PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

NOVI SAD

# D I P L O M S K I   R A D

T E M A: NELINEARNI EFEKTI U SISTEMU EKSITONA I BOZE KONDENZACIJA

RADJEN IZ PREDMETA: KVANTNA MEHANIKA KOD PROFESORA TOŠIĆ DR BRATISLAVA

STUDENT,
KOZMIDIS F. URANIJA

Zahvaljujem dr Bratislavu Tošiću koji mi je predložio ovu temu i rukovodio njenom izradom, na svestranoj podršci i korisnim savetima. Takodje se zahvaljujem mr Škrinjar Mariu.

# S A D R Ž A J

Strana

# U V O D

Neodržanje broja čestica ili kvazičestica u sistemu je problem kome je do danas posvećeno relativno malo pažnje.

Prvi sistem u kome operator totalnog broja čestica nije komutirao sa hamiltonijanom bio je tečni $He^4$ u uslovima Boze kondenzacije. Iako se smatralo da je rešenje problema dato pedesetih godina ovakvog veka [10] tek četvrt veka kasnije [11] obraćena je pažnja na činjenicu da "u-v transformacija koja se u ovakvim slučajevima neophodno mora koristiti izbacuje iz anharmonijskog dela hamiltonijana delove koji koriguju harmonijski spektar. Treba podvući da ovo nisu korekcije proporcionalne koncentraciji elementarnih ekscitacija, već čisto harmonijski delovi. Tek rezultati referenci [11] predstavljaju kvalitativnu teoriju tečnog $He^4$ u smislu poklapanja sa eksperimentalnim rezultatima.

Na sl. 1.1 date su krive, tačnije spektar elementarnih ekscitacija za tečni $He^4$.

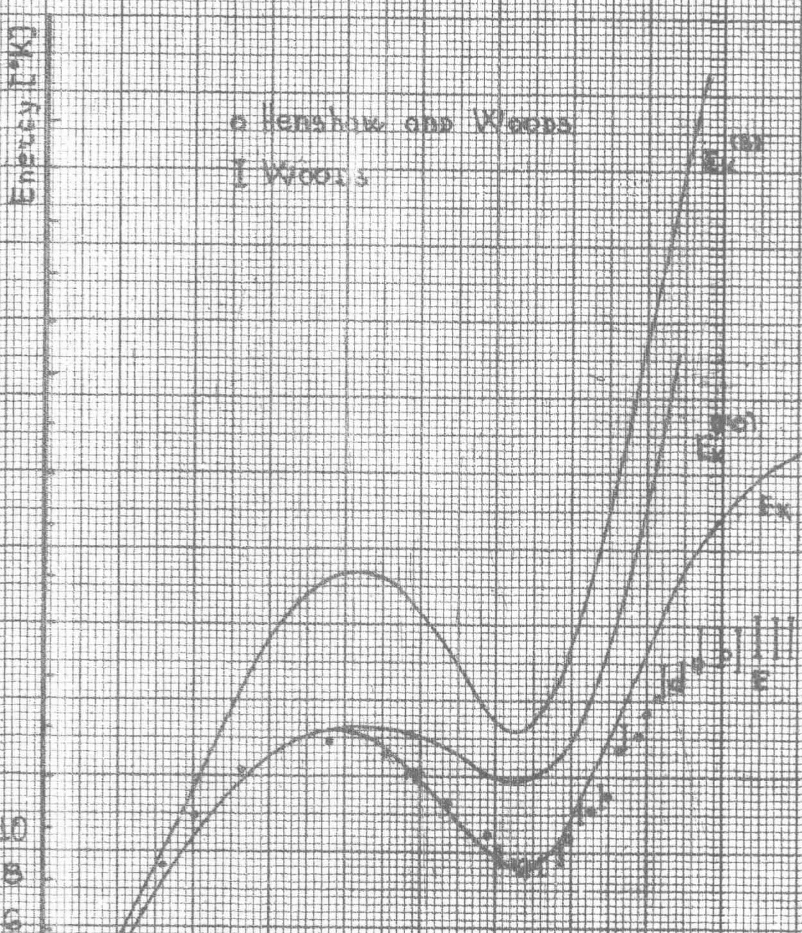
$E_k^{(B)}$ - je kriva koju je dobio Bogoljubov

$E_k^{(FO)}$ - kriva Fejmana

$E_k$ - kriva koju je dobio Sunakawa

$E$ - eksperimentalno dobijena kriva

Očevidno najbliža eksperimentalnoj je kriva $E_k$



Energy [°K]
o Henshaw and Woods
I Woods
10
8
6
4
2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
Ex
E
k [Å⁻¹]


1.1

## I. G L A V A

## SPEKTAR TEČNOG $He^4$

### Teorija superfluidnosti Boze i Fermi-sistema

Kao što je poznato, u slučaju idealnog Boze-gasa pri dovoljno niskim temperaturama obrazuje se kondenzat, tj. kod najvećeg broja čestica impulsi su tačno nula. Na temperaturi nula se sve čestice nalaze u tom stanju. I pored toga takav kondenzat ne formira vezan kolektiv i zato ne poseduje svojstvo superfluidnosti. Ako se on kreće kao eelina, ništa ne sprečava usporavanje pojedinih čestica (zbog sudara sa zidovima i primesama) i njihovo iśpadanje iz kondenzata.

Sasvim je drugačija stvar pri postojanju makar i slabe interakcije odbojnog tipa. U tom slučaju kondenzat obrazuje vezan kolektiv i pri njegovom kretanju kao celine, zapažanje posebnih čestica, njihovo ispadanje iz kondenzata postaje energijski nepovoljnim, ako je samo brzina kretanja dovoljno mala. Na taj način se javlja osobina superfluidnosti.

Za dobijanje tog rezultata neophodno je bilo razmotriti niskoenergijski deo spektra pobudjenja.

Matrični elementi koji odgovaraju virtualnom ispadanju čestica iz kondenzata, praćeni su energijskim imeniteljima oblika $\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} \cdots\cdots + \frac{p_{2s}^2}{2m}$. Uopšte takvi imenitelji pri integraciji po $p_1, p_2 \ldots p_{2s}$ nisu opasni i ne dovode do raskoraka, osim u jednom slučaju, kada nastaje virtualno stvaranje dve čestice sa impulsima $\pm P$. U tom slučaju javljaju se energijski imenitelji oblika $\left(\frac{p^2}{2m}\right)^n$, koji dovode do raskoraka.

Sa fizičke tačke gledišta to znači da, u takvim slučajevima kada je interakcija proporcionalno malom parametru, medju dejstvo izmedju čestica sa suprotnim impulsima je veoma bitno, ako su samo ti impulsi mali. Ta teškoća se otklanja posredstvom posebne metode kanonskih transformacija. Umesto Boze-amplituda $b_k$, $b_k^+$ koje opisuju ispadanje čestica iz kondenzata i njihov povratak u kondenzat, uvode se nove Boze-amplitude $\xi_k$, $\xi_k^+$ posredstvom transformacija

$$b_k = U_k \xi_k + V_k \xi_k^+ \qquad \text{I-1.1}$$

u kojima $U_k$ i $V_k$ su materijalne funkcije impulsa, povezane odnosom

$$U_k^2 - V_k^2 = 1 \qquad \text{I-1.2}$$

i obezbedjuju kanoničan karakter transformacija.

Uvedene funkcije $U_k$, $V_k$ biraju se tako da se u posmatranoj aproksimaciji osnovni članovi interakcije izmedju "novih bozona" anuliraju. Na taj način je bila dobijena formula za elementarna pobudjenja

$$\mathcal{E}(P) = \sqrt{\frac{P^2}{m}\nu(P) + \left(\frac{P^2}{2m}\right)^2} \qquad \text{I-1.3}$$

gde je $\nu(P)$ amplituda rasejanja dve čestice. Odavde nije teško utvrditi da posmatrani dinamički sistem poseduje osobinu superfluidnosti.

Uzmimo novi sistem $\vec{P} \longrightarrow \vec{P} - m\cdot\vec{u}$

i izgradimo za njega odgovarajće stanje koje označimo sa $C_u$. Jasno je da će čestice koje su bile u sistemu koji miruje (u starom), u stanju $C_u$ imaće srednju brzinu $\vec{u}$. Nije teško zapaziti da će energija elementarne ekscitacije za sistem koji se kreće $C_u$, u "mirujućem" sistemu biti jednaka $E(P) - (\vec{P}\cdot\vec{u})$. Neka je brzina $u$ manja od neke kritične

$$|\vec{u}| < u_{kr} = \min_{(P)} \frac{E(P)}{|P|} \qquad \text{I-1.4}$$

Za takve brzine energije elementarnih ekscitacija su pozitivne. Zbog toga zapažanje pojedinih čestica putem ispadanja iz kolektiva ili samo radjanje elementarnih ekscitacija, energijski je nepogodno.

Stanje $C_u$ biće kao posledica, nestabilno za $|\vec{U}| < U_{kr}$. Mi sada imamo vezan kolektiv koji poseduje svojstvo superfluidnosti.

U slučaju idealnog gasa ( $E(P) = \frac{P^2}{2m}$ )

$$\min_{(P)} \frac{E(P)}{|P|} = 0 \qquad \text{I-1.5}$$

i superfluidnosti neće biti.

Nije teško zapaziti da se osobina superfluidnosti može tretirati kao svojstvo superfluidnosti sistema elektrona u metalu. Sistematski je razmotren model Freliha, u kom se hamiltonijan sistema daje kao suma hamiltonijana elektrona, fonona i elektron-fonon interakcije.

Matrični elementi koji odgovaraju radjanju "čestica" iz "vakuuma" (Fermi-sfera) uvek bivaju praćeni energijskim imeniteljima

$$\left\{ \mathcal{E}(K_1) + \dots + \mathcal{E}(K_{2s}) + \omega(q_1) + \dots \omega(q_{2s}) \right\}^{-1} \qquad \text{I-1.6}$$

gde je $\mathcal{E}(K) = |E(K) - E_F|$ i označava energiju čestica, elektrona ( $E(K) > E_F$ ) ili šupljine ( $E(K) < E_F$ ) i postaje mala pored Fermi-površine.

Uopšte govoreći takvi imenitelji nisu "opasni" i pri integraciji po impulsima do raskoraka dovode samo u slučaju virtualnog procesa rodjenja jednog para bez fonona. Tada će zbog zakona očuvanja, čestice tog para imati suprotno usmerene impulse $\pm K$ i energijski imenitelj $\{ 2\mathcal{E}(K) \}^{-1}$ postaje "opasan" pri integraciji. Zapazimo da će spinovi tog para takodje biti suprotno usmereni.

Opšta metoda kanonskih transformacija uvodi nove Fermi-amplitude $\alpha$ pomoću sledećih relacija

$$\begin{aligned} \alpha_K^+ &= U_K \alpha_{K0} + V_K \alpha_{K1}^+ \\ \alpha_K^- &= U_K \alpha_{K1} - V_K \alpha_{K0}^+ \\ U_K^2 &+ V_K^2 = 1 \end{aligned} \qquad \text{I-1.7}$$

$u_k$ i $v_k$ odredjujemo iz integralne jednačine koje izražava uslov preobraćenja u nulu sumarnog udela dijagrama za virtuelni proces radjanja dva fermiona. Na taj način mi uništavamo one matrične elemente koji se javljaju kao "opasni" energijski imenitelji i likvidiramo prepreku za primenu teorije pobudjenja. Tako je dobijena formula za izračunavanje osnovnog superfluidnog stanja i njegovih ekscitacija fermionskog tipa s karakterističnom energijskom pukotinom.

Osnovni principi teorije superfluidnosti

Pojavu superfluidnosti otkrio je P.L.Kapica 1938. godine. Pokazalo se da tečni helijum trpi fazni prelaz na temperaturi 2,19° apsolutne skale. Ispod te kritične temperature javlja se osobina superfluidnosti. Tečni helijum se tada sastoji od dve komponente: superfluidne, potpuno lišene viskoznosti, i normalne. Pri smanjenju temperature do apsolutne nule odnos sadržaja superfluidne komponente približava se jedinici, a pri uvećanju temperature do kritične, količina superfluidne komponente približava se nuli.

Prirodno da je pojava superkonduktivnosti i superfluidnosti veoma zainteresovala teoretičare i uslovila pojavu velikog broja istraživanja. Ta istraživanja su išla uglavnom u dva pravca: izgradnja fenomenološke ili makroskopske teorije i izgradnja mikroskopske teorije.

Neophodno je podvući duboku razliku u prilazima kod samih teorija.

Zadatak makroskopske teorije, kao što je poznato, je dobijanje jednačina tipa klasičnih jednačina matematičke fizike koje bi odražavale celokupnost eksperimentalnih fakata (koji se odnose na proučavane makroskopske objekte). Te jednačine se izvode na osnovu niza pretpostavki koje daju vezu izmedju različitih makroskopskih veličina.

U mikroskopskoj teoriji postavlja se dublji zadatak, koji se sastoji u tome da se razume unutrašnji mehanizam pojave, koji proizilazi iz zakona kvantne mehanike. Za izgradnju makroskopske teorije neophodno je razmotriti postojeći dinamički sistem, okarakterisan odredjenim hamiltonijanom i uz pomoć analize odgovarajućih jednačina kvantne mehanike odrediti osnovna svojstva proučavane pojave.

Makroskopsku teoriju superfluidnosti razradio je Tisso 1938.[1] i bitno poboljšao L.D.Landau 1941.[2]

U teoriji Tissoa tečni $He^4$ na temperaturi nižoj od temperature faznog prelaza razmatrao se kao skup superfluidne i normalne komponente, pri čemu se svaka može kretati sa svojom brzinom. U skladu sa time jednačine hidrodinamike gradjene su kao jednačine hidrodinamike dve tečnosti.

U teoriji Landaua pažnja je bila obrađena na to da se kretanje superfluidne komponente razlikuje od kretanja normalne ne samo odsustvom viskoznosti, nego i time da je ono obavezno potencijalno. Na taj način su dobijene nešto drugačije hidrodinamičke jednačine.

## Fenomenološka teorija Landaua

Suprotno od gasova i čvrstih tela tečnosti ne dopuštaju mogućnpst izračunavanja termodinamičkih veličina uopštem obliku, pa čak ni njihove temperaturske zavisnosti. Uzrok ovome je u postojanju jake interakcije molekula tečnosti te u isto vreme, odsustvo malih vrednosti oscilacija. Za izračunavanje temmodinamičkih veličina kod tečnosti bitno je poznavanje konkretnog zakona interakcije, a ovaj je sa svoje strane različit za razne tečnosti.

U opštem obliku, defakto, jedino što se može uraditi jeste ispitivanje svojstva tečnosti u blizini apsolutne nule. Bitno je reći da u prirodi postoji samo jedna supstanca - helijum, koja i sasvim blizu apsolutne nule može ostati u tečnom stanju. Prema klasičnoj mehanici sva tela bi na temperaturi apsolutne nule morala biti u čvrstom stanju, helijum medjutim, zahvaljujući slaboj interakciji njegovih atoma ostaje u tečnom stanju ("kvantna tečnost") i prelaz u čvrsto stanje uopšte ne mora nastupiti.

Iako ispitivanja i klasifikacija svih mogućih tipova energetskih spektara slabo pobudjenih stanja kvantne tečnosti ni danas ne daju sasvim precizno rezultate, moguć-no je navesti uglavnom dva tipa spektra pri čemu treba napomenuti da nema nikakve smetnje za postojanje i trećih tzv. kombinovanih vrsta spektra.

Jedan od mogućih tipova energetskog spektra je spektar "Boze-ovog" tipa, karakteriše se time što elementarne ekscitacije mogu pojedinačno nastajati i isčezavati. Moment količine kretanja svakog kvantno-mehaničkog sistema (cele tečnosti) može se menjati samo za vrednost celog broja. Znači, elementarne ekscitacije koje pojedinačno nastaju moraju imati moment izražen celim brojevima.(otuda pokoravanje Boze-ovoj statistici).

Pri malim impulsima, tj. za velike vrednosti talasne dužine, te ekscitacije odgovaraju običnim zvučnim talasima u tečnosti tj. predstavljaju fonone, što znači da je energija elementarnih ekscitacija linearna funkcija impulsa.

$$\mathcal{E} = u \cdot P \qquad /\text{ZA MALO „}P\text{"}/$$

gde je $u$ brzina zvuka u tečnosti. Sa povećanjem impulsa kriva $\mathcal{E}=\mathcal{E}(P)$ odstupa od linearne zavisnosti, a njen dalji oblik zavisi od konkretnog zakona interakcije molekula tečnosti.

Pri dovoljno velikim impulsima funkcija $\mathcal{E}(P)$ uopšte ne mora postojati, budući da su elementarne ekscitacije sa suviše velikim impulsima nestabilne i dele se na nekoliko ekscitacija sa manjim impulsima (i energijama).

Kvantna tečnost sa energetskim sprektrom opisanog tipa morala bi posedovati svojstvo da protiče po uskim kapilarama ili prorezima bez viskoznosti, tj. morala bi posedovati svojstvo SUPERFLUIDNOSTI.

