenberg, a zajedno sa njim i pojam izotopnog prostora, koji predstavlja poseban apstraktni prostor. Pošto proton i neutron imaju približno iste mase, i u beta raspadu prelaze jedan u drugi, Heisenberg je došao na ideju da ih predstavi kao jednu česticu sa dva različita stanja. Nukleoni se u izotopnom prostoru predstavljaju vektorima. Radi uspostavljanja simetrije izmedju protona i neutrona kao čestica istih vrsta, ali različitog naelektrisanja, uzima se da su to iste čestice sa različitom trećom komponentom I_z.

Sile koje vladaju medju protonima i neutronima /jake interakcije / ne zavise od naelektrisanja, i iste su za p-p, p-n, n-n. One su i simetrične u odnosu na naboj / što sledi iz nezavisnosti sila od naboja/ pa su sile izmedju p-p iste kao i izmedju n-n. Nezavisnost nuklearnih sila od naelektrisanja može da se iskaže u formi zakona konzervacije, prema kome nuklearne interakcije zavise samo od izotopnog spina I, a ne zavise od projekcije treće komponente I_3. To znači, da izotopni spin I, može da rotira u izotopnom prostoru i da to ne utiče na interakciju. Invarijantnost nuklearnih interakcija prema rotaciji izospina ekvivalentna je sa konzervacijom izospina. Tojest kao što konzervacija momenta impulsa sledi iz invarijantnosti sistema prema rotaciji u običnom prostoru, tako konzervacija izotopnog spina I proizilazi iz invarijantnosti u odnosu na rotaciju u izotopnom prostoru. Konzervacija izospina važi za jake interakcije, a ne važi za slabe i elektromagnetne interakcije. Jasno da unutar okvira izotopske invarijantnosti jake interakcije, nemoguće je razlikovati izmedju protona i neutrona. To nas podseća na degeneraciju stanja čestice, koja ima spin i magnetni moment, dokle god je magnetno polje isključeno. Proton i neutron su opisani sa izvesnom funkcijom ψ, koja ima dve komponente, proton i neutron komponentu, upravo kao što čestica sa spinom 1/2 ima dve komponente +1/2 i -1/2 duž z ose.

./.

Ako ne postoji interakcija da možemo razlikovati izmedju ta dva stanja, sistem je degenerisan. Ako je elektromagnetna interakcija uključena, koja je različita za proton i neutron, onda je otklonjena izotopska degeneracija, kao što uključujući magnetno polje otklanjamo spin degeneraciju za česticu sa spinom 1/2. Uvodjenje dvokomponentnog spinora ψ dozvoljava nam da upotrebimo sve matematičke metode za nerelativistički spin. τ matrice, koje deluju na spinor ψ su iste kao Paulijeve matrice:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{II.48.}$$

Nekad je pogodnije koristiti sledeću kombinaciju matrica τ_1 i τ_2 :

$$\tau^{\pm} = 1/2\,(\tau_1 \pm i\,\tau_2) \qquad \text{II.49.}$$

gde je :

$$\tau^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{II.50.}$$

U čemu je preimućstvo u korišćenju matrica τ^+ i τ^- videćemo ako razmotrimo delovanje τ^+ i τ^- na spinor ψ :

$$\begin{aligned}
&\tau^{+}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} && \tau^{+}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\tau^{+} n = p && \tau^{+} p = 0 \\
&\tau^{-}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \tau^{-}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\tau^{-} n = 0 && \tau^{-} p = n
\end{aligned} \qquad \text{II.51.}$$

Vidimo da matrica τ^+ transformiše neutron u proton,dok τ^- transformiše proton u neutron.

b./ Izotopni multipleti :

Bilo je mnogo pokušaja da se velika familija jako interagujućih čestica svede na minimum fundamentalnih. Jedan od najekonomičnijih modela tog tipa bio je onaj koga je 1956. pretpostavio japanski fizičar Sakata. U Sakata modelu, fundamentalne čestice su tri bariona : proton p, neutron n, i lambda hiperon λ^0, i odgovarajući antibarioni: antiproton $\bar{p}$, antineutron $\bar{n}$ i antilambda hiperon $\bar{\lambda}$. Dakle umesto više nego dvadeset metastabilnih /metastabilne čestice - raspad po slaboj i elektromagnetnoj interakciji / mezona i bariona i preko dvesto eksitiranih čestica- rezonanci /eksitirane čestice - raspad po jakoj interakciji /, model sadrži tri fundamentalne čestice. Jedan od prvih uspeha tog modela bio je da je mogao jednostavno objasniti klasifikaciju jako interagujućih čestica- takozvanu šemu izotopskih multipleta, datu od Gell-Man i Nishijima nekoliko godina ranije. Znamo da su mezoni, kao i barioni svrstani u nekoliko grupa, koje su nazvane izotopni multipleti. Naziv izotopni multipleti možda nije baš najsrećnije izabran, jer čestice koje pripadaju multipletu su izobari a ne izotopi, pošto one imaju istu masu a različito naelektrisanje. Otuda različite čestice, koje pripadaju datom multipletu mogu biti razmatrane kao različito naelektrisana stanja iste čestice. Dakle, proton i neutron predstavljaju dva naelektrisana stanja nukleona, $\Sigma^+, \Sigma^-, \Sigma^0$ predstavljaju naelektrisana stanja Σ hiperona, itd. Za opisivanje izotopnog multipleta pogodno je upotrebiti izotopni spin.

Broj N čestica u datom multipletu je predstavljen direktno putem izotopnog spina I, koji karakteriše taj multiplet :

$$N = 2I+1 \qquad \text{II.52.}$$

Izotopni spin za Λ hiperon jednak je nuli, izotopni spin za K mezone, nukleone i Ξ hiperone je 1/2, a za π mezone i Σ hiperone je 1. Čestice koje pripadaju datom multipletu imaju različite vrednosti projekcije izotopnog spina na z osu u izotopnom prostoru. Dakle, proton i neutron imaju respektivno, $I_3 = +1/2$ i $I_3 = -1/2$, dok za π^+, π^0, π^- mezoni imaju respektivno $I_3 = 1$, $I_3 = 0$ i $I_3 = -1$. Električni naboj Q čestice, njen barionski broj N i treća komponenta izotopnog spina odredjuje njenu stranost S:

$$Q = I_3 + N/2 + S/2 \qquad \text{II.53.}$$

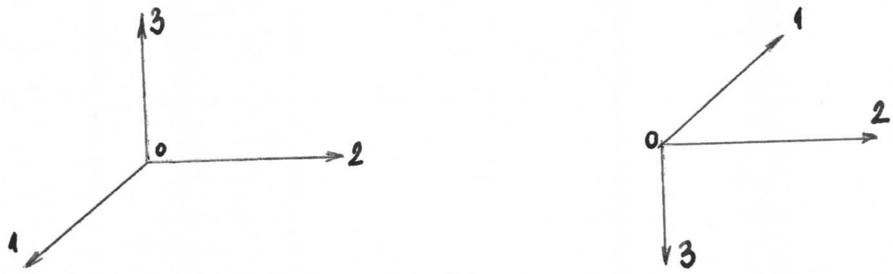
II. VII. G - PARNOST

U v o d :

Posmatrajmo rotaciju u izotopnom spin prostoru za 180° oko druge ose sl. 1 Obeležićemo tu operaciju sa T_2.

./.

Proučićemo ponašanje izotopnog spinora pod tom operacijom :



Slika 1

Izospinor je dat kao:

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{za proton}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{za neutron} \qquad \text{II.54.}$$

Pod rotacijom Ψ prelazi u Ψ' kao:

$$\Psi \to \Psi' = i\tau_2 \Psi$$

$$\bar{\Psi} \to \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}(-i\tau_2) \qquad \text{II.55.}$$

Pošto je $\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ a $\tau_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vidimo da izotopni skalar $\bar{\Psi}\Psi$ pod T_2 rotacijom ostaje isti. Dalje:

$$i\tau_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad i\tau_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1\,0)(-i\tau_2) = -(0\,1) \qquad (0\,1)(-i\tau_2) = (1\,0) \qquad \text{II.56.}$$

Dakle, pod operacijom T_2 imamo :

$$p \to -n \qquad n \to p$$

$$\bar{p} \to -\bar{n} \qquad \bar{n} \to \bar{p} \qquad \text{II.57.}$$

- G - parnost :

G-parnost se definiše kao proizvod dva već poznata operatora C i T_2

$$G = CT_2 = T_2C = Ce^{i\pi I_2} \qquad \text{II.58.}$$

./.

On predstavlja operaciju konjugacije naelektrisanja sa simultanom ROTACIom osa u formalnom izospinskom prostoru. Sve čestice, koje obrazuju izotopni multiplet su okarakterisane odredjenom svojstvenom vrednošću operatora G. Operator G komutira sa operatorom I_3 za čestice koje imaju barionski broj $N = 0$ i stranost $S = 0$. Svojstvene vrednosti G jesu karakteristični kvantni brojevi čestica.

$$[G, I_3] = 0 \qquad \text{ako je } N = S = 0 \qquad \text{II.59.}$$

Obzirom da je I_2 očuvano samo u jakim interakcijama, to isto važi i za G. U slučaju π mezona imamo:

$$G\pi = G\begin{pmatrix}\pi^+\\ \pi^0\\ \pi^-\end{pmatrix} = CT_2\begin{pmatrix}\pi^+\\ \pi^0\\ \pi^-\end{pmatrix} = -C\begin{pmatrix}\pi^-\\ \pi^0\\ \pi^+\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\pi^+\\ \pi^0\\ \pi^-\end{pmatrix} = -\pi \qquad \text{II.60.}$$

Dakle je π mezon sopstveno stanje za G, sa sopstvenom vrednošću -1. Odredjivanje G vrši se za neutralna stanja kada je $I_3 = 0$ pa je C dobro odredjeno i dovoljno je posmatrati samo uticaj T_2. Za sistem čestica operator G je dat kao:

$$G = G_a \cdot G_b \cdot G_c \ \ldots\ldots \qquad \text{II.61.}$$

Za sistem od n - piona G parnost je :

$$G_{n\pi} = (-1)^n \qquad \text{II.62.}$$

Pošto je C "dobar" kvantni broj za sistem čestica koje imaju $N = S = Q = 0$, to je takodje moguće definisati G parnost za elektromagnetni kvant, foton. Pošto promena u znaku naelektrisanja menja smer električnog polja, imamo da je

$$C_\gamma = -1 \qquad \text{II.63.}$$

i za sistem od n-fotona imamo po analogiji sa sistemom piona :

$$C_{n\gamma} = (-1)^n \qquad \text{II.64.}$$

Za sistem sastavljen od čestice i antičestice, gde je $N = S = Q = 0$ vrednost C je izvedena pomoću interpromene stanja čestica-antičestice po svim prostornim stanjima orbitalnog momenta l i spina s :

$$C = (-1)^{l+s} \qquad \text{II.65.}$$

gde je l orbitalni moment čestice - antičestice a s je totalni rezultujući spin. Ovde pored različitih stanja orbitalnog momenta l i spina s , moramo da uzmemo u obzir različito stanje izospina I. Operator G takodje zamenjuje operat C u izrazu II.65. pa imamo:

$$G = (-1)^{l+s+I} \qquad \text{II.66.}$$

Konzervacija G uslovljava izvesna selekciona pravila, na pr., za česticu koja se raspada jakom interakcijom u paran broj π nemože da se raspada i u neparan broj π , i obratno, pošto je $G_{n\pi} = (-1)^n$ Kreacija π iz $\bar{p}p$ zavisi od vrednosti l+s+I za $\bar{p}p$. Ako formiramo izraz G za sistem :

$$\bar{p} + p \to n\pi \qquad \text{II.67.}$$

za levu i desnu stranu imamo :

$$G(\bar{p}p) = (-1)^{l+s+I}$$

$$G_{n\pi} = (-1)^n \qquad \text{II.68.}$$

Pa zbog očuvanja G treba da bude l+s+I= n, gde je n parno ili neparno u zavisnosti od n. Dakle, za l+s+I neparno dobija se samo neparan broj π mezona, dok za l+ s + I parno, samo paran broj . Tako na primer za anihilaciju sistema proton - antiproton u inicijalnim stanjima $^3S_0(l=0, s=0, I=0)$, $^1S_0(l=0, s=0, I=0)$ i $^1S_1(l=0, s=0, I=1)$ je praćena emisijom sledećeg broja piona:

$$\begin{array}{ll} ^3S_0(\bar{p}p) & 3,5\ldots\ldots \\ ^1S_0(\bar{p}p) & 2,4\ldots\ldots \\ ^1S_1(\bar{p}p) & 3,5\ldots\ldots \end{array} \qquad \text{II.69}$$

Ova pravila, koja se dobijaju iz zakona održanja C i G parnosti, su eksperimentalno prilično dobro potvrdjena.

II. VIII. S - STRANOST

Pojam stranosti su uveli Gell-Man i ~~Miskyma~~ Nishijima /takodje i pojam hiper-naelektrisanja Y koje je jednako zbiru barionskog broja i stranosti/. Strane čestice su K-mezoni i hiperoni. Ove čestice imaju osobinu da im je vrlo kratko vreme stvaranja a dug poluživot.

