UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET grupa FIZIKA

D I P L O M S K I   R A D

tema:

NEODRŽANJE NORMALNIH ELEKTRO-MAGNETNIH TALASA U KRISTALU

Škrbić Željko

Iskreno se zahvaljujem profesoru Dr. Bratislavu S.Tošiću na nesebičnoj pomoći i stručnim instrukcijama koje mi je pružao prilikom izrade ovog rada.

S A D R Ž A J

UVOD

GLAVA I

GLAVA II

ZAKLJUČAK

LITERATURA

UVOD

Normalni elektromagnetni talasi ili polaritoni pretstavljajurealna optička pobuđivanja u molekularnim kristalima.Ove elementarne eksitacije pretstavljaju,grubo govoreći,smešu Frenkelovih eksitona i vakumskih fotona koji pobuđuju molekule kristala.Mehanizam koji dovodi do mešanja eksitonskih i fotonskih stanja i do obrazovanja hibridnih eksitacija-polaritona je retardovana interakcija elektrona sa EM poljem. Analiza sistema polaritona pokazuje da njihov totalni okupacioni broj ne komutira sa hamiltonijanom sistema,pa se prema tome na osnovu opštih kvantno mehaničkih pravila broj polaritona u kristalu ne održava.Neodržanje kvazi čestica stvara izvanredno velike matematičke teškoće i do danas ove teškoće nisu prebrođene na zadovoljavajući način.Metod Bogoljubova i dijagonalizacija kvadratnog dela hamiltonijana pomoću U-V transformacije ne može da da korektno čak ni energiju osnovnog stanja sistema pa ni korektan harmoniski spektar. Razlozi za ovo leže u specifičnim komutacionim relacijama kojima se potčinjavaju eksitonski operatori.Eksitonski operatori zadovoljavaju paulionske komutacione relacije,a Pauli operatori se izražavaju preko Boze operatora pomoću beskonačnih bozonskih redova.Prilikom dijagonalizacije eksiton-fotonskog hamiltonijana(koji dovodi do polaritonskog spektra) mi smo prinuđeni da Pauli operatore predstavimo pomoć u Boze operatora zbog toga što su fotonski operatori takođe Boze operatori.Drugi razlog zbog koga moramo izraziti Pauli operatore preko Boze operatora je taj što Furije transformacija " prostor-impuls" ne održava paulionske komutacione relacije već samo bozonske.Pošto se,kao što je već rečeno Pauli operatori izražavaju preko beskonačnih bozonskih redova, očigledno je da pri prelasku na Boze operatore od kvadratne paulionske forme dobijamo kvadratnu bozonsku formu i još forme četvrtog,šestog i svih viših redova do beskonačnog.

Posle ovakvog prelaska sa paulijona na bozone kvadratni hamiltonijan sistema sadrži u sebi članove proporcionalne paru kreacionih, odnosno anihilacionih i to su oni članovi hamiltonijana zbog kojih se broj kvazi čestica ne održava. Već je ranije rečeno da se u ovim slučajevima koriste U-V transformacije Bogoljubova koje predstavljaju linearnu kombinaciju kreacionog i anihilacionog operatora. Ukoliko se prilikom primene ovih ovih transformacija ograničimo samo na kvadratni deo hamiltonijana onda činimo grešku, jer pomenute forme višeg reda po Boze operatorima takođe daju svoje doprinose energiji dobijenoj dijagonalizacijom samo kvadratnog dela hamiltonijana.

Treba napomenuti da ove korekcije nisu proporcionalne koncentraciji kvazi čestica, već predstavljaju isključivo samo harmoniske popravke.

Očigledno je i poreklo ovih popravki. Ako u formu višeg po Boze operatorima koja je napisana u obliku normalnog produkta uđemo sa U-V transformacijom koja u sebi sadrži nove operatore onda normalni produkt po prvobitnim operatorima prestaje da bude normalni produkt u novim operatorima. Pošto u novim operatorima hamiltonijan mora da bude minimiziran (ispisan takođe u normalnim produktima) jasno je da pri svođenju na normalne produkte iz formi višeg reda dobijamo forme nižeg reda, između ostalih i kvadratne, i upravo ove novodobijene kvadratne forme pretstavljaju one popravke koje metod Bogoljubova ne uzima u obzir.

Za sada nema efikasnog metoda koji bi pomenutu matematičku teškoću uspešno i do kraja rešio. Srećna je okolnost da su u sistemu kristal plus EM polje energije eksitona i fotona za red veličine (i više) veće od širine eksitonske zone i matričnog elementa interakcije između eksitona i fotona pa se efekat neodržanja može eliminisati sa dobrom tačnošću do malih parametara koji pretstavljaju količnik širine zone ili eksiton fotonske interakcije i eksitonske odnosno fotonske enrgije.

U ovom radu eliminacijom onih članova hamiltonijana koji ne održavaju broj kvazi čestica izvršićemo rotaciju Hilbertovog prostora eksitonskih i fotonskih stanja i to pomoću generalisanog Vajlovog identiteta koji je dosad uspešno

primenjivan u ostalim oblastima fizike,a naročito je postao popularan od kako je njegovom primenom objašnjen fenomen super provodljivosti.
Cilj ovog rada je sledeći:

a) da se primenom generalisanogVajl-ovog identiteta u hamiltonijanu kristal plus EM polje oslobodimo onih članova koji ne održavaju broj kvazi čestica i to sa tačnošću do linearnih članova po malim parametrima koji su napred pomenuti.

b) da u tako dobijenom ekvivalentnom hamiltonijanu nađemo korektne polaritonske spektre

c) da pomoću članova višeg reda u ekvivalentnom hamiltonijanu ocenimo verovatnoću trofotonske apsorpcije.

I §1

FRENKEL-OV EKSITON

Posmatrajmo kristal u osnovnom stanju,odnosno na $0^{o}K$ i razmatranje vršimo smatrajući da u kristalu egzistiraju zone.Ako se kristal osvetljava sa monohromatskom svetlošću dovoljne energije da podigne elektron na viši energetskinivo nastaje eksiton.Energija mora biti veća od širine zabranjene zone kako bi elektron imao dovoljnu energiju potrebnu za prelaz u provodnu zonu.Kada se kaže da energija mora biti veća od širine zabranjene zone misli se na energiju upadnih fotona.
Po isteku vremena života ovog pobuđenog stanja dolazi do deeksitacije uz emisiju fotona određene energije. Prilikom navedene deeksitacije može da se emituje više fotona nižih energija ukoliko je pobuđeni nivo bio viši od prvog pobuđenog nivoa.Ovi nazovimo ih "sekundarni"fotoni mogu da izvrše novu eksitaciju nekog drugog molekula.Ovaj proces se nastavlja u vidu prostiranja pobuđenog stanja kroz kristal.Ovako definisan eksiton je eksiton Vanije-Mot-a.

U ovom paragrafu reći će se nešto o Frenkelovom eksitonu.Prve teorije optičkih pobuđivanja dali su Frenkel i Pajerls.Prilikom optičkog pobuđivanja elektron prelazi na viši energetski nivo i na njegovom mestu ostaje šupljina.Ovako formiran par elektron-šupljina ostaje lokalizovan unutar molekula i naziva se Frenkel-ov eksiton.

Frenkel-ov eksiton javlja se u molekulskim kristalima. Predstavnici molekulskih kristala su:antracen,naftalin benzol u čvrstom stanju itd.Molekuli ovih kristala su jaki dipoli te je interakcija između njih dipol-dipolna.Upadna svetlost može da eksitira molekul na dva načina i to:

a- da dovede do promene stanja elektrona

b- da dovede do promene stanja unutrašnjih vibracija(takvi eksitoni nazivaju se vibrioni)

Predpostavimo da su pre osvetljavanja svi molekuli bili u osnovnom stanju.Kada počne osvetljavanje upadni foton prevede elektron na neki viši nivo u nekom molekulu.Pošto su molekuli međusobno spregnuti normalno je očekivati da će ovo pobuđeno stanje na neki način uticati na ostale molekule kristala.Deeksitacijom stvoreni su uslovi za novo pobuđenje.Na ovaj način eksitacija se prenosi sa suseda na sused.Prema tome možemo zaključiti da se kroz kristal prostire eksitonski talas, te da su po isteku nekog vremena svi molekuli pobuđeni.

I §2. POLARITONI ILI NORMALNI ELEKTROMAGNETNI TALASI

Razmatranje kristala sa teorije eksitona bilo bi potpuno prihvatljivo kada bi uspeli da ostvarimo trenutno prekidanje upadne svetlosti,odnosno upliv fotona.Zbog nemogućnosti ovakvog postupka moramo na neki način izvršiti korekciju Hamiltonijana eksitacije.Korekcija Hamiltonijana bi se sastojala u sledećem:poznatom Hamiltonijanu potrebno je dodati Hamiltonijan interakcije eksitona i fotona.Znači da bi se totalni Hamiltonijan sada sastojao iz:

a) Hamiltonijan kristala
b)Hamiltonijan fotona
c) Hamiltonijan interakcije eksitona i fotona

Pod Hamiltonijanom kristala podrazumeva se zbir eksitonskog Hamiltonijana i Hamiltonijana osnovnog stanja.

Prema tome možemo pisati:

$$\hat{H}_{tot} = \hat{H}_{os} + \hat{H}_{eks} + \hat{H}_{fot} + \hat{H}_{int}$$

Korekcija Hamiltonijana je neobhodna jer se eksperimentom pokazalo da pored zakona disperzije jako sličnog zakonu disperzije za eksitone pojavljuje pojavljuje još jedan koji eksitonska teorija nije mogla da objasni.Jedini put je bio uvođenje nove kvazičestice. 1957 godine Hopfild dolazi na ideju da u kristalu postoje hibridne eksitacije koje su smeša eksitona i fotona.Agranovič 1959 godine daje kompletnu teoriju ovih hibridnih eksitacija i naziva ih polaritonima.

I danas se smatra i nalazi u literaturi da se eksiton-fotonska interakcija interpretira kao mala perturbacija što je u suštini pogrešno jer je energija interakcije otprilike reda veličine energije eksitona i fotona pa se ne može uzimati kao perturbacija.

I §

EKVIVALENTNOST GENERALISANOG VAJL-OVOG IDENTITETA I UV TRANSFORMACIJE BOGOLJUBOVA

Moguće je pokazati da ako je poznat Hamiltonijan sistema, rezultat koji daje UV transformacija Bogoljubova za zakon disperzije, odgovara rezultatu koji daje primena Vajl-ovog identiteta.

Predpostavićemo da je interakcija dvočestična i Hamiltonijan sistema dat izrazom:

$$\hat{H}=\sum_k \alpha_k b_k^+ b_k + \frac{1}{2}\sum_k \beta_k (b_k b_{-k} + b_{-k}^+ b_k^+) \qquad \text{I 3.1.}$$

b_k , b_k^+ - Boze operatori

α_k , β_k - realne i parne funkcije

Ovaj Hamiltonijan ne održava totalan broj kvazičestica

$$\hat{n}=\sum_k b_k^+ b_k$$

odnosno kvantno mehanički izraženo:

$$[\hat{n},\hat{H}]\neq 0$$

Uvođenjem UV transformacije Bogoljubova Hamiltonijan I 3.1. postaje dijagonalizovan i prelazi u novi oblika:

$$b_k = U_k C_k + V_k C_{-k}^+ \qquad b_{-k} = U_k C_{-k} + V_k C_k^+$$

$$b_k^+ = U_k C_k^+ + V_k C_{-k} \qquad b_{-k}^+ = U_k C_{-k}^+ + V_k C_k \qquad \text{I3.2.}$$

UV transformacija Bogoljubova daje prelaz sa Boze operatora b_k^+, b_k na nove takođe Boze operatore C_k^+, C_k gde su U_k i V_k transformacione funkcije.

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\sum_{k}\left(\sqrt{\alpha_k^2-\beta_k^2}-\alpha_k\right)+\sum_{k}\sqrt{\alpha_k^2-\beta_k^2}\;C_k^+C_k \qquad \text{I 3.2.}$$

Zakon disperzije na osnovu dijagonalizovanog Hamiltonijana ima oblik:

$$\mathcal{E}_k=\frac{\partial\hat{H}}{\partial C_k^+C_k}=\sqrt{\alpha_k^2-\beta_k^2} \qquad \text{I 3.3.}$$

Potražićemo sada ovaj rezultat primenom generalisanog Vajlovog identiteta.