Posmatrajmo tečnost na apsolutnoj nuli, u svom normalnom nepobudjenom stanju.

Pri proticanju tečnosti kroz kapilar konstantnom brzinom $\vec{v}$ postojanje viskoznosti ispoljilo bi se na taj način što bi se zahvaljujući trenju o zidove cevčice i trenju u samoj tečnosti, nastala disipacija kinetičke energije tečnosti i postepeno usporavanje proticanja.

Neka je koordinantni sistem vezan za tečnost. U tom sistemu helijum miruje, a zidovi kapilare kreću se brzinom $(-\vec{v})$. Ukoliko postoji viskoznost, $He^4$ , koji bi inače mirovao, takodje počinje da se kreće, pri čemu nastajanje kretanja mora početi od postepene ekscitacije unutrašnjih kretanja, tj. od pojave elementarnih ekscitacija u tečnosti.

Predpostavimo da u tečnosti nastaje jedna elementarna ekscitacija sa impulsom $\vec{P}$ tečnosti, u datom sistemu i energijom $\mathcal{E}(\vec{P})$. Ukoliko sada predjemo na koordinantni sistem vezan za kapilaru, shodno formulama transformacije energije i impulsa, za energiju $E$ i impuls $\vec{P}$ tečnosti u datom sistemu dobijamo sledeće relacije

$$E = E_0 + \vec{P}_0 \cdot \vec{v} + \frac{Mv^2}{2} \qquad \vec{P} = \vec{P}_0 + M\vec{v} \qquad I-3.1$$

gde je $M$ - masa tečnosti a $E_0$ i $P_0$ njena energija i impuls (u koordinatnom sistemu u kome je ona prvobitno mirovala).

Uzimajući $\mathcal{E}$ i $\vec{P}$ umesto $E_0$ i $\vec{P}_0$ možemo napisati

$$E = \mathcal{E} + \vec{P} \cdot \vec{v} + \frac{Mv^2}{2} \qquad I-3.2$$

član $\frac{Mv^2}{2}$ predstavlja prvobitnu kinetičku energiju tečnosti koja protiče, a $\mathcal{E} + \vec{P} \cdot \vec{v}$ promenu energije koja nastaje usled pojave ekscitacije. Ta promena mora biti negativna jer se energija tečnosti koja se kreće mora smanjivati

$$\mathcal{E} + \vec{P} \cdot \vec{v} < 0 \qquad I-3.3$$

Pri zadatoj vrednosti impulsa veličina na levoj strani nejednakosti ima najmanju vrednost kada su $\vec{P}$ i $\vec{v}$ antiparalelni.

U svakom slučaju

$$/\text{KAD IMA TRENJA}/ \quad \varepsilon - p\nu < 0 \implies \nu > \frac{\varepsilon}{p} \qquad \text{I-3.4}$$

Ova nejednakost mora biti ispunjena makar za neke vrednosti impulsa elementarne ekscitacije. Konačan uslov za pojavu ekscitacije u tečnosti koja se kreće kroz kapilaru dobija se nalaženjem minimuma veličine $\frac{\varepsilon}{p}$. Ukoliko je dobijena minimalna vrednost različita od nule, za nesasvim velike brzine proticanja tečnosti se ne mogu pojaviti ekscitacije. To znači da se njeno proticanje neće usporavati i tečnost će pokazati osobinu superfluidnosti.

Sada ćemo posmatrati tu istu tečnost na temperaturi različitoj od apsolutne nule kada se ova ne nalazi u osnovnom stanju, sadrži dakle ekscitacije. Kretanje tečnosti u odnosu na zidove cevčice, pri ispunjavanju navedenog uslova, ne može dovesti do pojave novih elementarnih ekscitacija u njoj, ali je važno saznati na koji će se način manifestovati postojanje ekscitacija koje su već u tečnosti.

U tu svrhu izvršićemo sledeće izračunavanje. Zamislimo da se "gas elementarnih ekscitacija" kreće translatorno kao celina brzinom $\vec{v}$ u odnosu na tečnost. Funkcija raspodele za gas koji se kreće kao celina dobija se iz funkcije raspodele $n(\varepsilon)$ gasa koji miruje, pomoću zamene energije čestice veličinom

$$\varepsilon - \vec{p}\cdot\vec{v}$$

gde je $\vec{p}$ impuls čestice. Prema tome, totalni impuls gasa (u odnosu na jedinicu zapremine) biće

$$\vec{P} = \int \vec{p}\, n(\varepsilon - \vec{p}\cdot\vec{v})\, d^3p \qquad \text{I-3.5}$$

Predpostavićemo da je brzina $v$ mala, pa izraz pod integralom možemo razviti u red u funkciji od $\vec{p}\cdot\vec{v}$. Član nultog reda nestaje pri integraciji po pravcima vektora $\vec{p}$, pa ostaje

$$\vec{P} = -\int \vec{p}\,(\vec{p}\cdot\vec{v})\, \frac{dn(\varepsilon)}{d\varepsilon}\, d^3p \qquad \text{I-3.6}$$

odnosno

$$\vec{P} = -\vec{v}\,\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty p^4\,\frac{dn(\varepsilon)}{d\varepsilon}\,dp \qquad \text{I-3.7}$$

Za fonone je $\varepsilon = up$

$$\vec{P} = -\vec{v}\,\frac{4\pi}{3u}\int_0^\infty p^4\,\frac{dn(p)}{dp}\,dp = \vec{v}\,\frac{16\pi}{3u}\int_0^\infty p^3 n(p)\,dp$$

$$\int_0^\infty up\,n(p)\,4\pi p^2 dp = \int \varepsilon\,n(\varepsilon)\,d^3p = E_\phi \qquad \text{I-3.8}$$

$E_\phi$ je energija jedinice zapremine fononskog gasa, pa konačno imamo

$$\vec{P} = \vec{v}\,\frac{4E_\phi}{3u^2} \qquad \text{I-3.9}$$

Dakle, kretanje gasa ekscitacija obavlja se prenošenjem neke mase, dok sa druge strane, pri proticanju tečnosti kroz kapilaru ništa ne smeta "česticama" toga gasa da se sudaraju sa zidovima cevčice i da sa njima izmenjuju impulse. Usled toga gas ekscitacija će se zaustaviti kao i svaki obični gas koji protiče kroz kapilar.

Na taj način po teoriji Landaua dolazimo do sledećeg osnovnog rezultata. Na temperaturama različitim od nule jedan deo mase tečnosti ponašaće se kao normalna, viskozna tečnost, a ostali deo mase ponašaće se kao superfluidna tečnost, koja nema viskoznosti. Pri tome je karakteristično da izmedju ta dva dela tečnosti koji se kreću jedan "kroz drugi" nema trenja, tj. ne nastaje prenošenje impulsa od jednog dela na drugi. Ustvari, treba govoriti da u kvantnoj tečnosti mogu istovremeno postojati dva kretanja, od kojih je svako povezano sa svojom "efektivnom masom". Jedno od tih kretanja je "normalno", a drugo "superfluidno".

Odgovarajuće jednačine za impuls jedinice zapremine helijuma $\vec{J}$ i gustina tečnosti date su respektivno

$$\vec{J} = \rho_s \vec{v}_s + \rho_n \vec{v}_n \qquad \text{I-3.10}$$

$$\rho = \rho_n + \rho_s$$

gde su $\rho_n$ - gustina "normalne" komponente, a $\rho_s$ - gustina superfluidnog dela tečnosti. Odnos $\rho_n/\rho_s$ u blizini $\lambda$ tačke faznog prelaza, jednak je jedinici, dok pri padu temperature do nule on opada do nule.

Drugi mogući tip energetskog spektra kvantne tečnosti je "Fermi-ev", koji u svakom slučaju ne može dovesti do pojave superfluidnosti, budući da je kod takvog spektra ispunjena mogućnost da istovremeno nastaju dve elementarne ekscitacije čija je zajednička energija mala, a impuls velik pa otuda nejednakost I-3.4 može biti ispunjena za svako $\nu$.

Teorija Bogoljubova

Iako je pojava superfluidnosti bila otkrivena relativno kasno, pokazala se poznatom očevidno blagodareći specifičnim osobinama Boze-statistike kojej se pokoravaju atomi helijuma.

Uzmimo sasvim idealizovan slučaj tzv. idealnog gasa, kada se interakcije izmedju čestica uopšte ne uočavaju. Predpostavimo da se te čestice pokoravaju statistici Boze- Ajnštajna i posmatrajmo njihovu ravnomernu raspodelu po impulsima, kada gas kao celina miruje.

Pri dovoljno visokim temperaturama mi imamo neprekidnu raspodelu, premda unekoliko različitu od Maxwelove. Postoji neka kritična temperatura $\vartheta_k$ na kojoj se vrši fazni prelaz. Drugačije rečeno, na temperaturi $\vartheta < \vartheta_k$ javlja se odredjen broj čestica koje imaju impuls jednak nuli. Takav sistem čestica obično se naziva Boze-Ajnštajnovim kondenzatom, a sama pojava Boze-Ajnštajnova kondenzacija. Pri $\vartheta = \vartheta_k$ težinski deo kondenzata je nula, dok je pri apsolutnoj nuli situacija takva da sve čestice ulaze u kondenzat.

Nije teško zapaziti da idealan Boze-Ajnštajnov gas ne poseduje ustvari svojstvo superfluidnosti. Razmotrimo radi jednostavnosti slučaj kada je temperatura jednaka nuli i kada dakle, sve čestice ulaze u kondenzat. One i miruju ako gas kao celina miruje, no, ukoliko se gas kao celina kreće s nekom brzinom $\bar{u}$ , sve čestice se kreću sa istom tom brzinom. Posve je jasno da ništa ne sprečava usporavanje tih čestica, pa prema tome i smanjenje energije gasa. Grubo govoreći, idealan Boze-Ajnštajnov gas ne poseduje svojstvo superfluidnosti zato što njegov kondenzat ne obrazuje vezan kolektiv. Upravo radi toga za objašnjenje pojave superfluidnosti neophodno je uzeti u obzir interakciju izmedju čestica, znači neidealan Boze-sistem.

Ako pretpostavimo da imamo Boze-Ajnštajnov gas sa slabom interakcijom, proporcionalnom nekom malom parametru, tada Hamiltonijan takvog sistema pišemo u obliku sume kinetičke energije pojedinih čestica i potencijalne energije interakcije proporcionalne malom parametru.

PRETPOSTAVIMO DA SU INTERAKCIJE DVOČESTIČNE

$$\hat{H} = \sum_{\vec{n}} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\Delta_{\vec{n}} + \frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\vec{m}} W_{\vec{n}-\vec{m}} \qquad \text{I-4.1}$$

GDE PRVI ČLAN HAMILTONIJANA PRETSTAVLJA KINETIČKU ENERGIJU, A $W$ JE TZV. MULTIPLIKATIVNI OPERATOR

U II KVANTIZACIJI

$$H = \sum_{n} b^+_{\vec{n}}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\vec{n}}\right) b_{\vec{n}} + \qquad \text{I-4.2}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{n m} W_{\vec{n}-\vec{m}}\, b^+_{\vec{n}} b^+_{\vec{m}} b_{\vec{m}} b_{\vec{n}}$$

AKO PREĐEMO U KONFIGURACIONI PROSTOR /RELACIJAMA/

$$b^+_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{p}} b^+_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\vec{n}} \quad ; \quad b_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{p}} b_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\vec{n}} \qquad \text{I-4.3}$$

I RADIMO U SISTEMU ZA $\hbar=1$, HAMILTONIJAN U BOKS-KVANTIRANOJ KUTIJI IMA OBLIK

$$H=\sum_{p\neq 0}\frac{p^2}{2m}b_p^+ b_p+\frac{1}{2N}\sum_{p_1p_2p_3p_4}W_{(p_4-p_1)}b_{p_1}^+ b_{p_2}^+ b_{p_3} b_{p_4}\delta_{p_1+p_2,\,p_3+p_4} \qquad \text{I-4.4}$$

GDE JE

$N\sim 10^{24}$, BROJ ČESTICA U KONDENZACIJI $\mathcal{N}_0=b_0^+b_0\sim 10^{24}$

PRI TOME JE

$$b_0b_0^+=\mathcal{N}_0+1=\mathcal{N}_0$$

$$b_0b_0^+-b_0^+b_0=0$$

$$b_0=b_0^+=\sqrt{\mathcal{N}_0}$$

MOGUĆE VREDNOSTI ZA IMULSE DATE SU U TABLICI [1]

| Br. | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | O | O | O | O |
| 2 | $P_1$ | $P_2$ | O | O |
| 3 | $P_1$ | O | $P_3$ | O |
| 4 | $P_1$ | O | O | $P_4$ |
| 5 | O | $P_2$ | $P_3$ | O |
| 6 | O | $P_2$ | O | $P_4$ |
| 7 | O | O | $P_3$ | $P_4$ |
| 8 | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |

TABL.[ 1 ]

ČLANOVI GDE SU ISTOVREMENO TRI IMPULSA NULA SE ODBACUJU, PA EFEKTIVNI HAMILTONIJAN SADA IMA OBLIK

$$H^{eff}=\sum_{p\neq 0}\left\{\frac{p^2}{2m}+\frac{\mathcal{N}_0}{N}W_{(p)}\right\}b_p^+b_p+\frac{1}{2}\sum_{p\neq 0}W_{(p)}\left(b_p^+b_{-p}^++b_{-p}b_p\right)+$$

$$+\frac{\mathcal{N}_0}{N}W_{(0)}\sum_{p\neq 0}\underbrace{b_p^+b_p}_{N-\mathcal{N}_0\simeq 0}+\frac{1}{2N}\sum_{p_1p_2p_3\neq 0}W_{(p_2-p_3)}b_{p_1}^+b_{p_2}^+b_{p_3}b_{p_1+p_2-p_3}+$$

$$+\frac{\mathcal{N}_0^2}{2N}W_{(0)} \qquad \text{I-4.5}$$

Peti član u hamiltonijanu predstavlja energiju osnovnog stanja i na zakon disperzije ne utiče.

U teoriji Bogoljubova [ ] četvrti član hamiltonijana $H^{eff}$ se odbacuje kao mali /jer se deli sa $N\sim 10^{24}$ /, pa imamo

$$H_2^{eff}=\sum_{p\neq 0}\alpha_p b_p^+b_p+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{p\neq 0}\beta_p\left(b_p^+b_{-p}^++b_{-p}b_p\right) \qquad \text{I-4.6}$$

gde je

$$\alpha_p=\frac{p^2}{2m}+W_{(p)}\quad ; \quad \beta_p=W_{(p)}$$

Hamiltonijanu potpuno je analogan hamiltonijan oblika

$$H=\sum_{k\neq 0}\left[\alpha_{(k)}+\beta_{(k)}\right]b_k^+b_k+$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k\neq 0}\beta_{(k)}\left[b_k^+b_{-k}+b_kb_{-k}\right] \qquad \text{I-4.7}$$

Posle dijagonalizacije hamiltonijana / o čemu će znatno opširnije biti reči u narednom paragrafu /, i odgovarajućeg sređivanja, izraz za energiju je dat kao:

$$\mathcal{E}(k) = \frac{\Delta_k^2 \pm \beta_k^2}{\sqrt{\Delta_k^2 - \beta_k^2}} \qquad \text{I-4.8}$$

Dilema koja ovde postoji u vezi sa znakom u brojiocu rešava se ako dijagonalizaciju vršimo koristeći Hajzenbergove jednačine kretanja za Boze-operatore (metod Tjablikova ). Ovakav način dijagonalizacije pokazuje da u brojiocu treba zadržati znak - , tako da izraz za energiju glasi

$$\mathcal{E}_k = \sqrt{\Delta_k^2 - \beta_k^2} \qquad \text{I-4.9}$$

znači, rezultat koji je Bogoljubov dobio za spektar elementarnih ekscitacija, a na koji ćemo se kasnije vratiti, imao je sledeći oblik

$$\mathcal{E}_B(k) = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\,\frac{4\pi a \hbar^2 N_0}{m}} \qquad \text{I-4.10}$$

gde je $m$ masa atoma $He^4$, $N_0$ ukupan broj atoma $He^4$, a $a$ dužina rasejanja.

Kriva Bogoljubova koja predstavlja funkcionalnu zavisnost energije elementarnih ekscitacija od impulsa data je na sl. 1-1

## Nelinearni efekti i harmonijski spektri

U prilazu Bogoljubova koji je izložen u prethodnom paragrafu, korišćen je samo kvadratni deo Hamiltonijana nadkondenzatnih bozona. Deo četvrtog reda u teoriji Bogoljubova nije uzet u račun. Pošto se kvadratni deo dijagonalizuje u-v transformacijom koja sa svoje strane u sebi sadrži i kreacioni i anihilacioni operator, očigledno je da ćemo, ukoliko ovu transformaciju uvedemo i u deo Hamiltonijana četvrtog reda po originalnim operatorima, posle svodjenja na normalne produkte dobiti po novim operatorima dopunske kvadratne delove koji menjaju spektar dobijen Bogoljubovim.