./.

stvaraju se uvek u parovima. Za njih se naelektrisanje, u jedinicama naelektrisanja elektrona izražava kao:

$$Q = I_3 + \frac{N+S}{2} \qquad \text{II.70.}$$

gde je S stranost, a za razne čestice ima sledeće vrednosti:

$$S = +1 \quad \text{ZA} \quad K\,(K^+, K^0)$$

$$S = -1 \quad \text{ZA} \quad \Lambda^0, K^-, \bar{K}^0, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$$

$$S = -2 \quad \text{ZA} \quad \Xi^0, \Xi^-$$

$$S = -3 \quad \text{ZA} \quad \Omega^- \qquad \text{II.71.}$$

Antičestice imaju stranost suprotnog znaka od odgovarajuće čestice. Tako na primer K i K^0 imaju stranost +1, a K^- i $\bar{K}^0$ imaju stranost -1 Stranost ima smisla definisati samo za čestice koje učestvuju u jakim interakcijama, koje očuvavaju stranost. Pošto je raspad stranih čestica slaba interakcija, u tom slučaju stranost je narušena. Stranost je takodje aditivni kvantni broj i već samom analizom stranosti u jakim i elektromagnetnim interakcijama možemo da zaključimo da li je reakcija moguća ili ne. Tako na primer proučavanjem raspada u kojima učestvuju K mezoni i barioni, došlo se do zaključka da se oni mogu opisati uvodjenjem konzervacije stranosti S.

III SIMETRIJA U KLASIČNOJ TEORIJI POLJA

III. I. JEDNAČINA KLASIČNOG RELATIVISTIČKOG POLJA

Ranije smo ispitivali mehanički problem n- tela, koji je sadržao n-pari koordinata / q_i, p_i /. Ako broj čestica raste beskonačno, treba da opišemo sistem sa kontinuiranom funkcijom umesto sa konačnim nizom koordinata. Ta funkcija je nazvana funkcija polja. Pod pojmom polja podrazumeva se fizički sistem sa beskonačnim brojem stepeni slobode. Kao što smo iz principa najmanjeg dejstva dobili jednačine kretanja klasičnog mehaničkog sistema, sada ćemo na sličan način formirati jednačine kretanja polja. Pri tome koordinate q_i za sistem sa konačnim brojem stepeni slobode prelaze u funkciju polja $u_i/x/$, gde je x kontinuirani indeks a i diskontinuirani indeks, jer funkcija polja može da ima više od jedne komponente. Princip najmanjeg dejstva postaje:

$$\delta S = \delta \int_R \mathcal{L}(x)\, d^4x = 0 \qquad \text{III.1.}$$

gde je $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}\left\{u_i(x), \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_\mu}\right\}$ gustina Lagrangijana, μ (1,2,3,4)
Varijacija se sprovodi pri fiksiranim granicama integracije, tako da imamo

$$\delta S = \delta \int_R \mathcal{L}(x)\, d^4x = \int_R \delta \mathcal{L}(x)\, d^4x =$$

$$= \int_R \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right) \right\} d^4x \qquad \text{III.2.}$$

Posle zamene operacije diferenciranja i variranja drugi član integrala III.2. ima oblik

$$\int_R \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)} \delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right) d^4x = \int_R \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)} \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\delta u_i)\, d^4x =$$

$$= -\int_R \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}\right] \delta u_i\, d^4x + \int_R \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)} \delta u_i\right] d^4x \qquad \text{III.3.}$$

Poslednji integral po nekom četvorodimenzionalnom prostoru R primenom Gausove teoreme možemo pretvoriti u integral po hiperpovršini, koja taj prostor okružuje :

./.

$$\int_R \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}\delta u_i\right] d^4x = \int_\sigma d\sigma_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}\delta u_i\right] \qquad \text{III.4.}$$

gde je $d\sigma_\mu$ projekcija elementa površine, normalno na odgovarajuće koordinatne ose četvorodimenzionalnog prostora Minskowskog.

$$d\sigma = \{d\sigma_\mu\} = \{d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3, d\sigma_4\} =$$

$$= \{dx_2, dx_3, dx_4, dx_1 dx_3 dx_4, dx_1 dx_2 dx_4, \tfrac{1}{i} dx_1 dx_2 dx_3\} \qquad \text{III.5.}$$

Pošto je varijacija funkcije $u_i/x/$ na površini σ svuda jednaka nuli, integral III.4. takodje je jednak nuli. I od integrala III.3. ostaje:

$$\int_R \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)} \delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right) d^4x = -\int_R \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}\right]\delta u_i\, d^4x \qquad \text{III.6.}$$

Princip najmanjeg dejstva sada ima oblik :

$$\delta S = \int_R \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}\right]\right\}\delta u_i\, d^4x = 0 \qquad \text{III.7.}$$

Pošto je domen integracije R proizvoljan i različit od nule, dobijamo da je podintegralni izraz :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}\right\} = 0 \qquad \text{III.8.}$$

a to je Euler-Langrangeeva jednačina polja.

III. II. JEDNAČINA HAMILTONA ZA NEPREKIDNI SISTEM

Metod Hamiltona, kao i metod Lagranga, može biti uopšten za slučaj neprekidnog sistema. Posmatrajmo sistem materijalnih tačaka sa masama Δ m, na rastojanjima Δ x, i vezanih medjusobom elastičnim silama. Funkcija Lagranga za taj sistem može biti napisana u obliku:

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta x\, L_i \qquad \text{III.9.}$$

Primenom koordinata u tački i sa $u_i/x/$, uopšteni impuls ima oblik:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} = \Delta x \frac{\partial L_i}{\partial \dot{u}_i} \qquad \text{III.10.}$$

a funkcija Hamiltona za taj sistem ima formulu:

$$H = \sum_i p_i \dot{u}_i - L = \sum_i \Delta x \left\{ \frac{\partial L_i}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i - L_i \right\} \qquad \text{III.11.}$$

Prelazom na granični slučaj kad $\Delta x \to 0$, $L_i \to L$, $u_i \to u/x/$ dobijamo:

$$H = \int dx \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} - L \right\} \qquad \text{III.12.}$$

Pri tom umesto impulsa p_i, koji pri $\Delta x \to 0$ saglasno sa III.10. takodje teži nuli, uvodimo takozvanu gustinu impulsa π, datu u obliku :

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \qquad \text{III.13.}$$

Sada funkciju Hamiltona za jednodimenzioni neprekidni sistem možemo opisati kao :

$$H = \int dx\,(\pi \dot{u} - L) = \int dx\, \mathcal{H} \qquad \text{III.14.}$$

Veličinu $\mathcal{H} = \pi \dot{u} - L$ nazivamo gustina Hamiltonijana. Razmotrimo rezultat kada je $u_s = u_s\ /x_k, t/$, tada je

$$H = \iiint \mathcal{H}\, dx_1 dx_2 dx_3 dt \qquad \text{III.15.}$$

gde je

$$\mathcal{H} = \sum_s \pi_s \dot{u}_s - L$$

a

$$\pi_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_s}$$

Pri tom je gustina Hamiltonijana funkcija uopštenih koordinata $u_s/x_k, t/$, gustina kanoničnih impulsa $\pi_s(x_k, t)$, izvoda $\frac{\partial u_s(x_k,t)}{\partial x_i}$ i vremena t, tj.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}\left\{ u_s(x_k,t), \pi_s(x_k,t), \frac{\partial u_s}{\partial x_i}, t \right\} \qquad \text{III.16.}$$

Pomoću principa najmanjeg dejstva možemo dobiti jednačine kretanja u kanoničnoj formi za neprekidni sistem. Princip najmanjeg dejstva u tom slučaju je

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2}\!\!\iiint \left\{ \sum_s \pi_s \dot{u}_s - \mathcal{H} \right\} dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0 \qquad \text{III.17.}$$

./.

Posle variranja pod znakom integrala dobija se :

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint \sum_s \Big\{ \dot{u}_s \delta\pi_s + \pi_s \delta\dot{u}_s - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_s}\delta u_s - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial \pi_s}\delta\pi_s -$$

$$- \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\right)} \delta\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\right)\Big\} dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0 \qquad \text{III.18.}$$

Upotrebićemo sledeće transformacije :

$$\int_{t_1}^{t_2} \pi_s \delta\left(\frac{du_s}{dt}\right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\pi}_s \delta u_s dt$$

$$\int \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right)} \frac{d}{dx_j}(\delta u_s) dx_j = - \int \frac{d}{dx_j}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right)}\right)\delta u_s dx_j \qquad \text{III.19.}$$

gde je korišćeno, da se varijacija vrši pri fiksiranju t i x_j / zahvaljujući čemu se varijacija i diferenciranje po x_j i t moguzameniti/, a takodje i , što je na granicama integracije / po vremenu i po prostornim koordinatama x_k / veličina δu_s jednaka nuli. Uslov ekstremuma za dejstvo ima oblik / $d^3x = dx_1 dx_2 dx_3$/ :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\iiint_V \sum_s \Big\{ \left(\dot{u}_s - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_s}\right)\delta\pi_s -$$

$$- \left[\dot{\pi}_s + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_s} - \sum_{j=1}^{3}\frac{d}{dx_j}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right)}\right)\right]\delta u_s\Big\} d^3x dt \qquad \text{III.20.}$$

Taj uslov je ispunjen za ma koje δu_s i $\delta\pi_s$, pa imamo :

$$\dot{u}_s = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_s} \; ; \quad \dot{\pi}_s = - \left\{\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_s} - \sum_{j=1}^{3}\frac{d}{dx_j}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right)}\right)\right\} \qquad \text{III.21.}$$

Jednačine III.21. predstavljaju Hamiltonove jednačine za neprekidni sistem.

III. III. PRINCIPI INVARIJANTNOSTI I ZAKONI KONZERVACIJE

TEOREMA N O E T H E R

Teorema Nöther je fundamentalna teorema koja uspostavlja vezu medju svojstvima simetrije, odakle proizilaze zakoni konzervacije. Teorema Nöther iz rezultata invarijantnosti u odnosu na izvesne transformacije,daje matematičku formu zakona konzervacije.

Po toj teoremi, dejstvo je invarijantno u odnosu na kontinualne Lorentzove transformacije.

$$\delta S = \delta \int_R d^4x \mathcal{L} = \delta \int_{R'} d^4x' \mathcal{L}' = 0 \qquad \text{III.22.}$$

a./ Varijacija funkcije polja

Posmatrajmo beskonačno malu transformaciju:

$$x_\mu \to x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu = (I + \delta\omega)_{\mu\nu} x_\nu = x_\mu + \delta x_\mu \qquad \text{III.23.}$$

Priraštaj koordinate δx_μ, odredjuje matrica $\delta\omega$, koji možemo opisati u obliku:

$$\delta x_\mu = (\delta\omega)_{\mu\nu} x_\nu = \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \delta\omega_\alpha I_\alpha\right)_{\mu\nu} x_\nu \qquad \text{III.24.}$$

ili

$$\delta x_\mu = \sum_{\alpha=1}^{s} (I_\alpha)_{\mu\nu} x_\nu \delta\omega_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s} X_{\mu\alpha} \delta\omega_\alpha \qquad \text{III.25.}$$

gde je $\delta\omega_\alpha$ beskonačno mali parametar transformacije, broj kojih je ravan s /α = 1,2....s/ a I_α -odgovarajući infinitezimalni operator grupe. Osim toga izraz III.25. odredjuje parametru $\delta\omega_\alpha$ matrične koeficijente:

$$X_{\mu\alpha} = (I_\alpha)_{\mu\nu} x_\nu \qquad \text{III.26.}$$

Posmatrajmo sada beskonačno malu transformaciju funkcije polja:

$$u_i(x) \to u'_i(x') = \sum_{j=1}^{n} (J + \delta\Omega)_{ij} u_j(x) = u_i(x) + \delta u_i(x) \qquad \text{III.27.}$$

gde je J jedinična matrica n-reda, a $\delta\Omega$ -matrica transformacije koja je pridružena parametru $\delta\omega_\alpha$. Po analogiji sa slučajem transformacije predstavljene grupom Lorentza možemo napisati:

$$\delta u_i(x) = \sum_{j=1}^{n} (\delta\Omega)_{ij} u_j(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{s} (\delta\omega_\alpha J_\alpha)_{ij} u_j(x) \qquad \text{III.28.}$$

ili

$$\delta u_i(x) = \sum_{\alpha=1}^{s} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (J_\alpha)_{ij} u_j(x) \right\} \delta\omega_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s} Y_{i\alpha} \delta\omega_\alpha \qquad \text{III.29.}$$

gde je sa $Y_{i\alpha}$ označeno :

$$Y_{i\alpha} = \sum_{j=1}^{n} (J_\alpha)_{ij} u_j(x) \qquad \text{III.30.}$$

./.

gde je J_α predstavlja infinitezimalni operator razmatrane grupe transformacija u prostoru funkcije $u_i(x)$. Varijacija funkcije polja je:

$$\delta u_i = u_i'(x') - u_i(x) \qquad \text{III.31.}$$

Funkcija polja $u_i(x)$ zadovoljava jednačinu polja:

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}\right\} = 0 \qquad \text{III.32.}$$

Sa tačke gledišta Lagrange formalizma geometrijska interpretacija funkcije $u_i(x)$ može se čitati kao funkcija:

$$u(x) = \left\{u_i(x)\right\} = \left\{u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)\right\} \qquad \text{III.33.}$$

uopštenih koordinata u nekom n-dimenzionom konfiguracionom prostoru, koja predstavlja neku odredjenu višedimenzionu krivu. Prirodno, geometrijska forma te krive nemože zavisiti od izbora koordinatnog sistema. To znači, da funkcija III.33. kao i funkcija koja je dobijena posle transformacije :

$$u'(x') = \left\{u_i'(x')\right\} = \left\{u_1'(x'), u_2'(x'), \ldots, u_n'(x')\right\} \qquad \text{III.34.}$$

opisuju jednu te istu geometrijsku krivu. Na osnovu toga varijaciju III.31. pišemo u obliku :

$$\delta u_i = u_i'(x') - u_i(x) = [u_i'(x') - u_i(x')] +$$

$$+ [u_i(x') - u_i(x)] = \bar{\delta} u_i(x') + \bar{\bar{\delta}} u_i(x) \qquad \text{III.35.}$$

Jasno, funkcije $\overset{\bullet}{u}_i(\bar{x})$ i $u_i(\bar{x})$ su različite po obliku analitičke zavisnosti od koordinata $\bar{x}$. Izraz:

$$\bar{\delta} u_i(x') = u_i'(x') - u_i(x') \qquad \text{III.36.}$$

možemo interpretirati kao izmenu forme krive, uslovljenu izmenom oblika funkcija $(u_i \to \overset{\bullet}{u}_i)$ i prelazom od koordinata x ka $\bar{x}$, što je beskonačno mala promena:

$$\bar{\bar{\delta}} u_i(x) = u_i(x') - u_i(x) = u_i(x+\delta x) - u_i(x) \qquad \text{III.37.}$$

neposredno vezana sa izmenom argumenta jedne te iste funkcije

./.