Hamiltonijan sistema

$$\hat{H}=\sum_{k}X_k b_k^+b_k+\frac{1}{2}\sum_{k}Y_k\left(b_k^+b_{-k}^++b_{-k}b_k\right) \qquad \text{I 3.4.}$$

Ekvivalentni Hamiltonijan potražićemo u obliku

$$H_{eq}=U^{-1}\,H\,U$$

gde je "U" unitarni operator i jednak e^S

S- antiermitski operator, odnosno $S^+=-S$

tada je:

$$U^+=e^{S^+}=e^{-S}=U^{-1}$$

pa možemo pisati:

$$H_{eq}=e^{-S}\,H\,e^{S}$$

Na osnovu Vajlovog identiteta možemo za ekvivalentni Hamiltonijan dati sledeći izraz:

$$\hat{H}_{eq}=e^{-S}\hat{H}e^{S}=H+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}[S,[S,\ldots.[S,H]]] \qquad \text{I 3.5.}$$

Operator S izabraćemo na sledeći način

$$S=\frac{1}{4}\sum_{q}\alpha_q\left(b_q b_{-q}-b_{-q}^+b_q^+\right) \qquad \text{I 3.6.}$$

$$S_1=\frac{1}{4}\sum_{q}\alpha_q b_q b_{-q} \qquad S_2=-\frac{1}{4}\sum_{q}b_{-q}^+b_q^+$$

$$S=S_1+S_2 \qquad S_2=-S_1^+$$

Radi jednostavnijeg računanja komutatora biće izvedena jedna relacija koja u mnogome skraćuje postupak rada

$$[S_1, H] = A \implies S_1 H - H S_1 = A$$

$$H S_1^+ - S_1^+ H = A^+ \qquad [S_1^+, H] = -A^+$$

$$[S, H] = [(S_1 + S_2), H] = [S_1, H] + [S_2, H] = [S_1, H] - [S_1^+, H] = A + A^+$$

$$[S, H] = [S_1, H] + [S_1, H]^+ \qquad \text{I } 3.7.$$

Sada možemo pristupiti nalaženju komutatora $[S_1, H]$

$$[S_1, H] = \left[\frac{1}{4}\sum_q \alpha_q b_q b_{-q}, \sum_k X_k b_k^+ b_k + \frac{1}{2}\sum_k Y_k (b_k^+ b_{-k}^+ + b_{-k} b_k)\right]$$

Uvešćemo nove oznake A i B

$$A = \frac{1}{4}\sum_{kq} \alpha_q X_k [b_q b_{-q}, b_k^+ b_k] = \frac{1}{4}\sum_{kq} \alpha_k X_k \left\{ b_k^+ \cancelto{0}{[b_q b_{-q}, b_k]} + [b_q b_{-q}, b_k^+] b_k \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{qk} \alpha_q X_k \left\{ b_q \underbrace{[b_{-q}, b_k^+]}_{\delta_{-q,k}} b_k + \underbrace{[b_q, b_k^+]}_{\delta_{qk}} b_{-q} b_k \right\}$$

$$A = \frac{1}{2}\sum_k \alpha_k X_k b_{-k} b_k \qquad \text{I } 3.8_a$$

Za nalaženje sledećih komutatora neće biti dat ceo postupak rada već sami postavka i krajnji rezultat.

Za B ćemo uzeti sledeći izraz:

$$B = \frac{1}{8}\sum_{qk} \alpha_q Y_k [b_q b_{-q}, b_k^+ b_{-k}^+ + b_{-k} b_k]$$

Nakon sređivanja komutatora i odbacivanja članova jednakih nuli za B se dobija

$$B=\frac{1}{2}\sum_k \alpha_k Y_k b_k^+ b_k + \frac{1}{4}\sum_k \alpha_k Y_k \qquad \text{I } 3.8_b$$

Komutator $[S_1, H]$ dobijamo sabiranjem izraza I 3.8_a i I 3.8_b

$$[S_1,H]=\frac{1}{2}\sum_k \alpha_k X_k b_{-k} b_k + \frac{1}{2}\sum_k \alpha_k Y_k b_k^+ b_k + \frac{1}{4}\sum_k \alpha_k Y_k \qquad \text{I } 3.8.$$

Na osnovu relacije I 3.7. ima se:

$$[S,H]=\sum_k \alpha_k Y_k b_k^+ b_k + \frac{1}{2}\sum_k \alpha_k X_k (b_k^+ b_{-k}^+ + b_{-k} b_k) + \frac{1}{2}\sum_k Y_k \alpha_k \qquad \text{I } 3.9.$$

Analizirajući polazni Hamiltonijan možemo pisati

$$H \equiv H_0 = E_0 + \sum_k X_k^{(0)} b_k^+ b_k + \frac{1}{2}\sum_k Y_k^{(0)} (b_k^+ b_{-k}^+ + b_{-k} b_k)$$

početni uslovi su dati sa:

$$E^{(0)} = 0 \qquad X_k^{(0)} = X_k \qquad Y_k^{(0)} = Y_k$$

$$[S,H] = E^{(1)} + \sum_k X_k^{(1)} b_k^+ b_k + \frac{1}{2}\sum_k Y_k^{(1)} (b_k^+ b_{-k}^+ + b_{-k} b_k)$$

$$E^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_k Y_k \alpha_k \qquad X_k^{(1)} = \alpha_k Y_k \; ; \; Y_k^{(1)} = \alpha_k X_k$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$S,\ldots\ldots[S,H]] = E^{(n)} + \sum_k X_k^{(n)} b_k^+ b_k + \frac{1}{2}\sum_k Y_k^{(n)} (b_k^+ b_{-k}^+ + b_{-k} b_k) \qquad \text{I } 3.10$$

$$X^{(0)} = X_k \qquad\qquad Y^{(0)} = Y_k$$

$$X_k^{(1)} = \alpha_k Y_k \qquad\qquad Y_k^{(1)} = \alpha_k X_k$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$X_k^{(n)} = \alpha_k Y_k^{(n-1)} \qquad\qquad Y_k^{(n)} = \alpha_k X_k^{(n-1)}$$

Vršimo prelaz sa "n" na n+1

$$X_k^{(n+1)} = \alpha_k Y_k^{(n)} \qquad\qquad Y_k^{(n+1)} = \alpha_k X_k^{(n)}$$

ODNOSNO:

$$X_k^{(n+1)} = \alpha_k^2 X_k^{(n-1)} \qquad\qquad Y_k^{(n+1)} = \alpha_k^2 Y_k^{(n-1)} \qquad \text{I 3.11}$$

$n = 1, 2, \ldots\ldots$ $\qquad$ $n = 1, 2, \ldots\ldots$

Potražimosada izraze za X_k i Y_k za parne i neparne vrednosti n odvojeno. Ispuštamo indeks „k"

$n=1$	$X^{(2)} = \alpha^2 X$	$n=2$	$X^{(3)} = \alpha^3 Y$
$n=3$	$X^{(4)} = \alpha^4 X$	$n=4$	$X^{(5)} = \alpha^5 Y$
$n=5$	$X^{(6)} = \alpha^6 X$	$n=6$	$X^{(7)} = \alpha^7 Y$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n=n$	$X^{(2n)} = \alpha^{2n} X$	$n=n$	$X^{(2n-1)} = \alpha^{(2n-1)} Y$

$n=1$	$Y^{(2)} = \alpha Y$	$n=2$	$Y^{(3)} = \alpha^3 X$
$n=3$	$Y^{(4)} = \alpha^4 Y$	$n=4$	$Y^{(5)} = \alpha^5 X$
$n=5$	$Y^{(6)} = \alpha^6 Y$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$		
$n=n$	$Y^{(2n)} = \alpha^{2n} Y$	n	$Y^{(2n-1)} = \alpha^{(2n-1)} X$

I 3.12.

Očigledno je da je energija:

$$E=-\frac{1}{1!}\frac{1}{2}\sum_k \alpha_k Y_k+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\sum_k \alpha_k Y_k^{(1)}-\frac{1}{3!}\frac{1}{2}\sum_k \alpha_k Y_k^{(2)}+\frac{1}{4!}\frac{1}{2}\sum_k \alpha_k Y_k^{(3)}\dots$$

Sređivanjem ovoga izraza i korišćenjem relacija I 3.12. energija osnovnog stanja ima oblik:

$$E_{os}=\frac{1}{2}\sum_k \left\{\underbrace{\left[-\frac{1}{1!}\alpha_k Y_k-\frac{1}{3!}\alpha_k^3 Y_k-\frac{1}{5!}\alpha_k^5 Y_k\dots\right]}_{-Sh\,\alpha_k}+\underbrace{\left[\frac{1}{2!}\alpha_k^2 X_k+\frac{1}{4!}\alpha_k^4 X_k+\dots\right]}_{ch\,\alpha_k-1}\right\}$$

$$E_{os}=\frac{1}{2}\sum_k \left\{X_k(ch\,\alpha_k-1)-Y_k\,Sh\,\alpha_k\right\}$$

I 3.13.

Pogledajmo kako izgleda dijagonalni deo Hamiltonijana znajući sve dosad napisane relacije

$$H_d=\sum_k X_k b_k^+ b_k-\frac{1}{1!}\sum_k X_k^{(1)} b_k^+ b_k+\frac{1}{2!}\sum_k X_k^{(2)} b_k^+ b_k-\frac{1}{3!}\sum_k X_k^{(3)} b_k^+ b_k$$

Analognim postupkom kao i pri traženju I 3.13. H_d je:

$$H_d=\sum_k \left[X_k ch\,\alpha_k-Y_k\,Sh\,\alpha_k\right]b_k^+ b_k$$

I 3.14.

Nedijagonalni deo Hamiltonijana:

$$H_{nd}=\frac{1}{2}\sum_k Y_k(b_k^+ b_{-k}^+ + b_{-k} b_k)-\frac{1}{1!}\frac{1}{2}\sum_k Y_k^{(1)}(b_k^+ b_{-k}^+ + b_{-k} b_k)+\dots$$

Nakon svođenja

$$H_{nd}=\frac{1}{2}\sum_k (Y_k ch\,\alpha_k-X_k\,Sh\,\alpha_k)(b_k^+ b_{-k}^+ + b_{-k} b_k)$$

I 3.15.

Konačno za ekvivalentni Hamiltonijan možemo pisati

$$H_{eq}=\frac{1}{2}\sum_{k}\left[X_k(ch\alpha_k-1)-Y_k Sh\alpha_k\right]+\sum_{k}(X_k ch\alpha_k-Y_k Sh\alpha_k)b_k^+ b_k+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k}(Y_k ch\alpha_k-X_k Sh\alpha_k)(b_k^+ b_{-k}^+ + b_{-k} b_k) \qquad \text{I } 3.16$$

Hamiltonijan osnovnog stanja ne zavisi od Boze operatora dok je dijagonalni deo proporcionalan sa $b_k^+ b_k$,a nedijagonalni deo sa $(b_k^+ b_{-k}^+ + b_{-k} b_k)$.
Funkciju α_k određujemo iz uslova da je nedijagonalni deo Hamiltonijana jednak nuli

$$Y_k ch\alpha_k = X_k Sh\alpha_k$$

$$tg\alpha_k=\frac{Y_k}{X_k} \qquad \text{I } 3.17$$

Sada su E_{os} i H_d nakon kraćeg računa

$$H_d=\sum_{k}\sqrt{X_k^2-Y_k^2}\, b_k^+ b_k$$

$$E_{os}=\frac{1}{2}\sum_{k}(E_k-X_k) \qquad E_k=\sqrt{X_k^2-Y_k^2}$$

Znajući energiju osnovnog stanja i dijagonalni deo Hamiltonijana možemo pisati H_{eq} i on je jednak

$$H_{eq}=\frac{1}{2}\sum_{k}(E_k-X_k)+\sum_{k}E_k b_k^+ b_k \qquad \text{I } 3.18$$

Zakon disperzije iz I 3.18. ima oblik

$$\mathcal{E}_k = \frac{\partial H_{eq}}{\partial b_k^+ b_k} = E_k = \sqrt{X_k^2 - Y_k^2} \qquad \text{I } 3.19.$$

Vidimo da se ovaj izraz u potpunosti slaže sa I 3.3. što znači da je UV transformacija Bogoljubova ekvivalentna Vajlovom identitetu što se tiče ovoga problema.

II §1

ROTACIJA HILBERTOVOG PROSTORA POLARITONSKOG STANJA

U glavi I §2 rekli smo da moramo posmatrati hibridne eksitacije, odnosno interakciju polja eksitona i fotona. Ovoj energiji interakcije odgovara nova kvazi čestica nazvana polariton. Na osnovu rečenog može se dati Hamiltonijan kristala kao sistema.

$$\hat{H} = H_{eks} + H_{FOT} + H_{eks\text{-}FOT} \qquad \text{II } 1.1$$

Pojedini članovi Hamiltonijana su

$$H_{eks} = \Delta \sum_{\bar{n}} P^{+}_{\bar{n}} P_{\bar{n}} + \sum_{\bar{n}\bar{m}} \alpha_{\bar{n}\bar{m}} P^{+}_{\bar{n}} P_{\bar{m}} + \sum_{\bar{n}\bar{m}} \frac{1}{2} \beta_{\bar{n}\bar{m}} (P^{+}_{\bar{n}} P^{+}_{\bar{m}} + P_{\bar{m}} P_{n}) + \sum_{\bar{n}\bar{m}} \gamma_{\bar{n}\bar{m}} P^{+}_{\bar{n}} P_{\bar{n}} P^{+}_{\bar{m}} P_{m} \qquad \text{II } 1.2$$

$$H_{FOT} = \sum_{\bar{k}j} \hbar c |\bar{k}| b^{+}_{\bar{k}j} b_{\bar{k}j} \qquad \text{II } 1.3$$

$$H_{eks\text{-}FOT} = \frac{1}{2m} \sum_{\bar{n}} \left(\bar{P}_{\bar{n}} - \frac{e}{c} \bar{A}_{\bar{n}} \right) - \frac{1}{2m} \sum_{\bar{n}} p^{2}_{\bar{n}} \qquad \text{II } 1.4$$

gde je iz klasične elektrodinamike

$$\bar{p} = \bar{P}_{n} - \frac{e}{c} \bar{A}_{n}$$

impuls elektrona u polju, "e" je naelektrisanje elektrona "A_n" je vektorski potencijal elektromagnetnog polja, "p_n" impuls elektrona pre dejstva fotonskog polja. " c " je brzina svetlosti

$\bar{K}$ - talasni vektor

N - ukupan broj molekula

$\bar{l}_{kj}$ - vektor polarizacije fotona

Operator impulsa u kvantoj mehanici može se izraziti

$$\bar{p}_{n} = -i \hbar \nabla_{\bar{n}}$$

Operator vektorskog potencijala je

$$\bar{A}_{\bar{n}} = \sum_{\bar{k}j} \sqrt{\frac{2\pi \hbar c}{N a^{3} |\bar{k}|}} \; \bar{l}_{\bar{k}j} \left(b_{\bar{k}j} + b^{+}_{-\bar{k}j} \right) e^{i \bar{k} \bar{n}} \qquad \text{II } 1.5$$