Ovim popravkama teoriji Bogoljubova biće posvećen ovaj paragraf.

Ukupni Hamiltonijan sistema koji obrazuju atomi $He^4$ u slučaju kada postoji kondenzat napisaćemo u sledećem obliku

$$H = \sum_{k\neq 0}\left[\alpha(\vec{k}) + \beta(\vec{k})\right] b_k^+ b_k + \qquad \text{I-5.1}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k\neq 0}\left[b_k^+ b_{-k}^+ + b_k b_{-k}\right]\beta(\vec{k}) + \frac{1}{N}\sum_{k_1 k_2 k_3}\gamma(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\, b_{k_1}^+ b_{k_2}^+ b_{k_3} b_{k_1+k_2-k_3}$$

gde je:

$$\alpha(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad \beta(k) = \frac{N_0}{N}\gamma_0 + 4\Delta\left(\frac{N_0}{N}\right)^2$$

$$\gamma(k) = \gamma_0 = \frac{4\pi\hbar^2 |f|}{m a^3} \qquad |f| = a/2 \quad \text{- DUŽINA RASEJANJA}$$

$$\gamma_0 = 1/4 \times 10^{-12}\,[\mathrm{erg}]$$

$N$ je ukupan broj atoma $He^4$, a $N_0$ broj atoma sa impulsom $\vec{p}=0$, $m$ masa $He^4$, a $a$ dužina rastojanja.

U teoriji Bogoljubova treći član u formuli I-5.1 se odbacuje kao mali, dok se prva dva dijagonalizuju kanoničnom transformacijom na nove Boze-operatore $C, C^{+}$ na sledeći način

$$b_k = U_k C_k + \vartheta_k C^{+}_{-k} \qquad \text{I-5.2}$$
$$b^{+}_k = U_k C^{+}_k + \vartheta_k C_{-k}$$

$U_k$ i $\vartheta_k$ su parne i realne funkcije

$$U_k = U_{-k} \; ; \; \vartheta_k = \vartheta_{-k} \; ; \; U^{*}_k = U_k \; ; \; \vartheta^{*}_k = \vartheta_k$$

Iz uslova da je

$$\left[b_k , b^{+}_{k'}\right] = \delta_{kk'} \qquad ; \qquad \left[C_k , C^{+}_{k'}\right] = \delta_{kk'} \qquad \text{I-5.3}$$

sledi relacija

$$U^{2}_k - \vartheta^{2}_k = 1 \qquad \text{I-5.4}$$

koja obezbedjuje kanoničnost transformacije I-5.2

Ova transformacija meša kreacione i anihilacione Boze-amplitude i dovodi do toga da normalni produkti višeg reda u operatorima $B$, prestaju da budu normalni produkti u novim $C$. Svodjenje novodobijenih formula na normalne produkte po operatorima $C$, daje nam dodatne članove nižeg reda po tim operatorima.

Naš Hamiltonijan sada ima oblik

$$\begin{aligned} H = & \sum_k \left[\alpha(k) + \beta(k)\right] \left(U_k C^{+}_k + \vartheta_k C_{-k}\right)\left(U_k C_k + \vartheta_k C^{+}_{-k}\right) + \qquad \text{I-5.5} \\ & + \frac{1}{2} \sum_k \beta(k) \left[ \left(U_k C^{+}_k + \vartheta_k C_{-k}\right)\left(U_k C^{+}_{-k} + \vartheta_k C_k\right) + \left(U_k C_{-k} + \vartheta_k C^{+}_k\right)\left(U_k C_k + \vartheta_k C^{+}_{-k}\right. \right. \\ & + \frac{1}{N} \sum_{k_1 k_2 k_3} \gamma(k_1 - k_3)\left(U_{k_1} C^{+}_{k_1} + \vartheta_{k_1} C_{-k_1}\right)\left(U_{k_2} C^{+}_{k_2} + \vartheta_{k_2} C_{-k_2}\right)\left(U_{k_3} C_{k_3} + \vartheta_{k_3} C^{+}_{-k_3}\right)\left(U_{k_4} C_{k_4} + \vartheta_{k_4} C^{+}_{-k_4}\right. \end{aligned}$$

Napisaćemo: GDE JE $\underline{\underline{\vec{k}_4 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3}}$

$$H = H_2 + H_4 \qquad \text{I-5.6}$$

gde je

$$\begin{aligned} H_2 = & \sum_k \left[ \Delta_k \left(U^{2}_k + \vartheta^{2}_k\right) + 2\beta(k) U_k \vartheta_k \right] C^{+}_k C_k + \\ & + \underbrace{\sum_k \left(\Delta_k \vartheta^{2}_k + \beta(k) U_k \vartheta_k\right)}_{H_0} + \sum_k \left[ \Delta_k U_k \vartheta_k + \frac{1}{2}\beta(k)\left(U^{2}_k + \vartheta^{2}_k\right)\right]\left(C^{+}_k C^{+}_{-k} + C\right. \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\Delta_k = \alpha(k) + \beta(k)}} \qquad \text{I-5.7}$$

$H_0$ - Hamiltonijan osnovnog stanja.

Da bi $H_2$ dijagonalizovali mora biti ispunjen uslov I-5.4, pa posle zamene

$$U_k^2 = 1 + \vartheta_k^2$$

dobijamo sledeće izraze za $U_k^2$ i $\vartheta_k^2$

$$\vartheta_k^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_k}{\sqrt{\Delta_k^2 - \beta_k^2}} - 1\right] \qquad \text{I-5.8}$$

$$U_k^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_k}{\sqrt{\Delta_k^2 - \beta_k^2}} + 1\right]$$

I konačno

$$H_2 = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}(\mathbf{k})\, C^+_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} + H_0 \qquad \text{I-5.9}$$

gde je

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \sqrt{\Delta_k^2 - \beta_k^2}$$

Hamiltonijan $H_4$ transformisaćemo pomoću komutacionih relacija

$$\left[C_k, C^+_{k'}\right] = \delta_{kk'} \; ; \; C_k C^+_{k'} - C^+_{k'} C_k = \delta_{kk'}$$

$$C_k C_{k'} = C_{k'} C_k \qquad C^+_k C^+_{k'} = C^+_{k'} C^+_k \qquad \text{I-5.10}$$

i možemo pisati

$$H_4 = H_4' + H_2^{(4)} + H_0^{(4)} \qquad \text{I-5.11}$$

gde je:

$$H_4' = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} \gamma(k_1 - k_3)\Big[ U_{k_1}U_{k_2}U_{k_3}\vartheta_{k_4} C^+_{k_1}C^+_{k_2}C_{k_3}C_{k_4} + \qquad \text{I-5.12}$$

$$+ U_{k_1}U_{k_2}U_{k_3}\vartheta_{k_4} C^+_{k_1}C^+_{k_2}C^+_{-k_4}C_{k_3} + U_{k_1}U_{k_2}\vartheta_{k_3}U_{k_4} C^+_{k_1}C^+_{k_2}C^+_{-k_3}C_{k_4} + U_{k_1}U_{k_2}\vartheta_{k_3}\vartheta_{k_4} C^+_{k_1}C^+_{k_2}C^+_{-k_3}C^+_{-k_4}$$

$$+ U_{k_1}\vartheta_{k_2}U_{k_3}U_{k_4} C^+_{k_1}C_{-k_2}C_{k_3}C_{k_4} + U_{k_1}\vartheta_{k_2}U_{k_3}\vartheta_{k_4} C^+_{k_1}C^+_{-k_4}C_{-k_2}C_{k_3} + U_{k_1}\vartheta_{k_2}\vartheta_{k_3}U_{k_4} C^+_{k_1}C^+_{-k_3}C_{-k_2}C_{k_4}$$

$$+ U_{k_1}\vartheta_{k_2}\vartheta_{k_3}\vartheta_{k_4} C^+_{k_1}C^+_{-k_3}C^+_{-k_4}C_{-k_2} + \vartheta_{k_1}U_{k_2}U_{k_3}U_{k_4} C^+_{k_2}C_{-k_1}C_{k_3}C^+_{k_4} + \vartheta_{k_1}U_{k_2}U_{k_3}\vartheta_{k_4} C^+_{k_2}C^+_{-k_4}C_{-k_1}C_{k_3}$$

$$+ \vartheta_{k_1}U_{k_2}\vartheta_{k_3}U_{k_4} C^+_{k_2}C^+_{-k_3}C_{-k_1}C^+_{k_4} + \vartheta_{k_1}U_{k_2}\vartheta_{k_3}\vartheta_{k_4} C^+_{k_2}C^+_{-k_3}C^+_{-k_4}C_{-k_1} + \vartheta_{k_1}\vartheta_{k_2}U_{k_3}U_{k_4} C_{-k_1}C_{-k_2}C_{k_3}C_{k_4}$$

$$+ \vartheta_{k_1}\vartheta_{k_2}U_{k_3}\vartheta_{k_4} C^+_{-k_4}C_{-k_1}C_{-k_2}C_{k_3} + \vartheta_{k_1}\vartheta_{k_2}\vartheta_{k_3}U_{k_4} C^+_{-k_3}C_{-k_1}C_{-k_2}C^+_{k_4} + \vartheta_{k_1}\vartheta_{k_2}\vartheta_{k_3}\vartheta_{k_4} C^+_{-k_3}C^+_{-k_4}C_{-k_1}C_{-k_2}\Big]$$

$$H_2^{(4)} = \frac{1}{N}\Big\{ \sum_{k_1,k_2,k_3} \gamma(K_1-K_3)\, U_{K_1} U_{K_2} U_{K_3} V_{K_4}\, \delta_{K_3-K_4}\, C^+_{K_1} C^+_{K_2} \; +$$

$$+ \sum_{k_1k_2k_3} \gamma(K_1-K_3)\, U_{K_1} V_{K_2} V_{K_3} V_{K_4} \left( \delta_{-K_2-K_3} C^+_{K_1} C^+_{-K_4} + \delta_{-K_2-K_4} C^+_{K_1} C^+_{-K_3} \right) +$$

$$+ \sum_{k_1k_2k_3} \gamma(K_1-K_3)\, V_{K_1} U_{K_2} V_{K_3} V_{K_4} \left( \delta_{K_2,-K_4} C^+_{-K_3} C^+_{-K_4} + \delta_{-K_1-K_3} C^+_{K_2} C^+_{-K_4} + \delta_{-K_1-K_4} C^+_{K_2} C^+_{-K_3} \right) +$$

$$+ \sum_{k_1k_2k_3} \gamma(K_1-K_3)\, V_{K_1} U_{K_2} U_{K_3} U_{K_4}\, \delta_{-K_1,K_2}\, C_{K_3} C_{K_4} +$$

$$+ \sum_{k_1k_2k_3} \gamma(K_1-K_3)\, V_{K_1} V_{K_2} U_{K_3} V_{K_4} \left( \delta_{-K_4,K_3} C_{-K_1} C_{-K_2} + \delta_{-K_4-K_2} C_{-K_1} C_{K_3} + \delta_{-K_4-K_1} C_{-K_2} C_{K_3} \right) +$$

$$+ \sum_{k_1k_2k_3} \gamma(K_1-K_3)\, V_{K_1} V_{K_2} V_{K_3} U_{K_4} \left( \delta_{-K_3-K_2} C_{-K_1} C_{K_4} + \delta_{-K_3-K_1} C_{-K_2} C_{K_4} \right) +$$

$$+ \sum_{k_1k_2k_3} \gamma(K_1-K_3)\, U_{K_1} V_{K_2} U_{K_3} V_{K_4} \left( \delta_{K_3-K_4} C^+_{K_1} C_{-K_2} + \delta_{-K_2-K_4} C^+_{K_1} C_{K_3} \right) + \qquad \text{I}-5.13$$

$$+ \sum_{k_1k_2k_3} \gamma(K_1-K_3)\, V_{K_1} U_{K_2} U_{K_3} V_{K_4} \left( \delta_{K_3-K_4} C^+_{K_2} C_{-K_1} + \delta_{-K_1-K_4} C^+_{K_2} C_{K_3} + \delta_{K_2-K_1} C^+_{-K_4} C_{K_3} \right) +$$

$$+ \sum_{k_1k_2k_3} \gamma(K_1-K_3)\, U_{K_1} V_{K_2} V_{K_3} U_{K_4}\, \delta_{-K_2-K_3}\, C^+_{K_1} C_{K_4} +$$

$$+ \sum_{k_1k_2k_3} \gamma(K_1-K_3)\, V_{K_1} U_{K_2} V_{K_3} U_{K_4} \left( \delta_{-K_1K_2} C^+_{-K_3} C_{K_4} + \delta_{-K_1-K_3} C^+_{K_2} C_{K_4} \right) +$$

$$+ \sum_{k_1k_2k_3} \gamma(K_1-K_3)\, V_{K_1} V_{K_2} V_{K_3} V_{K_4} \left( \delta_{-K_3-K_2} C^+_{-K_4} C_{-K_1} + \delta_{-K_3-K_1} C^+_{-K_4} C_{-K_2} + \delta_{-K_4-K_2} C^+_{-K_3} C_{-K_1} + \delta_{-K_4-K_1} C^+_{-K_3} C_{-K_2} \right)\Big\}$$

$$H_0^{(4)} = \frac{1}{N} \sum_{k_1k_3} \gamma(K_1-K_3)\, V_{K_1} U_{-K_1} U_{K_3} V_{-K_3} \; + \qquad \text{I}-5.14$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{k_1k_3} \gamma(K_1-K_3)\, V^2_{K_1} V^2_{K_3} \; + \; \frac{1}{N} \sum_{k_1k_2} \gamma(0)\, V^2_{K_1} V^2_{K_2}$$

Vratimo se sada na $H_2$ i posle nekolikih transformacija za $k$ napišimo ga u sledećem obliku

$$
\begin{aligned}
H_2 = \sum_{k} \Big\{ & \Delta_k \left( U_k^2 + V_k^2 \right) + 2\beta(k) U_k V_k + \\
& + U_k V_k \frac{1}{N} \sum_{\ell} \gamma(k-\ell) U_\ell V_\ell + U_k^2 \gamma(0) \frac{1}{N} \sum_{\ell} V_\ell^2 + \\
& + U_k V_k \frac{1}{N} \sum_{\ell} \gamma(k+\ell) U_\ell V_\ell + U_k^2 \frac{1}{N} \sum_{\ell} \gamma(k-\ell) V_\ell^2 + \\
& + U_k V_k \frac{1}{N} \sum_{\ell} \gamma(k-\ell) U_\ell V_\ell + U_k^2 \frac{1}{N} \sum_{\ell} \gamma(k-\ell) V_\ell^2 + \\
& + U_k V_k \frac{1}{N} \sum_{\ell} \gamma(k+\ell) U_\ell V_\ell + U_k^2 \gamma(0) \frac{1}{N} \sum_{\ell} V_\ell^2 + \\
& + V_k^2 \frac{1}{N} \sum_{\ell} \gamma(k+\ell) V_\ell^2 + V_k^2 \gamma(0) \frac{1}{N} \sum_{\ell} V_\ell^2 + V_k^2 \gamma(0) \frac{1}{N} \sum_{\ell} V_\ell^2 + \\
& + V_k^2 \frac{1}{N} \sum_{\ell} \gamma(k+\ell) V_\ell^2 \Big\} C_k^+ C_k + \sum_{k} \Big\{ \Delta_k U_k V_k + \frac{1}{2} \beta(k) \left( U_k^2 + V_k^2 \right) + \\
& + \left( U_k^2 + V_k^2 \right) \frac{1}{N} \sum_{\ell} \gamma(k-\ell) U_\ell V_\ell + 2 U_k V_k \Big[ \gamma(0) \frac{1}{N} \sum_{\ell} V_\ell^2 + \frac{1}{N} \sum_{\ell} \gamma(k-\ell) V_\ell^2 \Big] \Big\} \times \\
& \times \left( C_k^+ C_{-k}^+ \; C_k C_{-k} \right)
\end{aligned}
\qquad \text{I-5.15}
$$

i posle sređivanja dobijamo

$$
\begin{aligned}
H_2 = \sum_{k} \Big\{ & U_k^2 \Big[ \Delta_k + \frac{1}{N} \sum_{\ell} 2\gamma(0) V_\ell^2 + \frac{2}{N} \sum_{\ell} \gamma(k-\ell) V_\ell^2 \Big] + \\
& + V_k^2 \Big[ \Delta_k + \frac{2}{N} \sum_{\ell} \gamma(0) V_\ell^2 + \frac{2}{N} \sum_{\ell} \gamma(k+\ell) V_\ell^2 \Big] + 2 U_k V_k \Big[ \beta(k) + \\
& + \frac{1}{N} \sum_{\ell} \left[ \gamma(k-\ell) + \gamma(k+\ell) \right] U_\ell V_\ell \Big] \Big\} C_k^+ C_k + \sum_{k} \Big\{ \left( U_k^2 + V_k^2 \right) \times \\
& \times \Big[ \frac{1}{2} \beta(k) + \frac{1}{N} \sum_{\ell} \gamma(k-\ell) U_\ell V_\ell \Big] + U_k V_k \Big[ \Delta_k + \frac{2}{N} \sum_{\ell} \left[ \gamma(0) + \gamma(k-\ell) \right] V_\ell^2 \Big] \Big\} \times \\
& \times \left( C_k^+ C_{-k}^+ + C_k C_{-k} \right)
\end{aligned}
\qquad \text{I-5.16}
$$