/x→ x̂ /, odredjenu transformacijom III.23. Ograničavajući se na članove prvog reda dobijamo:

$$\bar{\bar{\delta}} u_i(x) = u_i(x) + \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_\mu}\delta x_\mu - u_i(x) = \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_\mu}\delta x_\mu \qquad \text{III.38.}$$

za varijaciju III.36. možemo dobiti pogodniji oblik ako transformišemo izraz III.35. kao:

$$\bar{\delta} u_i(x') = \delta u_i(x) - \bar{\bar{\delta}} u_i(x) \qquad \text{III.39.}$$

ili ako napišemo $\bar{\delta} u_i/\hat{x}/$ kao:

$$\bar{\delta} u_i(x') = \bar{\delta} u_i(x+\delta x) \simeq \bar{\delta} u_i(x) \qquad \text{III.40.}$$

dobija se:

$$\bar{\delta} u_i(x) = \delta u_i(x) - \bar{\bar{\delta}} u_i(x) \qquad \text{III.41.}$$

Zamenom izraza III.29. za δu_i, III.38. za $\bar{\bar{\delta}} u_i$ i za δx_μ III.25. u izraz III.41. dobija se :

$$\bar{\delta} u_i(x) = \delta u_i(x) - \bar{\bar{\delta}} u_i(x) = Y_{i\alpha}\,\delta\omega_\alpha -$$

$$- \frac{\partial u_i}{\partial x_\nu} X_{\nu\alpha}\,\delta\omega_\alpha = \left[Y_{i\alpha} - \frac{\partial u_i}{\partial x_\nu} X_{\nu\alpha} \right] \delta\omega_\alpha \qquad \text{III.42}$$

izraz za transformaciju koordinata i funkcija.

b./ Opšti dokaz teoreme Noether

Izmena koordinata x u funkciji polja $u_i/x/$ povlači za sobom i odgovarajuću beskonačno malu promenu / varijaciju / funkcije dejstva:

$$\delta S = \delta \int_R \mathcal{L}\left\{ u_i(x), \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_\mu} \right\} d^4x \qquad \text{III.43.}$$

Pošto su operacije varijacije i integracije medjusobno nezavisne možemo pisati:

$$\delta S = \delta \int_R \mathcal{L}\, d^4x = \int_R (\bar{\delta}\mathcal{L})\, d^4x \qquad \text{III.44.}$$

gde nam je varijacija Lagrangijana :

$$\bar{\delta}\mathcal{L}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i}\bar{\delta} u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}\bar{\delta}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right) \qquad \text{III.45.}$$

U slučaju varijacije, razmatrane u vezi dokaza teoreme Noether, tj. varijacije dejstva S, obuhvata se varijacija funkcije polja i koordinata. Pošto je posledica varijacije koordinata promena domena integracije, izraz III.44. pišemo u obliku:

$$\delta S = \int_R \delta\mathcal{L}(x)\, d^4x + \int_{R'-R} \mathcal{L}(x)\, d^4x \qquad \text{III.46.}$$

Izraz $\delta\mathcal{L}$ u prvom integralu uljučuje u sebi istovremeno varijaciju $\bar{\delta}\mathcal{L}$ uslovljenu izmenom forme funkcije, i varijaciju $\bar{\bar{\delta}}\mathcal{L}(x)$ usled transformacije koordinata. Osnovnu ulogu igra zahtev, da funkcija $u_i/x/$ koja ulazi u $\mathcal{L}\left\{u_i(x), \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_\mu}\right\}$ zadovoljava jednačinu polja:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)} = 0 \qquad \text{III.47.}$$

sada je potrebno formirati sve izraze koji ulaze u jednačinu III.46. Nadjimo prvo izraz za drugi integral, koji možemo napisati kao :

$$\int_{R'-R} \mathcal{L}(x)\, d^4x = \int_R \mathcal{L}(x)\,\delta(d^4x) = \int_R \mathcal{L}(x)\frac{\partial(\delta x_\mu)}{\partial x_\mu} d^4x \qquad \text{III.48.}$$

gde je uzeto da je :

$$\delta(d^4x) = \delta(dx_1)\,dx_2\,dx_3\,dx_4 + dx_1\,\delta(dx_2)\,dx_3\,dx_4 + \dots = \frac{\partial(\delta x_\mu)}{\partial x_\mu} d^4x \qquad \text{III.49.}$$

tako na primer :

$$\delta(dx_1) = d(\delta x_1) = \frac{\partial(\delta x_1)}{\partial x_1} dx_1 \qquad \text{III.5o.}$$

izraz III.48. možemo dobiti neposredno, izražavajući Jacobian beskonačno male transformacije koordinata:

$$\int_{R'-R} \mathcal{L}(x)\, d^4x = \int_{R'} \mathcal{L}(x')\, d^4x' - \int_R \mathcal{L}(x)\, d^4x = \int_R \mathcal{L}(x)\left(\left|\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right| - 1\right) d^4x \qquad \text{III.51.}$$

./.

Dobićemo izraz III.48. ako do tačnosti prvog reda predstavimo Jacobian $\left|\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right|$, sastavljen kao :

$$\left|\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right| = \left|\frac{\partial(x_\mu+\delta x_\mu)}{\partial x_\nu}\right| = \left|\delta_{\mu\nu}+\frac{\partial(\delta x_\mu)}{\partial x_\nu}\right| = \begin{vmatrix} 1+\frac{\partial(\delta x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial(\delta x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(\delta x_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial(\delta x_4)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\delta x_1)}{\partial x_2} & 1+\frac{\partial(\delta x_2)}{\partial x_2} & \frac{\partial(\delta x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial(\delta x_4)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(\delta x_1)}{\partial x_3} & \frac{\partial(\delta x_2)}{\partial x_3} & 1+\frac{\partial(\delta x_3)}{\partial x_3} & \frac{\partial(\delta x_4)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(\delta x_1)}{\partial x_4} & \frac{\partial(\delta x_2)}{\partial x_4} & \frac{\partial(\delta x_3)}{\partial x_4} & 1+\frac{\partial(\delta x_4)}{\partial x_4} \end{vmatrix} \approx$$

$$\approx 1+\frac{\partial(\delta x_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(\delta x_2)}{\partial x_2}+\frac{\partial(\delta x_3)}{\partial x_3}+\frac{\partial(\delta x_4)}{\partial x_4} = 1+\frac{\partial(\delta x_\mu)}{\partial x_\mu} \qquad \text{III.52.}$$

Analogno sa III.35. varijaciju Lagrangijana pišemo:

$$\delta\mathcal{L} = \bar{\delta}\mathcal{L}+\bar{\bar{\delta}}\mathcal{L} \qquad \text{III.53.}$$

gde je $\bar{\delta}\mathcal{L}$ odredjeno sa izrazom III.45. , a za $\bar{\bar{\delta}}\mathcal{L}$ imamo:

$$\bar{\bar{\delta}}\mathcal{L} = \mathcal{L}\left\{u_i(x'),\frac{\partial u_i(x')}{\partial x'_\mu}\right\} - \mathcal{L}\left\{u_i(x),\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_\mu}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}(x') - \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x+\delta x) - \mathcal{L}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}\delta x_\mu \qquad \text{III.54.}$$

pa je varijacija dejstva :

$$\delta S = \int_R \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}\bar{\delta}u_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}\bar{\delta}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}\delta x_\mu + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta x_\mu)}{\partial x_\mu}\right\} d^4x \qquad \text{III.55.}$$

pošto možemo pisati $\bar{\delta}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right) = \partial/\partial x_\mu(\bar{\delta}u_i)$, parcijalno integralimo drugi član, pa dejstvo poprima oblik :

$$\delta S = \int_R \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}\right)\right]\bar{\delta}u_i\, d^4x +$$

$$+ \int_R \partial/\partial x_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}\bar{\delta}u_i + \mathcal{L}\,\delta x_\mu\right] d^4x \qquad \text{III.56.}$$

Prvi član na osnovu III.47. je jednak nuli, dok za drugi član na osnovu pretpostavke teoreme Noether imamo :

$$\delta S = \int_R \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}\bar{\delta}u_i + \mathcal{L}\,\delta x_\mu\right] d^4x = 0 \qquad \text{III.57.}$$

./.

pri beskonačno malim transformacijama koordinata i odgovarajućih funkcija polja $u_i/x/$. Ako u izraz III.57. zamenimo odgovarajuće izraze za δx_μ i odgovarajuće varijacije funkcija:

$$\delta x_\mu = X_{\mu\alpha}\,\delta\omega_\alpha$$
$$\bar{\delta} u_i = \left(Y_{i\alpha} - \frac{\partial u_i}{\partial x_\mu} X_{\nu\alpha}\right)\delta\omega_\alpha \qquad \text{III.58.}$$

dobija se :

$$\delta S = \int_R \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}\left[Y_{i\alpha} - \frac{\partial u_i}{\partial x_\nu} X_{\nu\alpha}\right] + \mathcal{L} X_{\nu\alpha}\right\}\delta\omega_\alpha\, d^4x = 0 \qquad \text{III.59.}$$

ili

$$\delta S = -\int_R \frac{\partial \Theta_{\mu\alpha}}{\partial x_\mu}\,\delta\omega_\alpha\, d^4x = 0 \qquad \text{III.6o.}$$

gde smo uveli oznaku :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_\nu} X_{\nu\alpha} - Y_{i\alpha}\right] - \mathcal{L} X_{\mu\alpha} = \Theta_{\mu\alpha} \qquad \text{III.61.}$$

Pošto je uslov III.6o. zadovoljen za bilo koje značenje parametra transformacije i pri bilo kom domenu integracije R dobijamo da je integrant :

$$\frac{\partial \Theta_{\mu\alpha}}{\partial x_\mu} = 0 \qquad \text{III.62.}$$

Jednačina III.6o. može biti napisana u drugom ekvivalentnom obliku ako primenimo teoremu Gausa, prelazimo od integracije po četvorodimenzionalnom domenu R na integraciju po hiperpovršini :

$$\delta S = -\int_\sigma \Theta_{\mu\alpha}\,\delta\omega_\alpha\, d\sigma_\mu = 0 \qquad \text{III.63.}$$

Pošto su parametri transformacije nezavisni ($\delta\omega_\alpha$) imamo s odnosa /α = 1,2 ... s /

$$\int_\sigma \Theta_{\mu\alpha}\, d\sigma_\mu = 0 \qquad \text{III.64.}$$

gde je s broj parametara grupe. Izrazi III.62. i III.64. predstavljaju diferencijalno integralnu formu teoreme Noether.

III. IV. INTEGRALNA I DIFERENCIJALNA FORMA ZAKONA KONZERVACIJE

Nije teško videti da relacije III.62.i III.64. predstavljaju diferencijalnu i integralnu formu zakona konzervacije, respektivno. Pogledajmo prvi izraz:

$$\int_{\sigma} \Theta_{\mu\alpha} d\sigma_{\mu} = 0 \qquad \text{III.65.}$$

Pošto uslov III.57. važi pri bilo kojoj zapremini integracije R, to i hiperpovršina σ koja ograničava R može biti izbrana proizvoljno. Predpostavimo da je ta površina obrazovana dvema hiperpovršinama prostornog tipa σ_1 i σ_2, ortogonalnim na neki vektor vremenskog tipa, i hiperpovršine σ_3, koja sjedinjuje površine σ_1 i σ_2. Površina σ može biti uslovno prikazana kao površina nekog cilindra, sa osnovama koje čine hiperpovršine σ_1 i σ_2, a ulogu omotača igra hiperpovršina σ_3. Po toj analogiji, integral III.65. može biti napisan :

$$\int_{\sigma} d\sigma_{\mu} \Theta_{\mu\alpha} = \int_{\sigma_1} d\sigma_{\mu} \Theta_{\mu\alpha} - \int_{\sigma_2} d\sigma_{\mu} \Theta_{\mu\alpha} + \int_{\sigma_3} d\sigma_{\mu} \Theta_{\mu\alpha} \qquad \text{III.66.}$$

Znak minus kod drugog integrala potiče od toga što na suprotnim osnovama cilindra σ_1 i σ_2 normale imaju suprotan smer. Razmotrimo sada takav graničan prelaz te površine σ, kada $\sigma_3 \to \infty$. Jasno, taj granični prelaz označava za sve pravce prostornog tipa

$$x^2 = r^2 - c^2 t^2 \to \infty \qquad \text{III.67.}$$

što je moguće pri ograničenom značenju t, da je

$$r^2 \to \infty \qquad \text{III.68.}$$

Sledi, dati granični prelaz označava prelaz ka integraciji po celom beskonačnom trodimenzionalnom prostoru. Pri tom integral po površini σ_3 jednak je nuli, ako postavimo uslov da je $\Psi_{r\to\infty} = 0$ U tom slučaju, kada $\sigma_3 \to \infty$ izraz III.66. poprima oblik :

$$\int_{\sigma} \Theta_{\mu\alpha} d\sigma_{\mu} = \int_{\sigma_1} \Theta_{\mu\alpha} d\sigma_{\mu} - \int_{\sigma_2} \Theta_{\mu\alpha} d\sigma_{\mu} = 0 \qquad \text{III.69.}$$

./.