P_n , P_m - Pauli operatori

b^+_{kj} , b_{kj} - Boze operatori

Sada možemo napisati Hamiltonijan eksiton-fotonske interakcije koji nakon izvesnih transformacija ima oblik:

$$H_{eks-fot} = \frac{1}{2m}\sum_{\vec{n}\vec{k}j}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Na^3|\vec{k}|}}\,\bar{l}_{\vec{k}j}\left(b_{\vec{k}j}+b^+_{-\vec{k}j}\right)e^{i\vec{k}\vec{n}}\left(-\frac{2e}{c}\right)\bar{p}_{\vec{n}} +$$

$$+\frac{1}{2m}\sum_{\vec{n}\vec{k}\vec{k}'jj'}\frac{2\pi\hbar}{Na^3|\vec{k}|^{1/2}|\vec{k}'|^{1/2}}\,\bar{l}_{\vec{k}j}\bar{l}_{\vec{k}'j'}\left(b_{\vec{k}j}+b^+_{-\vec{k}j}\right)\left(b_{-\vec{k}'j'}+b^+_{\vec{k}'j'}\right)e^{i\vec{n}(\vec{k}-\vec{k}')}\frac{e^2}{c^2} \qquad \text{II 1.6}$$

Operator impulsa u reprezentaciji druge kvantizacije

$$\bar{p}_{\vec{n}} = \sum_{f_1f_2}\left[\int \varphi_n^{*f_1}(-i\hbar\nabla_{\vec{n}})\varphi_n^{f_2}\,d\tau_n\right]a^+_{nf_1}a_{nf_2} \qquad \text{II1.7.}$$

Veličina $\int \varphi_n^{*f_1}(-i\hbar\nabla_n)\varphi_n^{f_2}\,d\tau$ ne zavisi od n jer se molekuli ne razlikuju međusobno od čvora do čvora

dalje je :

$$\int \varphi_n^{*f_1}(-i\hbar\nabla_{\vec{n}})\varphi_n^{f_2}\,d\tau = \bar{M}_{f_1f_2} \qquad \text{II 1.8}$$

Bilo koji molekul u našem slučaju može imati samo dva stanja

$$|1_0 0_f\rangle \quad \text{i} \quad |0_0 1_f\rangle$$

f_1	0	0	f	f
f_2	0	f	0	f

pa možemo pisati

$$\bar{M}_{f_1f_2}a^+_{\vec{n}f_1}a_{\vec{n}f_2} = \bar{M}_{00}a^+_{\vec{n}0}a_{\vec{n}0} + \bar{M}_{ff}a^+_{\vec{n}f}a_{\vec{n}f} + \bar{M}_{0f}a^+_{\vec{n}0}a_{\vec{n}f} + M_{f0}a^+_{\vec{n}f}a_{n0} \qquad \text{II 1.9}$$

s obzirom na relacije koje važe između Pauli i Fermi operatora

$$\hat{P}^+_{\vec{n}f} = \hat{a}^+_{\vec{n}f}a_{\vec{n}0} \qquad \hat{P}_{\vec{n}f} = \hat{a}^+_{\vec{n}0}\hat{a}_{\vec{n}f}$$

II 1.9 može se predstaviti kao

$$\bar{M}_{oo}+(\bar{M}_{ff}-M_{oo})P_{\bar{n}}^{+}P_{\bar{n}}+M_{of}P_{\bar{n}}+M_{fo}P_{\bar{n}}^{+} \qquad \text{II 1.10}$$

Kako su funkcije φ_n^f realne sledi

$$\bar{M}\equiv\bar{M}_{of}=\int\varphi_n^o(-i\hbar\nabla_n)\varphi_n^f d\tau_n=\int\varphi_n^f(i\hbar\nabla_n)\varphi_n^o d\tau=-\bar{M}_{fo}$$

$$M_{fo}=-M_{of}=-M=\int\varphi_n^o(-i\hbar\nabla_{\bar{n}})\varphi_n^f d\tau_n$$

pa je II 1.10

$$\bar{M}_{f_1f_2}a_{\bar{n}f_1}^{+}a_{\bar{n}f_2}=\bar{M}(P_{\bar{n}}-P_{\bar{n}}^{+}) \qquad \text{II 1.11}$$

Dijagonalni elementi momenta impulsa M_{oo}, M_{ff} jednaki su nuli jer operator impulsa ne komutira sa Hamiltonijanom izolovanog molekula. Sada imamo sve neophodne veličine za računanje $H_{eks-fot}$ ~~te nakon~~ te nakon uvrštavanja u polazni Hamiltonijan ima se:

$$H=\Delta\sum_{\bar{n}}P_{\bar{n}}^{+}P_{\bar{n}}+\sum_{\bar{n}\bar{m}}\alpha_{\bar{n}\bar{m}}P_{\bar{n}}^{+}P_{\bar{m}}+\frac{1}{2}\sum_{\bar{n}\bar{m}}\beta_{\bar{n}\bar{m}}(P_{\bar{n}}^{+}P_{\bar{m}}^{+}+P_{\bar{m}}P_{\bar{n}})+$$

$$+\sum_{\bar{n}\bar{m}}\gamma_{\bar{n}\bar{m}}P_{\bar{n}}^{+}P_{\bar{n}}P_{\bar{m}}^{+}P_{\bar{m}}+\sum_{\bar{k}j}\hbar c|\bar{k}|b_{\bar{k}j}^{+}b_{\bar{k}j}+$$

$$+\sum_{\bar{k}j}\frac{\pi\hbar e^2}{a^3mc|\bar{k}|}(b_{\bar{k}j}^{+}b_{\bar{k}j}+b_{-\bar{k}j}^{+}b_{-\bar{k}j}+b_{\bar{k}j}^{+}b_{-\bar{k}j}^{+}+b_{-\bar{k}j}b_{\bar{k}j})-$$

$$-\sum_{\bar{n}\bar{k}j}\sqrt{\frac{2\pi\hbar e^2}{Na^3m^2c|\bar{k}|}}\,\bar{M}\,\bar{l}_{\bar{k}j}\,e^{i\bar{k}\bar{n}}(P_{\bar{n}}-P_{\bar{n}}^{+})(b_{\bar{k}j}+b_{-\bar{k}j}^{+}) \qquad \text{II 1.11}$$

Može se izračunati red veličine

$$\sqrt{\frac{2\pi\hbar e^2}{Na^3mc|\bar{k}|}}$$

i on iznisi $\sim 2\cdot 10^{-4}$

Konačno ako ispustimo vektorske oznake i uvedemo nove za totalni Hamiltonijan se dobija

$$\hat{H}=\Delta\sum_{n}P_n^{+}P_n+\sum_{nm}\alpha_{nm}P_n^{+}P_m+\frac{1}{2}\sum_{nm}\beta_{nm}(P_n^{+}P_m^{+}+P_mP_n)+$$

$$+\sum_{nm}\mu_{nm}P_n^{+}P_nP_m^{+}P_m+\sum_{kj}\hbar ck\,b_{kj}^{+}b_{kj}+$$

$$+\sum_{kj}\omega_k(b_{kj}^{+}b_{kj}+b_{-kj}^{+}b_{-kj}+b_{kj}^{+}b_{-kj}^{+}+b_{-kj}b_{kj})+$$

$$+\sum_{nkj}T_j(n,k)(P_n^{+}b_{kj}-b_{-kj}^{+}P_n+P_n^{+}b_{-kj}^{+}-b_{kj}P_n)$$

$$\omega_k=\frac{\pi\hbar e^2}{a^3mck}\;;\;T_j(n,k)=\sqrt{\frac{2\pi\hbar e^2}{Na^3m^2ck}}\;\bar{M}\bar{l}_{kj}\,e^{i\bar{k}\bar{n}} \qquad \text{II 1.13}$$

DIJAGONALIZACIJA HAMILTONIJANA FOTONSKOG POLJA

Hamiltonijan fotonskog polja je

$$H_{FP} = \sum_{kj} (\hbar c k + 2\omega_k) b^+_{kj} b_{kj} + \sum_{kj} \omega_k (b^+_{kj} b^+_{-kj} + b_{-kj} b_{kj}) \qquad \text{II 1. 14}$$

UV transformacija daje

$$b_{kj} = U_{kj} c_{kj} + V_{kj} c^+_{-kj} \qquad b_{-kj} = U_{kj} c_{-kj} + V_{kj} c^+_{kj}$$

$$b^+_{kj} = U_{kj} c^+_{kj} + V_{kj} c_{-kj} \qquad b^+_{-kj} = U_{kj} c^+_{-kj} + V_{kj} c_{kj}$$

$c^+_{kj}, c_{kj}, c^+_{-kj}, c_{-kj}$ Boze operatori

Nakon korišćenja uslova kanoničnosti $U^2_{kj} - V^2_{kj} = 1$

i nalaženja produkta operatora

$$b^+_{kj} b_{kj} = ?$$

$$b^+_{kj} b^+_{-kj} = ?$$

$$b_{-kj} b_{kj} = ?$$

dobija se za Hamiltonijan

$$H_{FP} = \sum_{kj} [(\hbar c k + 2\omega_k)(U^2_{kj} + V^2_{kj}) + 4\omega_k U_{kj} V_{kj}] c^+_{kj} c_{kj} +$$

$$+ \sum_{kj} [(\hbar c k + 2\omega_k) U_{kj} V_{kj} + \omega_k (U^2_{kj} + V^2_{kj})](c^+_{kj} c^+_{-kj} + c_{-kj} c_{kj}) \qquad \text{II 1.15}$$

Iz zahteva da funkcija ispred nedijagonalnog dela Hamiltonijana bude jednaka nuli dobijajuse nepoznate transformacione funkcije

$$U^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2 - B^2}} - 1\right] \qquad V^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2 - B^2}} + 1\right]$$

gde su:

$$\hbar c k + 2\omega_k = A_k \qquad \omega_k = \frac{1}{2} B_k$$

Nakon relativno lakog računa Hamiltonijan fotonskog polja ima oblik

$$H_{FP}=\sum_{kj}\varepsilon_{kj}C^{+}_{kj}C_{kj}$$

$$\varepsilon_{kj}=\sqrt{\omega_0^2+(\hbar ck)^2}\qquad \omega_0=\frac{2\hbar e}{a}\sqrt{\frac{\bar{u}}{ma}} \qquad \text{II } 1.16$$

Ovim Hamiltonijan postaje dijagonalizovan. Potpuno analogno možemo naći i veličinu

$$\sum_{nkj}T_j(n,k)(P^{+}_n b_{kj}-b^{+}_{-kj}P_n+P^{+}_n b^{+}_{-kj}-b_{kj}P_n)$$

te se uvrštavanjem transformacionih funkcija U_{kj} i V_{kj} svodi na

$$\sum_{nkj}\mathcal{L}_j(n,k)(P^{+}_n C_{kj}-C^{+}_{-kj}P_n+P^{+}_n C^{+}_{-kj}-C_{kj}P_n)$$

$$\text{II } 1.17$$

$$\mathcal{L}_j(n,k)=\sqrt{\frac{2\bar{u}\hbar e^2}{Na^3m^2ck}}\;\bar{M}\bar{l}_{kj}e^{i\bar{k}\bar{n}}\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar ck+\omega_k}{\omega_0^2+(\hbar ck)^2}+1\right)}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar ck+\omega_k}{\omega_0^2+(\hbar ck)^2}-1\right)}\right]$$

$$\text{II } 1.18$$

Konačno možemo pisati Hamiltonijan sa svim izvedenim transformacijama i novo uvedenim oznakama

$$H=\Delta\sum_n P^{+}_n P_n+\sum_{nm}\alpha_{nm}P^{+}_n P_m+\frac{1}{2}\sum\beta_{nm}(P^{+}_n P^{+}_m+P_m P_n)+\sum_{nm}\gamma_{nm}P^{+}_n P_n P^{+}_m P_m+$$

$$+\sum_{nkj}\mathcal{L}_j(n,k)(P^{+}_n C_{kj}-C^{+}_{-kj}P_n+P^{+}_n C^{+}_{-kj}-C_{kj}P_n)+\sum_{kj}\varepsilon_{kj}C^{+}_{kj}C_{kj}$$

Funkcije koje se nalaze u Hamiltonijanu nose njegove osobine te je neophodno dati njihove približne numeričke veličine i njihove osobine

$$\Delta, \varepsilon_{kj} \sim 5eV \qquad \mathcal{X}_j(n,k) \sim 0{,}1 - 1\,eV$$

$$\alpha, \beta, \mu, \Delta, \varepsilon_{kj} - \text{REALNE}$$
$$\alpha, \beta, \mu - \text{REALNE I PARNE}$$

Za funkciju $\mathcal{X}_j(n,k)$ je karakteristično da zavisi od pravca prostiranja svetlosti kroz kristal.

Pošto imamo kompletan Hamiltonijan možemo pristupiti primeni Vajl-ovog identiteta.

Izbor operatora za Vajl-ov identitet

Kako je Vajl-ov identitet detaljno obrađen u I § 3 na ovom mestu se nećemo zadržavati na pojmovima koji su već obrađeni.