Da bi $H_2$ bilo dijagonalizovano, funkcije $U_K$ i $V_K$ moraju zadovoljavati sledeće jednačine

$$U_K^2 - V_K^2 = 1$$

$$\left( U_K^2 + V_K^2 \right) \frac{1}{N} \sum_{\ell} \delta(K-\ell)\, U_\ell V_\ell + 2 U_K V_K \frac{1}{N} \sum_{\ell} \left[ \delta(0) + \delta(K-\ell) \right] V_\ell^2 =$$

$$= - \left[ U_K V_K \Delta_K + \frac{1}{2} \beta(K) \left( U_K^2 + V_K^2 \right) \right] \qquad I-5.17$$

pri čemu je

$$\frac{1}{N} \sum_{\ell} \delta(K-\ell)\, U_\ell V_\ell = \lambda_1(K) \qquad I-5.18$$

$$\frac{1}{N} \sum_{\ell} \left[ \delta(0) + \delta(K-\ell) \right] V_\ell^2 = \lambda_2(K)$$

Uvrštavajući date izraze i uzimajući da je

$$2\lambda_1 + \beta_K = \beta' \quad \text{i} \quad \Delta_K + 2\lambda_2 = \Delta' \qquad I-5.19$$

dobijamo sledeće jednačine za $V_K^2$ i $U_K^2$

$$V_K^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta'}{\sqrt{\Delta'^2 - \beta'^2}} - 1 \right)$$

$$U_K^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta'}{\sqrt{\Delta'^2 - \beta'^2}} + 1 \right) \qquad I-5.20$$

odnosno

$$V_K^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_K + 2\lambda_2(K)}{\sqrt{(\Delta_K + 2\lambda_2)^2 - (2\lambda_1 + \beta_K)^2}} - 1 \right)$$

$$U_K^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_K + 2\lambda_2(K)}{\sqrt{(\Delta_K + 2\lambda_2)^2 - (2\lambda_1 + \beta_K)^2}} + 1 \right) \qquad I-5.21$$

Sistem integralnih jednačina sada dobija oblik:

$$\frac{1}{N}\sum_{q}\delta(K-q)\,\frac{1}{2}\,\frac{2\lambda_1(q)+\beta_q}{\sqrt{[\Delta_q+2\lambda_2(q)]^2-[2\lambda_1(q)+\beta_q]^2}}=\lambda_1(K)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{q}[\gamma(0)+\delta(K-q)]\,\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_q+2\lambda_2(q)}{\sqrt{[\Delta_q+2\lambda_2(q)]^2-[2\lambda_1(q)+\beta_q]^2}}-1\right]=\lambda_2(K)$$

I-5.22

Uzimajući da je

$$2\lambda_1(\vec{K})+\beta(\vec{K})=f_1(\vec{K}) \qquad \text{I-5.23}$$

$$2\lambda_2(\vec{K})+\Delta(\vec{K})=f_2(\vec{K})$$

te da je

$$A=\frac{1}{N}\sum_{q}[\delta(0)-\delta(K-q)] \qquad \text{I-5.24}$$

po funkcijama $f_1$ i $f_2$ smo na taj način dobili sledeće dve integralne jednačine

$$f_1(K)-\frac{1}{N}\sum_{q}\delta(K-q)\frac{f_1(q)}{\sqrt{f_2^2(q)-f_1^2(q)}}=\beta(K)$$

I-5.25

$$f_2(K)-\frac{1}{N}\sum_{q}[\delta(0)+\delta(K-q)]\frac{f_2(q)}{\sqrt{f_2^2(q)-f_1^2(q)}}=\Delta(K)-A(K)$$

Posmatrajmo slučaj $\gamma(K)=\bar{\gamma}$ (nezavisno od $\vec{K}$ ). Tada je

$$f_1(K)=\beta(K)+\bar{\delta}C_1 \quad ; \quad f_2(K)=\Delta(K)+\bar{\delta}C_2 \qquad \text{I-5.26}$$

gde su $C_1$ i $C_2$ date sledećim izrazima

$$C_1=\frac{1}{N}\sum_{q}\frac{f_1(q)}{\sqrt{f_2^2(q)-f_1^2(q)}}$$

$$C_2=\frac{1\cdot 2}{N}\sum_{q}\frac{f_2(q)}{\sqrt{f_2^2(q)-f_1^2(q)}}-\frac{2}{N}\sum_{q}1 \qquad \text{I-5.27}$$

$\lambda_1$ i $\lambda_2$ ne zavise od $\vec{k}$ pa ćemo preko izraza

$$\frac{1}{N}\sum_{q}\gamma(k-q)\,U_q V_q = \bar{\gamma}\,\lambda_1 \quad ; \quad \lambda_1=\frac{C_1}{2}$$
$$\frac{1}{N}\sum_{q}\left[\gamma(k-q)+\gamma(0)\right]V_q^2=\bar{\gamma}\,\lambda_2 \quad ; \quad \lambda_2=\frac{C_2}{2} \qquad \text{I-5.28}$$

dobiti slědeće vrednosti za $\lambda_1$ i $\lambda_2$

$$\lambda_1=\frac{1}{2N}\sum_{q}\frac{\beta_q+\bar{\gamma}\frac{\lambda_1}{2}}{\sqrt{\left(\Delta_q+\bar{\gamma}\frac{\lambda_2}{2}\right)^2-\left(\beta_q+\bar{\gamma}\frac{\lambda_1}{2}\right)^2}}$$
$$\lambda_2=\frac{1}{N}\sum_{q}\frac{\Delta_q+\bar{\gamma}\frac{\lambda_2}{2}}{\sqrt{\left(\Delta_q+\bar{\gamma}\frac{\lambda_2}{2}\right)^2-\left(\beta_q+\bar{\gamma}\frac{\lambda_1}{2}\right)^2}} \qquad \text{I-5.29}$$

Sada su vrednosti za kvadrate funkcija $U_k$ i $V_k$ izražene preko $f_1$ i $f_2$

$$U_k^2=\frac{1}{2}\left[\frac{f_2(k)}{\sqrt{f_2^2-f_1^2}}+1\right]$$
$$V_k^2=\frac{1}{2}\left[\frac{f_2(k)}{\sqrt{f_2^2-f_1^2}}-1\right] \qquad \text{I-5.30}$$

Vratimo se sada na naš Hamiltonijan $H_2$ u obliku

$$H_2=\sum_k \varepsilon(k)\,C_k^+ C_k \qquad \text{I-5.31}$$

gde je

$$\varepsilon(k)=\varepsilon_k^{(0)}+\Delta\varepsilon_k \qquad \text{I-5.32}$$

$$\varepsilon_k^{(0)}=\left(U_k^2+V_k^2\right)\Delta_k+2\beta_k U_k V_k \qquad \text{I-5.33}$$

ODNOSNO
$$\varepsilon_k^{(0)}=\frac{f_2(k)\,\Delta_k-f_1(k)\,\beta_k}{\sqrt{f_2^2(k)-f_1^2(k)}}$$

$$\Delta\varepsilon_k=U_k^2\frac{2}{N}\sum_q\left[\gamma(0)+\gamma(k-q)\right]V_q^2+ \qquad \text{I-5.34}$$
$$+V_k^2\frac{2}{N}\sum_q\left[\gamma(0)+\gamma(k+q)\right]V_q^2+U_kV_k\frac{2}{N}\sum_q\left[\gamma(k-q)+\gamma(k+q)\right]U_qV_q$$

U SLUČAJU $\gamma(k) = \bar{\gamma}$ DOBIJAMO

$$\Delta \mathcal{E}_K = \left( U_K^2 + \vartheta_K^2 \right) \frac{4\bar{\gamma}}{N} \sum_{\ell} \vartheta_\ell^2 + 4 U_K \vartheta_K \frac{\bar{\gamma}}{N} \sum_{\ell} U_\ell \vartheta_\ell \qquad \text{I-5.35}$$

S OBZIROM NA USVOJENE OZNAKE JE

$$\frac{\bar{\gamma}}{N} \sum_{\ell} U_\ell \vartheta_\ell = \bar{\gamma} \lambda_1 = \bar{\gamma} \frac{C_1}{2}$$

$$\frac{2\bar{\gamma}}{N} \sum_{\ell} \vartheta_\ell^2 = \bar{\gamma} \lambda_2 = \bar{\gamma} \frac{C_2}{2} \qquad \text{I-5.36}$$

TAKO DA U OVOM SLUČAJU DOBIJAMO

$$\Delta \mathcal{E}_K = 2\bar{\gamma} \frac{f_2(k)\, \lambda_2 - f_1(k)\, \lambda_1}{\sqrt{f_2^2(k) - f_1^2(k)}} \qquad \text{I-5.37}$$

U NULTOJ APROKSIMACIJI $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$ SLEDI

$$\Delta \mathcal{E}_K = 0 \;;\quad f_1(k) = \beta(k) \;;\quad f_2(k) = \Delta(k) \qquad \text{I-5.38}$$

PA JE

$$\mathcal{E}_K = \sqrt{\Delta_K^2 - \beta_K^2} \qquad \text{I-5.39}$$

PRVA APROKSIMACIJA DAJE

$$\lambda_1 = \frac{1}{2N} \sum_{\ell} \frac{\beta(\ell)}{\sqrt{\Delta^2(\ell) - \beta^2(\ell)}}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{N} \sum_{\ell} \frac{\Delta(\ell)}{\sqrt{\Delta^2(\ell) - \beta^2(\ell)}} \qquad \text{I-5.40}$$

ODNOSNO, ZA $f_{1(K)}$, $f_{2(K)}$ I $\Delta_{(K)}$ IMAMO SLEDEĆE IZRAZE

$$f_{1(K)} = \beta_{(K)} + \bar{\delta}\,\frac{\lambda_1}{2}$$

$$f_{2(K)} = \Delta_{(K)} + \bar{\delta}\,\frac{\lambda_2}{2} \qquad \text{I-5.41}$$

$$\Delta_{(K)} = \alpha_{(K)} + \beta_{(K)}$$

AKO SADA UVEDEMO SMENU DA JE

$$A_K = \Delta_K + 2\lambda_{2(K)}$$

$$B_K = \beta_K + 2\lambda_{1(K)} \qquad \text{I-5.42}$$

ZA KVADRATE FUNKCIJA $U_K$ I $V_K$, TE ZA NJIHOV ZBIR I PROIZVOD $U_K V_K$, DOBIJAMO

$$U_K^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{A_K}{\sqrt{A_K^2 - B_K^2}} + 1\right)$$

$$V_K^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{A_K}{\sqrt{A_K^2 - B_K^2}} - 1\right) \qquad \text{I-5.43}$$

$$U_K^2 + V_K^2 = \frac{A_K}{\sqrt{A_K^2 - B_K^2}} \quad ; \quad U_K V_K = -\frac{1}{2}\,\frac{B_K}{\sqrt{A_K^2 - B_K^2}}$$

U APROKSIMACIJI $\delta_{(K)} = \delta_0 - \bar{\delta}$ IMAMO

$$\lambda_{1(K)} = \frac{\delta_0}{N}\sum_{\ell} U_\ell V_\ell = \delta_0 \Delta_1$$

$$\lambda_{2(K)} = \frac{2\delta_0}{N}\sum_{\ell} V_\ell^2 = 2\delta_0 \Delta_2 \qquad \text{I-5.44}$$

ODNOSNO

$$A_K = \Delta(K) + 4\delta_0\Delta_2 \qquad \text{I-5.45}$$

$$B_K = \beta(K) + 2\delta_0\Delta_1$$

ZA ENERGIJU IMAMO SLEDEĆI IZRAZ

$$E = \sum_k \mathcal{E}(K) \qquad \text{I-5.46}$$

GDE JE $\mathcal{E}(K)$ ENERGIJA ELEMENTARNIH EKSCITACIJA I IZNOSI

$$\mathcal{E}(K) = \sqrt{A_K^2 - B_K^2} \qquad \left[\mathcal{E}(K) = \frac{\partial H_2}{\partial C_K^+ C_K}\right] \qquad \text{I-5.47}$$

I KONAČNO IMAMO DIJAGONALIZOVAN HAMILTONIJAN

$$H_2 = \sum_k \sqrt{A_K^2 - B_K^2}\; C_K^+ C_K \qquad \text{I-5.48}$$

II GLAVA

# BOZE KONDENZACIJA U SISTEMU EKSITONA

## Eksitonski hamiltonijan i Boze kondenzacija

U radovima Frenkela i Davidova pri razmatranju ekscitiranih stanja kristala korišćen je metod Hajtlera-Londona. U skladu sa tim metodom talasna funkcija najnižeg pobudjenog stanja pojavljuje se kao superpozicija stanja kristala u kojima je jedan molekul ekscitiran, a svi ostali se nalaze u osnovnom stanju. Pri tome se udelu talasnoj funkciji kristala od stanja u kojima je pobudjeno više molekula kristala ne pridaje značaj. Popravka na energiju kristala koja je uslovljena više ekscitiranim stanjima odgovara vrednosti

$$\Delta f\,(V/\Delta f)^2$$

gde je $\Delta f$ energija f-tog pobudjenja izolovanog molekula, a $V$ veličina rezonantne interakcije izmedju molekula.

Izračunavanje udela u energiji eksitona, od strane više ekscitiranih stanja, može se izvršiti prelaskom na metod druge kvantizacije, što se, izmedju ostalog, pokazuje vrlo dobrim pri izračunavanju eksiton-foton i eksiton-fonon interakcije, te pri proučavanju mešanja molekularnih stanja uslovljenih medju-molekularnim interakcijama u kristalu.

U prvom delu prelaska na metod druge kvantizacije Hamiltonijan se izražava preko operatora radjanja i uništavanja ekscitacija pojedinih molekula. Neka indeks "s" odredjuje čvor kristalne rešetke na kom je smešten molekul, dok su pomenuti operatori označeni kao $P^{+f}_s$ i $P^f_s$ , gde je f - skup kvantnih brojeva ekscitiranog stanja molekula. Ukoliko sada uzmemo u obzir samo jedno f-to nedegenerisano, ekscitirano stanje molekula, operatori $P_s^{+f}$ i $P_s^f$ zadovoljavaju sledeće komutacione relacije

$$P_s P_s^+ - P_s^+ P_s = 1 - 2P_s^+ P_s \qquad P_s P_s = 0 \qquad \text{II-1.1}$$

$$P_s P_{s'} - P_{s'} P_s = 0 \qquad P_s^+ P_{s'} - P_{s'} P_s^+ = 0 \qquad s \neq s'$$

Na taj način su $P_s^+$ i $P_s$ Pauli-operatori, ukoliko se date jednačine javljaju kao kombinacije permutovanih relacija za Fermi operatore (pri $s = s'$) i Boze ( $s \neq s'$ ) Pojava, za $s = s'$, permutovanih relacija tipa relacija za Fermi operatore izražava činjenicu da $P_s^+ P_s$ može biti ili nula (za molekul u osnovnom stanju) ili jedinica (ekscitiran molekul). Za Boze operatore sa različitim s karakteristično je da dejstvuju na različite promene talasne funkcije kristala.

Izražen preko operatora $P_s$ i $P_s^+$ hamiltonijan ima sledeći oblik

$$H = H_0 + H_{int} \qquad \text{II-1.2}$$

gde je

$$H_0 = \sum_s \Delta P_s^+ P_s + \frac{1}{2} \sum_{s \neq s'} V_{ss'}^{I} P_s^+ P_{s'} + \frac{1}{2} \sum_{s \neq s'} V_{ss'}^{II} (P_s^+ P_{s'}^+ + P_s P_{s'}) \qquad \text{II-1.3}$$

kvadratan u odnosu na operatore $P_s$ i $P_s^+$, kada je operator $H_{int}$ dat kao suma članova trećeg i četvrtog reda.

Ako uzmemo da je srednja vrednost

$$\langle P_s^+ P_s \rangle = C \ll 1 \qquad \text{II-1.4}$$

tj. razmatramo samo slaboekscitirana stanja, gde je veličina $C$ koja odgovara koncentraciji ekscitacija mala, operator $P_s^+ P_s$ u prvom delu relacije možemo zanemariti. Pri tome operatori $P_s$ i $P_s^+$ postaju Boze operatori ( $P_s \equiv B_s$ ; $P_s^+ \equiv B_s^+$ ). Ta okolnost leži u osnovi metode aproksimacije druge kvantizacije, čije je osnove dao Bloh, a koju je kasnije razvio Bogoljubov i Tjablikov.