Pri tom hiperpovršine σ_1 i σ_2 takodje se prostiru do beskonačnosti, tj. obuhvataće sve tačke trodimenzionog prostora. Pošto hiperpovršine σ_1 i σ_2 mogu biti izabrane proizvoljno, tj. umesto datih σ_1 i σ_2 možemo izabrati bilo koje druge dve. Prema tome, na osnovu III.49. možemo napisati ‼

$$\int_{\sigma_1} \Theta_{\mu\alpha}\, d\sigma_\mu = \int_{\sigma_2} \Theta_{\mu\alpha}\, d\sigma_\mu = const. \qquad \text{III.7o.}$$

ili:

$$\int_{\sigma_i} \Theta_{\mu\alpha}\, d\sigma_\mu = C_\alpha(\sigma_i) = const. \qquad \text{III.71.}$$

gde je σ_i bilo koja hiperpovršina prostornog tipa / u opštem slučaju hiperpovršina/. Dakle, značenje integrala III.71. ne zavisi od izbora σ_i . Specijalan slučaj hiperpovršine prostornog tipa je ona koja je normalna na vremensku osu. Element površine takve površine ima samo jednu projekciju :

$$d\sigma = \{d\sigma_\mu\} = \{0, 0, 0, d\sigma_4\} \qquad \text{III.72.}$$

tj. on odredjuje element običnog trodimenzionalnog prostora:

$$d\sigma_4 = \frac{1}{i}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \frac{1}{i}\, d^3x \qquad \text{III.73.}$$

Na osnovu toga formula III.71. ima oblik:

$$\int_{\sigma_i} \Theta_{4\alpha}\, d\sigma_4 = C_\alpha(\sigma_i) = const. \qquad \text{III.74.}$$

Tako definisanoj hiperpovršini σ_i četvorodimenzionalnog prostora odgovara neko značenje vremena t_i. Prema tome, iz III.74. i umesto III.71. pišemo :

$$\int_{t_i} \Theta_{4\alpha}\, d^3x = C_\alpha(t_i) = const. \qquad \text{III.75.}$$

Ta je relacija dobijena kao rezultat varijacije funkcije dejstva, uslovljenu beskonačno malom transformacijom koordinata /x/ i funkcija polja u_i/x/, izražava konzervaciju po vremenu neke veličine. Svakom parametru ω_α date neprekidne transformacije možemo pridružiti jednu veličinu, koja se očuvava u vremenu.

Pri uvodjenju zakona konzervacije pomoću teoreme Noether osnovni zahtev je da funkcije polja teže nuli na beskonačnosti. Jasno, to je povezano sa tim, što zakoni konzervacije mogu biti formulisani samo za zatvorene sisteme. Relacija:

$$\frac{\partial \Theta_{\mu\alpha}}{\partial x_\mu} = 0 \qquad \text{III.76.}$$

ekvivalentna je III.65., i predstavlja diferencijalnu formu zakona konzervacije odgovarajuće veličine.

III. V. TENZOR ENERGIJE - IMPULSA

Dokazom teoreme Noether jednakost nuli varijacije dejstva :

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L}(x)\, d^4x = 0 \qquad \text{III.77.}$$

izazvanu beskonačno malom transformacijom koordinata:

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \quad , \quad \delta x_\mu = X_{\mu\alpha}\, \delta\omega_\alpha \qquad \text{III.78.}$$

i odgovarajućim transformacijama funkcija polja $u_i/x/$:

$$u_i(x) \to u_i'(x') = u_i(x) + \delta u_i(x), \quad \delta u_i(x) = Y_{i\alpha}\, \delta\omega_\alpha \qquad \text{III.79.}$$

povlači sa sobom konzervaciju veličine :

$$C_\alpha(\sigma) = \int_\sigma \Theta_{\mu\alpha}\, d\sigma_\mu = const. \qquad \text{III.80.}$$

ili:

$$C_\alpha(t) = \int_t \Theta_{4\alpha}\, d^3x = const. \qquad \text{III.81.}$$

gde :

$$\Theta_{\mu\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_\nu} X_{\nu\alpha} - Y_{i\alpha}\right] - \mathcal{L} X_{\mu\alpha} \qquad \text{III.82.}$$

zadovoljava uslov III.76.

$\mathcal{L}$ - Lagrangijan polja, σ proizvoljna hiperpovršina. Matrice $X_{\mu\alpha}$ i $Y_{i\alpha}$ imaju oblik :

$$X_{\mu\alpha} = (I_\alpha)_{\mu\nu}\, x_\nu \quad ; \quad Y_{i\alpha} = (J_\alpha)_{ij}\, u_j \qquad \text{III.83.}$$

./.

gde su I_α i J_α infinitezimalni operatori prostornih koordinata i funkcija, respektivno. Razmotrimo transformaciju koordinata - četvorodimenzionalnu translaciju :

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + a_\mu \qquad \text{III.84.}$$

gde proizvoljna konstanta a_μ predstavlja pomeranje koordinatnog početka. Odgovarajuću beskonačno malu transformaciju tada pišemo:

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \delta a_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \qquad \text{III.85}$$

gde kao male parametre transformacije možemo birati samu veličinu pomeranja, tj.

$$\delta\omega_\alpha \to \delta\omega_\mu = \delta a_\mu = \delta x_\mu \qquad \text{III.86.}$$

Saglasno sa obrascem III.78. zakon transformacije koordinata u razmatranom slučaju biće odredjen matricom :

$$X_{\mu\alpha} \to X_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \qquad \text{III.87.}$$

tj.

$$\delta x_\mu = X_{\mu\alpha}\,\delta\omega_\alpha = X_{\mu\nu}\,\delta x_\nu = \delta_{\mu\nu}\,\delta x_\nu \qquad \text{III.88.}$$

Funkcija polja ne menja svoj oblik, ako se pomera koordinatni početak

$$u_i(x) \to u_i'(x') = u_i(x) \qquad \text{III.89.}$$

sledi da je :

$$\delta u_i = 0 \qquad \text{III.9o.}$$

Doista, skup funkcija

$$u(x) = \{u_i(x)\}\;;\; u'(x') = \{u_i'(x')\} \qquad (i = 1,2\cdots n) \qquad \text{III.91.}$$

opisuje jednu te istu krivu u n-dimenzionalnom konfiguracionom prostoru. Pošto je $\delta u_i = \bar\delta u_i + \bar{\bar\delta}\, u_i$ a uzimajući u obzir III.9o. dobijamo:

$$\bar\delta u_i = -\bar{\bar\delta} u_i = -\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\,\delta x_\mu \qquad \text{III.92.}$$

onda je i

$$Y_{i\alpha} = Y_{i\mu} = 0 \qquad \text{III.93.}$$

Zamenom III.87. i III.93.u relaciju za $\Theta_{\mu\alpha}$ dobija se :

. /.

$$\Theta_{\mu\alpha} \to \Theta_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)} \frac{\partial u_i}{\partial x_\rho} \delta_{\rho\nu} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} \qquad \text{III.94.}$$

ili:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)} \frac{\partial u_i}{\partial x_\nu} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} \qquad \text{III.95.}$$

U izrazu III.95. uvedena je oznaka $\Theta_{\mu\alpha} \to \Theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$, gde indeks $\alpha = \nu$ ima značenje 1,2,3,4 i ima istu prirodu kao i indeks ν. Pa možemo napisati :

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0 \qquad \text{III.96.}$$

Poslednji izraz predstavlja 4-divergenciju tenzora, on je ekvivalentan tvrdnji, da zadržava vektor P_μ, čije su komponente jednake integralima od $T_{\mu\nu}$ po hiperpovršini:

$$P_\mu = a\int T_{4\mu}\, d\sigma_4 = a\int T_{4\mu}\, d^3x \qquad \text{III.97.}$$

gde je $a =$ const. Da bi videli fizički smisao III.97. razmotrimo integral :

$$P_4 = a\int T_{44}\, d^3x \qquad \text{III.98.}$$

gde je T_{44} uzimajući u obzir III.95. :

$$T_{44} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_4}\right)} \frac{\partial u_i}{\partial x_4} - \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i}\dot{u}_i - \mathcal{L}$$

$$\dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \qquad \text{III.99.}$$

gde je

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} = \pi_i \qquad \text{III.100.}$$

predstavlja gustinu impulsa. Dakle možemo pisati:

$$T_{44} = \sum \pi_i \dot{u}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H} \qquad \text{III.101.}$$

tj. T_{44} je gustina funkcije Hamiltonijana. Kao što smo radili u klasičnoj mehanici i ovde pišemo:

$$H = \int \mathcal{H}\, d^3x = E \qquad \text{III.102.}$$

gde je E energija sistema. Tako možemo reći da integral III.98. odredjuje energiju polja E / do nekog konstantnog člana /, a T_{44} je gustina energije polja. Ali kako se za relativističke čestice energija $\mathcal{E}$ ne javlja kao invarijanta s tačke gledišta transformacije Lorentza, nego ulazi kao četvrta komponenta četvorodimenzionalnog vektora energije - impulsa :

$$P=\{P_\mu\}=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}=\{\vec{P},\ i/c\,\mathcal{E}\} \qquad \text{III.103.}$$

Dakle, a = i/c, gde je c brzina svetlosti.

Na kraju izvedimo zaključak, da invarijantnost dejstva u odnosu na četvorodimenzionalne translacije III.85. povlače za sobom konzervaciju četvorodimenzionalnog vektora energije - impulsa polja:

$$P_\mu = i/c \int T_{4\mu}\, d^3x = const. \qquad \text{III.104.}$$

Tenzor $T_{\mu\nu}$ /III.95./ za koga važi relacija :

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0 \qquad \text{III.105.}$$

prirodno identifikujemo sa tenzorom gustine energije - impulsa polja.

Neophodno je napomenuti, da definicija tenzora $T_{\mu\nu}$ u suštini nije jednoznačna. I zaista, tenzoru $T_{\mu\nu}$ može se dodati veličina oblika $\frac{\partial}{\partial x_\rho} f_{\mu\rho\nu}$, gde je $f_{\mu\rho\nu}$ ma koji tenzor antisimetričan po indeksima ρ,ν. Posle takve zamene novi tenzor $T'_{\mu\nu}$ može zadovoljavati jednačinu III.105. jer postoji identitet $\frac{\partial^2 f_{\mu\rho\nu}}{\partial x_\nu \partial x_\rho}$. Takodje se ni izraz III.104. ne menja.

./.

IV. GRADIJENTNE TRANSFORMACIJE I GRUPE U/1/, SU/2/, SU/3/

IV.I. GRADIJENTNE TRANSFORMACIJE PRVE VRSTE

Počnimo od Klein - Gordon jednačine,* za naelektrisanu česticu. Odgovarajuća gustina Lagrangijena može biti pisana kao:

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_\mu}\frac{\partial U}{\partial x_\mu} + \mu^2 U^* U\right); \quad \mu = \frac{mc}{\hbar} \qquad \text{IV.1.}$$

gde su U i U^* razmotrene nezavisne kompleksnog polja. Jednačine polja za U i U^* mogu biti dobijene iz varijacionog principa sa tretiranjem U i U^* kao dva nezavisna polja:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial U/\partial x_\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} = 0 \rightarrow \Box U - \mu^2 U = 0 \qquad \text{IV.2.}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial U^*/\partial x_\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U^*} = 0 \rightarrow \Box U^* - \mu^2 U^* = 0$$

Jednačine na desnoj strani izraza IV.2. predstavljaju Klein-Gordonove jednačine, one su relativistička analog nerelativističkoj Schrödingerovoj jednačini za slobodnu česticu. Gustina Lagrangijana je invarijentna u odnosu na transformacije:

$$U(x) \rightarrow e^{i\lambda} U(x)$$

$$U^*(x) \rightarrow e^{-i\lambda} U^*(x) \qquad \text{IV.3.}$$

gde je λ realan broj. Takve transformacije nazvane su gradijentne transformacije prve vrste. Posmatrajmo sada infinitezimalnu transformaciju, tj. infinitezimalnu vrednost parametra λ, u tom slučaju, obzirom na IV.3., polja U/x/ i U^*/x/ podležu varijacijama:

$$\delta U(x) = i\lambda U(x)$$

$$\delta U^*(x) = -i\lambda U^*(x) \qquad \text{IV.4.}$$

Dok varijacija $\mathcal{L}$ indukovana sa IV.4. je :

$$\delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U}\delta U + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial U/\partial x_\mu)}\delta\left(\frac{\partial U}{\partial x_\mu}\right)\right] + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U^*}\delta U^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial U^*/\partial x_\mu)}\delta\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_\mu}\right)\right] =$$

./.