Operator S biramo kao

$$S = \sum_{ab} X_{ab}(P_a P_b - P_b^+ P_a^+) + \sum_{aq\ell} \left[Y_\ell(a,q) P_a C_{q\ell} - Y_\ell^*(a,q) C_{q\ell}^+ P_a^+ \right]$$

Možemo ga raščlaniti na dva dela S_1 i S_2, a operator S_1 možemo pisati kao $S_1 = S_1^{(2)} + S_1^{(1)}$

$$S_1 = \underbrace{\sum_{ab} X_{ab} P_a P_b}_{S_1^{(1)}} + \underbrace{\sum_{aq\ell} Y_\ell(a,q) P_a C_{q\ell}}_{S_1^{(2)}}$$

Za operator S važi sledeća relacija

$$[S,H] = [S_1,H] + [S_1,H]^+$$

a funkcije imaju sledeće osobine

$$X_{ab} = X_{ba} \qquad Y_\ell(a,q) = -\overset{*}{Y}_\ell(a,-q)$$
$$X_{ab} = \overset{*}{X}_{ab}$$

Napišimo ponovo totalni Hamiltonijan i raščlanimo ga na delove.

$$H = \underbrace{\Delta\sum_n P_n^+ P_n}_{H_1} + \underbrace{\sum_{nm} \alpha_{nm} P_n^+ P_m}_{H_2} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{nm} \beta_{nm}(P_n^+ P_m^+ + P_m P_n)}_{H_3} + \sum_{kj} \underbrace{\varepsilon_{kj} C_{kj}^+ C_{kj}}_{H_5}$$

$$+ \underbrace{\sum_{nm} f_{nm} P_n^+ P_n P_m^+ P_m}_{H_6} + \sum_{nkj} \mathcal{L}_j(n,k)\big(\underset{H_6^{(1)}}{P_n^+ C_{kj}} - \underset{H_6^{(2)}}{C_{-kj}^+ P_n} + \underset{H_6^{(3)}}{P_n^+ C_{-kj}^+} - \underset{H_6^{(4)}}{C_{kj} P_n}\big)$$

Nove oznake su uvedene radi lakšeg računanja komutatora

$$[S_1, H]$$

Komutaciona relacija koja se koristi za Pauli operatore je

Računamo posebno komutator $[S_1^{(1)}, H_1]$ pa zatim komutator $[S_1^{(2)}, H_1]$ pa zatim te rezultate saberemo i dobijamo

$$[S_1, H_1] = [S_1^{(1)}, H_1] + [S_1^{(2)}, H_1]$$

Na potpuno analogan način računamo i ostale komutatore. Znači uvek tražimo komutatore $s_1^{(1)}$ i $s_1^{(2)}$ sa $H_1 \ldots\ldots\ldots H_6$.

kako je postupak računanja operatora(komutatora) dosta jednostavan a iziskuje velik utrošak prostora ovde će se dati samo krajnji rezultati

$$[S_1, H_1] = 2\sum_{ab} X_{ab}\Delta P_a P_b + \sum_{aq\ell} Y_\ell(a,q)\Delta P_a C_{q\ell} \qquad \text{II 1.20}$$

Komutator $[S_1, H_2] = ?$

$$[S_1, H_2] = 2\sum_{abm} X_{ab}\alpha_{bm} P_a P_m - 4\sum_{abm} X_{ab}\alpha_{bm} P_b^+ P_b P_a P_m +$$

$$+\sum_{am\varrho l} Y_l(a,\varrho)\alpha_{am} P_m C_{\varrho l} - 2\sum_{am\varrho l} Y_l(a,\varrho)\alpha_{am} P_a^+ P_a P_m C_{\varrho l} \qquad \text{II221.}$$

Komutator

$[S_1, H_3] = ?$

$$[S_1, H_3] = \sum_{ab} X_{ab}\beta_{ab} - 4\sum_{ab} X_{ab}\beta_{ab} P_a^+ P_a + 2\sum_{nab} X_{ab}\beta_{nb} P_n^+ P_a -$$

$$-4\sum_{nab} X_{ab}\beta_{nb} P_n^+ P_b^+ P_b P_a + 4\sum_{ab} X_{ab}\beta_{ab} P_a^+ P_a P_b^+ P_b +$$

$$+\sum_{na\varrho l}\beta_{an} Y_l(a,\varrho) P_n^+ C_{\varrho l} - 2\sum_{na\varrho l}\beta_{an} Y_l(a,\varrho) P_n^+ P_a P_a C_{\varrho l}$$

II 1.22

Komutator $[S_1, H_4] = ?$

$$[S_1, H_4] = 2\sum_{ab} X_{ab}\gamma_{ab} P_a P_b + 4\sum_{nab} X_{ab}\gamma_{nb} P_n^+ P_n P_a P_b + 2\sum_{na\varrho l} Y_l(a,\varrho)\gamma_{na} P_n^+ P_n P_a C_{\varrho l}$$

II 1.23.

Komutator $[S_1, H_5] = ?$

$$[S_1, H_5] = \sum_{a\varrho l} Y_l(a,\varrho)\,\varepsilon_{\varrho l} P_a C_{\varrho l}$$

II 1.24.

Komutator $[S_1, H_6] = 2\sum_{abkj} X_{ab} Z_j(b,k) C_{-kj}^+ P_a + 2\sum_{abkj} X_{ab} Z_j(b,k) P_a C_{kj} -$

$$-4\sum_{abkj} X_{ab} Z_j(b,k) P_b^+ P_b C_{-kj}^+ P_a - 4\sum_{abkj} X_{ab} Z_j(b,k) P_b^+ P_b P_a C_{\varrho j} + \sum_{a\varrho l} Y_l(a,\varrho) Z_l(a,-\varrho) -$$

$$-2\sum_{a\varrho l} Y_l(a,\varrho) Z_l(a,-\varrho) P_a^+ P_a + \sum_{na\varrho l} Y_l(a,\varrho) Z_l(n,-\varrho) P_n^+ P_a - 2\sum_{ak\varrho lj} Y_l(a,\varrho) Z_j(a,k) P_a^+ P_a C_{-kj}^+ C_{\varrho l}$$

$$+\sum_{a\varrho jlk} Y_l(a,\varrho) Z_j(a,k) C_{\varrho l} C_{kj} - 2\sum_{akjl\varrho} Y_l(a,\varrho) Z_j(a,k) P_a^+ P_a C_{\varrho l} C_{kj} -$$

$$-\sum_{na\varrho l} Y_l(a,\varrho) Z_l(n,-\varrho) P_a P_n \qquad \text{II 1.25.}$$

Konačno kada smo našli sve komutatore možemo naći na osnovu I 3.7. $[S, H]$

$$
\begin{aligned}
[S,H] = {} & 2\sum_{ab} X_{ab}\Delta P_a P_b + \sum_{aql} Y_l(a,q)\Delta P_a C_{ql} + 2\sum_{abm} X_{ab}\alpha_{bm} P_a P_m - \\
& - \sum_{abm} X_{ab}\alpha_{bm} P_b^+ P_b P_a P_m + \sum_{amql} Y_l(a,q)\alpha_{am} P_m C_{ql} - 2\sum_{amql} Y_l(a,q)\alpha_{am} P_a^+ P_a P_m C_{ql} \\
& + \sum_{amql} Y_l(a,q)\alpha_{am} P_m C_{ql} - 2\sum_{amql} Y_l(a,q)\alpha_{am} P_a^+ P_a P_m C_{ql} + \sum_{ab} X_{ab}\beta_{ab} - \\
& - 4\sum_{ab} X_{ab}\beta_{ab} P_a^+ P_a + 2\sum_{nab} X_{ab}\beta_{nb} P_n^+ P_a - 4\sum_{nab} X_{ab}\beta_{nb} P_n^+ P_b^+ P_b P_a + \\
& + 4\sum_{ab} X_{ab}\beta_{ab} P_a^+ P_a P_b^+ P_b + \sum_{naql} \beta_{an} Y_l(a,q) P_n^+ C_{ql} - 2\sum_{naql} \beta_{an} Y_l(a,q) P_n^+ P_a^+ P_a C_{ql} \\
& + 2\sum_{ab} X_{ab}\gamma_{ab} P_a P_b + 4\sum_{nab} X_{ab}\gamma_{nb} P_n^+ P_n P_a P_b + 2\sum_{naql} Y_l(a,q)\gamma_{na} P_n^+ P_n P_a C_{ql} + \\
& + \sum_{aql} Y_l(a,q)\varepsilon_{ql} P_a C_{ql} + 2\sum_{abkj} X_{ab} Z_j(b,k) C_{-kj}^+ P_a + 2\sum_{abkj} X_{ab} Z_j(b,k) P_a C_{kj} - \\
& - 4\sum_{abkj} X_{ab} Z_j(b,k) P_b^+ P_b C_{-kj}^+ P_a - 4\sum_{abkj} X_{ab} Z_j(b,k) P_b^+ P_b P_a C_{kj} + \sum_{aql} Y_l(a,q) Z_l(a, \\
& - 2\sum_{aql} Y_l(a,q) Z_l(a,-q) P_a^+ P_a + \sum_{naql} Y_l(a,q) Z_l(n,-q) P_n^+ P_a + \sum_{aqjlk} Y_l(a,q) Z_j(a,k) C_{q} \\
& - 2\sum_{akqjl} Y_l(a,q) Z_j(a,k) P_a^+ P_a C_{-kj}^+ C_{ql} - 2\sum_{akjlq} Y_l(a,q) Z_j(a,k) P_a^+ P_a C_{ql} C_{kj} - \\
& - \sum_{naql} Y_l(a,q) Z_l(n,-q) P_a P_n \qquad + \text{K.K.}
\end{aligned}
$$

$\Delta = \frac{\beta_{ab}}{2\Delta}$

Sada možemo izvršiti eliminaciju članova koji ne održavaju broj kvazičestica ,a uslov eliminacije se svodi na

$$\sum_{ab}\Big[\tfrac{1}{2}\beta_{ab} - 2\Delta X_{ab} - 2\sum_{m}\alpha_{bm}X_{ab} - 2\gamma_{ab}X_{ab} + \sum_{q\ell}\mathcal{Z}_\ell(b,-q)Y_\ell(a,q)\Big]P_aP_b = 0$$

$$\sum_{aq\ell}\Big[-\mathcal{Z}_\ell(a,q) - \Delta Y_\ell(a,q) - \varepsilon_{q\ell}Y_\ell(a,q) - \sum_{m}\alpha_{am}Y_\ell(m,q) - 2\sum_{b}\mathcal{Z}_\ell(b,q)X_{ab}\Big]C_{q\ell}P_a = 0$$

Ovakva eliminacija daje nam sve rezultate sa tačnošću do prvih stepena malih parametara $\frac{\beta}{\Delta}$ i $\frac{\mathcal{Z}}{\Delta+\varepsilon}$.
Treba napomenuti da se pored ovoga pojavljuju i članovi proporcionalni C^+C^+ i CC ,a koeficijent uz te članove je proporcionalan malom parametru "Y".Pošto članovi ovoga tipa daju doprinose energiji kvazi čestica tek u drugom redu teorije perturbacija ,to znači da bi doprinos od ovakvih članova bio proporcionalan sa Y^2 pa ih zbog toga izbacijemo iz daljeg računa.
Za efektivni komutator $[S,H]$ da bi mogli naći $[S,[S,H]]$ sa napred navedenom tačnošću uzećemo

$$[S,H]_{eff} = 2\sum_{ab}X_{ab}\Delta P_aP_b + \sum_{aq\ell}\Delta Y_\ell(a,q)P_aC_{q\ell} + \sum_{aq\ell}\varepsilon_{q\ell}Y_\ell(a,q)P_aC_{q\ell} + \text{K.K.}$$

Nakon dodavanja konjugovano kompleksnih članova dobija se za efektivni komutator $[S,H]_{eff}$ sledeći izraz:

$$[S,H]_{eff} = 2\sum_{ab}\Delta X_{ab}(P_a^+P_b^+ + P_bP_a) + \sum_{aq\ell}(\Delta+\varepsilon_{q\ell})\big[Y_\ell(a,q)P_aC_{q\ell} + \overset{*}{Y}_\ell(a,q)P_a^+C_{q\ell}^+\big] \qquad \text{II 1.27.}$$

Uvedimo nove oznake:

$$[S,H]^{(1)}_{eff} = \frac{1}{2}\sum_{ab}\tilde{\beta}_{ab}P_a^+P_b^+ \quad ; \quad \tilde{\beta}_{ab} = 4\Delta X_{ab}$$

$$[S,H]^{(2)}_{eff} = \sum_{nkj}\tilde{\mathcal{Z}}_j(n,-k)P_n^+C_{-kj}^+ \; ; \; \mathcal{Z}_j(n,-k) = (\Delta+\varepsilon_{jk})\overset{*}{Y}_j(n,-k)$$

Računanje komutatora $\left[S_1,\left[S,H\right]^{(1)}\right]_{eff}$

Kako već imamo izračunato $\left[S_1,H_3\right]$ možemo pisati isti rezultat samo sa promenjenim oznakama i indeksima, jer su oblici komutatora potpuno identični.

$$\left[S_1,\left[S,H\right]^{(1)}_{eff}\right]=\sum_{ab}X_{ab}\tilde{\beta}_{ab}-4\sum_{ab}X_{ab}\tilde{\beta}_{ab}P_a^+P_a+2\sum_{nab}X_{ab}\tilde{\beta}_{nb}P_n^+P_a-$$

$$-4\sum_{nab}X_{ab}\tilde{\beta}_{nb}P_n^+P_b^+P_bP_a+4\sum_{nab}X_{ab}\tilde{\beta}_{ab}P_a^+P_aP_b^+P_b+$$

$$+\sum_{nag\ell}\tilde{\beta}_{an}Y_\ell(a,g)P_n^+C_{g\ell}-2\sum_{nag\ell}\tilde{\beta}_{an}Y_\ell(a,g)P_n^+P_a^+P_aC_{g\ell} \qquad \text{II 1.28.}$$