Ukoliko u nultoj aproksimaciji zanemarimo rasejanje eksitona na eksitonima, možemo ispustiti operator $H_{int}$ u odgovarajućem izrazu. U toj aproksimaciji, koristeći kanonske transformacije za prelazak sa Boze-operatora $B_S$ i $B_S^+$ na $B_{\mu K}$ i $B_{\mu K}^+$ (koji su takodje Boze operatori)

$$B_S = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{\mu K} \left[ U_{\mu K}(S) B_{\mu K} + \overset{*}{U}_{\mu K}(S) B_{\mu K}^+ \right] \qquad II-1.5$$

gde je K - talasni vektor eksitona, $\mu$ - broj eksitonske zone, M - broj ćelija u kristalu, i dobijamo izraz

$$H_0 = \sum_{\mu K} E_{\mu}(K) B_{\mu K}^+ B_{\mu K} \qquad II-1.6$$

U tom izrazu $E_{\mu}(K)$ predstavlja energiju elementarne ekscitacije kulonovskih eksitona.

Ukažimo na činjenicu da dati izraz potpuno odgovara izrazu

Retardovana interakcija se može izračunati ako operatoru $H_0$ dodamo operator polja poprečnih fotona zajedno sa operatorom eksiton - foton interakcije. Ukoliko pri tome, kao i pre, ne uzimamo u obzir anharmonizam, potpuni operator eksitona i polja poprečnih fotona je kvadratan u odnosu na eksitonske i fotonske Boze operatore, tako da dijagonalizacija takvog hamiltonijana pomoću kanonske transformacije dovodi do normalnih elektromagnetnih talasa koji pri velikim talasnim dužinama mogu takodje biti razmotreni i u okvirima fenomenološke elektrodinamike, pri izučavanju prostorne disperzije.

Govoreći o kinematičkoj interakciji treba zapaziti da problem njenog izdvajanja, u vezi sa prelaskom od Pauli na Boze operatore, nije nov. Taj se problem često javlja za Hajnzerbergov hamiltonijan koji odgovara izotropnom feromagnetiku sa spinom $S=\frac{1}{2}$, pri uvodjenju spinskih talasa, čiji se operatori radjanja i uništavanja počinjavaju bozonskim komutacionim relacijama. Taj problem je izmedju ostalih zanimao i Kranendoka [5]. On je izračunao kinematičnu interakciju koja proizilazi iz činjenice da jedan spinski talas sprečava prolazak drugog ukoliko dva prevrnuta spina ne mogu biti koncentrisana na jednom te istom mestu.(za Frenkelove eksitone to znači da u jednom istom molekulu ne mogu biti istovremeno lokalizovane dve ekscitacije.) Jezikom matematike takav prilaz znači da polaznom hamiltonijanu, u kome se Pauli operatori zamenjuju Boze operatorima, dodaje član koji odgovara maksimalnom odbijanju dva bozona. Napomenimo još da je za eksitone energija ekscitacije velika u poredjenju sa širinom eksitonske zone.

Zamena Pauli operatora Boze operatorima onako kako je data formulom za $S \neq S'$ je približna, jer se pri zameni operatora unose nekontrolisane greške u svim slučajevima kada je broj bozona veći od jedinice,i u literaturi su te greške poznate pod nazivom "doprinos nefizičkih stanja". Može se ipak precizirati prelaz sa Pauli na Boze operatore $B_S$ i $B_S^+$ smatrajući da je za bilo koji broj bozona broj pauliona ili 0 ili 1. U tom cilju napišimo Pauli operatore u obliku [ ]

$$P_S = \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \overset{+}{B}{}_S^\nu B_S^\nu \right]^{1/2} B_S \qquad II-1.7$$

$$P_S^+ = B_S^+ \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \overset{+}{B}{}_S^\nu B_S^\nu \right]^{1/2}$$

gde su $a_\nu$ materijalni koeficijenti. Operatori $P_S$ i $P_S^+$ treba da zadovoljavaju uslove

$$P_S P_S^+ + P_S^+ P_S = 1 \qquad II-1.8$$

ako su $B_S$ i $B_S^+$ Boze operatori.

Zamenjujući odgovarajuće vrednosti za Pauli operatore i uvrštavajući ih u izraz II-1.8 dobijamo odgovarajuće vrednosti za koeficijente

$$a_\nu = \frac{-2}{1+\nu} a_{\nu-1} \;;\; a_0 = 1 \;\text{ ili }\; a_\nu = \frac{(-2)^\nu}{(1+\nu)!} \qquad II-1.9$$

Na taj način tačan prelaz na Boze operatore ima oblik

$$P_S = \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2)^\nu}{(1+\nu)!} \overset{+}{B}{}_S^\nu B_S^\nu \right]^{1/2} B_S \;;\; P_S^+ = B_S^+ \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2)^\nu}{(1+\nu)!} \overset{+}{B}{}_S^\nu B_S^\nu \right]^{1/2}$$

$$P_S^+ P_S = B_S^+ \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2)^\nu}{(1+\nu)!} \overset{+}{B}{}_S^\nu B_S^\nu \right) B_S \qquad II-1.10$$

i predstavlja operator broja Pauliona izražen preko Boze operatora. Zadržavajući se na prva tri člana imamo sledeće relacije

$$P_s = B_s - B_s^+ B_s B_s + \frac{2}{3} B_s^{+2} B_s^3$$
$$P_s^+ = B_s^+ - B_s^+ B_s^+ B_s + \frac{2}{3} B_s^{+3} B_s^2 \qquad II-1.11$$
$$P_s^+ P_s = B_s^+ B_s - B_s^{+2} B_s^2 + \frac{2}{3} B_s^{+3} B_s^3$$

Ograničimo se još samo na prve članove (za $\nu = 0$ ). Tada dobijamo $P_S = B_S$, te da je operator broja pauliona jednak operatoru broja bozona, odnosno

$$\hat{L}_S = \hat{N}_S \qquad II-1.12$$

Ako se uzme u obzir i član sa $\nu = 1$ imamo da je

$$P_s = \sqrt{1 - \hat{N}_s}\, B_s$$
$$P_s^+ = B_s^+ \sqrt{1 - \hat{N}_s} \qquad II-1.13$$

za vrednosti $\nu \geq 1$ članove pod znakom sume možemo smatrati malim operatorima čija veličina opada s porastom $\nu$ te se kvadratni koren sume može predstaviti u vidu reda.

TE SU

$$P_s = \left(\sum_\nu b_\nu B_s^{+\nu} B_s^\nu\right) B_s$$
$$P_s^+ = B_s^+ \left(\sum_\nu b_\nu B_s^{+\nu} B_s^\nu\right) \qquad II-1.14$$

Ako se sada vratimo na naš hamiltonijan $H$ i uvrstimo dobijene izraze za $P_s$ i $P_s^+$ dobijamo

$$H = H_2 + H_4 + H_6$$

$$H_2 = \sum_s \Delta B_s^+ B_s + \frac{1}{2} \sum_{s \neq s'} V_{ss'}^{I} B_s^+ B_{s'} + $$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{s \neq s'} V_{ss'}^{II} (B_s^+ B_{s'}^+ + B_s B_{s'}) \qquad II-1.15$$

$$H_4 = -\Delta \sum_s B_s^+ B_s^+ B_s B_s$$ / ZBOG $\Delta \gg V_{ss'}$ OSTATAK HAMILTONIJANA OD PROIZVODA ČETIRI OPERATORA ZANEMARUJEMO /

$$H_6 = \Delta \frac{2}{3} \sum_s B_s^+ B_s^+ B_s^+ B_s B_s B_s$$ / OSTALE ČLANOVE ZANEMARUJEMO /

Dakle, dobijamo traženu raspodelu hamiltonijana po stepenima Boze operatora. Nastali članovi anharmonizma trećeg reda ne sadrže kinematičke popravke i njihova uloga u teoriji nelinearnih optičkih efekata trećeg reda bila je odredjena od strane Ovdendera [12]. Članovi anharmonizma četvrtog reda sadrže kinematičke popravke.

Ograničimo se samo na pitanje mogućnosti Boze-Ajnštajnove kondenzacije eksitona. Radi kratkoće u daljem izlaganju zvaćemo paulionima elementarne ekscitacije čiji operatori radjanja i uništenja zadovoljavaju relacije

Razmotrimo kolektivna svojstva idealnog gasa pauliona tj. sistema kom odgovara hamiltonijan II-1.3, kada je operator dinamičke interakcije izmedju elementarnih ekscitacija tj. operator $H_{int}$ nula. Formiranjem izraza II-1.10 ; $\hat{L}_i H$ i prelaskom sa Pauli na Boze operatore mi ćemo uporedo sa hamiltonijanom nulte aproksimacije II-1.6 dobiti u operatoru kinematičke interakcije eksitona dva tipa sabiraka. Prvi tip su članovi nastali kao posledica činjenica da je operator $P_s^+P_s \neq \hat{N}_s$ i oni su proporcionalni energiji ekscitacije, te imaju sledeći oblik

$$H' = \Delta \sum_{\nu} \frac{(-2)^{\nu}}{(1+\nu)!} \sum_{s} B_s^{+\,\nu+1} B_s^{\nu+1} \qquad \text{II-1.16}$$

Član za $\nu = 1$ odgovara rasejanju dva eksitona jedan na drugom, a ima sledeći oblik

$$H'(\nu=1) = -\Delta \sum_{ss'} \delta_{ss'} B_s^+ B_{s'}^+ B_s B_{s'} \qquad \text{II-1.17}$$

tj., odgovara rasejanju eksitona pri $\delta$ - potencijalu interakcije

$$V_{ss'} = -2\Delta\delta_{ss'} \qquad \text{II-1.18}$$

Ako predjemo na sistem koordinata sa centrom inercije sistema, koji se sastoji iz dva eksitona, to se u skladu sa II-1.17 odredjivanje preseka rastojanja eksitona, jedan na drugom, svodi na odredjivanje rasejanja kvazičestica na potencijalu oblika

$$V_{ss'} = -2\Delta\delta_{s0}\delta_{s'0} \qquad \text{II-1.19}$$

Potencijal oblika II-1.19 ne treba posmatrati kao slabu interakciju, pošto dovodi do pojave lokalnih stanja. Ova pojava znači da se dva bozona mogu naći u vezanom stanju, tačnije rečeno mogu obrazovati bieksiton.

Pre svega treba zapaziti da ukoliko veličina više nego za red veličine prevazilazi širinu eksitonske zone, pod uticajem potencijala (II-1.19) se uvek pojavljuje lokalni nivo na velikoj dužini (približno $2\Delta$). Što se tiče lokalnih nivoa udaljenih od najniže eksitonske zone na rastojanju reda širine eksitonske zone, to će oni, ukoliko se pod tim uslovima i pojave, uvek biti u medjuprostoru izmedju eksitonskih zona. Ispod najniže eksitonske zone, koja je i važna pri proučavanju Boze-Ajnštajnove kondenzacje eksitona, neznatni lokalni nivoi pod uticajem ekscitacije II-1.19 se ne pojavljuju.

Kod kristala gde je kvantni izlaz eksitonske luminiscencije blizak jedinici (neradiacioni) procesi uništenja eksitona se ne ostvaruju za vreme života eksitona. Jasno je da kod takvih vrsta kristala vezivanje dva bozona u lokalni nivo još manje verovatno, ukoliko predpostavlja prelaz u fonone sa dva puta većom energijom. Upravo radi toga, bez obzira na to što su formalno moguća takva stanja, kada se na jednom istom čvoru nalaze dva bozona, njihovo formiranje od dva odvojena bozona je zabranjeno iz čisto energetskih razloga. Na taj način potencijal II-1.19 dovodi samo do rasejanja bozona jedan na drugom, a odgovarajuća dužina rastojanja se ne može izraziti u bornovskoj aproksimaciji. Posmatrajmo dužinu rasejanja spore čestice na pravougloj jami dubine $2\Delta$, koja ima radijus $a/2$, u uslovima kada je ispunjena nejednakost $2\Delta \gg 4\hbar^2/m_e a^2$ a osim toga vrednost $(a/2\hbar)\sqrt{4m_e\Delta}$ nije bliska neparnom delitelju od $\pi/2$ tj., kada u jami nema neznatnih nivoa. U tom slučaju dužina rasejanja jednaka je radijusu jame uzetom sa suprotnim znakom tako da važi relacija za presek

$$\sigma = \pi a^2 = 4\pi (a/2)^2$$

pri čemu se isti takav rezultat dobija ukoliko potencijalnu jamu zamenimo potencijalnom "grbom" visine $2\Delta$. U oba slučaja dužina rasejanja je negativna tj. efektivno, na malim rastojanjima dolazi do odbijanja. To odbijanje odražava činjenicu da su stvarne elektronske ekscitacije ne bozoni, nego paulioni, s tim što odbojnost na malim rastojanjima kompenzuje grešku, vezanu za prelazak od pauliona na bozone. Ipak odbijanje na malim rastojanjima još uvek ne daje zaključak o tome u kakvom se stanju nalazi sistem eksitona pri niskim temperaturama. Stvarno, prilično jako privlačenje medju eksitonima na većim rastojanjima može dovesti do pojave vezanih stanja tj. bieksitona, posle čega se razmatranje sistema eksidona na niskim temperaturama u nekoliko komplikuje i iziskuje poseban pristup. U vezi sa rečenim, razmotrimo preostali deo kinematičke interakcije medju eksitonima i pre svega deo operatora kinematičke interakcije koji kao i $H'$ nastaje iz II-1.3 pri prelasku na Boze operatore, a odredjen je matričnim elementima $V_{ss'}^{I,II}$. Stavljajući II-1.14 u II-1.3 nalazimo da osnovni član operatora za odredjenu kinematičku interakciju dva eksitona jednog sa drugim ima oblik

$$H_{int}^{c} = -\frac{1}{2}\sum_{s\neq s'} V_{ss'}^{I}\left(B_s^+B_s^+B_sB_{s'} + B_s^+B_{s'}^+B_{s'}B_{s'}\right) \qquad \text{II-1.20}$$

Delujući na eksiton koji se nalazi u tački $S$ ovaj operator ga prevodi u tačku $S'$. Ipak, rezultat dejstva posmatranog operatora na odgovarajuću talasnu funkciju sistema nije jednak nuli samo u tom slučaju ukoliko se uporedo sa eksitonom u tački $S$ nalazi eksiton i u tački $S'$, ili drugi eksiton u tački $S$. Na taj način je matrični element operatora II-1.16 različit od nule samo za takve parove stanja za koje ili u početnom, ili u krajnjem stanju oba eksitona "sede" na jednom mestu. Iskoristimo sada činjenicu da na malim rastojanjima eksitoni pokazuju jako odbijanje. Lako se može pokazati da je vrednost talasne funkcije, koja odgovara malim rastojanjima izmedju eksitona, po modulu $\sim V/\Delta$, gde je $V$ red veličine širine eksitonske zone.

Ta činjenica dovodi do toga da, makar vrednost $|V^{I}_{ss'}|$ u II-1.20 i bila reda širine zone, popravke na energije interakcije medju eksitonima, koje nastaju zahvaljujući kinematičkoj interakciji, su proporcionalne odgovarajućim stepenima malog parametra $|V^{I}|/\Delta$ i male su u odnosu na širinu eksitonske zone. Ukoliko se matrični elementi $V^{I}_{ss'}$ ne smanjuju sa porastom $|s-s'|$ sporije od $1/|s-s'|^3$, interakcija izmedju eksitona, uslovljena operatorom II-1.20, na bilo kom rastojanju izmedju eksitona zadovoljava nejednačinu,

$$|V^{c}_{ss'}| \ll \hbar^2/m_{э}|s-s'|^2 \qquad s \neq s' \qquad \text{II-1.21}$$

gde je $m_{э}$ - efektivna masa eksitona.

Kao što je već ukazano, ukoliko je energija interakcije $|V^{c}_{ss'}|$ mala čak i u poredjenju sa širinom eksitonske zone, izračunavanje te interakcije, koja ne dovodi do pojave vezanih stanja, može dati samo male popravke na dužinu rasejanja eksitona, jednog na drugom, s tim što je uslovljena energijom II-1.19. Zbog toga dužina rasejanja eksitona ostaje negativna, što ukazuje na mogućnost Boze-Ajnštajnove kondenzacije eksitona pri odsustvu dinamičke interakcije izmedju njih.

Koristeći nadjenu dužinu rasejanja i činjenicu da $k=0$ odgovara minimumu energije u eksitonskoj zoni, spektar idealnog gasa pauliona ima oblik

$$\mathcal{E}(k) = \left[ \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{э}}\right)^2 + \frac{4\pi n_0 \hbar^2 a}{m_{э}}\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{э}}\right)\right]^{1/2} \qquad \text{II-1.22}$$

gde je $n_0$ - koncentracija ekscitacija i pri $n_0 \ll a^{-3}$ poklapa se sa sprektrom slabo neidealnog Boze-gasa, sa odbijanjem izmedju čestica. Pri svemu tome korišćenje prelaza od Pauli operatora na Boze operatore, omogućilo nam je da izdvojimo kinematičku interakciju izmedju eksitona, da odredimo dužinu rasejanja koja figuriše u II-1.22.