(* JEDNA OD NAJPROSTIJIH REL. JEDNAČINA)

$$= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial/\partial x_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x_\mu)}\right)\right]\delta u + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \partial/\partial x_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u^*/\partial x_\mu)}\right)\right]\delta u^* +$$

$$+ \partial/\partial x_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x_\mu)}\delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u^*/\partial x_\mu)}\delta u^*\right] =$$

$$= -i\lambda \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x_\mu}u - u^*\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\right) \qquad \text{IV.5.}$$

gde smo upotrebili Euler - Lagrange jednačine. Pošto $\mathcal{L}$ ostaje ne promenjeno, $\delta\mathcal{L}$ mora biti nula. Otuda dobijemo važan rezultat:

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \qquad \text{IV.6.}$$

gde je:

$$j_\mu = i\left(\frac{\partial u^*}{\partial x_\mu}u - u^*\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\right) \qquad \text{IV.7.}$$

Znamo da jednačinu IV.6. možemo interpretirati kao zakon konzervacije. Integral vremenske komponente preko celog prostora V daje očuvanu veličinu. U našem slučaju IV.7. imamo očuvanu veličinu:

$$Q = \int_V d^3x\, j^0(x) = i\int_V d^3x\,(\dot{u}u^* - u^*\dot{u}) \qquad \text{IV.8.}$$

koja se interpretira kao totalno naelektrisanje pridruženo polju. Pod zamenom $U \leftrightarrow U^*$, menja znak, to znači da ako je U polje pripisano čestici sa naelektrisanjem e, onda je U^* polje pripisano čestici sa naelektrisanjem -e.

Videli smo ranije da invarijantnost u odnosu na izvesne transformacije dovodi do zakona konzervacije, na primer veza izmedju rotacione invarijentnosti / izotropija prostora / i konzervacije ugaonog momenta. Ali ovde se srećemo sa zakonom konzervacije negeometrijske osobine, takve kao što je električni naboj.

./.

IV. II. POJAM GRUPE

Strogo tretiranje osobina invarijantnosti bazira na matematičkoj teoriji grupa. Grupa G je definisana nizom elemenata g i zakonom kombinacija, koje zadovoljavaju sledeće uslove:

a./ Ako su g i $\grave{g}$ elementi od G, tada je $g\grave{g}$ takodje jedan element od G.

b./ Niz sadrži element identičnosti g_I takav da je

$$gg_I = g_I g = g$$

c./ Za svaki element g u G postoji inverzni element g^{-1} takav da je

$$gg^{-1} = g_I$$

d./ Zakon kombinacije je asocijativan, tj.

$$/\, g\grave{g}\, /g'' = g/\grave{g}g''/$$

IV. III. DALJE DEFINICIJE GRUPE

Neka je G neka grupa. Ako se iz nje može izdvojiti neki skup elemenata H tako, da on sam takodje predstavlja grupu, onda se grupa H naziva podgrupa grupe G. Jedan te isti element grupe može ulaziti u njene razne podgrupe. Ako su ovi elementi komutativni, onda se takva grupa naziva Abelova grupa. Specijalan slučaj Abelove grupe predstavljaju ciklične grupe. Pod cikličnom grupom se podrazumeva takva grupa, čiji se svi elementi mogu dobiti dizanjem jednog od njenih elemenata na uzastopne stepene, tj. grupa koja se sastoji od elemenata :

$$A,\ A^2,\ A^3, \ldots\ldots A^n = E \qquad \text{IV.9.}$$

gdeje n neki ceo broj, E jedinični element grupe. Uzimajući ma koji element A grupe i dižući ga na uzastopne stepene, na kraju krajeva dobićemo jedinični element / pošto je ukupan broj elemenata u grupi konačan /. Ako je n najmanji broj za koji je $A^n = E$, onda se n naziva red elementa A, a skup elemenata $A, A^2, \ldots. A^n = E$ period A. Period se obeležava sa $\{A\}$. On sam po sebi sačinjava grupu, tj. on je podgrupa prvobitne grupe, i to ciklična podgrupa. Da bi se proverilo da li dati skup elemenata grupe predstavlja njenu podgrupu, dovoljno je da se proveri, da se množenjem svaka dva elementa dobija element, koji je sadržan u tom skupu. Ukupan broj elemenata grupe naziva se red grupe. Red podgrupe je delilac reda cele grupe. Uvedimo pojam konjugovanih elemenata. Dva elementa A i B nazivaju se medjusobno konjugovani, ako je ispunjen uslov :

$$A = CBC^{-1} \qquad \text{IV.10.}$$

gde je C takodje element grupe / množeći napisanu jednačinu sa desne strane sa C i sa leve strane sa C^{-1}, dobićemo recipročnu jednačinu $B = C^{-1}AC$ /. Suštinsko svojstvo konjugovanosti je: Ako je A konjugovano sa B, a B sa C, onda je i A konjugovano sa C. Zaista ako pogledamo sledeće izraze $B = P^{-1}AP$, $C = Q^{-1}BQ$/gde su P i Q elementi grupe/ izlazi da je $C = /PQ/^{-1}A/PQ/$. Dakle možemo govoriti o skupu elemenata grupe, koji su medjusobno konjugovani. Takvi skupovi se nazivaju klase grupe. Svaka klasa se potpuno definiše jednim ma kojim svojim elementom A. Na taj način celu grupu možemo rastaviti na klase. Očigledno, svaki element grupe može ući samo u jednu klasu. Jedinični element grupe sam po sebi sačinjava klasu, jer je svaki element grupe $GEG^{-1} = E$. Ako je grupa Abelova onda to važi za svaki njen element. Pošto su svi elementi te grupe komutativni, onda je svaki element konjugovan samo sa samim sobom, pa na osnovu toga sam po sebi sačinjava klasu. Treba napomenuti da klasa grupe / koja se ne poklapa sa E / nije njena podgrupa. To se vidi već iz činjenice što ona ne sadrži jedinični element.

IV. IV. REPREZENTACIJA GRUPE

Posmatrajmo ma koju grupu simetrije / ukupnost svih transformacija simetrije datog tela naziva se njegovom grupom transformacija simetrije, ili prosto grupa simetrije / i neka je ψ_1 neka jednoznačna funkcija koordinata u konfiguracionom prostoru datog fizičkog sistema. Prilikom transformacije koordinatnog sistema, koja odgovara elementu G grupe, ta funkcija prelazi u neku drugu funkciju. Ako red grupe obeležimo sa g, i vršeći redom svih g transformacija grupe, dobijamo iz ψ_1 u opštem slučaju g različitih funkcija. Medjutim, pri izvesnim izborima ψ_1 neke od tih funkcija mogu izići linearno zavisne. Dakle, na osnovu toga ćemo dobiti neki broj F /F mora biti manje ili jednako g/ linearno nezavisnih funkcija $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_F$, koje se prilikom transformacija simetrije, koja ulaze u posmatranu grupu, transformišu linearno jedna u drugu. Dakle, usled transformacije G svaka od funkcija ψ_i $(i = 1, 2 \cdots F)$

./.

prelazi u linearnu kombinaciju oblika :

$$\sum_{K} G_{Ki} \psi_K \qquad \text{IV.11.}$$

gde su G_{iK} konstante, koje zavise od transformacije G. Ukupnost tih konstanti naziva se matrica transformacije. Pošto su funkcije ψ_i po pretpostavci jednoznačne, to svakom elementu date grupe odgovara jedna odredjena matrica. Na osnovu dosad rečenog pogodno je elemente grupe G posmatrati kao operatore, koji dejstvuju na funkciju ψ_i , pa možemo napisati :

$$\hat{G}\psi_i = \sum_{K} G_{Ki} \psi_K \qquad \text{IV.12.}$$

Pošto se funkcije ψ_i uvek mogu izabrati da budu medjusobno ortogonalne i normirane, onda se pojam matrice transformacije poklapa sa pojmom matrice operatora, tj.:

$$G_{iK} = \int \psi_i^* \hat{G} \psi_K \, dq \qquad \text{IV.13.}$$

Proizvodu dva elementa grupe G i H odgovara matrica koja se definiše prema matricama G i H pomoću običnog pravila množenja matrica:

$$(GH)_{iK} = \sum_{\ell} G_{i\ell} H_{\ell K} \qquad \text{IV.14.}$$

Ukupnost matrica svih elemenata grupe naziva se reprezentacija grupe. Funkcije $\psi_1, \ldots \psi_F$, pomoću kojih su te matrice definisane, nazivaju se baza reprezentacije. Broj F tih funkcija definiše tazozvanu dimenziju reprezentacije. Ako posmatramo integral $\int |\psi|^2 dq$ gde je ψ neka funkcija koordinata. Pošto se integral uzima po celomprostoru, očigledno je da se njegova vrednost ne menja ni pri kakvoj rotaciji ili refleksiji koordinatnog sistema. Na osnovu toga , za bilo kakvu transformaciju simetrije G može se napisati :

$$\int (\hat{G}^* \psi^*)(\hat{G}\psi)\, dq = \int \psi^* \psi \, dq \qquad \text{IV.15.}$$

Ako uvedemo operator $\hat{\tilde{G}}$ koji je transponovan u odnosu na $\hat{G}$, dobija se:

$$\int (\hat{G}^* \psi^*)(\hat{G}\psi)\, dq = \int \psi \hat{\tilde{G}} \hat{G}^* \psi^* dq = \int \psi^* \psi \, dq \qquad \text{IV.16.}$$

./.

Odavde sledi zbog proizvoljnosti funkcije ψ da je $\hat{G}\hat{G}^{*}=1$ ili $\hat{G}^{*}=\hat{G}^{-1}$ tj. operatori $\hat{G}$ su unitarni. Dakle, reprezentacije grupe, koje se postižu pomoću ortonormiranih funkcija baze, unitarne su. Drugim rečima grupa se prikazuje unitarnim matricama. Na primer ako se nad funkcijama $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_F$ izvrši linearna unitarna transformacija:

$$\psi_i' = \hat{S}\psi_i \qquad \text{IV.17.}$$

onda se dobije nov sistem funkcija $\psi_1' \cdots \psi_F'$, koje će takodje biti ortonormirane. Ako kao bazu reprezentacije uzmemo funkciju ψ_i' , onda ćemo imati novu reprezentaciju te iste dimenzije. Te reprezentacije, koje se dobijaju jedna iz druge pomoću linearne transformacije funkcija njihove baze, nazivaju se ekvivalentne. Jasno one u suštini nisu različite. Matrice ekvivalentnih reprezentacija medjusobno su povezane sledećim odnosom matrica operatora $\hat{G}$ u novoj reprezentaciji jednaka je matrici operatora :

$$\hat{G}' = \hat{S}^{-1}\hat{G}\ \hat{S} \qquad \text{IV.18.}$$

u staroj reprezentaciji. Zbor dijagonalnih elemenata matrice, koja reprezentuje element G grupe, zove se karakter ili karakteristika grupe. Karakter ćemo u daljem izlaganju obeležavati sa K/G/. Bitno je napomenuti da se karakteri matrice ekvivalentnih reprezentacija medjusobno poklapaju. Ta činjenica daje naročitu važnost opisivanju reprezentacije grupe pomoću njenih datih karakteristika. To nam omogućuje da se odmah razlikuju bitno različite reprezentacije od ekvivalentnih reprezentacija. U buduće ćemo kao različite reprezentacije smatrati samo neekvivalentne reprezentacije. Jediničnom elementu grupe E odgovara identična transformacija. Prema tome, matrica koja ga reprezentuje u svakoj reprezentaciji je dijagonalna, pri čemu su dijagonalni elementi jednaki jedinici. Karakteristika K/E/ je na osnovu toga jednaka dimenziji reprezentacije :

$$K/E/ = F \qquad \text{IV-19.}$$

Razmotrimo sada neku reprezentaciju dimenzije F. Može izići da se usled odgovarajuće linearne transformacije IV.17. funkcije baze razdvajaju na skupove po F_1, F_2,.....funkcija / $F_1 + F_2 + \ldots\ldots = F$/ i to tako, da se dejstvovanjem svih elemenata grupe funkcija svakog skupa transformiraju samo jedna u drugu, ne dirajući funkcije iz drugih skupova. U tom slučaju kaže se da je data reprezentacija reducibilna.

./.

Medjutim, ako se broj funkcija baze, koje se medjusobno transformišu, nemože smanjiti nikakvom njihovom linearnom transformasmijom, onda se reprezentacija pomoću njih naziva ireducibilna. Svaka reducibilna reprezentacija može se rastaviti na ireducibilne reprezentacije. Drugim rečima, odgovarajućom linearnom transformacijom funkcije baze se rastavljaju na niz skupova, od kojih se svaki transformiše, prilikom dejstvovanja elemenata grupe, prema na kakvoj ireducibilnoj reprezentaciji. Pri tom se može desiti da se nekoliko različitih skupova transformiše prema jednoj te istoj ireducibilnoj reprezentaciji. U tom slučaju se kaže da se ta ireducibilna reprezentacija sadrži u reducibilnoj odgovarajući broj puta. Ireducibilna reprezentacija je suštinska karakteristika grupe i igra osnovnu ulogu u svim kvantno-mehaničkim primenama teorije grupa. Može se pokazati da je broj različitih ireducibilnih reprezentacija grupe jednak broju klasa u grupi.