Na isti način radimo i

$$\left[S_1,\left[S,H\right]^{(2)}_{eff}\right]=\sum_{ag\ell}Y_\ell(a,g)\mathcal{Z}_\ell(a,-g)-2\sum_{ag\ell}Y_\ell(a,g)\tilde{\mathcal{Z}}_\ell(a,-g)P_a^+P_a+$$

$$+\sum_{nag\ell}Y_\ell(a,g)\tilde{\mathcal{Z}}_\ell(n,-g)P_n^+P_a-2\sum_{akg\ell j}Y_\ell(a,g)\tilde{\mathcal{Z}}_j(a,k)P_a^+P_aC_{-kj}^+C_{g\ell}$$

$$\text{II. 1.29.}$$

II §2

KVADRATNI HAMILTONIJAN I HARMONISKI SPEKTAR

Kako je $H_{eq} = H - [S,H] + \frac{1}{2}[S,[S,H]]$

iz izraza za $[S,H]$ i $[S,[S,H]]$ izvlačimo članove drugog reda pa se dobija

$$
\begin{aligned}
H_{eq}^{(2)} = {} & \Delta \sum_{n} P_n^+ P_n + \sum_{nm} \alpha_{nm} P_n^+ P_m + \sum_{nm} \gamma_{nm} P_n^+ P_n P_m^+ P_m + \sum_{kj} \varepsilon_{kj} C_{kj}^+ C_{kj} + \\
& + \sum_{nkj} \mathcal{Z}_j(n,k)\left(P_n^+ C_{kj} - C_{-kj}^+ P_n\right) + 8 \sum_{ab} X_{ab} \beta_{ab} P_a^+ P_a - 4 \sum_{nab} X_{ab} \beta_{nb} P_n^+ P_a - \\
& - \sum_{naql} \beta_{an} Y_l(a,q) P_n^+ C_{ql} - \sum_{naql} \beta_{an} \overset{*}{Y}_l(a,q) C_{ql}^+ P_n - 2 \sum_{abkj} X_{ab} \mathcal{Z}_j(b,k) C_{-kj}^+ P_a \\
& - 2 \sum_{abkj} X_{ab} \overset{*}{\mathcal{Z}}_j(b,k) P_a^+ C_{-kj} + 2 \sum_{aql} Y_l(a,q) \mathcal{Z}_l(a,-q) P_a^+ P_a + 2 \sum_{aql} \overset{*}{Y}_l(a,q) \overset{*}{\mathcal{Z}}_l(a,-q) P_a^+ P_a \\
& - \sum_{naql} Y_l(a,q) \mathcal{Z}_l(n,-q) P_n^+ P_a - \sum_{naql} \overset{*}{Y}_l(a,q) \overset{*}{\mathcal{Z}}_l(n,-q) P_a^+ P_n - 4 \sum_{ab} X_{ab} \tilde{\beta}_{ab} P_a^+ P_a \\
& + 2 \sum_{nab} X_{ab} \tilde{\beta}_{nb} P_n^+ P_a + \frac{1}{2} \sum_{naql} \tilde{\beta}_{an} Y_l(a,q) P_n^+ C_{ql} + \frac{1}{2} \sum_{naql} \tilde{\beta}_{an} \overset{*}{Y}_l(a,q) C_{ql}^+ P_n \\
& - \sum_{aql} Y_l(a,q) \mathcal{Z}_l(a,-q) P_a^+ P_a - \sum_{aql} \overset{*}{Y}_l(a,q) \mathcal{Z}_l(a,-q) P_a^+ P_a + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{naql} Y_l(a,q) \tilde{\mathcal{Z}}_l(n,-q) P_n^+ P_a + \frac{1}{2} \sum_{naql} \overset{*}{Y}_l(a,q) \overset{*}{\tilde{\mathcal{Z}}}_l(n,-q) P_a^+ P_n
\end{aligned}
$$

II 2.1

Izvlačimo članove proporcionalne proizvodu $P_n^+ P_n$ i nakon sređivanja dobija se

$$H^{(2)}(P_n^+P_n) = \sum_n P_n^+P_n\Big\{\Delta + 8\sum_s x_s\beta_s - 4\sum_s x_s\tilde{\beta}_s + \sum_{q\ell}\Big[2Y_{\ell(n,q)}\mathcal{Z}_{\ell(n,-q)} -$$

$$- Y_{\ell(n,q)}\tilde{\mathcal{Z}}_{\ell(n,-q)} + 2\overset{*}{Y}_{\ell(n,q)}\overset{*}{\mathcal{Z}}_{\ell(n,-q)} - \overset{*}{Y}_{\ell(n,q)}\overset{*}{\tilde{\mathcal{Z}}}_{\ell(n,-q)}\Big]\Big\}$$

II 2.2.

gde su

$$x_{ab} = \frac{\beta_{ab}}{4\Delta}\ ; \quad x_s = \frac{\beta_s}{4\Delta}\ ; \quad \tilde{\beta}_{ab} = 4\Delta x_{ab}\ ; \quad \tilde{\beta}_{ab} = \beta_{ab}$$

Od ranije imamo daje

$$\tilde{\mathcal{Z}}_j(n,k) = (\Delta + \varepsilon_{kj})\overset{*}{Y}_j(n,-k)$$

pa možemo pisati

$$Y_j(n,k) = -\frac{\mathcal{Z}_j(n,k)}{\Delta + \varepsilon_{kj}} \quad \Rightarrow \quad \overset{*}{Y}_j(n,-k) = -\frac{\overset{*}{\mathcal{Z}}_j(n,-k)}{\Delta + \varepsilon_{kj}}$$

$$\tilde{\mathcal{Z}}_j(n,k) = -\overset{*}{\mathcal{Z}}_j(n,-k)$$

II 2.2a

Na osnovu ovoga možemo izračunati

$$8\sum_s x_s\beta_s - 4\sum_s x_s\tilde{\beta}_s = \frac{1}{\Delta}\sum_s \beta_s^2$$

II 2.3.

Na isti način računamo i

$$Y_{\ell(n,q)}\mathcal{Z}_{\ell(n,-q)} = **$$

Uvrštavanjem izraza II 2.2a i II 1.18 dobija se

$$** = -\frac{2\bar{u}\hbar e^2}{Na^3m^2c_q}\ \frac{(\bar{M}\ell_{qj})^2(U_q+V_q)^2}{\Delta + \varepsilon_{kj}}$$

II 2.4.

Na potpuno analogan način tražimo i ostale delove koji figurišu u II 2.2.

$$Y_e(n,g)\tilde{\mathcal{Z}}_e(n,-g) = -\frac{2\pi k e^2}{Na^3m^2cg}\,\frac{(\bar{M}\bar{e}_{ge})^2(U_g+V_g)^2}{\Delta+\mathcal{E}_{gj}}\,e^{ign}e^{-ign}$$

$$2Y_e\mathcal{Z}_e - Y_e\tilde{\mathcal{Z}}_e + kk = -\frac{2\pi k e^2}{Na^3m^2cg}\cdot\frac{(\bar{M}\bar{e}_{gj})^2(U_g+V_g)^2}{\Delta+\mathcal{E}_{gj}}$$

Konačno je

$$H_2(P_n^+P_n) = \tilde{\Delta}\sum_n P_n^+P_n$$

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \frac{1}{\Delta}\sum_s \beta_s^2 - \sum_{ge}\frac{2\pi k e^2}{Na^3m^2cg}\,\frac{(\bar{M}\,e_{ge})^2(U_{ge}+V_{ge})^2}{\Delta+\mathcal{E}_{ge}} \qquad \text{II 2.5.}$$

Dalje možemo pisati da je

$$H_2(c_{kj}^+c_{kj}) = \sum_{kj}\mathcal{E}_{kj}\,c_{kj}^+c_{kj} \qquad \text{II 2.6.}$$

Izrazićemo deo Hamiltonijana koji je proporcionalan sa $P_n^+ P_m$. U pojedinim sumama potrebno je izvršiti promenu sumacionih indeksa pa se dobija

$$H_2(P_n^+P_m) = \sum_{nm} P_n^+P_m\Big\{\alpha_{nm} - 4\sum_6 X_{m6}\beta_{n6} + 2\sum_6 X_{m6}\tilde{\beta}_{n6} -$$

$$-\sum_{ge}\Big[Y_e(m,g)\mathcal{Z}_e(n,-g) + \overset{*}{Y}_e(n,g)\overset{*}{\mathcal{Z}}_e(m,-g) - \frac{1}{2}Y_e(m,g)\tilde{\mathcal{Z}}_e(n,-g)$$

$$-\frac{1}{2}\overset{*}{Y}_e(n,g)\overset{*}{\tilde{\mathcal{Z}}}_e(m,-g)\Big]\Big\} \qquad \text{II 2.7.}$$

Kao i u prethodnom slučaju tražimo vrednosti pojedinih delova pod sumama pa se ima

$$Y_\ell(m,q)\,\mathcal{Z}_\ell(n,-q) = -\frac{2a\hbar e^2}{Na^3m^2cq}\,\frac{(\bar{M}\bar{\ell}_{qj})^2(U_{qj}+V_{qj})^2}{\Delta+\varepsilon_{q\ell}}\,e^{iq(m-n)} \qquad \text{II 2.8.}$$

$$Y_\ell(m,q)\,\tilde{\mathcal{Z}}_\ell(n,-q) = -\frac{2a\hbar e^2}{Na^3m^2cq}\,\frac{(\bar{M}\cdot\ell_{q\ell})^2(U_{qj}+V_{qj})^2}{\Delta+\varepsilon_{q\ell}}\,e^{iq(n-m)} \qquad \text{II 2.9.}$$

$$\sum_{q\ell}\left[Y\mathcal{Z}-\frac{1}{2}Y\tilde{\mathcal{Z}}+kk\right] = -\frac{2a\hbar e^2}{Na^3m^2cq}\,\frac{(\bar{M}\ell_{q\ell})^2(U_{qj}+V_{qj})^2}{\Delta+\varepsilon_{q\ell}}\,e^{iq(n-m)}$$

$$-4\sum_b X_{mb}\beta_{nb} = -\frac{1}{\Delta}\sum_b \beta_{mb}\beta_{nb}$$

$$2\sum_b X_{mb}\tilde{\beta}_{nb} = \frac{1}{2\Delta}\sum_b \beta_{mb}\beta_{nb}$$

Ako uvedemo novu funkciju, $H_2(P_n^+ P_m)$ se može izraziti

$$H_2(P_n^+P_m) = \sum_{nm}\tilde{\alpha}_{nm}P_n^+P_m$$

$$\tilde{\alpha}_{nm} = \alpha_{nm} - \frac{1}{2\Delta}\sum_b \beta_{mb}\beta_{nb} - \sum_{q\ell}\frac{2a\hbar e^2}{Na^3m^2cq}(\bar{M}\bar{\ell}_{q\ell})^2\,\frac{(U_{q\ell}+V_{q\ell})^2}{\Delta+\varepsilon_{q\ell}}\,e^{iq(n-m)}$$

II 2.10.

Potražićemo deo Hamiltonijana koji je proporcionalan sa $P_n^+ C_{kj}$. Svođenjem se dobija

$$H_2(P_n^+C_{qj}) = \sum_{nkj}P_n^+C_{kj}\left\{\mathcal{Z}_j(n,k)+\frac{1}{2}\sum_m\frac{\beta_{nm}\mathcal{Z}_j(m,k)}{\Delta+\varepsilon_{kj}} - \frac{1}{2\Delta}\sum_m\beta_{nm}\overset{*}{\mathcal{Z}}_j\right\} \qquad \text{II 2.11}$$

Hamiltonijan zavisan od proizvoda operatora $\overset{+}{C}_{-kj}\, P_n$ ima oblik nakon sređivanja

$$H_2(\overset{+}{C}_{-kj}P_n)=\sum_{nkj}\overset{+}{C}_{-kj}P_n\Big\{-\mathcal{Z}_j(n,k)+\frac{1}{2}\sum_m\frac{\beta_{nm}\overset{*}{\mathcal{Z}}_j(m,-k)}{\Delta+\varepsilon_{kj}}-$$

$$-\frac{1}{2\Delta}\sum_m\beta_{nm}\mathcal{Z}_j(m,k)\Big\}$$

Sada ćemo pokazati jednu važnu osobinu ovoga dela Hamiltonijana

$$\left[H_2(\overset{+}{C}_{-kj}\cdot P_n)\right]^{+}=\sum_{nkj}P_n^{+}C_{-kj}\Big\{-\overset{*}{\mathcal{Z}}_j(n,k)+\frac{1}{2}\sum_m\frac{\beta_{nm}\mathcal{Z}_j(m,-k)}{\Delta+\varepsilon_{kj}}-\frac{1}{2\Delta}\sum_m\beta_{nm}\overset{*}{\mathcal{Z}}_j(m,k)\Big\}$$

$$k\to -k$$

Prelaskom sa k na -k i uzimanjem da je $\mathcal{Z}_j(n,k)=-\overset{*}{\mathcal{Z}}_j(n,-k)$ dobija se

$$\left[H_2(\overset{+}{C}_{-kj}P_n)\right]^{+}=H_2(P_n^{+}C_{kj})$$

odnosno možemo pisati da je

$$H_2(P_n^{+}C_{-kj},\overset{+}{C}_{-kj}P_n)=H_2(P_n^{+}C_{kj})+H_2^{+}(P_n^{+}C_{kj}) \qquad \text{II 2.12}$$

Konačno možemo pisati krajnji oblik Hamiltonijana H_2 vraćajući se u polazni Hamiltonijan i uvrštavanjem dobijenih rezultata.

$$H_2=\tilde{\Delta}\sum_n P_n^{+}P_n+\sum_{nm}\tilde{\alpha}_{nm}P_n^{+}P_m+\sum_{kj}\varepsilon_{kj}\overset{+}{C}_{kj}C_{kj}+\sum_{nkj}\tilde{\mathcal{Z}}_j(n,k)(P_n^{+}C_{kj}-\overset{+}{C}_{kj}P_n) \qquad \text{II 2.13}$$

$X_{ab} = \sqrt{\frac{\beta_{ab}}{2\Delta}}$

U ovom prilogu biće date sve novouvedene funkcije kako bi imali što bolji pregled za rešavanje narednih problema