Vratimo se sada izrazu I-5.45 i ako uzmemo u obzir da je

$$U_{q}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{A_q}{\sqrt{A_q^2 - B_q^2}} + 1\right) \qquad \mho_{q}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{A_q}{\sqrt{A_q^2 - B_q^2}} - 1\right)$$

$$U_q \mho_q = -\frac{1}{2}\frac{B_q}{\sqrt{A_q^2 - B_q^2}} \qquad \text{II-1.23}$$

ZA $\Delta_1$ I $\Delta_2$ DOBIJAMO

$$\Delta_1 = -\frac{1}{2N}\sum_{q}\frac{B_q}{\sqrt{A_q^2-B_q^2}} \qquad \Delta_2 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2N}\sum_{q}\frac{A_q}{\sqrt{A_q^2-B_q^2}}$$

II-1.24

ZA EKSITONE

$$\beta_{k_0} = \gamma_0\frac{N_0}{N} \quad ; \quad \alpha_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}$$

$N_0 = b_0^+ b_0$ - BROJ ČESTICA KONDENZATA

$N' = \sum b_k^+ b_k$ - BROJ EKSITONA

PA JE

$$A(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \left(\gamma_0\frac{N_0}{N} + 4\Delta_2\right)$$

$$B(k) = \gamma_0\left(\frac{N_0}{N} + 2\Delta_1\right)$$

II-1.25

AKO KOLIČNIK $N_0/N$ OBELEŽIMO SA $n_0$, ZA $\mathcal{E}(k)$ DOBIJAMO SLEDEĆI IZRAZ

$$\mathcal{E}_{(k)} = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^4}{4m^2} + \frac{\gamma_0\hbar^2 k^2}{m}(n_0+4\Delta_2) + \gamma_0^2(8n_0\Delta_2 - 4n_0\Delta_1 + 16\Delta_2^2 - 4\Delta_1^2)}$$

II-1.26

ODBACIĆEMO ČLANOVE PROPORCIONALNE SA $\gamma_0^2$, PA IMAMO

$$\mathcal{E}_{(k)} = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^4}{4m^2} + \frac{\gamma_0}{m}\Delta\hbar^2 k^2}$$

II-1.27

GDE JE $\Delta = n_0 + 4\Delta_2$

POSLE PRELASKA SA SUME NA INTEGRAL $/\frac{1}{N}\sum_{q} \rightarrow \frac{1}{N}\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3q\,/$ TE UZIMAJUĆI DA JE $V = Na^3$, POSLE ODGOVARAJUĆE INTEGRACIJE

NALAZIMO DA JE $\Delta$ UPRAVO JEDNAKO $\Delta = n_0 + 4\Delta_2$

OPERATOR $\frac{1}{N}\sum_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3} \gamma(k_1-k_3)\, B^+_{\mathfrak{a}_1} B^+_{\mathfrak{a}_2} B_{\mathfrak{a}_3} B_{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_3}$,

U SLUČAJU KADA POSMATRAMO RASEJANJE NA $\delta$-POTENCIJALU, MOŽE BITI ZAMENJEN OPERATOROM

$$\frac{4\pi |f| \hbar^2}{m N \Omega_0} \sum_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3} B^+_{\mathfrak{a}_1} B^+_{\mathfrak{a}_2} B_{\mathfrak{a}_3} B_{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_3}$$

TAKO DA JE

$$\gamma_0 = \frac{4\pi |f| \hbar^2}{m a^3} \quad ; \quad f = -a/2 \quad /\Delta \gg V_{ss'}/$$

ODNOSNO $\gamma_0 \sim 10^{-12}_{erg} \sim 1eV$

UKUPNI HAMILTONIJAN SISTEMA KOJI OBRAZUJU ATOMI $He^4$, PRI PRELASKU SA PAULIONA NA BOZONE, MOŽEMO NAPISATI U SLEDEĆEM OBLIKU

$$H = H_1 + H_4$$

$$H_1 = \sum_n (\Delta\mathcal{E}_f + \mathcal{D}_f) B^+_{nf} B_{nf} + \sum_{nm} V^f_{nm} B^+_{mf} B_{mf} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{nm} V^f_{nm} \left( B^+_{mf} B^+_{nf} + B_{mf} B_{nf} \right)$$

$$H_4 = -\Delta \sum_{ss'} \delta_{ss'} B^+_s B^+_{s'} B_{s'} B_s - \qquad \text{II-1.28}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{ss'} M^{I}_{ss'} \left( B^+_s B^+_s B_s B_{s'} + B^+_s B^+_{s'} B_{s'} B_{s'} \right) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{ss'} M^{IV}_{ss'} B^+_s B^+_{s'} B_s B_{s'}$$

U $H_4$ ZBOG $\Delta \gg M^I_{ss'}$ I $M^{IV}_{ss'}$, POSMATRAĆEMO SAMO RASEJANJE NA $\delta$-POTENCIJALU, GDE PRI PRELAZU U IMPULSNI PROSTOR, UPRAVO ZBOG TOG POTENCIJALA, NE MOŽEMO PRIMENITI BORNOVSKU APROKSIMACIJU, VEĆ

MORAMO UZETI

$$I(K) = -\frac{2\pi\hbar^2}{m\Omega_0}\left\{A_{(K)}+A^+_{(K)}\right\} \qquad \text{II-1.29}$$

GDE JE $\Delta(K)$ AMPLITUDA RASEJANJA NA $\delta$-POTENCIJALU I ZA $\Delta \gg V_{SS'}$

$$A_{(K)} = A^+_{(K)} = f = -a/2$$

PA JE

$$I(K) = \frac{4\pi|f|\hbar^2}{\Omega_0 m_3} = \delta(K) = \frac{2\pi a\hbar^2}{\Omega_0 m} \qquad \text{II-1.30}$$

GDE JE

$$\Omega_0 = V/N \quad ; \quad (V = a^3 N)$$

PA ZA $H_4$ DOBIJAMO SLEDEĆI IZRAZ

$$H_4 = \frac{4\pi|f|\hbar^2}{mN}\sum_{K_1K_2K_3K_4}\delta(K_1+K_2-K_3-K_4)\, b^+_{K_1} b^+_{K_2} b_{K_3} b_{K_4} \qquad \text{II-1.31}$$

I VREDNOST ZA $\alpha(K) = E(K) - E(0) \simeq \frac{\hbar^2 K^2}{2m}$

U APROKSIMACIJI DA JE ZBOG $N_0 = \mathcal{N}_0 \gg 1$, $b^+_0 b_0 = b_0 b^+_0$

IMAMO

$$H = \frac{1}{2}\frac{N_0^2}{N}\delta(0) + \sum_{K\neq 0}\left[\alpha(K) + \frac{N_0}{N}\delta(K)\right] b^+_K b_K +$$

$$+ \frac{b_0^2}{2N}\sum_{K\neq 0}\delta(K)\, b^+_K b_{-K} + \frac{b_0^{+2}}{2N}\sum_{K\neq 0}\delta(K)\, b_K b_{-K} + \qquad \text{II-1.32}$$

$$+ \frac{1}{N}\sum_{K_1K_2K_3\neq 0}\delta(K_1-K_3)\, b^+_{K_1} b^+_{K_2} b_{K_3} b_{K_1+K_2-K_3}$$

AKO UVEDEMO NOVE OPERATORE

$$B_K = b^+_0 b_K/\sqrt{N_0} \quad ; \quad B^+_K = b_0 b^+_K/\sqrt{N_0}$$

DOBIJAMO NAŠ POZNATI HAMILTONIJAN

$$H = \frac{1}{2}\frac{N'^2}{N}\delta(0) + \sum_{K\neq 0}\left[\alpha(K) + \beta(K)\right] B^+_K B_K + \qquad \text{II-1.33}$$

$$+ \frac{N_0}{2N}\sum_{K\neq 0}\delta(K)\left(B^+_K B^+_{-K} + B_K B_{-K}\right) + \frac{1}{N}\sum_{K_1K_2K_3\neq 0}\delta(K_1-K_3)\, B^+_{K_1} B^+_{K_2} B_{K_3} B_{K_1+K_2-K_3}$$

ODAKLE ZA $V=1$ I ČLANOVE UZ $\delta_0^2$ PROPORCIONALNE /JEDNAKE/ NULI, DIREKTNO SLEDI REZULTAT BOGOLJUBOVA (GL. I)

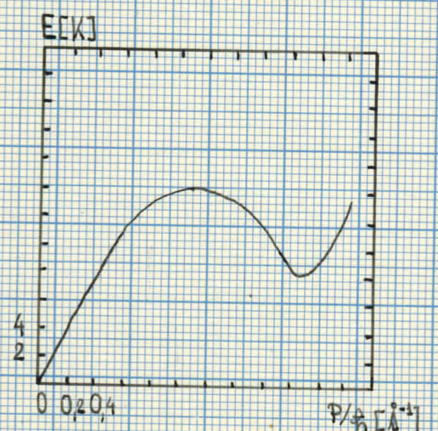
## Standardni spektar eksitona u uslovima Boze kondenzacije

Videli smo već da se spektar idealnog gasa pauliona poklapa sa spektrom slabo neidealnog Boze-gasa sa odbijanjem izmedju čestica.

Neka je $\mathcal{E}$ energija elementarne ekscitacije u tečnom helijumu funkcija impulsa $p$ . Izgled energetskog spektra za male vrednosti impulsa formira sa veoma lako. Malim impulsima odgovaraju dugotalasne ekscitacije koje se očevidno u tečnosti pojavljuju kao proste, uzdužne zvučne oscilacije. Na taj način, odgovarajuće elementarne ekscitacije predstavljaju zvučne kvante - fonone. Energija fonona je linearna funkcija impulsa i kao što je već dato

$$\mathcal{E} = c\,p$$

gde je $c$ brzina zvuka. Pri povećanju vrdnosti impulsa kriva $\mathcal{E}(p)$ odstupa od linearnosti. Radi objašnjenja eksperimentalnih vrednosti temodinamičkih veličina tečnosti helijuma, Landau je dao energetskom spektru izgled prikazan na slici 1.2




1.2

Stvar je u tome što se postojanje samo ovih fonona pokazalo nedovoljnim za objašnjenje temperaturne zavisnosti i apsolutne veličine takvih termodinamičkih karakteristika kao što je na primer toplotni kapacitet. Lako se može zapaziti da će elementarne ekscitacije energije u blizini minimuma krive I.2 davati konkretno fononima svoj udeo u svim termodinamičkim veličinama. Odgovarajuće ekscitacije nazvane su rotonima, a njihova energija može biti data u obliku

$$\varepsilon = \Delta + \frac{(P - P_0)^2}{2\mu} \qquad \text{II-2.1}$$

$\Delta$ i $\mu$ su konstante, a $P_0$ vrednost impulsa za koje funkcija $\varepsilon$ ima minimum jednak $\Delta$. Tačne vrdnosti parametara koji karakterišu energetski spektar helijuma nadjene su pomoću rasejanja neutrona tečnim helijumom. Na taj način dobijene su sledeće vrednosti parametara

$$\Delta = 8{,}6\,^{\circ}K \quad ; \quad P_0 = 1{,}9 \times 10^{+8}\,[cm^{-1}] \quad ; \quad \mu = 0{,}16\, m_{He^4}$$

veličina $\mu$ se još naziva efektivnom masom rotona.

Koncepcija elementarnih ekscitacija predpostavlja da njihov broj nije velik, tako da bi energija interakcije izmedju njih nije velika u poredjenju sa njihovom sopstvenom energijom. U tom slučaju gas elementarnih ekscitacija možemo razmatrati kao idealan gas. Budući da se pri pobudjenju tečnosti fononi i rotoni mogu pojavljivati pojedinačno, to očevidno moraju posedovati celobrojne vrednosti momenta odnosno počinjavaju se Boze statistici. Što se tiče rotona, njihova energija sadrži veliku vrednost i zbog toga se Boze raspodela može zameniti Bolcmanovom. U blizini $\lambda$ tačke ima mnogo ekscitacija i njihova interakcija postaje bitna. Vreme života, odredjeno uzajamnim sudarima, postaje malo, a neodredjenost energije ekscitacija poredljiva sa njihovom energijom. Radi toga koncepcija elementarnih ekscitacija u blizini $\lambda$ tačke ne može egzistirati iako praktično, već na temperaturi reda $1{,}7$-$1{,}8\,^{\circ}K$ i niže te, u helijumu gas fonona i rotona možemo smatrati idealnim.

Zapazimo još i to da se izvedena mogućnost kondenzacije u prostoru impulsa elementarnih ekscitacija u sistemu sa hamiltonijanom II-1.5 poklapa sa rezultatima rada

Bokčiera i Sinesa [7], gde se takodje raspravljalo u uslovima i mogućnosti kondenzacije, premda ovaj rad nije doveo do spektra elementarnih ekscitacija sistema u uslovima kondenzacije.

Koristeći se formulom II.1.16 nalazimo da je operator interakcije eksitona sledećeg oblika

$$H_{int} = \frac{1}{2} V^{IV}_{ss'} P^{+}_{s} P^{+}_{s'} P_{s} P_{s'} \quad (a)$$

$$V^{IV}_{ss'} = V_{ss'(ff,ff)} + V^{00,00}_{ss'} - 2V_{ss'(0f,0f)} \quad (b) \qquad \text{II-2.2}$$

Prvi član u II-2.2(b) jednak je energiji interakcije molekula $S$ i $S'$ koji se nalaze u f-tom pobudjenom stanju, drugi član odgovara interakciji istih molekula u uslovima kada se oba molekula nalaze u osnovnom stanju, a treći član se odredjuje energijom interakcije izmedju molekula $S$ i $S'$ u tom slučaju kada se samo jedan od njih nalazi u ekscitiranom stanju f. Ove veličine u izrazu II.2.2(b) mogu se naći ukoliko su poznate talasne funkcije izolovanih molekula u f-pobudjenom i osnovnom stanju. Recimo i to da, ukoliko je veličina $V^{IV}_{ss'}$ (pozitivna ili negativna) mala po apsolutnoj vrednosti u poredjenju sa širinom eksitonske zone, dinamička interakcija kao i pre kinematička, ne dovodi do formiranja vezanog stanja dva eksitona. Znači, u tom slučaju je Boze-Ajnštajnova kondenzacija eksitona moguća.

Ukoliko je Boze-kondenzacija eksitona praćena pojavom spektra koji zadovoljava kao što smo videli kriterij superfluidnosti, tu kondenzaciju bi mogli fiksirati putem posmatranja udela superfluidne komponente u prenosu energije od osnovne supstance ka detektoru eksitona, eksperimentima analognim onim kod Simpsona. Pri tome prenos energije nadkondenzatnim eksitonima možemo oceniti pomoću jednačine difuzije. Što se pak tiče kretanja kondenzata, ono može biti inicirano gradijentom koncentracije eksitona, kao posledice toga što je kraj površine defektora, koji zahvate eksitone, njihova koncentracija mala.

Korigovani eksitonski spektar

Odvojićemo one članove hamiltonijana $H_{4(0)}$ koji odgovaraju nelinearnim procesima slepljivanja tri eksitona u jedan, odnosno radjanju tri eksitona na račun iščezavanja jednog ( $C^+C^+C^+C$ ; $C^+CCC$ )

$$H_4 = \gamma_0 \frac{1}{N} \sum \Big[ U_{K_1} U_{K_2} U_{K_3} V_{K_4} C^+_{K_1} C^+_{K_2} C^+_{-K_4} C_{K_3} + U_{K_1} U_{K_2} V_{K_3} U_{K_4} C^+_{K_1} C^+_{K_2} C^+_{-K_3} C_{K_4} + U_{K_1} V_{K_2} V_{K_3} V_{K_4} C^+_{K_1} C^+_{-K_3} C^+_{-K_4} C_{-K_2} + V_{K_1} U_{K_2} V_{K_3} V_{K_4} C^+_{K_2} C^+_{-K_3} C^+_{-K_4} C_{-K_1} \Big] + \gamma_0 \frac{1}{N} \sum \Big[ U_{K_1} V_{K_2} U_{K_3} U_{K_4} C^+_{K_1} C_{-K_2} C_{-K_3} C_{K_4} + V_{K_1} U_{K_2} U_{K_3} U_{K_4} C^+_{K_2} C_{-K_1} C_{K_3} C_{K_4} + V_{K_1} V_{K_2} U_{K_3} V_{K_4} C^+_{-K_4} C_{-K_1} C_{-K_2} C_{K_3} + V_{K_1} V_{K_2} V_{K_3} U_{K_4} C^+_{-K_3} C_{-K_1} C_{-K_2} C_{K_4} \Big] \qquad \text{II-3.1}$$

Transformisaćemo ove sume uvodjenjem novih sumacionih indeksa, te kompletan hamiltonijan sada izgleda

$$H = \sum_K E_{(K)} C^+_K C_K + \frac{1}{N} \sum_{K_1 K_2 K_3} \Phi_{K_1 K_2 K_3} \left( C^+_{K_1} C^+_{K_2} C^+_{K_3} C_{K_1+K_2+K_3} + C^+_{K_1+K_2+K_3} C_{K_3} C_{K_2} C_{K_1} \right) \qquad \text{II-3.2}$$

GDE JE

$$E_K = \sqrt{A_K^2 - B_0^2} \qquad U_K^2 = \frac{1}{2}\left( \frac{A_K}{\sqrt{A_K^2 - B_0^2}} + 1 \right)$$

$$A_K = \alpha_{(K)} + 4\gamma_0 \Delta_2 + \gamma_0 \frac{N_0}{N} \qquad V_K^2 = \frac{1}{2}\left( \frac{A_K}{\sqrt{A_K^2 - B_0^2}} - 1 \right) \qquad \text{II-3.3}$$

$$B_0 = \gamma_0 \frac{N_0}{N} + 2\gamma_0 \Delta_1$$

$$\Phi_{K_1 K_2 K_3} = 2\gamma_0 \left( U_{K_1} U_{K_2} V_{K_3} U_{K_1+K_2+K_3} + U_{K_1} V_{K_2} U_{K_3} V_{K_1+K_2+K_3} \right)$$

Očigledno je da drugi član u hamiltonijanu II-2.4 daje korekcije na veličinu $E_{(K)}$ i to u drugoj aproksimaciji teorije perturbacije. Tačan spektar elementarnih ekscitacija naćićemo kao pol funkcije Grina.