IV. V. GRADIJENTNA GRUPA U/1/ I SUPERSELEKCIONA PRAVILA

Ako talasna funkcija podleže transformaciji kao u IV.4. odgovarajuće stanje $|\phi\rangle$ u Hilbertovom prostoru biće takodje transformisano. Transformacija se vrši pomoću unitarnog operatora / zahtevamo da norma stanja bude očuvana / :

$$|\phi'\rangle = U|\phi\rangle \qquad \text{IV.20.}$$

$$U = e^{i\lambda Q} \qquad \text{IV.21.}$$

gde je λ realni parametar, a Q je ermitski operator. Gradijentne transformacije IV.21. formiraju jednoparametarsku / Abelovu / grupu. To je grupa koju ćemo obeležiti sa U/1/. Grupa U/1/ je najprostija unitarna grupa, sadrži transformacije koje u osnovi samo dodaju fazni faktor talasnim funkcijama čestice. Njena ireducibilne reprezentacije su sve jednodimenzione. Invarijantnost u odnosu na te transformacije dovodi do zakona očuvanja aditivnih kvantnih brojeva, kao što je konzervacija električnog naboja. Znamo da u prirodi imamo nekoliko vrsta " naelektrisanja " za koje verujemo da su striktno očuvana, kao što je električni naboj, barionski broj i leponski broj. Druga naelektrisanja kao što su hipernaelektrisanje, su samo aproksimativno očuvana. Sada ćemo dati jednu listu poznatih aditivnih kvantnih brojeva :

./.

a./ <u>Električni naboj</u> : Valjanost konzervacionog principa električnog naboja je bazirana na eksperimentalnim vrednostima vremena života elektrona, za koji je vrednost ograničena na 2×10^{21} godina.

b./ <u>Barionski broj</u> : Uvod u očuvanje ovog kvantnog broja je bazirano na stabilnosti protona: eksperimentalna vrednost je ograničena za njegov srednji život na 2×10^{28} godina. Barionski broj je kvantni broj pridružen jako interagujućim fermionima / barionima / Za barione je dat kao $+1$, a -1 za antičestice.

c./ <u>Leptonski broj</u> : Eksperimentalno je utvrdjeno iz slabih interakcija da postoje dva kvantna broja koja su očuvana : broj L_e pridružen elektronu i neutrinu / e^-, ν_e /, i odgovarajućim antičesticama / $e^+, \bar{\nu}_e$ / i broj L_μ pridružen sa mionima i odgovarajućim neutrinu / μ^-, ν_μ /, i antičesticama / $\mu^+, \bar{\nu}_\mu$ /. Oba L_e, L_μ imaju svojstvene vrednosti $+1$, -1 za leptone i antileptone, respektivno. Dve vrste neutrina se pojavljuju u beta raspadu neutrona $n \to p + e^- + \nu_e$ i u μ^- raspadu $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$, što je jedan od primera konzervacije leptona.

d./ <u>Hipernaelektrisanje</u> : Ovaj kvantni broj uveden je u vezi sa stabilnošću različitih vrsta hadrona, tj. jako interagujućih čestica / takvih kao što su hiperoni i K-mezoni / u odnosu na jake interakcije. Medjutim, on nije striktno očuvana veličina, narušen je u slabim interakcijama.

Striktno očuvani kvantni brojevi daju razlog za apsolutna selekciona pravila.

Konzervacija barionskog broja i konzervacija električnog naboja su apsolutna selekciona pravila. / Zakon konzervacije bariona glasi : U svakom procesu broj bariona minus broj antibariona mora da bude očuvan. Zakon je predložio Wigner /1949/ i važi za jake, elektromagnetne i slabe interakcije./ Ovo znači da ne postoji nikakav matrični element koji bi povezivao stanja sa različitim barionskim brojevima ili sa različitim naelektrisanjima. Znamo, uopšte, da nije moguće meriti fazu niza vektora stanja, ali samo relativne faze mogu biti merene. Medjutim, ako imamo invarijentnost pod transformacijom faze, to znači da se čak ni relativna faza nemože meriti. Fizičko stanje nemože biti super-

./.

pozicija stanja sa različitim naelektrisanjima, ili drugim rečima sva fizička stanja moraju uvek biti svojstvena stanja naboja. U tom slučaju kažemo da postoji superselekciono pravilo koje zabranjuje poredjenje, u fizičkom smislu, faze različitih vektora stanja. Primeri ovih selekcionih pravila su konzervacija bariona i Kë električnog naboja.

IV. VI. GRADIJENTNE TRANSFORMACIJE DRUGE VRSTE

U elektrodinamici možemo problem odredjivanja jačina električnog i magnetnog polja svesti na problem odredjivanja izvesnih potenciala, i to na sledeći način: Podjimo od druge i treće Maxwellove jednačine :

$$\operatorname{div}\vec{B}=0 \qquad \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{IV.22.}$$

Pošto je divergencija rotora ma kog vektora identički jednaka nuli, iz prve jednačine vidimo da se veličina $\vec{B}$ može izraziti kao rotor ma kog vektora $\vec{A}$:

$$\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A} \tag{IV.23.}$$

Stavimo sada taj izraz u drugu gornju jednačinu i izmenimo red operacija izračunavanja rotora i diferenciranja po vremenu :

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A}=-\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{IV.24.}$$

tj.

$$\operatorname{rot}\vec{E}=\operatorname{rot}\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \tag{IV.25.}$$

Pošto je rotor gradijenta ma kog skalara identički jednak nuli, veličine $\vec{E}$ i $-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ mogu se razlikovati za gradijent ma kog skalara $-\varphi$:

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi \tag{IV.26.}$$

Tako uvedena veličina $\vec{A}$ naziva se vektorski potencial, a veličina φ skalarni potencial elektromagnetnog polja. Postavlja se pitanje da li skalarni i vektorski potencial imaju fizički smisao. Da bismo videli fizički smisao potenciala φ , pretpostavimo da je elektromagnetno polje stacionarno, tj.

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=0 \tag{IV.27.}$$

a obrazac IV.26. ima oblik :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \qquad \text{IV.28.}$$

pa skalarnim množenjem sa elementom puta $\delta\vec{r}$ dobija se :

$$\vec{E}\cdot\delta\vec{r} = -\operatorname{grad}\varphi\cdot d\vec{r} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = -d\varphi \qquad \text{IV.29.}$$

tj.

$$\varphi = -\int_{N_0}^{N} \vec{E}\cdot d\vec{r} \qquad \text{IV.30.}$$

Dakle, u slučaju stacionarnog elektromagnetnog polja skalarni potencial predstavlja rad koji treba izvršiti protiv električnog polja, da bi se jedinično naelektrisanje dovelo iz tačke u kojoj se uzima da je potencial nula u posmatranu tačku. Ranije se smatralo da sam vektorski potencial $\vec{A}$ nema fizički smissao, nego samo njegov linijski integral :

$$\int_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}\vec{A}\cdot d\vec{S} \qquad \text{IV.31.}$$

Gornji izraz je dobijen na osnovu Stokesove teoreme, i ako uvedemo rot $\vec{A} = \vec{B}$, dobija se :

$$\int_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \qquad \text{IV.32.}$$

Iz gornje jednačine vidimo da cirkulacija vektorskog potencijala po ma kakvoj konturi jednaka magnetnom fluksu kroz ma koju površinu oivičenu tom konturom, što važi bez ikakvog ograničenja. Izveden je eksperiment u kome je meren efekat $\vec{A}$ u oblasti gde ne postoji $\vec{B}$, tj. $\vec{A}$ ima fizičku realnost a ne samo matematičku formu. Naprimer magnetno polje van solenoida je jednako nuli, dok vektorski potencial postoji van solenoida. U klasičnoj fizici vektorski potencial i skalarni potencial nemaju fizički smisao, samo su pomoćni matematički aparat. U kvantnoj fizici dobijaju fizički smisao na bazi eksperimenta. Postavlja se pitanje da li su pri datim vrednostima jačina električnog i magnetnog polja elektromagnetni potenciali jednoznačno odredjeni. Iz izraza IV.23. i IV.26 vidimo da se oni javljaju samo u obliku svojih izvoda, te su odredjeni samo sa tačnošću do izraza koji se skraćuju pri operacijama u navedenim izrazima. Neka su φ i $\vec{A}$ početni elektromagnetni potencijali, pa umesto njih uvedimo nove veličine φ' i $\vec{A}'$ smenom:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\, \chi(\vec{r},t)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r},t)$$

IV.33.

gde je $\chi(\vec{r},t)$ ma kakva funkcija položaja i vremena, prema obras-cima IV.23. i IV.26. imamo :

$$\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}' = \text{rot}\,\vec{A} + \text{rot}\,\text{grad}\,\chi(\vec{r},t)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \text{grad}\,\varphi' = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\text{grad}\,\chi - \text{grad}\,\varphi + \text{grad}\,\frac{\partial \chi(\vec{r},t)}{\partial t}$$

tj.

$$\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}' = \text{rot}\,\vec{A}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \text{grad}\,\varphi' = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\,\varphi$$

IV.34.

Odavde vidimo da se jačine električnog i magnetnog polja ne menjaju ovakvim transformacijama, te su elektromagnetni potencijali odredjeni samo do transformacija IV.33., gde je $\chi(\vec{r},t)$ ma kakva funkcija položaja vremena. To znači da sa potencijala $\varphi, \vec{A}$ uvek možemo preći gore navedenom smenom ~~na~~ na nove potencijale $\varphi', \vec{A}'$ koji su fizički ekvivalentni prvima, pri čemu $\chi(\vec{r},t)$ možemo izabrati onako kako nam je najpogodnije. Ova osobina elektromagnetnih potencijala, tj. njihova odredjenost samo do transformacija IV.33. naziva se gradijentna invarijantnost, a transformacije IV.33. nazivaju se gradijentne ~~xxx~~ transformacije druge vrste.

Potražimo sada dopunske uslove da bi smanjili proizvoljnost za $\vec{A}$ i φ. Podjimo od transformacija IV.33.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \cdot \chi(\vec{r},t)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r},t)$$

IV.35.

i potražimo izraze :

$$\text{div}\,\vec{A}' = \text{div}\,\vec{A} + \Delta\chi(\vec{r},t)$$

IV.36.

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi(\vec{r},t)$$

IV.37.

Saberimo jednačine IV.36. i IV.37. :

$$\operatorname{div}\vec{A}' + \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Box \chi(\vec{r},t)$$

i uvedimo dopunske uslove :

1./ $\Box \chi(\vec{r},t) = 0$; $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = const.$

D'Alambertov uslov

2./ Lorentzov uslov $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

3./ Columbov uslov $\varphi' = 0$; $\frac{\partial \chi}{\partial t} = 0$

4./ Kombinacija Lorentzovog i Columbovog uslova

$$\operatorname{div}\vec{A}' = 0$$

IV. VII. S U/2/ GRUPA

Jedna od najupadljivijih osobina hadrona / tj. čestica, koje učestvuju u jakim interakcijama / jeste da se one javljaju u multipletima, tako da svi elementi multipleta imaju istu parnost, spin i približno istu masu.Ovo javljanje nizova približno degenerisanih stanja sugerira princip simetrije. To nas navodi da uvedemo invarijantnu grupu i da opišemo ove multiplete preko ireducibilne reprezentacije grupe. Transformacije grupe medjusobno izmenjuju element multipleta, dakle, nagoveštavaju zakone invarijantnosti. Uspeh ove šeme je u činjenici da ovi invarijantni zakoni važe, čak i ako samo aproksimativno.

Posmatrajmo simetriju koja je povezana sa unitarnom i unimodularnom / det a = 1 / grupom SU/2/, za koju se predpostavlja da važi samo za jake interakcije. U stvari, svi hadroni mogu biti klasifikovani u multiplete / takvi kao nukleoni : proton i neutron, pioni : π^+, π^0, π^-/, elementi datog multipleta razlikuju se samo po elektromagnetnim osobinama / oni imaju isti spin, parnost, hipernaelektrisanje, ali različit električni naboj, magnetne momente /. Mase čestica u multipletu su veoma bliske, njihove razlike masa / reda veličine MeV / su povezane sa elektromagnetnim interakcijama. Ako zamislimo da isključimo elektromagnetne interakcije, bilo koji element datog SU/2/ multipleta može biti razmatran ekvivalentno bilo kom drugom elementu. Svaki element od SU/2/, tj. 2 x 2 unitarna unimodularna matrica, može biti pisana kao:

$$U = e^{i\sum_{\ell=1}^{3} \varepsilon_\ell \tau_\ell} \qquad \text{IV.38.}$$

upotrebljujući Paulijeve matrice, obeležene ovde sa :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{IV.39.}$$

i sa tri realna parametra ϵ_ℓ . Matrice / ermitske / $I = 1/2\, \tau_\ell$ zadovoljavaju komutacione relacije :

$$[I_i, I_j] = i\, \epsilon_{ijk} I_k \qquad \text{IV.40.}$$

i

$$[I^2, I_j] = 0 \qquad \text{IV.41.}$$

gde je

$$I^2 = \sum_{j=1}^{3} I_j^2 \qquad \text{IV.42.}$$

Gornje relacije odredjuje Lie algebra od SU/2/. Veličine I su generatori te algebre, u opšte one mogu biti RAZMATRANE linearnim operatorima sa istim formalnim osobinama kao operatori spina. One su nazvane izospin operatori. U analogiji sa običnim spinom, uvodimo I^2 i treću komponentu I_3.

Ireducibilne reprezentacije su okarakterisane sa svojstvenim vrednostima I/I+1/od I^2, i obeležavaju se sa $D^{/I/}$. Dimenzija od $D^{/I/}$ je /2I+1/ i odgovara / 2I+1/ svojstvenim vrednostima od I_3. Osnova te ireducibilne reprezentacije je niz od /2I+1/ vektora u /2I+1/dimenzionalnom prostoru. Fundamentalna ireducibilna reprezentacija je dvodimenzionalna, ona odgovara izospinu 1/2. Osnovni element može biti pisan kao:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \qquad \text{IV.43.}$$

Osnovni elementi mogu biti napisani u opštoj formi $\xi_I^{I_3}$, i dobijeni u formi ireducibilnih tenzora kao :

$$\xi^1 \equiv \xi_{1/2}^{+1/2} \quad , \quad \xi^2 \equiv \xi_{1/2}^{-1/2} \qquad \text{IV.44.}$$

./.