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \frac{1}{\Delta}\sum_s \beta_s^2 - \sum_{kj} \frac{4\pi\hbar e^2}{Na^3m^2ck}\,\frac{(\bar{M}\bar{\ell}_{kj})^2(U_{kj}+V_{kj})^2}{\Delta+\varepsilon_{kj}}$$

$$\tilde{\alpha}_{nm} = \alpha_{nm} - \frac{1}{2\Delta}\sum_a \beta_{na}\beta_{ma} - \sum_{kj}\frac{2\pi\hbar e^2}{Na^3m^2ck}\,\frac{(\bar{M}\bar{\ell}_{kj})(U_{kj}+V_{kj})^2}{\Delta+\varepsilon_{kj}}\,e^{ik(n-m)}$$

$$\tilde{\mathcal{Z}}_j(n,k) = \mathcal{Z}_j(n,k) + \frac{1}{2}\sum_m \frac{\beta_{nm}\mathcal{Z}_j(m,k)}{\Delta+\varepsilon_{kj}} + \frac{1}{2\Delta}\sum_m \beta_{nm}\mathcal{Z}_j(m,k)$$

$$U_{kj} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar ck+\omega_k}{\varepsilon_{kj}}+1\right)} \qquad V_{kj} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar ck+\omega_k}{\varepsilon_k}-1\right)}$$

$$\mathcal{Z}_j(n,k) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar e^2}{Na^3m^2ck}}\,(\bar{M}\bar{\ell}_{kj})(U_{kj}+V_{kj})e^{ikn}$$

$$\mathcal{Z}_j(n,k) = -\overset{*}{\mathcal{Z}}_j(n,-k) \qquad \varepsilon_{kj} = \sqrt{\omega_0^2+(\hbar ck)^2}$$

$$\tilde{\mathcal{Z}}_j(n,k) = -\overset{*}{\tilde{\mathcal{Z}}}_j(n,-k) \qquad \omega_k = \frac{\pi\hbar e^2}{mca^3k}$$

$$\omega_0 = \frac{2\hbar e}{a}\sqrt{\frac{\pi}{ma}} \sim 0{,}6\cdot 10^{-12}\,\mathrm{erg}$$

Potražimo Furije lik veličine $\tilde{\alpha}_{n-m}$ na osnovu poznate transformacije.

$$\tilde{\alpha}_{n-m} = \frac{1}{N} \sum_{q} \tilde{\alpha}_q e^{iq(n-m)}$$

Iz II 2.10. i Furije transformacije možemo pisati

$$\tilde{\alpha}_k = \alpha_k - \frac{\beta_k^2}{2\Delta} - \sum_j \frac{2\bar{u}\hbar e^2}{a^3 m^2 c k} \frac{(\bar{M}\bar{\ell}_{kj})^2 (U_{kj}+V_{kj})^2}{\Delta + \varepsilon_{kj}}$$

$$\tilde{\alpha}_k = \sum_m e^{\pm ik(n-m)} \tilde{\alpha}_{n-m}$$

- Furije lik mešovitog dela Hamiltonijana-

Ako pogledamo izraz II 1.18. vidimo da on može da se predstavi u nešto drugačijem obliku,

$$\mathcal{L}_j(n,k) = L_j(k) e^{ikn}$$

gde je

$$L_j(n,k) = \sqrt{\frac{2\bar{u}\hbar e^2}{N a^3 m^2 c k}} (\bar{M}\bar{\ell}_{kj})(U_{kj}+V_{kj})$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_j(n,k) = L_j(k) e^{ikn} + \frac{1}{2} \sum_q \frac{\beta_{nm} L_j(k) e^{ikn}}{\Delta + \varepsilon_{kj}} + \frac{1}{2\Delta} \sum_m \beta_{nm} L_j(k) e^{ikm}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_j(n,k) = L_j(k) e^{ikn} + \frac{1}{2N} \sum_q \frac{\beta_q L_j(k)}{\Delta + \varepsilon_{kj}} \underbrace{\sum_m e^{iq(n-m)+ikm}}_{e^{iqn} N \delta_{qk}} + \frac{1}{2\Delta N} \sum_q \beta_q L_j(k) \sum_m e^{iq(n-m)+ikm}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_j(n,k) = \underbrace{\left\{ L_j(k) + \frac{1}{2} \frac{\beta_k L_j(k)}{\Delta + \varepsilon_{kj}} + \frac{1}{2} \frac{\beta_k L_j(k)}{\Delta} \right\}}_{\tilde{L}_j(k)} e^{ikn} \qquad \text{II 2.14.}$$

Kako je

$$H_M = \sum_{nkj} \tilde{\mathcal{L}}_j(n,k)(P_n^+ C_{kj} - C_{-kj}^+ P_n)$$ II 2.15

Uvodimo sledeće transformacije za Pauli operatore

$$P_n^+ = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell} P_\ell^+ e^{-i\ell n} \qquad P_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell} P_{-\ell} e^{-i\ell n}$$

Nakon uvrštavanja u II 2.15. i sređivanja

$$H_M = \sum_{kj} \sqrt{N}\, \tilde{L}_j(k)(P_k^+ C_{kj} - C_{kj}^+ P_k) \qquad \tilde{L}_j(-k) = \tilde{L}_j(k)$$

indeks n je skinut kronekerom δ_{nk}

Uvodimo novu funkciju ϕ_{kj} koja je data kao

$$\phi_{kj} = \sqrt{N}\cdot L_j(k) = \sqrt{\frac{2\bar{u}\hbar e^2}{a^3 m^2 c k}}\,(\bar{M}\bar{e}_{kj})(U_{kj}+V_{kj})\left[1+\frac{1}{2}\frac{\beta_k}{\Delta+\varepsilon_{kj}}+\frac{1}{2}\frac{\beta_k}{\Delta}\right] = 6\cdot 10^{-15}\,erg \quad \text{II 2.16.}$$

Nakon Furije transformacije i prelaska sa Pauli operatora na Boze operatore smenom $P_k \approx B_k$ dobija se za kvadratni Hamiltonijan

$$H_2^{(s)} = \sum_k \left[(\tilde{\Delta}+\tilde{\alpha}_k)B_k^+B_k + \sum_j \varepsilon_{kj} C_{kj}^+ C_{kj} + \sum_j \phi_{kj}(B_k^+ C_{kj} - C_{kj}^+ B_k)\right]$$

II 2.17.

Veličine $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\alpha}$, ε_{kj} date su nešto ranije stim da za ϕ_{kj} važi sledeće

$$\overset{*}{\phi}_{kj} = -\phi_{kj} \qquad \phi_{-kj} = \phi_{kj}$$

- Dijagonalizacija polaritonskog Hamiltonijana -

Potražimo spektar polaritona na osnovu polaznog Hamiltonijana koji možemo napisati na osnovu II 2.17. u nešto izmenjenom obliku

$$H_2^{(k)} = \sum_k \sum_{\mu,\nu=1}^{3} \Psi_{\mu\nu} b_\mu^+ b_\nu$$ II 2.18.

$$\psi_{11}=\tilde{\Delta}+\tilde{\alpha}_k=A \qquad \psi_{12}=\phi_{k1}=C \qquad \psi_{13}=\phi_{k2}=D$$
$$\psi_{21}=-\phi_{k1}=-C \qquad \psi_{22}=\varepsilon_k=B \qquad \psi_{23}=0 \qquad \text{II}.2.18.b$$
$$\psi_{31}=-\phi_{k2}=-D \qquad \psi_{32}=0 \qquad \psi_{33}=\varepsilon_k=B$$
$$b_1=B_k;\quad b_2=C_{k1};\quad b_3=C_{k2}$$

Sada ćemo izvršiti prelaz sa Boze operatora $b_\mu, \overset{+}{b}_\mu$ na nove takođe Boze operatore smenom

$$b_\mu=\sum_{\rho=1}^{3} Q_{\mu\rho}\xi_\rho \qquad b_\nu=\sum_{\varrho=1}^{3} Q_{\nu\varrho}\xi_\varrho$$
$$\overset{+}{b}_\mu=\sum_{\rho=1}^{3} \overset{*}{Q}_{\mu\rho}\overset{+}{\xi}_\rho \qquad \overset{+}{b}_\nu=\sum_{\varrho=1}^{3} \overset{*}{Q}_{\nu\varrho}\overset{+}{\xi}_\varrho \qquad \text{II } 2.18a$$

Uvešćemo Hajzenbergove jednačine kretanja i vršiti dijagonalizaciju po Tjablikovu u nešto jednostavnijem obliku, koja direktno daje zakon disperzije za polaritone.

Hajzenbergova jednačina kretanja (ekvivalent Šredingerovoj)za bilo koji ermitski operator neke fizičke veličine ima oblik u sistemu $\hbar=1$

$$i\frac{d\hat{f}}{dt}=[\hat{f},\hat{H}] \qquad \text{II } 2.19.$$

U našem slučaju ima se

$$i\dot{b}_\eta=[b_\eta, h] \qquad h=\sum_{\mu\nu}\psi_{\mu\nu}\overset{+}{b}_\mu b_\nu$$
$$[b_\eta,h]=\sum_{\mu\nu}\psi_{\mu\nu}[b_\eta,\overset{+}{b}_\mu b_\nu]=\sum_{\mu\nu}\psi_{\mu\nu}b_\nu\delta_{\mu\nu}$$
$$i\dot{b}_\eta=\sum_\nu\psi_{\eta\nu}b_\nu \qquad i\dot{b}_\mu=\sum_\nu\psi_{\mu\nu}b_\nu$$

Ovim smo uveli naš Hamiltonijan u Hajzenbergovu jednačinu kretanja. Uvodimo smenu Boze operatora

$$b_\mu=b_\mu e^{-iEt} \qquad \text{II}.2.20.$$

i ako se ovaj izraz uvrsti u Hajzenbergovu jednačinu kretanja E je energija polaritona.Zamenom II 2.20. u jednačini kretanja i diferenciranjem po vremenu dobija se sledeća relacija

$$Eb_\mu=\sum_\nu\psi_{\mu\nu}b_\nu$$

Korišćenjem II 2.18a ima se

$$E Q_{\mu p} = \sum_{\nu} \psi_{\mu\nu} Q_{\nu p} \qquad \text{II 2.21.}$$

Nađimo komutator $[b_\mu, b_\nu^+]$

$$[b_\mu, b_\nu^+] = \delta_{\mu\nu} = \sum_{pq} Q_{\mu p} \overset{*}{Q}_{\nu q} [\xi_p, \xi_q^+] = \sum_{pq} Q_{\mu p} \overset{*}{Q}_{\nu q} \delta_{pq} = \sum_{p=1}^{3} Q_{\mu p} \overset{*}{Q}_{\nu p}$$

$$\sum_{p=1}^{3} Q_{\mu p} \overset{*}{Q}_{\nu p} = \delta_{\mu\nu} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II 2.22.}$$

Dobijena relacija predstavlja uslov kanoničnosti što znači da su ξ_p, ξ_q bozoni. Njeno nalaženje i korišćenje je neophodno da bi našli "h" u funkciji energije i novih operatora ξ_p, ξ_q.

$$h = \sum_{\nu\mu pq} \psi_{\mu\nu} \overset{*}{Q}_{\mu p} Q_{\nu q} \xi_p^+ \xi_p = \sum_{p=1}^{3} E \xi_p^+ \xi_p \qquad \text{II 2.23.}$$

II 2.23. se lako dobija korišćenjem II 2.22.

Inverznom transformacijom možemo pistati

$$b_\mu^+ = \sum_p \overset{*}{Q}_{\mu p} \xi_p^+ \; / \cdot Q_{\mu q} \sum_\mu$$

$$\sum_\mu Q_{\mu q} b_\mu^+ = \sum_p \xi_p^+ \underbrace{\sum_\mu \overset{*}{Q}_{\mu p} Q_{\mu q}}_{\delta_{pq}} = \xi_q^+$$

$$\xi_p^+ = \sum_\mu Q_{\mu p} b_\mu^+ \qquad \xi_p = \sum_\mu \overset{*}{Q}_{\mu p} b_\mu \qquad \text{II 2.24}$$

gde je $\sum_\mu \overset{*}{Q}_{\mu p} Q_{\mu q}$ uslov da postoji inverzna transformacija oblika II 2.24.

Izraz II 2.21 možemo pistati u razvijenom obliku

$$E\cdot Q_{1p}=\psi_{11}Q_{1p}+\psi_{12}Q_{2p}+\psi_{13}Q_{3p}$$
$$E\cdot Q_{2p}=\psi_{21}Q_{1p}+\psi_{22}Q_{2p}+\psi_{23}Q_{3p} \qquad \mu=1,2,3$$
$$E\cdot Q_{3p}=\psi_{31}Q_{1p}+\psi_{32}Q_{2p}+\psi_{33}Q_{3p}$$

Ako iskoristimo relaciju II 2.18b i formiramo determinantu ona će biti oblika

$$\begin{vmatrix} A-E & C & D \\ -C & B-E & 0 \\ -D & 0 & B-E \end{vmatrix}=0$$

Da bi sistem imao rešenja različita od nule determinanta mora biti jednaka nuli. Razvijanjem determinante dobija se

$$(B-E)\left[E^2-(A+B)E+AB+C^2+D^2\right]=0$$

Odavde odmah možemo naći jedno rešenje za energiju dok se druga dva dobijaju rešavanjem kvadratne jednačine

$$E_{1,2}=\frac{A+B}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{A-B}{2}\right)^2-(C^2+D^2)}$$
$$E_3=B \qquad \text{II 2.25.}$$

Vratimo se u polazni sistem i rešavajmo ga za $E=E_3$ i $p=3$

$$(A-E_3)Q_{13}+CQ_{23}+DQ_{33}=0$$
$$-CQ_{13}+(B-E_3)Q_{23}=0$$
$$-DQ_{13}+(B-E_3)Q_{33}=0$$

Uzmimo za jedno rešenje npr $Q_{13}=0$ pa je dalje

$$Q_{13}=0$$

$$CQ_{23}+DQ_{33}=0 \Rightarrow \frac{Q_{23}}{Q_{33}}=-\frac{D}{C} \qquad \text{II 2.26.}$$