Jednačina za Green-ovu funkciju

$$E \langle\langle C_\nu | C^+_\nu \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} - \langle\langle C_\nu | [C^+_\nu, H] \rangle\rangle \qquad \text{II-3.4}$$

PA JE

$$\Big[ C_\nu^+ , \sum_{K_1K_2K_3} \Phi_{K_1K_2K_3} \big( C_{K_1}^+ C_{K_2}^+ C_{K_3}^+ C_{K_1+K_2+K_3} + C_{K_1+K_2+K_3}^+ C_{K_3} C_{K_2} C_{K_1} \big) \Big] =$$

$$= \sum_{K_1K_2} \Phi_{K_1K_2\,\nu-K_1-K_2} C_{K_1}^+ C_{K_2}^+ C_{\nu-K_1-K_2}^+ \qquad \text{II-3.5}$$

ZA GREEN-OVU FUNKCIJU SADA IMAMO SLEDEĆI SISTEM J-A

$$( E - E_\nu ) \langle\langle C_\nu | C_\nu^+ \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} + \frac{1}{N} \sum_{K_1K_2} \Phi_{K_1K_2\,\nu-K_1-K_2} \langle\langle C_\nu | C_{K_1}^+ C_{K_2}^+ C_{\nu-K_1-K_2}^+ \rangle\rangle$$

$$E \langle\langle C_\nu | C_{K_1}^+ C_{K_2}^+ C_{K_3}^+ \rangle\rangle = - \langle\langle C_\nu | [ C_{K_1}^+ C_{K_2}^+ C_{K_3}^+ , H ] \rangle\rangle$$

$$K_3 = \nu - K_1 - K_2 \qquad \text{II-3.6}$$

HAMILTONIJAN JE OBLIKA

$$H = \sum_K \mathcal{E}(K)\, C_K^+ C_K + \frac{1}{N} \sum_{K_1K_2K_3} \Phi_{K_1K_2K_3} \big( C_{K_1}^+ C_{K_2}^+ C_{K_3}^+ C_{K_1+K_2+K_3} +$$

$$+ C_{K_1+K_2+K_3}^+ C_{K_3} C_{K_2} C_{K_1} \big) + \frac{1}{N} \sum_{K_1K_2K_3} F_{K_1K_2K_3} C_{K_1}^+ C_{K_2}^+ C_{K_3} C_{K_1+K_2-K_3} +$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{K_1K_2K_3} G_{K_1K_2K_3} \big( C_{K_1}^+ C_{K_2}^+ C_{K_3}^+ C_{-K_1-K_2-K_3}^+ + C_{-K_1-K_2-K_3} C_{K_3} C_{K_2} C_{K_1} \big)$$

$$\text{II-3.7}$$

GDE JE

$$F_{K_1K_2K_3} = \delta_0 \big( U_{K_1} U_{K_2} U_{K_3} U_{K_1+K_2-K_3} + \vartheta_{K_1} \vartheta_{K_2} \vartheta_{K_3} \vartheta_{K_1+K_2-K_3} + 4 U_{K_1} \vartheta_{K_2} \vartheta_{K_3} U_{K_1+K_2-K_3} \big)$$

$$G_{K_1K_2K_3} = \delta_0 U_{K_1} U_{K_2} \vartheta_{K_3} \vartheta_{-K_1-K_2-K_3} \qquad \text{II-3.8}$$

POŠTO GREENOVU F-U TRAŽIMO U OBLIKU

$$\Gamma_K = \langle\langle 0 | C_\nu | C_\nu^+ | 0 \rangle\rangle \equiv \langle\langle C_\nu | C_\nu^+ \rangle\rangle$$

KOMUTATORI $\qquad$ II-3.9

$$[ C_\nu^+ , C^+ C C C ] \; ; \; [ C_\nu^+ , C^+ C^+ C^+ C^+ ]$$

$$[ C_\nu^+ , C_\nu C_\nu C_\nu C_\nu ] \; ; \; [ C_\nu^+ , C^+ C^+ C C ] \qquad \text{II-3.10}$$

DOVODE DO GREEN-OVIH F-A /DVOČESTIČNIH/ KOJE SU JEDNAKE NULI, TAKO DA OSTAJE SAMO DVOČESTIČNA GREEN-OVA F-A OD KOMUTATORA

$$[C_\nu, C^+_{k_1} C^+_{k_2} C^+_{k_3} C_{k_1+k_2+k_3}] \quad \text{tj.} \quad \langle\langle C_\nu | C^+_{k_1} C^+_{k_2} C^+_{\nu-k_1-k_2} \rangle\rangle \qquad \text{II-3.11}$$

Za ovu f-u dobijamo sledeće komutatore

$$[C^+_{k_1} C^+_{k_2} C^+_{\nu-k_1-k_2}, \sum E_{(k)} C^+_k C_k] = (E_{\nu-k_1-k_2} + E_{k_1} + E_{k_2}) C^+_{k_1} C^+_{k_2} C^+_{\nu-k_1-k_2}$$

$$[C^+_{k_1} C^+_{k_2} C^+_{k_3}, \sum_{q_1 q_2 q_3} \Phi_{q_1 q_2 q_3} C^+_{q_1} C^+_{q_2} C^+_{q_3} C_{q_4}] = \qquad \text{II-3.12}$$

$$= \sum_{q_1 q_2 q_3} \Phi_{q_1 q_2 q_3} [C^+_{k_1} C^+_{k_2} C^+_{k_3}, C^+_{q_1} C^+_{q_2} C^+_{q_3} C_{q_4}]$$

Poslednji komutator nam daje članove oblika $C^+_{k_1} C^+_{k_2} C^+_{q_1} C^+_{q_2} C^+_{q_3}$ koji dovode do Green-ove funkcije /u našoj aproksimaciji se odbacuje/ a oblika je

$$\langle\langle C_\nu | C^+_{k_1} C^+_{k_2} C^+_{q_1} C^+_{q_2} C^+_{q_3} \rangle\rangle \qquad \text{II-3.13}$$

Komutator

$$[C^+_{k_1} C^+_{k_2} C^+_{k_3}, \sum_{q_1 q_2 q_3} \Phi_{q_1 q_2 q_3} C^+_{q_4} C_{q_3} C_{q_2} C_{q_1}]$$

ekvivalentan je komutatoru

$$C^+_{q_4} [C^+_{k_1} C^+_{k_2} C^+_{k_3}, C_{q_1} C_{q_2} C_{q_3}]$$

i posle transformacija uz pomoć komutacionih relacija, jedini članovi različiti od nule su

$$C^+_{q_4} [C^+_{k_1} C^+_{k_2} C^+_{k_3}, C_{q_1} C_{q_2} C_{q_3}] = - C^+_{q_4} C_{q_2} C_{q_3} C^+_{k_2} C^+_{q_3} \delta_{k_1 q_1}$$

$$- C^+_{q_4} C_{q_1} C_{q_3} C^+_{k_2} C^+_{k_3} \delta_{k_1 q_2} - C^+_{q_4} C_{q_1} C_{q_2} C^+_{k_2} C^+_{k_3} \delta_{k_1 q_3} \qquad \text{II-3.14}$$

Ako poslednje članove transformišemo, dobijamo konačno

$$C^+_{q_4} [C^+_{k_1} C^+_{k_2} C^+_{k_3}, C_{q_1} C_{q_2} C_{q_3}] = - C^+_{q_4} [\delta_{k_1 q_1} \delta_{k_2 q_2} \delta_{k_3 q_3} +$$

$$+ \delta_{k_1 q_1} \delta_{k_2 q_3} \delta_{k_3 q_2} + \delta_{k_1 q_2} \delta_{k_2 q_1} \delta_{k_3 q_3} + \delta_{k_1 q_2} \delta_{k_2 q_3} \delta_{k_3 q_1} + \delta_{k_1 q_3} \delta_{k_2 q_1} \delta_{k_3 q_2} +$$

$$+ \delta_{k_1 q_3} \delta_{k_2 q_2} \delta_{k_3 q_1}] \qquad \text{II-3.15}$$

Komutatori oblika

$$\Big[C^+_{k_1}C^+_{k_2}C^+_{k_3}, \sum_{q_1q_2q_3} F_{q_1q_2q_3}\, C^+_{q_1}C^+_{q_2}C_{q_3}C_{q_1+q_2-q_3}\Big] =$$

$$= \sum_{q_1q_2q_3} F_{q_1q_2q_3}\Big[C^+_{k_1}C^+_{k_2}C^+_{k_3}, C^+_{q_1}C^+_{q_2}C_{q_3}C_{q_1+q_2-q_3}\Big] \qquad II-3.16$$

dovode do Green-ove f-e od šest operatora /tročestične/ koju mi zanemarujemo

Kod

$$\Big[C^+_{k_1}C^+_{k_2}C^+_{k_3}\sum G_{q_1q_2q_3}\left(C^+_{q_1}C^+_{q_2}C^+_{q_3}C_{q_4}+C_{q_4}C_{q_1}C_{q_2}C_{q_3}\right)\Big]$$

se očevidno javljaju dva komutatora koja su zbog usrednjenja po osnovnom stanju /javlja se operatora proizvod tri anihilacije i dva kreacije/ oba jednaka nuli.

Prema tome, nakon svega, za Greenovu f-u $\langle\langle C_\nu | C^+_{k_1}C^+_{k_2}C^+_{k_3}\rangle\rangle$ dobijamo sledeću j-u, naravno zanemarujući tročestične Green-ove f-e:

$$E\langle\langle C_\nu | C^+_{k_1}C^+_{k_2}C_{\nu-k_1-k_2}\rangle\rangle = \left(E_{\nu-k_1-k_2}+E_{k_1}+E_{k_2}\right)\langle\langle C_\nu | C^+_{k_1}C^+_{k_2}C_{\nu-k_1-k_2}\rangle\rangle$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{q_1q_2q_3}\Phi_{q_1q_2q_3}\langle\langle C_\nu | C^+_{q_4}\rangle\rangle\Big(\delta_{q_1k_1}\delta_{q_2k_2}\delta_{q_3k_3}+$$

$$+\delta_{q_1k_1}\delta_{q_2k_3}\delta_{q_3k_2}+\delta_{q_1k_2}\delta_{q_2k_1}\delta_{q_3k_3}+\delta_{q_1k_2}\delta_{q_2k_3}\delta_{q_3k_1}+$$

$$+\delta_{q_1k_3}\delta_{q_2k_1}\delta_{q_3k_2}+\delta_{q_1k_3}\delta_{q_2k_2}\delta_{q_3k_1}\Big) \qquad II-3.17$$

odnosno

$$\langle\langle C_\nu | C^+_{k_1}C^+_{k_2}C_{\nu-k_1-k_2}\rangle\rangle\left(E-E_{\nu-k_1-k_2}-E_{k_1}-E_{k_2}\right)=$$

$$=\frac{1}{N}\langle\langle C_\nu | C^+_\nu\rangle\rangle\Big(\Phi_{k_1k_2,\nu-k_1-k_2}+\Phi_{k_2k_1,\nu-k_1-k_2}+\Phi_{k_1,\nu-k_1-k_2,k_2}+$$

$$+\Phi_{k_2,\nu-k_1-k_2,k_1}+\Phi_{\nu-k_1-k_2,k_1,k_2}+\Phi_{\nu-k_1-k_2,k_2,k_1}\Big) \qquad II-3.18$$

Za Green-ovu f-u $\langle\langle C_\nu | C^+_\nu\rangle\rangle$ dobijamo konačno:

$$\left\{ E - E(\nu) - \frac{1}{N^2} \sum_{K_1 K_2} \frac{\Phi_{K_1 K_2, \nu-K_1-K_2}}{E - E_{K_1} - E_{K_2} - E_{\nu-K_1-K_2}} \left[ \Phi_{K_1 K_2, \nu-K_1-K_2} + \right.\right.$$

$$+ \Phi_{K_1, \nu-K_1-K_2, K_2} + \Phi_{K_2, K_1, \nu-K_1-K_2} + \Phi_{K_2, \nu-K_1-K_2, K_1} + \Phi_{\nu-K_1-K_2, K_1, K_2} +$$

$$\left.\left. + \Phi_{\nu-K_1-K_2, K_2 K_1} \right] \right\} \langle\langle C_\nu | C_\nu^+ \rangle\rangle = \frac{C}{2\pi} \qquad \text{II-3.19}$$

ZA ENERGIJU ELEMENTARNIH EKSCITACIJA DOBIJAMO

$$E = \mathcal{E}(\nu) = E_\nu + \frac{1}{N^2} \sum_{K_1 K_2} \frac{f(K_1, K_2)}{E - E_{K_1} - E_{K_2} - E_{\nu-K_1-K_2}} \qquad \text{II-3.20}$$

U NULTOJ APROKSIMACIJI $E^{(0)} = E_\nu$

U PRVOJ APROKSIMACIJI

$$\mathcal{E}(\nu) = E_\nu + \frac{1}{N^2} \sum_{K_1 K_2} \frac{f(K_1 K_2)}{E_\nu - E_{K_1} - E_{K_2} - E_{\nu-K_1-K_2}} \qquad \text{II-3.2}$$

UVODEĆI IZRAZ ZA $f(K_1, K_2)$, NAVEŠĆEMO KOREKTAN SPEKTAR ELEMENTA EKSCITACIJA U TEČNOM He, KOJI PREDSTAVLJA REALNI DEO POLA FUNKCIJE G(K U PRVOJ ITERACIJI

$$\mathcal{E}(\nu) = E(\nu) + \frac{8\gamma_0^2}{N^2} \sum_{K_1 K_2} \frac{1}{E(\nu) - E_{K_1} - E_{K_2} - E_{\nu-K_1-K_2}} \times \qquad \text{II-3.22}$$

$$\times \left\{ \left( U_{K_1} U_{K_2} U_\nu V_{\nu-K_1-K_2} + V_{K_1} V_{K_2} V_\nu U_{\nu-K_1-K_2} \right)^2 + 2 U_{K_1} V_{K_2} \times \right.$$

$$\times \left( U_{K_1} U_{K_2} U_\nu V_{\nu-K_1-K_2} + V_{K_1} V_{K_2} V_\nu U_{\nu-K_1-K_2} \right) \left( U_\nu U_{\nu-K_1-K_2} + V_\nu V_{\nu-K_1-K_2} \right)$$

AKO UVEDEMO SMENE

$$\Delta = 1/2m \quad /m = 10 m_e/ \quad ; \; B = \gamma_0/m \times (n_0 + 4\Delta_2)$$

$$C^2 = \gamma_0^2 (8 n_0 \Delta_2 - 4 n_0 \Delta_1 + 16 \Delta_2^2 - 4 \Delta_1^2)$$

TADA JE $\quad E(p) = \sqrt{\Delta^2 p^4 + B p^2 + C^2} \qquad$ II-3.23

GDE JE $\vec{P} = \hbar\vec{v}$ ; $\vec{P}_1 = \hbar\vec{u}_1$ ; $\vec{P}_2 = \hbar\vec{k}_2$

I UVODEĆI SMENU

$$\vec{q} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

$$\alpha_1 = \measuredangle(\vec{P}_1, \vec{q}) \quad ; \quad \alpha = \measuredangle(\vec{P}, \vec{q})$$