IV. VIII. IZOSPINSKA KLASIFIKACIJA HADRONA

Klasifikacija elementarnih čestica u izospinske multiplete lako se izvršava dodavanjem svakom multipletu neku ireducibilnu reprezentaciju od SU/2/. Obeležimo stanje protona sa $|P\rangle$ i stanje neutrona $|N\rangle$ / ovde se interesujemo samo za unutrašnje kvantne brojeve stanja /. Bolja notacija bi bila $|P\rangle=|1/2,1/2\rangle$, $|N\rangle=|1/2,-1/2\rangle$ sa $|I,I_3\rangle$ svojstvenim stanjima od I i I_3. Mi ćemo radi jednostavnosti izostaviti ket notaciju i upotrebiti $\xi_I^{I_3}$ za $|I,I_3\rangle$. Dublet:

$$\xi=\begin{pmatrix}|P\rangle\\|N\rangle\end{pmatrix} \qquad \text{IV.45.}$$

koji je identifikovan sa osnovnim elementom I.R. od SU/2/, je nazvan nukleon. Pod SU/2/ on se transformiše kao :

$$\xi'=U\xi \qquad \text{IV.46.}$$

gde je

$$U=\begin{pmatrix}a & b\\-b^* & a^*\end{pmatrix}, \qquad aa^*+bb^*=1 \qquad \text{IV.47.}$$

tj.

$$\begin{aligned}|P'\rangle&=a|P\rangle+b|N\rangle\\|N'\rangle&=-b^*|P\rangle+a^*|N\rangle\end{aligned} \qquad \text{IV.48.}$$

Stanje antinukleona može biti identifikovano sa :

$$\xi^*=\begin{pmatrix}|\bar{P}\rangle\\|\bar{N}\rangle\end{pmatrix} \qquad \text{IV.49.}$$

i transformiše se kao

$$\xi'^*=U^*\xi^* \qquad \text{IV.50.}$$

tj.

$$\begin{aligned}|\bar{P}'\rangle&=a^*|\bar{P}\rangle+b^*|\bar{N}\rangle\\|\bar{N}'\rangle&=-b|\bar{P}\rangle+a|\bar{N}\rangle\end{aligned} \qquad \text{IV.51.}$$

Poznato je da su reprezentacije U i U^* od SU/2/ ekvivalentne, te je pogodno izraz IV.49. zameniti sa :

./.

$$\bar{\mathfrak{Z}} = \begin{pmatrix} |\bar{N}\rangle \\ -|\bar{P}\rangle \end{pmatrix} \qquad \text{IV.52.}$$

tako da se $\bar{\mathfrak{Z}}$ transformiše tačno kao $\mathfrak{Z}$. Znamo da je treća komponenta izospina I_3 povezana sa električnim nabojem Q pomoću :

$$Q = I_3 + 1/2\, Y \qquad \text{IV.53.}$$

gde je Y hipernaelektrisanje, Y = 1/B = 1/ za nukleone i Y = -1/B = +1/ za antinukleone. Situacija je slična za dva dubleta K i $\bar{K}$ mezona :

$$|K\rangle = \begin{pmatrix} |K^+\rangle \\ |K^0\rangle \end{pmatrix} , \quad |\bar{K}\rangle = \begin{pmatrix} |\bar{K}_0\rangle \\ -|K^-\rangle \end{pmatrix} \qquad \text{IV.54.}$$

koji imaju Y = + 1 i Y = -1 respektivno.

Naprimer posmatrajmo sistem od dva nukleona, postoje četiri moguća različita stanja : $|PP\rangle$, $|PN\rangle$, $|NP\rangle$, $|NN\rangle$. Klasifikovaćemo ta stanja dajući njihovu simetričnu i antisimetričnu kombinaciju. Antisimetrična kombinacija je :

$$\sqrt{1/2}\,\left(|PN\rangle - |NP\rangle\right) \qquad \text{IV.55.}$$

odgovara svojstvenom stanju izospina I = 0/ izospin singlet /. Simetrične kombinacije :

$$\begin{gathered} |PP\rangle \\ \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(|PN\rangle + |NP\rangle\right) \\ |NN\rangle \end{gathered} \qquad \text{IV.56.}$$

odgovaraju svojstvenim stanjima izospina I = 1 / izospin triplet /. Naelektrisanja različitih stanja su data sa jednačinom IV.53. sa Y = 2, pošto je sistem složen od dva nukleona sa Y = 1. Slično, za sistem od nukleona i antinukleona, uzimajući u obzir jednačinu IV.52. možemo pisati odgovarajuća svojstvena stanja za I = 0:

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\left(|P\bar{P}\rangle + |N\bar{N}\rangle\right) \qquad \text{IV.57.}$$

i za triplet:

$$\begin{gathered} |P\bar{N}\rangle \\ \sqrt{1/2}\,\left(|P\bar{P}\rangle - |N\bar{N}\rangle\right) \\ |N\bar{P}\rangle \end{gathered} \qquad \text{IV.58.}$$

Električni naboj je dobijen pomoću IV.53. sa $Y = 0$. Daljom primenom te procedure / I.R. SU/2/ grupe / moguće je klasifikovati sve jako interagujuće čestice u izospinske multiplete.

Ako pretpostavimo da jake interakcije zavise od totalnog izospina I a ne od treće komponente I_3, onda su jake interakcije nezavisne od naelektrisanja. Ta invarijantna osobina je ekvivalentna konzervaciji totalnog izotropnog spina. Treća komponenta je takodje očuvana, pošto je u relaciji sa naelektrisanjem u jednačini IV.53. Nezavisnost od naelektrisanja znači, na primer, da u sistemu od dva nukleona, umesto četiri moguće interakcije, koje odgovaraju 4-naelektrisana stanja, imamo samo dve : izospin singlet interakciju i izospin triplet interakciju.

IV. IX. OD S U/2/ DO S U /3/

Posmatranjem tabele hadrona, uključujući stabilne čestice / u odnosu na jake interakcije / i čestice koje se brzo raspadaju / rezonance/, primetilo se da se hadroni mogu distribuirati u supermultiplete, sačinjene od izospinskih multipleta, okarakterisanih sa istim barionskim brojem, spinom i parnošću. Potreban nam je viši stepen akstrakcije da bi dobili princip simetrije, pošto sada čestice, koje pripadaju istom multipletu imaju prilično velike razlike u masi. / Čak reda od nekoliko stotina MeV /, zbog postojanja nuklearne interakcije. Različiti izospinski multipleti u SU/3/ multipletima su okarakterisani, uopšte, sa različitim hipernaelektrisanjem. Stranost S, ili ekvivalentno : hipernaelektrisanje Y / B - barinski broj / je uzeto da se očuvava u jakim interakcijama, a narušava u slabim interakcijama. Svakom hadronu vrednost za Y / ili S / može biti dodata- pridružena. Tada imamo multiplete, svaki element je okarakterisan sa dva unutrašnja kvantna broja : trećom komponentom izospina I_3 i hipernaelektrisanjem Y. Oni su u relaciji sa naelektrisanjem u čuvenoj Gell-Mann-Nishima formuli:

$$Q = I_3 + 1/2\, Y \qquad \text{IV.59.}$$

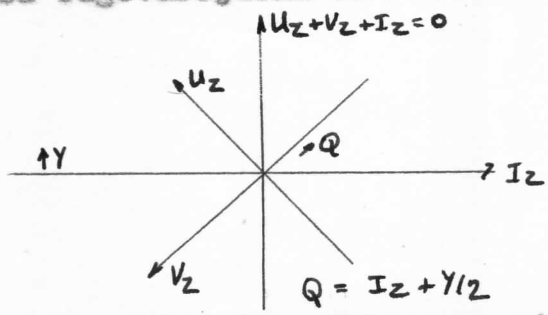
Grupa SU/3/ mora sadržati SU/2/ grupu kao podgrupu.

IV. X. S U/3/ GRUPA I ELEMENTARNE ČESTICE

Znatan napredak u primeni simetrije na elementarne čestice postignut je sa idejom o generalizaciji izotopske invarijantnosti za sve jako interagujuće čestice, uvodjenjem viših multipliciteta, kojima ove čestice treba da pripadaju. Formalno ovo znači, dodavanje novih dimenzija grupama, koje smo do sada razmatrali. Prvo, treba pomenuti staru ideju o sastavu svih poznatih čestica iz nekoliko osnovnih. Najvažniji važeći model je Sakata model, po kome jako interagujuće čestice su sastavljene od takozvanih "elementarnih" čestica: protona, neutrona, hiperona i njihovih antičestica. Taj model predpostavlja da su nukleoni / i lambda hiperon / zajedno vezani sa nekim veoma jakim silama, tako da je njihova vezivna energija znatna u odnosu na mase mirovanja i jednaka je razlici u masama početnih i složenih čestica / na primer za π mezon vezivna energija iznosi $2M_N - M_\pi$ = 1740 MeV/. Taj model proriče da je anihilaciona relacija zabranjena:

$$\bar{p} + p \rightarrow K_1^0 + K_2^0 \qquad \text{IV.60.}$$

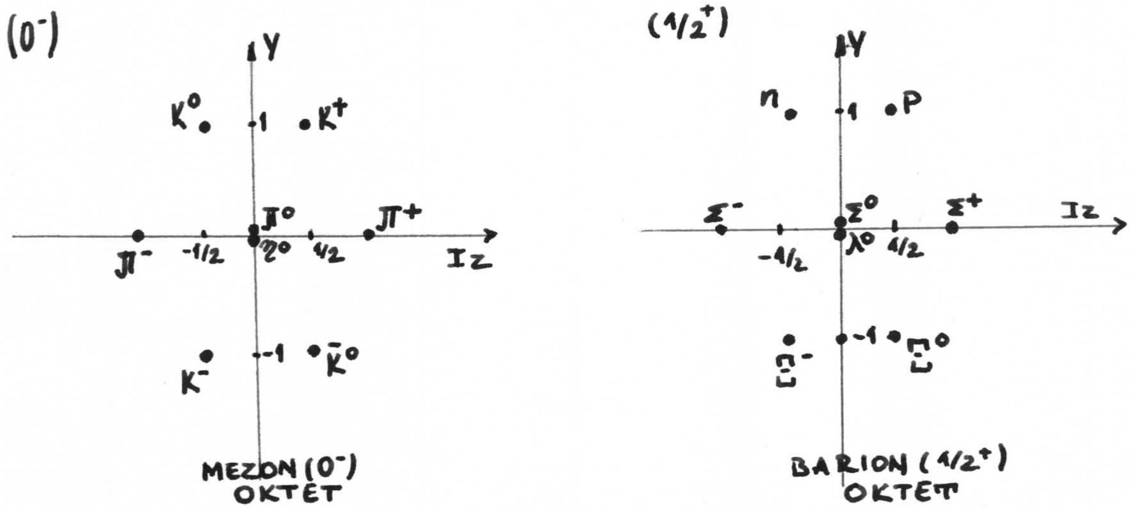
na osnovu simetrije izmedju prelaza $p \leftrightarrow \bar{p}$, $n \leftrightarrow \lambda$, $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$. Medjutim ova reakcija je eksperimentalno posmatrana i iz toga sledi da je simetrija izmedju tih čestica samo aproksimativna. 1961.- 62. god. Gel Mann i Neihman razvili su ideju o uopštavanju simetrične izospinske grupe SU/2/ u simetriju tipa SU/3/. Kao osnovna misao toga je bila da sve poznate čestice treba da formiraju " grupu " koja odgovara jedninstvenom supermultipletu. Takav slučaj je sa osam mezona / $\pi^+, \pi^0, \pi^-, \eta^0, K^+, K^-, \bar{K}^0, K^0$ / i osam bariona / $p, n, \lambda, \Sigma^0, \Sigma^+, \Sigma^-, \Xi^0, \Xi^-$ /. Zbog te činjenice novi model je nazvan " model okteta " ili " osmostruki put ". Fizički to povlači neku dodatnu spin simetriju izmedju tih čestica, naime dodatnu simetriju izmedju novih spinova U i V koji dopunjuju " stari " izospin I. Ta tri izospina su medjusobno povezana relacijom $I_z + V_z + U_z = 0$ i mogu se zbog toga predstaviti u ravni zajedno sa odgovarajućim česticama kao na slici 1.



Slika 1. Dijagram unitarnih spinova

./.

Ti Takozvani " dijagrami težina " / koji su opravdani po teoriji grupa / su dati za slučaj mezona i bariona na slici 2.



Slika 2. Dijagrami težina za mezone i barione

Sa slike 2. vidimo da je svaka komponenta multipleta predstavljena tačkom u I_z-Y ravni. Oznake / 0^-/ i / $1/2^+$/ predstavljaju spin i parnost.

Sada u slučaju oktetnog modela, predpostavljamo da su interakcije invarijantne u odnosu na spinove I i V / takodje i prema U /. Osnovu simetrične grupe čine osam nezavisnih parametara datih sa matricama :

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\+i&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \qquad \text{IV.61.}$$

Te matrice podležu kompletnoj analogiji sa Paulijevim matricama u SU/2/ komutacionim relacijama:

$$[\lambda_i,\lambda_j]=2i f_{ijk}\lambda_k \qquad \text{IV.62.}$$

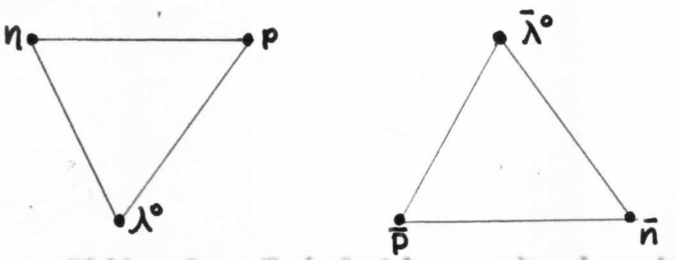
gde su koeficijenti f_{ijk} realne konstante, komponente antisimetričnog tenzora. U grupi SU/3/ imamo tri osnovne čestice, što je očigledno iz reda matrica λ_i . Pogodno je izabrati za ove tri

./.