Iz uslova kanoničnosti za p=3 dobija se

$$\overset{*}{Q}_{13} Q_{13} + \overset{*}{Q}_{23} Q_{23} + \overset{*}{Q}_{33} Q_{33} = 1$$

kako je Q13=

Iz II 2.26

$$|Q_{33}| = \frac{|C|}{\sqrt{|C|^2+|D|^2}}$$

$$Q_{23} = -\frac{|D|}{\sqrt{|C|^2+|D|^2}} \qquad C = i|C| \qquad D = i|D|$$

Konačno možemo pisati da je

$$E_3 = B \; ; \; Q_{13} = 0 \; ; \; Q_{23} = -\frac{|D|}{\sqrt{|C|^2+|D|^2}} \; ; \; Q_{33} = \frac{|C|}{\sqrt{|C|^2+|D|^2}}$$

$$\overset{+}{\xi}_3 = \overset{+}{Q}_{13} b_1^+ + Q_{23} b_2^+ + Q_{33} b_3^+ \qquad \xi_3 = \overset{*}{Q}_{13} b_1 + Q_{23} b_2 + Q_{33} b_3$$

$$\xi_3^+ = \frac{-|D| b_2^+ + |C| b_3^+}{\sqrt{|C|^2+|D|^2}} \; ; \qquad \xi_3 = \frac{-|D| b_2 + |C| b_3}{\sqrt{|C|^2+|D|^2}}$$

Rešimo sistem za $E = E_1$

$$(A-E_1)Q_{11} + C Q_{21} + D Q_{31} = 0$$

$$-C Q_{11} + (B-E_1) Q_{21} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A - E_1 = \dfrac{A-B}{2}\left[1 - \sqrt{1 + \dfrac{4(|C|^2+|D|^2)}{(A-B)^2}}\;\right] = R_1 \\[3em] B - E_1 = \dfrac{B-A}{2}\left[1 - \sqrt{1 + \dfrac{4(|C|^2+|D|^2)}{(A-B)^2}}\;\right] = -R_4 \end{array}\right\} \text{REALNO}$$

$$R_1 Q_{11} + C Q_{21} + D Q_{31} = 0$$
$$-C Q_{11} - R_1 Q_{21} = 0$$

Uzimajući radi jednostavnijeg pisanja da je

$$\frac{Q_{11}}{Q_{31}} = X \qquad \frac{Q_{21}}{Q_{31}} = Y$$

i rešavanjem ima se

$$R_1 X + C Y = -D$$
$$C X + R_1 Y = 0 \qquad X = \frac{-D R_1}{R_1^2 + |C|^2} \; ; \; Y = \frac{D C}{R_1^2 + |C|^2}$$

Na osnovu dobijenih rezultata mogu se naći transformacione funkcije "Q" korišćenjem uslova kanoničnosti i "X" i "Y"

$$Q_{11} = \frac{-D R_1}{\sqrt{(R_1^2+|C|^2)^2 + |D|^2 R_1^2 + |C|^2 |D|^2}}$$

$$Q_{21} = \frac{|C||D|}{\sqrt{(R_1^2+|C|^2)^2 + |D|^2 R_1^2 + |C|^2 |D|^2}} \qquad \overset{*}{D} = -D$$

$$Q_{31} = \frac{R_1^2 + |C|^2}{\sqrt{(R_1^2+|C|^2)^2 + |D|^2 R_1^2 + |C|^2 |D|^2}}$$

$$\overset{+}{\zeta}_1 = \frac{-D R_1 b_1^+ + |C||D| b_2^+ + (R_1^2+|C|^2) b_3^+}{\sqrt{(R_1^2+|C|^2)^2 + |D|^2 R_1^2 + |C|^2 |D|^2}}$$

$$\zeta_1 = \frac{D R_1 b_1 + |C||D| b_2 + (R_1^2+|C|^2) b_3}{\sqrt{(R_1^2+|C|^2)^2 + |D|^2 R_1^2 + |C|^2 |D|^2}}$$

Na potpuno analogan način rešava se slučaj za $E = E_2$ pa možemo odmah pisati rezultate

$$\left.\begin{aligned} A-E_2 &= \frac{A-B}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{4(|C|^2+|D|^2)}{(A-B)^2}}\,\right] = R_2 \\ B-E_2 &= \frac{B-A}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{4(|C|^2+|D|^2)}{(A-B)^2}}\,\right] = -R_2 \end{aligned}\right\} \text{REALNO}$$

Transformacione funkcije su

$$Q_{12} = \frac{-DR_2}{\sqrt{(R_2^2+|C|^2)^2+|D|^2R_2^2+|C|^2|D|^2}}$$

$$Q_{22} = \frac{|C||D|}{\sqrt{(R_2^2+|C|^2)^2+|D|^2R_2^2+|C|^2|D|^2}}$$

$$Q_{32} = \frac{R_2^2+|C|^2}{\sqrt{(R_2^2+|C|^2)^2+|D|^2R_2^2+|C|^2|D|^2}}$$

operatori ;

$$\xi_2^+ = \frac{-DR_2 b_1^+ + |C||D| b_2^+ + (R_2^2+|C|^2) b_3^+}{\sqrt{(R_2^2+|C|^2)^2+|D|^2R_2^2+|C|^2|D|^2}}$$

$$\xi_2 = \frac{DR_2 b_1 + |C||D| b_2 + (R_2^2+|C|^2) b_3}{\sqrt{(R_2^2+|C|^2)^2+|D|^2R_2^2+|C|^2|D|^2}}$$

energija

$$E_2 = \frac{A+B}{2} - \sqrt{\left(\frac{A-B}{2}\right)^2 + |C|^2+|D|^2}$$

$$b_1^+ = \overset{*}{Q}_{11}\xi_1^+ + \overset{*}{Q}_{12}\xi_2^+ + \overset{*}{Q}_{13}\xi_3^+ \; ; \; b_2^+ = \overset{*}{Q}_{21}\xi_1^+ + \overset{*}{Q}_{22}\xi_2^+ + \overset{*}{Q}_{23}\xi_3^+ \; ; \; b_3^+ = \overset{*}{Q}_{31}\xi_1^+ + \overset{*}{Q}_{32}\xi_2^+ + \overset{*}{Q}_{33}\xi_3^+$$

$$b_1^+ = \frac{DR_1}{\sqrt{(R_1^2+|C|^2)^2+|D|^2R_1^2+|C|^2|D|^2}}\xi_1^+ + \frac{DR_2}{\sqrt{(R_2^2+|C|^2)^2+|D|^2R_2^2+|C|^2|D|^2}}\xi_2^+$$

$$b_2^+ = \frac{|C||D|}{\sqrt{(R_1^2+|C|^2)^2+|D|^2R_1^2+|C|^2|D|^2}}\xi_1^+ + \frac{|D||C|}{\sqrt{(R_2^2+|C|^2)^2+|D|^2R_2^2+|C|^2|D|^2}}\xi_2^+ - \frac{|D|}{\sqrt{|C|^2+|D|^2}}\xi_3^+$$

$$b_3^+ = \frac{R_1^2+|C|^2}{\sqrt{(R_1^2+|C|^2)^2+|D|^2R_1^2+|C|^2|D|^2}}\xi_1^+ + \frac{R_2^2+|C|^2}{\sqrt{(R_2^2+|C|^2)^2+|D|^2R_2^2+|C|^2|D|^2}}\xi_2^+ + \frac{|C|}{\sqrt{|C|^2+|D|^2}}\xi_3^+$$

- Slučaj kada postoji interakcija sa samo jednom fotonskom granom-

$$H_2^{(B)} = \sum_k \sum_{\mu,\nu=1}^{2} \psi_{\mu\nu} b_\mu^+ b_\nu \qquad b_\mu = \sum_{p=1}^{2} Q_{\mu p}\xi_p \qquad \xi_p = \sum_{\mu=1}^{2} \overset{*}{Q}_{\mu p} b_\mu$$

$$\psi_{11} = \tilde{\Delta} + \tilde{\alpha}_k \equiv M_1 \qquad \psi_{12} = \Phi_k \equiv M_3$$

$$\psi_{21} = -\Phi_k \equiv -M_3 \qquad \psi_{22} = \varepsilon_k \equiv M_2$$

$$H = \sum_k \sum_{p=1}^{2} E_p \xi_p^+ \xi_p \; ;$$

$$E \cdot Q_{\mu p} = \sum_{\nu=1}^{2} \psi_{\mu\nu} Q_{\nu p}$$

$$\sum_{p=1}^{2} Q_{\mu p}\overset{*}{Q}_{\nu p} = \delta_{\mu\nu}$$ uslov kanoničnosti

$$\sum_{\mu=1}^{2} \overset{*}{Q}_{\mu p} Q_{\mu q} = \delta_{pq}$$ uslov postojanja inverzne transf.

$$(\psi_{11} - E)Q_{1p} + \psi_{12} Q_{2p} = 0$$

$$\psi_{21} Q_{1p} + (\psi_{22} - E)Q_{2p} = 0$$

II 2.27.

Razvijanjem II 2.27. kada μ prima 1,2,3 i rešavanjem sistema preko determinante koja mora biti jedmaka nuli dobijaju se za energiju dva rešenja

$$E_{1,2} = \frac{M_1+M_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_1-M_2}{2}\right)^2 + |M_3|^2} \qquad M_3 = i|M_3|$$

Rešavamo za $E = E_1$ i p=1

$$M_1 - E_1 = \frac{M_1 - M_2}{2}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{4|M_3|^2}{(M_1 - M_2)^2}}\right] \qquad S_1 Q_{11} + M_3 Q_{21} = 0 \Longrightarrow \frac{Q_{11}}{Q_{21}} = -\frac{M_3}{S_1}$$

Iz uslova inverzne transformacije

$$\frac{Q_{11}^*}{Q_{21}^*}\frac{Q_{11}}{Q_{21}} + 1 = \frac{1}{|Q_{21}|^2} \Longrightarrow Q_{21} = \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 + |M_3|^2}}$$

$$Q_{11} = -\frac{M_3}{\sqrt{S_1^2 + |M_3|^2}}$$

Rešavamo sistem za $E = E_2$ i p=2

$$M_2 - E_2 = S_2 = \frac{M_1 - M_2}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4|M_3|^2}{(M_1 - M_2)^2}}\right]$$

$$Q_{12} = \frac{-M_3}{\sqrt{S_2^2 + |M_3|^2}}\,; \quad Q_{22} = \frac{S_2}{\sqrt{S_2^2 + |M_3|^2}}$$

Potražimo sledeći proizvod matrica

$$\begin{pmatrix} \frac{-M_3}{\sqrt{S_1^2 + |M_3|^2}} & -\frac{M_3}{\sqrt{S_2^2 + |M_3|^2}} \\ \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 + |M_3|^2}} & \frac{S_2}{\sqrt{S_2^2 + |M_3|^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{M_3^*}{\sqrt{S_1^2 + |M_3|^2}} & \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 + |M_3|^2}} \\ \frac{-M_3^*}{\sqrt{S_2^2 + |M_3|^2}} & \frac{S_2}{\sqrt{S_2^2 + |M_3|^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

Množenjem i sređivanjem se dobija za elemente nove matrice

$$u_{11} = 1 \qquad u_{12} = 0$$

$$u_{21} = 0 \qquad u_{22} = 1$$

što znači da je matrica

$$\begin{pmatrix} -\frac{M_3}{\sqrt{S_1^2 + |M_3|^2}} & -\frac{M_3}{\sqrt{S_2^2 + |M_3|^2}} \\ \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 + |M_3|^2}} & \frac{S_2}{\sqrt{S_2^2 + |M_3|^2}} \end{pmatrix}$$

unitarna.

transformacije

$$b_1 = Q_{11}\zeta_1 + Q_{12}\zeta_2$$

$$b_2 = Q_{21}\zeta_1 + Q_{22}\zeta_2$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}^* & Q_{21}^* \\ Q_{12}^* & Q_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$E_1(k)=\frac{\tilde{\Delta}+\tilde{\alpha}_k-\varepsilon_k}{2}+\sqrt{\left(\frac{\tilde{\Delta}+\tilde{\alpha}_k-\varepsilon_k}{2}\right)^2+|\phi_k|^2}$$

$$E_2(k)=\frac{\tilde{\Delta}+\tilde{\alpha}_k-\varepsilon_k}{2}-\sqrt{\left(\frac{\tilde{\Delta}+\tilde{\alpha}_k-\varepsilon_k}{2}\right)^2+|\phi_k|^2}$$

$$B_k=\frac{-\phi_k}{\sqrt{S_1^2(k)+|\phi_k|^2}}\xi_{1k}-\frac{\phi_k}{\sqrt{S_2^2(k)+|\phi_k|^2}}\xi_{2k}$$

$$C_k=\frac{S_1(k)}{\sqrt{S_1^2(k)+|\phi_k|^2}}\xi_{1k}+\frac{S_2(k)}{\sqrt{S_2^2(k)+|\phi_k|^2}}\xi_{2k}$$

$$\xi_{1k}=\frac{\phi_k}{\sqrt{S_1^2(k)+|\phi_k|^2}}B_k+\frac{S_1(k)}{\sqrt{S_1^2(k)+|\phi_k|^2}}C_k$$

$$\xi_{2k}=\frac{\phi_k}{\sqrt{S_2^2(k)+|\phi_k|^2}}B_k+\frac{S_2(k)}{\sqrt{S_2^2(k)+|\phi_k|^2}}C_k$$

$$S_1(k)=\frac{\tilde{\Delta}+\tilde{\alpha}_k-\varepsilon_k}{2}\left[1-\sqrt{1+\frac{4|\phi_k|^2}{(\tilde{\Delta}+\tilde{\alpha}_k-\varepsilon_k)^2}}\right]$$

$$S_2(k)=\frac{\tilde{\Delta}+\tilde{\alpha}_k-\varepsilon_k}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{4|\phi_k|^2}{(\tilde{\Delta}+\tilde{\alpha}_k-\varepsilon_k)^2}}\right]$$

II §3

TROFOTONSKA APSORPCIJA I KOMBINACIONO RASEJANJE

Ako izdvoimo delove Hamiltonijana četvrtog reda ,a nemaju isti broj kreacionih i anihilacionih operatora možemo pisati da je u konfiguracionom prostoru

$$\begin{aligned}
H_4^{n\,3\rightleftarrows 1} = &\sum_{nma} \frac{1}{\Delta}\left(\beta_{na}\alpha_{am} - \beta_{nm}\mu_{ma}\right)\left(P_a^+ P_a P_n P_m + P_m^+ P_n^+ P_a^+ P_a\right) + \\
&+ \sum_{nakj}\left[\frac{\beta_{an}\mathcal{Z}_j(a,k)}{\Delta} + 2\,\frac{\mu_{an}\mathcal{Z}_j(n,k) - \alpha_{an}\mathcal{Z}_j(a,k)}{\Delta + \varepsilon_{kj}}\right] P_a^+ P_a P_n C_{kj} + \\
&+ \sum_{nakj}\left[\frac{\beta_{an}\overset{*}{\mathcal{Z}}_j(a,k)}{\Delta} + 2\,\frac{\mu_{an}\overset{*}{\mathcal{Z}}_j(n,k) - \alpha_{an}\overset{*}{\mathcal{Z}}_j(a,k)}{\Delta + \varepsilon_{kj}}\right] C_{kj}^+ P_n^+ P_a^+ P_a - \\
&-2\sum_{akjk'j'} \frac{\mathcal{Z}_j(a,k)\mathcal{Z}_{j'}(a,k')}{\Delta + \varepsilon_{kj}} P_a^+ P_a C_{kj} C_{k'j'} - \\
&-2\sum_{akjk'j'} \frac{\overset{*}{\mathcal{Z}}_j(a,k)\overset{*}{\mathcal{Z}}_{j'}(a,k')}{\Delta + \varepsilon_{kj}} C_{kj}^+ C_{k'j'}^+ P_a^+ P_a
\end{aligned}$$

II 3.1.