POSLE ODGOVARAJUĆIH ZAMENA ZA $\Delta_1 ; \Delta_2 ; \Delta_P ; B_0 ; U_P^2 ; \mathcal{V}_P^2 ; U_P \mathcal{V}_P ; E_{P_1} ; E_{q-P_1} ; E_P ; E_{P-q}$ I NAŠ IZRAZ ZA SPEKTAR ELEMENTARNIH EKSCITACIJA GLASI

$$\mathcal{E}(P) = \sqrt{\Delta^2 P^4 + BP^2 + C^2} + 8\gamma_0^2 (\Omega/\hbar^3)^2 \int d^3P_1 \, d^3q \, \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 P^4 + BP^2 + C^2} - \sqrt{\Delta^2 P_1^4 + BP_1^2 + C^2} - \sqrt{\Delta^2 [q^4 + P_1^4 + 2P_1^2 q^2 (1 + 2\cos^2\alpha_1) - 4qP_1(q^2 + P_1^2)\cos\alpha_1] + B(q^2 + P_1^2 - 2qP_1\cos\alpha_1) + C^2} - \sqrt{\Delta^2 [P^4 + q^4 + 2q^2P^2(1 + 2\cos^2\alpha) - 4Pq(P^2 + q^2)\cos\alpha] + B(q^2 + P^2 - 2Pq\cos\alpha) + C^2}} \times$$

$$\times \Bigg\{ \frac{1}{16} \Bigg[ \sqrt{\left(\frac{\Delta P_1^2 + Bm}{E_{P_1}} + 1\right)\left(\frac{\Delta(q^2 + P_1^2 - 2qP_1\cos\alpha_1) + Bm}{E_{q-P_1}} + 1\right)\left(\frac{\Delta P^2 + Bm}{E_P} + 1\right)\left(\frac{\Delta(P^2 + q^2 - 2Pq\cos\alpha) + Bm}{E_{P-q}} - 1\right)} +$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{\Delta P_1^2 + Bm}{E_{P_1}} - 1\right)\left(\frac{\Delta(q^2 + P_1^2 - 2qP_1\cos\alpha_1) + Bm}{E_{q-P_1}} - 1\right)\left(\frac{\Delta P^2 + Bm}{E_P} - 1\right)\left(\frac{\Delta(P^2 + q^2 - 2Pq\cos\alpha) + Bm}{E_{P-q}} + 1\right)} \Bigg]^2 +$$

$$+ \frac{1}{8} \sqrt{\left(\frac{\Delta P_1^2 + Bm}{E_{P_1}} + 1\right)\left(\frac{\Delta(q^2 + P_1^2 - 2qP_1\cos\alpha_1) + Bm}{E_{q-P_1}} - 1\right)} \left[ \sqrt{\left(\frac{\Delta P^2 + Bm}{E_P} + 1\right)\left[\frac{\Delta(P^2 + q^2 - 2Pq\cos\alpha) + Bm}{E_{P-q}} + 1\right]} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left(\frac{\Delta P^2 + Bm}{E_P} - 1\right)\left(\frac{\Delta(P^2 + q^2 - 2Pq\cos\alpha) + Bm}{E_{P-q}} - 1\right)} \right] \left[ \sqrt{\left(\frac{\Delta P^2 + Bm}{E_P} + 1\right)\left(\frac{\Delta P_1^2 + Bm}{E_{P_1}} + 1\right) \times \right.$$

$$\overline{\times \left[\frac{\Delta(P_1^2 + q^2 - 2P_1q\cos\alpha_1) + Bm}{E_{q-P_1}} + 1\right]\left[\frac{\Delta(P^2 + q^2 - 2Pq\cos\alpha) + Bm}{E_{P-q}} + 1\right]} + \sqrt{\left(\frac{\Delta P^2 + Bm}{E_P} - 1\right)\left(\frac{\Delta P_1^2 + Bm}{E_{P_1}} - 1\right) \times}$$

$$\left. \overline{\times \left[\frac{\Delta(P_1^2 + q^2 - 2P_1q\cos\alpha_1) + Bm}{E_{q-P_1}} - 1\right]\left[\frac{\Delta(P^2 + q^2 - 2Pq\cos\alpha) + Bm}{E_{P-q}} + 1\right]} \right] \qquad \text{II-3.24}$$

$$\alpha_1 = \vartheta_1 \qquad \alpha = \vartheta$$

$$d^3P_1 = P_1^2 \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1 \, dP_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1 \quad ; \quad d^3q = q^2 \sin\vartheta \sin\varphi \, dq \, d\vartheta \, d\varphi$$

$0 \le \vartheta_1 \le \pi \;;\quad 0 \le \varphi_1 \le 2\pi \;;\quad 0 \le \vartheta \le \pi \;;\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 < p, q < +\infty$

Uzećemo smene

$\cos\alpha_1 = \cos\vartheta_1 = y \;;\quad \cos\alpha = \cos\vartheta = x$

$-1 \le y, x \le 1$

I konačno

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{(p)} = {} & \sqrt{A^2p^4 + Bp^2 + C^2} + 2\pi^2 \gamma_0^2 (\Omega/k^3)^2 \int_0^Q q^2\,dq \int_{-1}^{+1} dx \times \\
& \times \int_0^Q p_1^2\,dp_1 \int_{-1}^{+1} dy \, \frac{1}{E(p) - E(p_1) - E(p_1qy) - E(pqx)} \times \left[ \left( \frac{Ap^2+Bm}{E(p)} + 1 \right)^{1/2} \left( \frac{Ap_1^2+Bm}{E(p_1)} + 1 \right)^{1/2} \times \right. \\
& \times \left( \frac{Ap_1^2 + Aq^2 - 2A_{p_1qy} + Bm}{E(p_1qy)} + 1 \right)^{1/2} \left( \frac{Ap^2 + Aq^2 - 2A_{pqx} + Bm}{E(pqx)} - 1 \right)^{1/2} \left( \frac{Ap^2+Bm}{E(p)} - 1 \right)^{1/2} \times \\
& \times \left. \left( \frac{Ap_1^2+Bm}{E(p_1)} - 1 \right) \left( \frac{Ap_1^2 + Aq^2 - 2A_{p_1qy} + Bm}{E(p_1qy)} - 1 \right)^{1/2} \left( \frac{Ap^2 + Aq^2 - 2A_{pqx} + Bm}{E(pqx)} + 1 \right)^{1/2} \right] \times \\
& \times \left[ \left( \frac{Ap^2+Bm}{E(p)} + 1 \right)^{1/2} \left( \frac{Ap_1^2+Bm}{E(p_1)} + 1 \right)^{1/2} \left( \frac{Ap_1^2 + Aq^2 - 2A_{p_1qy} + Bm}{E(p_1qy)} + 1 \right)^{1/2} \times \right. \\
& \times \left( \frac{Ap^2 + Aq^2 - 2A_{pqx} + Bm}{E(pqx)} - 1 \right)^{1/2} \left( \frac{Ap^2+Bm}{E(p)} - 1 \right)^{1/2} \left( \frac{Ap_1^2+Bm}{E(p_1)} - 1 \right)^{1/2} \times \\
& \times \left( \frac{Ap_1^2 + Aq^2 - 2A_{p_1qy} + Bm}{E(p_1qy)} - 1 \right)^{1/2} \left( \frac{Ap^2 + Aq^2 - 2A_{pqx} + Bm}{E(pqx)} + 1 \right)^{1/2} \underset{+2}{\wedge} \left( \frac{Ap^2+Bm}{E(p)} + 1 \right)^{1/2} \times \\
& \times \left( \frac{Ap_1^2+Bm}{E(p_1)} + 1 \right)^{1/2} \left( \frac{Ap_1^2 + Aq^2 - 2A_{p_1qy} + Bm}{E(p_1qy)} + 1 \right)^{1/2} \left( \frac{Ap^2 + Aq^2 - 2A_{pqx} + Bm}{E(pqx)} - 1 \right)^{1/2} + \\
& \left. + 2 \left( \frac{Ap^2+Bm}{E(p)} - 1 \right)^{1/2} \left( \frac{Ap_1^2+Bm}{E(p_1)} + 1 \right)^{1/2} \left( \frac{Ap_1^2 + Aq^2 - 2A_{p_1qy} + Bm}{E(p_1qy)} - 1 \right)^{1/2} \left( \frac{Ap^2 + Aq^2 - 2A_{pqx} + Bm}{E(pqx)} - 1 \right)^{1/2} \right]
\end{aligned}
$$

II-3.25

BEZ UPOTREBE KOMPJUTERA NEMOGUĆE JE IZRAČUNATI VREDNOST IZRAZA II-3.25

POSLE UVRŠTAVANJA VREDNOSTI ZA PARAMETRE

$$\Delta = 3{,}2 \times 10^{-15} \;;\; B = 16 \times 10^{-26} \;;\; /K = Q \cdot P/ \quad Q = 0{,}8 \times 10^{6}$$

$$\gamma_0 = 1/4 \times 10^{-12} \;;\; \Delta_1 = -2 \times 10^{-2} \;;\; \Delta_2 = 5 \times 10^{-3}$$

$$\gamma_0 \Delta = Bm = 0{,}3 \times 10^{-13} \;;\; n_0 = 0{,}1$$

DOBIJEN IZRAZ SPREMAN ZA RAD NA KOMPJUTERU GLASI

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(P) = {} & 0{,}0625\, E(P) + 0{,}439 \int_0^1 q^2 dq \int_{-1}^{+1} dx \int_0^1 P_1^2 dP_1 \int_{-1}^{+1} du \; \times \\
& \times \left[ E(P) - E(P_1) - E(P_1, q, y) - E(P, q, x) \right]^{-1} \times \left[ \left( \frac{3{,}2P^2 + 0{,}3}{E(P)} + 1 \right)^{1/2} \times \right. \\
& \times \left( \frac{3{,}2P_1^2 + 0{,}3}{E(P_1)} + 1 \right)^{1/2} \left( \frac{3{,}2P_1^2 + 3{,}2q^2 - 6{,}4P_1qy + 0{,}3}{E(P_1qy)} + 1 \right)^{1/2} \left( \frac{3{,}2P^2 + 3{,}2q^2 - 6{,}4Pqx + 0{,}3}{E(Pqx)} - 1 \right)^{1/2} + \\
& + \left( \frac{3{,}2P^2 + 0{,}3}{E(P)} - 1 \right)^{1/2} \left( \frac{3{,}2P_1^2 + 0{,}3}{E(P_1)} - 1 \right)^{1/2} \left( \frac{3{,}2P_1^2 + 3{,}2q^2 - 6{,}4P_1qy + 0{,}3}{E(P_1qy)} - 1 \right)^{1/2} \left. \left( \frac{3{,}2P^2 + 3{,}2q^2 - 6{,}4Pqx + 0{,}3}{E(Pqx)} + 1 \right)^{1/2} \right] \times \\
& \times \left[ \left( \frac{3{,}2P^2 + 0{,}3}{E(P)} + 1 \right)^{1/2} \left( \frac{3{,}2P_1^2 + 0{,}3}{E(P_1)} + 1 \right)^{1/2} \left( \frac{3{,}2P_1^2 + 3{,}2q^2 - 6{,}4P_1qy + 0{,}3}{E(P_1qy)} + 1 \right)^{1/2} \left( \frac{3{,}2P^2 + 3{,}2q^2 - 6{,}4Pqx + 0{,}3}{E(Pqx)} - 1 \right)^{1/2} + \right. \\
& + \left( \frac{3{,}2P^2 + 0{,}3}{E(P)} - 1 \right)^{1/2} \left( \frac{3{,}2P_1^2 + 0{,}3}{E(P_1)} - 1 \right)^{1/2} \left( \frac{3{,}2P_1^2 + 3{,}2q^2 - 6{,}4P_1qy + 0{,}3}{E(P_1qy)} - 1 \right)^{1/2} \left( \frac{3{,}2P^2 + 3{,}2q^2 - 6{,}4Pqx + 0{,}3}{E(Pqx)} + 1 \right)^{1/2} + \\
& + 2 \left( \frac{3{,}2P^2 + 0{,}3}{E(P)} + 1 \right)^{1/2} \left( \frac{3{,}2P_1^2 + 0{,}3}{E(P_1)} + 1 \right)^{1/2} \left( \frac{3{,}2P_1^2 + 3{,}2q^2 - 6{,}4P_1qy + 0{,}3}{E(P_1qy)} - 1 \right)^{1/2} \left( \frac{3{,}2P^2 + 3{,}2q^2 - 6{,}4Pqx + 0{,}3}{E(Pqx)} + 1 \right)^{1/2} + \\
& + 2 \left( \frac{3{,}2P^2 + 0{,}3}{E(P)} - 1 \right)^{1/2} \left( \frac{3{,}2P_1^2 + 0{,}3}{E(P_1)} + 1 \right)^{1/2} \left( \frac{3{,}2P_1^2 + 3{,}2q^2 - 6{,}4P_1qy + 0{,}3}{E(P_1qy)} - 1 \right)^{1/2} \left. \left( \frac{3{,}2P^2 + 3{,}2q^2 - 6{,}4Pqx + 0{,}3}{E(Pqx)} - 1 \right)^{1/2} \right]
\end{aligned}$$

II-3.26

GDE SU

$$E_{(p)} = (10p^4 + 20p^2 + 0{,}024)^{1/2}$$

$$E_{(p_1)} = (10p_1^4 + 20p_1^2 + 0{,}024)^{1/2}$$

$$E_{(p_1,a,y)} = (10p_1^4 + 10a^4 + 20p_1^2a^2 + 40p_1^2a^2y^2 - 40a^3p_1y - 40ap_1^3y + 20p_1^2 + 20a^2 - 40p_1ay + 0{,}024)^{1/2}$$

$$E_{(pax)} = (10p^4 + 10a^4 + 20p^2a^2 + 40p^2a^2x^2 - 40a^3p\cancel{x} - 40ap^3x + 20p^2 + 20a^2 - 40pax + 0{,}024)^{1/2}$$

# Z A K L J U Č A K

U radu je izvršena analiza eksitonskog spektra u uslovima Boze-kondenzacije eksitona. Prvi pokušaji u ovom smislu bio je učinjen u radu [6] . U pomenutom radu i u rezultatu toga rada postajale su izvesne nekorektnosti koje su ovde ispravljene. U radu [6] prilikom izračunavanja spektra eksitona nisu uračunate harmonijske korekcije, koje potiču iz anharmonijskog dela polaznog eksitonskog hamiltonijana. U ovom radu su ove korekcije nadjene i dat je analitički izraz za korektan eksitonski spektar u uslovima kondenzacije. Grafik zakona disperzije za eksitone nije dat i bez upotrebe kompjutera to se i ne može učiniti. Gruba ocena dobijenog analitičkog izraza pokazuje da u rotunskoj oblasti impulsa treba da postoji minimum. Eksitonski spektar iz rada [6] ovakvog minimuma nema. Osim toga u oblasti impulsa sa kraja Briluenove zone prema gruboj oceni postoje logaritamski singulariteti i to bi odgovaralo raspadu rotona na par fonona - pojavi koja je kod tečnog $He^4$ i eksperimentalno konstatovan.

Na kraju smatram da bi trebalo ukratko prodiskutovati problem Boze-kondenzacije u sistemu kvazičestica. Kao što je poznato osnovni preduslov za kondenzaciju je konstantnost broja čestica. Kod kvazičestica ovakav uslov može da bude ispunjen samo u kratkim vremenskim intervalima i za slučaj eksitona taj interval se kreće do $10^{-8}$[s] posle ekscitiranja kristala ($10^{-8}$[s]) je eksperimentalno konstatovano vreme života eksitona). Neki autori [8] smatraju da do superfluidnosti i Boze-kondenzacije u sistemu kvazičestica ne može da dodje, zasnivajući svoje tvrdjenje na činjenici da u sistemu kvazi-čestica ne može postojati superfluidni prenos mase. Ovo je istina pošto kvazičestice nemaju masu, ali superfluidni prenos mase nije jedina forma superfluidnog kretanja.[9] Pod superfluidnošću kvazičestica treba podrazumevati superfluidni prenos energije ili momenta u zavisnosti od tipa kvazičestica. Upravo zbog ovoga analiza fenomena superfluidnosti u kvazičestičnom sistemu može da ima velik i praktični značaj pošto se u krajnjoj liniji radi o prenosu energije bez gubitaka. Nema sumnje da poznavanje uslova pod kojima se ovo može realizovati i sistema koji mogu da vrše prenos energije bez gubitaka, može da dovede do male tehnološke revolucije.

REFERENCES

[1] L. Tisza, Nature, 141, 913 (1938).

[2] L. Landau i E. Lifšic /prevod/
Statistička fizika, kurs teorijske fizike
Beograd 1960

[3] Н.Н. Боголюбов, Избранные труды, Том III.
„Наукова думка" Киев 1971

[4] С.В. Тябликов, Методы квантовой теории магнетизма
„Наука" Москва 1965

[5] J. Van Kranendonk, Physica 21, 81, 749, 925, 1955.

[6] В.М. Агранович и Б.С. Тошич, ЖЭТФ 53, 149 (1967)

[7] P. Bocchieri, F. Seneci, Nuovo Cim., 18, B, 392 (1965)

[8] W. Kohn, D. Sherrington, Rev. Mod. Phys., 1970, 42, 1.

[9] „Проблемы теоретической физики", Наука / Москва 1972.
Памяти И.Э. Тамма, И.В. Келдыш „Когерентные состояния экситонов"

[10] N.N. Bogolubov, Journ. of Phys. 9, 23, (1947)

[11] Sunakawa et. al., Prog. Theor. Phys. 41, 919, (1969);
44, 565, (1970)

[12] Л.Н. Овандер, УФН, 86, 3, (1965).