čestice : proton, neutron i λ^0 hiperon / i njihove antičestice /. Odgovarajuće matrice su

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} p \,, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} n \,, \quad \psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda^0 \qquad \text{IV.63.}$$

Obeležićemo quark triplet sa $q = (p, n, \lambda^0)$ i antiquark triplet sa $\bar{q} = (\bar{n}, \bar{p}, \bar{\lambda}^0$ ili oznakama 3 i $\bar{3}$ respektivno. Oni mogu biti predstavljeni u dijegramu težina kao :

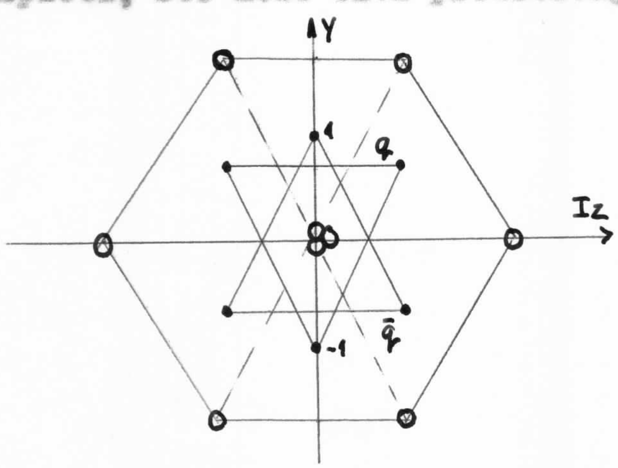


Slika 3. Tripleti quarka i antiquarka

Ta osnovna stanja mogu biti postavljena kao i za izospinska stanja. Ako ih označimo sa njihovim brojevima, onda kompozicija osnovnog stanja 3 sa datim odgovarajućim antičesticama $\bar{3}$ vodi u nova stanja 8 / oktet / i 1 / singlet /:

$$3 \otimes \bar{3} = q \otimes \bar{q} = 1 + 8 \qquad \text{IV.64.}$$

Potpuno singletno antisimetrično stanje pripisuje se čestici koja ima I= 0. Na taj način dobijamo u SU/3/ nove multiplicitete iz osnovnih tripleta, što može biti predstavljeno kao :



Slika 4. SU/3/ metod dobijanja novih multipleta iz osnovnih tripleta

Veliki uspeh ove šeme je u mogućnosti uključenja rezonanci u SU/3/, zajedno sa drugim česticama u saglasnosti sa njihovim kvantnim brojevima.

Kada uzmemo čestice kao bitne delove izomultipleta, simetrija se održava, ali uzimajući u obzir individualne elektromagnetne karakteristike tih čestica / njihovu elektromagnetnu interakciju/ unutar multipleta, simetrija je narušena. " Uključenje " normalno jake interakcije deli čestice u supermultipletima i narušava simetriju SU/3/. Cepanje je proporcionalno komponentama spina, koji pripada datim pravcima polja. Ta analogija dolazi iz slučaja elektromagnetnih cepanja spektralnih linija u magnetnom polju, koje zavisi od uzajamne orijentacije spina emitujućih čestica sa pravcem vektora magnetnog polja.

IV. XI. PRIMENA S U/3/ SIMETRIJE

Uzimajući da umerenom jakom vezivanju izmedju čestica odgovara proporcionalno vrednost spina V, tada postaje moguće da se dodje do nekih relacija izmedju kvantnih brojeva čestica unutar multipleta i njihovih masa. Pošto su čestice sastavljene od tri osnovne čestice možemo predpostaviti da će rezultujuće čestice imati njihove mase u srazmeri masa protona, neutrona i λ^0 hiperona, zanemarujući elektromagnetne razlike u masi mirovanja protona i neutrona :

$$M_{q_p} = M_{q_n} < M_{q_{\lambda^0}} \qquad \text{IV.65.}$$

Iz tih cepanja sledi Gell-Mann-Okubo formula za mase čestica koje pripadaju multipletu:

$$M = a + bY + c\left[I(I+1) - \frac{Y^2}{4}\right] \qquad \text{IV.66.}$$

gde I i Y imaju svoje uobičajeno značenje, a veličine a,b,c su konstante za dati multiplet. Isključujući njih možemo dobiti relacije izmedju masa mirovanja unutar multipleta, tj. u slučaju barion okteta dobijeno je

$$\frac{M_N + M_\Xi}{2} = \frac{3M_{\lambda^0} + M_\Sigma}{4} \qquad \text{IV.67.}$$

što je i eksperimentalno potvrdjeno. SU/3/ simetrija je predvidela postojanje čestice Ω^- sa kvantnim brojevima $I = 0$, $Q = -1$, $S = -3$. Iz posmatranja Gell-Mann-Okubo formule primenje na decuplet barion.

./.

skih rezonancija dobijeno je da je masa Ω^- data sa :

$$M_{\Omega^-} = 1675 \, MeV$$

$$I=0 \, , \quad Y=-2 \qquad \text{IV.68.}$$

Pošto je masa te čestice manja od sume masa Ξ i K čestica, Ω^- - čestica nemože se raspasti u te čestice jakom interakcijom / $\Delta S=0$ / i jedino slabi raspad na $\lambda + K$ ili $\Xi + \pi$ čestice je moguć / $\Delta S= 1$ /. Takav raspad ima vreme života reda 10^{-10}s i Ω^- je bila poslednja neotkrivena stabilna čestica prema jakom raspadu. Ta čestica je tražena putem eksperimenta sa vodonikovom komorom, i posle dve godine proučavanja fotografija iz mehuraste komore pronadjena je 1964.godine. Utvrdjeno je da su njena masa i kvantni brojevi baš onakvi, kako su predvidjeni SU/3/ simetrijom, to je sigurno jedan od najvećih uspeha SU/3/ simetrije.

Za mezon multiplet kvadratna je masena formula, i ona je simetrična po Y :

$$M^2 = a' + c'\left[I(I+1) - \frac{Y^2}{4}\right] \qquad \text{IV.69.}$$

Iz gornjeg izraza dobijena je relacija izmedju masa :

$$\frac{3M_{\eta}^2 + M_{\pi}^2}{4} = M_K^2 \qquad \text{IV.70.}$$

koja nije tako dobro eksperimentalno potvrdjena kao u slučaju IV.67.

Primena SU/3/ simetrije je uspešna u domenu jakih interakcija. Posmatrajući sliku 1. u IV.10., zaključeno je da je ponašanje spina U ista kao i za spinove I i V. Spin I je očuvan jakom interakcijom, a spin U je odgovoran za očuvanje elektromagnetnog naboja čestica / polja /, pošto linije konstantnog U označavaju naboj koji je konstantan u svim dijagramima težina. Predpostavljajući konstantnost totalnih spinova U i I za elektromagnetnu interakciju jako interagujućih čestica, dobijene su neke relacije čak i za čestice različitih naelektrisanja. Uzimajući eksperimentalnu relaciju izmedju masa nukleona :

$$M_{q_p} < M_{q_n} \ll M_{q_\lambda} \qquad \text{IV.71.}$$

a dobijene su uzajamne relacije izmedju elektromagnetnih karakte-

./.

ristika čestica, na primer za magnetne momente,dobijeno je:

$$\mu_{\Sigma^+} + \mu_{\Sigma^-} = 2\mu_{\Sigma^0}$$
$$\mu_{\Sigma^+} = \mu_p$$
$$\mu_{\Xi^-} = \mu_{\Sigma^-} = -(\mu_p + \mu_n)$$
$$\mu_{\Xi^0} = \mu_n$$
$$\mu_{\Sigma^0} = -1/2\,\mu_n$$
$$\mu_\Lambda = 1/2\,\mu_n \qquad \text{IV.72.}$$

Nažalost, samo poslednju relaciju je moguće testirati eksperimentalno sa dovoljnom tačnošću, sa pozitivnim rezultatom, kada je $\mu_\lambda/\mu_n = 0{,}4 \pm 0{,}2$. Predpostavljajući očuvanje I i U spinova, postoji mogućnost da se dodje do Colemon-Glashow formule za relaciju izmedju masa naelektrisanih čestica

$$M_n - M_p + M_{\Sigma^+} - M_{\Sigma^-} + M_{\Xi^-} - M_{\Xi^0} = 0 \qquad \text{IV.73.}$$

koja se veoma dobro slaže sa eksperimentom. SU/3/ simetrija povezuje zajedno čestice sa brojem stranosti $S \neq 0$, kao i $S = 0$, može se sasvim dobro desiti da ovo povezivanje bude naglašeno i kod slabe interakcije. Zna se da su procesi, koji su obuhvaćeni sa slabim interakcijama opisani prostornim članom vektorske i aksialne struje, i da ih je moguće podeliti na član sa $\Delta S = 0$ i član sa $\Delta S \neq 0$:

$$J_\lambda = \underset{\Delta S = 0}{a[\Psi_p \gamma_\lambda (1+\gamma_5)\Psi_n]} + \underset{\Delta S \neq 0}{b[\bar{\Psi}_p \gamma_\lambda (1+\gamma_5)\Psi_n]} \qquad \text{IV.74.}$$

gde konstante a i b predstavljaju intenzitet različitih delova struja. Zbog normalizacije totalne struje prikazane gornjim jednačinama, koeficijenti a i b mogu da se izraze u zavisnosti jednog parametra, ugla :

$$a^2 + b^2 = 1$$
$$a = \cos\Theta_c \qquad b = \sin\Theta_c \qquad \text{IV.75.}$$

Taj ugao je nazvan Cabibbo ugao i on može biti procenjen eksperimentalno. Naime, za raspad K mezona i π mezona dobijeno je:

$$\frac{T(K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu)}{T(\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu)} = \tan^2\Theta_c \frac{m_K}{m_\pi} \frac{1 - \frac{m_\mu^2}{m_K^2}}{1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}} \qquad \text{IV.76.}$$

što vodi do vrednosti $\Theta_c = 14{,}3^\circ$ / o,26 u radijanima/.Slično se može postupiti i u slučajevima nekih drugih raspada.Saglasnost sa predvidjanjima/teorijskim/ u vrednosti Θ_c je stoga eksperimentalna provera sigurnosti, ali još nedovoljno proučena relacija u nekim višim simetrijama izmedju čestica, koje imaju $S = 0$ i $S \neq 0$.

L I T E R A T U R A

А.А. БОГУШ И Л.Г. МОРОЗ : ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ
НАУКА, МИНСК 1968

A.P. CRACKNELL : APPLIED GROUP THEORY, PERGAMON PRESS, LONDON 1968.

G. COSTA : TEXTBOOK ON ELEMENTARY PARTICLE PHYSICS, CHAPTER 5 : INTERNAL SYMMETRIES / TEPP PROJECT /

W.E. BURCHAM : NUKLEARNA FIZIKA UVOD / SA FIZIKOM ČESTICE / NAUČNA KNJIGA, BEOGRAD 1974.

W.E. FISHER : ELEMENTARY INTRODUCTION INTO SYMMETRIES AND CONSERVATION LAWS / TEPP PROJECT /

H. GOLDSTEIN: CLASSICAL MECHANICS, LONGWAYS, CAMBRIDGE 1953.

G.G. HALL : APPLIED GROUP THEORY, LONGWAYS, LONDON 1967.

L.van HOVE : RECENT DEVELOPMENTS IN HIGH ENERGY PHISICS, from TRENDS IN PHYSICS EUROPEAN PHYSICAL SOCIETY, GENEVA 1973.

L.D. LANDAU i E.M. LIFŠIC : KVANTNA MEHANIKA / NERELATIVISTIČKA TEORIJA / GRADJEVINSKA KNJIGA BEOGRAD 1966.

L.D. LANDAU i E.M. LIFŠIC : TEORIJA POLJA, NAUČNA KNJIGA BEOGRAD 1952.

H.J. LIPKIN : QUANTUM MECHANICS, NORTH HOLLAND, AMSTERDAM 1973.

H.J. LIPKIN : LIE GROUPS FOR PEDESTRIANS, NORTH HOLLAND, AMSTERDAM 1966.

Đ. MUŠICKI : UVOD U TEORIJSKU FIZIKU I.II deo, NAUČNA KNJIGA, BEOGRAD 1965.

E. NIKOLIĆ : PRINCIPI INVARIJANTNOSTI I ZAKONI KONZERVACIJE, DIPLOMSKI RAD, BEOGRAD 1969.

Ю. НОВОЖИЛОВ: ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЭЛЕМЕНТАРЫХ ЧАСТИЦ, НАУКА, МОСКВА 1972

L.B. OKUN : WEAK INTERACTION OF ELEMENTARY PARTICLES, PERGAMON PRESS, LONDON 1965.

J.J. SAKURAI: ADVANCED QUANTUM MECHANICS, ADDISON-WESLEY, CHICAGO 1967

I. SUPEK : TEORIJSKA FIZIKA I STRUKTURA MATERIJA, TEHNIČKA KNJIGA, ZAGREB 1949.

V. ŠIMAK : HIGH ENERGY PHYSICS, PERGAMON PRESS, LONDON 1968.