Nakon Furije transformacije Hamiltonijan u impulsnom prostoru ima oblik

$$\begin{aligned}
H_4^{3\rightleftarrows 1} = &\frac{1}{N}\sum_{k_1k_2k_3} \beta_{k_2}\frac{\alpha_{k_1} - \mu_{k_1+k_2}}{\Delta}\left(P_{k_1+k_2+k_3}^+ P_{k_3} P_{k_2} P_{k_1} + P_{k_1}^+ P_{k_2}^+ P_{k_3}^+ P_{k_1+k_2+k_3}\right) \\
&+ \frac{1}{N}\sum_{k_1k_2k_3j} \phi_{k_1j}^{(0)}\left(\frac{\beta_{k_2}}{\Delta} + 2\,\frac{\mu_{k_1+k_2} - \alpha_{k_2}}{\Delta + \varepsilon_{k_1j}}\right) P_{k_1+k_2+k_3}^+ P_{k_3} P_{k_2} C_{k_1j} + \\
&\frac{1}{N}\sum_{k_1k_2k_3j} \overset{*}{\phi}{}_{k_1j}^{(0)}\left(\frac{\beta_{k_2}}{\Delta} + 2\,\frac{\mu_{k_1+k_2} - \alpha_{k_2}}{\Delta + \varepsilon_{k_1j}}\right) C_{k_1j}^+ P_{k_2}^+ P_{k_3}^+ P_{k_1+k_2+k_3} -
\end{aligned}$$

$$-\frac{2}{N}\sum_{k_1k_2k_3jj'}\frac{\phi^{(0)}_{k_1j}\phi^{(0)}_{k_2j'}}{\Delta+\varepsilon_{k_1j}}\left(P^{+}_{k_1+k_2+k_3}P_{k_3}C_{k_2j'}C_{k_1j}+C^{+}_{k_1j}C^{+}_{k_2j'}P^{+}_{k_3}P_{k_1+k_2+k_3}\right)$$

$$\phi^{(0)}_{kj}=\sqrt{\frac{2\pi\hbar e^2}{a^3m^2ck}}\,(\vec{M}\vec{l}_{kj})(U_{kj}+V_{kj})$$

$$\phi^{(0)}_{kj}=\phi^{(0)}_{-kj}\quad;\quad\overset{*}{\phi}{}^{(0)}_{kj}=-\phi^{(0)}_{kj}$$

II 3.2.

Ako izvršimo zamenu $P_k\to B_k$ i pređemo na polaritone onda u slučaju dva polaritonska nivoa ima se

$$B_k=\sum_{\rho=1}^{2}g_\rho(k)\xi_{\rho k}\qquad C_k=\sum_{\rho=1}^{2}h_\rho(k)\xi_{\rho(k)}$$

$$g_1(k)=-\frac{\phi_k}{\sqrt{S_1^2(k)+|\phi_k|^2}}\qquad h_1(k)=\frac{S_1(k)}{\sqrt{S_1^2(k)+|\phi_k|^2}}$$

$$g_2(k)=-\frac{\phi_k}{\sqrt{S_2^2(k)+|\phi_k|^2}}\qquad h_2(k)=\frac{S_2(k)}{\sqrt{S_2^2(k)+|\phi_k|^2}}$$

$$H_4^{3\rightleftarrows 1}=\frac{1}{N}\sum_{\substack{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\\k_1k_2k_3}}\Big\{\varphi_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1,k_2,k_3)\xi^{+}_{\rho_4}(k_1+k_2+k_3)\xi_{\rho_3}(k_3)\xi_{\rho_2}(k_2)\xi_{\rho_1}(k_1)+$$

$$+\overset{*}{\varphi}_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1,k_2,k_3)\xi^{+}_{\rho_1}(k_1)\xi^{+}_{\rho_2}(k_2)\xi^{+}_{\rho_3}(k_3)\xi_{\rho_4}(k_1+k_2+k_3)\Big\}$$

$$\varphi_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1,k_2,k_3)=\beta_{k_2}\frac{\alpha_{k_1}-\gamma_{k_1+k_2}}{\Delta}\overset{*}{g}_{\rho_4}(k_1+k_2+k_3)g_{\rho_3}(k_3)g_{\rho_2}(k_2)g_{\rho_1}(k_1)+$$

$$+\phi^{(0)}_{k_1}\left(\frac{\beta_{k_2}}{\Delta}+2\frac{\gamma_{k_1+k_2}-\alpha_{k_2}}{\Delta+\varepsilon_{k_1j}}\right)\overset{*}{g}_{\rho_4}(k_1+k_2+k_3)g_{\rho_3}(k_3)g_{\rho_2}(k_2)h_{\rho_1}(k_1)-$$

$$-2\frac{\phi^{(0)}_{k_1}\phi^{(0)}_{k_2}}{\Delta+\varepsilon_{k_1}}\overset{*}{g}_{\rho_4}(k_1+k_2+k_3)g_{\rho_3}(k_3)h_{\rho_2}(k_2)h_{\rho_1}(k_1)$$

II 3.3

Za slučaj interakcije sa obema fotonskim granama, odnosno za slučaj tri polaritonska nivoa

$$B_k=\sum_{\rho=1}^{3}X_\rho(k)\xi_\rho(k)\,;\quad C_{k1}=\sum_{\rho=1}^{3}Y_\rho(k)\xi_\rho(k)\,;\quad C_{k2}=\sum_{\rho=1}^{3}Z_\rho(k)\xi_\rho(k)$$

$$H_4^{3\rightleftarrows 1}=\frac{1}{N}\sum_{\substack{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\\ k_1k_2k_3}}\Big\{\mathcal{F}_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1,k_2,k_3)\,\xi^{+}_{\rho_4}(k_1+k_2+k_3)\,\xi_{\rho_3}(k_3)\,\xi_{\rho_2}(k_2)\,\xi_{\rho_1}(k_1)+$$

$$+\mathcal{F}^{*}_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1,k_2,k_3)\,\xi^{+}_{\rho_1}(k_1)\,\xi^{+}_{\rho_2}(k_2)\,\xi^{+}_{\rho_3}(k_3)\,\xi_{\rho_4}(k_1+k_2+k_3)\Big\}$$

II 3.4

$$\mathcal{F}_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1,k_2,k_3)=\beta_{k_2}\frac{\alpha_{k_1}-\gamma_{k_1+k_2}}{\Delta}X^{*}_{\rho_4}(k_1+k_2+k_3)X_{\rho_3}(k_3)X_{\rho_2}(k_2)X_{\rho_1}(k_1)+$$

$$+\phi^{(0)}_{k_1 1}\left(\frac{\beta_{k_2}}{\Delta}+2\,\frac{\gamma_{k_1+k_2}-\alpha_{k_2}}{\Delta+E_{k_1 1}}\right)X^{*}_{\rho_4}(k_1+k_2+k_3)X_{\rho_3}(k_3)X_{\rho_2}(k_2)Y_{\rho_1}(k_1)+$$

$$+\phi^{(0)}_{k_1 2}\left(\frac{\beta_{k_2}}{\Delta}+2\,\frac{\gamma_{k_1+k_2}-\alpha_{k_2}}{\Delta+E_{k_1 2}}\right)X^{*}_{\rho_4}(k_1+k_2+k_3)X_{\rho_3}(k_3)X_{\rho_2}(k_2)Z_{\rho_1}(k_1)+$$

$$-2\,\frac{\phi^{(0)}_{k_1 1}\phi^{(0)}_{k_2 1}}{\Delta+E_{k_1 1}}X^{*}_{\rho_4}(k_1+k_2+k_3)X_{\rho_3}(k_3)Y_{\rho_2}(k_2)Y_{\rho_1}(k_1)-$$

$$-2\,\frac{\phi^{(0)}_{k_1 1}\phi^{(0)}_{k_2 2}}{\Delta+E_{k_1 1}}X^{*}_{\rho_4}(k_1+k_2+k_3)X_{\rho_3}(k_3)Z_{\rho_2}(k_2)Y_{\rho_1}(k_1)-$$

$$-2\,\frac{\phi^{0}_{k_1 2}\phi^{0}_{k_2 1}}{\Delta+E_{k_1 2}}X^{*}_{\rho_4}(k_1+k_2+k_3)X_{\rho_3}(k_3)Y_{\rho_2}(k_2)Z_{\rho_1}(k_1)-$$

$$-2\,\frac{\phi_{k_1 2}\phi_{k_2 2}}{\Delta+E_{k_1 2}}X^{*}_{\rho_4}(k_1+k_2+k_3)X_{\rho_3}(k_3)Y_{\rho_2}(k_2)Y_{\rho_1}(k_1)$$

II 3.4a

$$X_1(k)=\frac{\check{D}R_1}{\sqrt{(R_1^2+|C|^2)^2+D^2R_1^2+|C|^2|D|^2}}\qquad Y_1(k)=\frac{|C||D|}{\sqrt{(R_1^2+|C|^2)^2+|D|^2R_1^2+|C|^2|D|^2}}$$

$$X_2(k)=\frac{\check{D}R_2}{\sqrt{(R_2^2+|C|^2)^2+|D|^2R_2^2+|C|^2|D|^2}}\qquad Y_2(k)=\frac{|C||D|}{\sqrt{(R_2^2+|C|^2)^2+|D|^2R_2^2+|C|^2|D|^2}}$$

$$X_3(k)=0\qquad Y_3(k)=\frac{-|D|}{\sqrt{|C|^2+|D|^2}}$$

$$Z_1(k)=\frac{R_1^2+|C|^2}{\sqrt{(R_1^2+|C|^2)^2+|D|^2R_1^2+|C|^2|D|^2}}$$

$$Z_2(k)=\frac{R_2^2+|C|^2}{\sqrt{(R_2^2+|C|^2)^2+D^2R_2^2+|C|^2|D|^2}}\qquad Z_3(k)=\frac{|C|}{\sqrt{|C|^2+|D|^2}}$$

II 3.4b

Fizički smisao članova $\{^{+}\}\}\}$ je očigledan; On odgovara procesu slepljivanja tri polaritona u jedan sa utrojenim impulsom. Konjugovani član odgovara obrnutom procesu. Koeficijenti uz ove članove pretstavljaju amplitude verovatnoće, a kvadrati tih koeficijenata izražavaju verovatnoću za odigravanje jednog takvog procesa. Ocene ovih verovatnoća biće date u posebnom paragrafu.

Možemo još izdvoiti članove četvrtog reda koji imaju jednak broj kreacionih i anihilacionih operatora. Možemo pisati u konfiguracionom prostoru

$$
\begin{aligned}
H_4^{2\rightleftarrows 2} = & \sum_{nm}\left(\mu_{nm} - \frac{\beta_{nm}^2}{\Delta}\right) P_n^+ P_m^+ P_n P_m + \sum_{nma} \frac{\beta_{na}\beta_{am}}{\Delta} P_n^+ P_a^+ P_a P_m - \\
& - \sum_{nmkj} \beta_{nm}\mathcal{Z}_j(m,k)\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta+\varepsilon_{kj}}\right) P_n^+ P_m^+ P_m C_{kj} - \\
& - \sum_{nmkj} \beta_{nm}\overset{*}{\mathcal{Z}}_j(m,k)\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta+\varepsilon_{kj}}\right) \overset{+}{C}_{kj} P_m^+ P_m P_n - \\
& - \sum_{nkjqj'} \frac{\mathcal{Z}_j(n,-k)\mathcal{Z}_{j'}(n,q)}{\Delta+\varepsilon_{qj'}} P_n^+ \overset{+}{C}_{kj} C_{qj'} P_n - \\
& - \sum_{nkjqj'} \frac{\overset{*}{\mathcal{Z}}_j(n,-k)\overset{*}{\mathcal{Z}}_{j'}(n,q)}{\Delta+\varepsilon_{qj'}} P_n^+ \overset{+}{C}_{qj'} C_{kj} P_n
\end{aligned}
\qquad \text{II 3.5.}
$$

Nakon Furije transformacije Hamiltonijan ima oblik

$$
H_4^{2\rightleftarrows 2} = \frac{1}{N}\sum_{k_1k_2k_3} F^{(1)}_{k_1,k_2,k_3} P_{k_1}^+ P_{k_2}^+ P_{k_3} P_{k_1+k_2-k_3} + \frac{1}{N}\sum_{\substack{k_1k_2k_3\\ j}} F^{(2)}_{k_1,k_2,k_3,j} \cdot P_{k_1}^+ P_{k_2}^+ C_{k_3j} \cdot P_{k_1+k_2-k_3} +
$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k_1,k_2,k_3 j}\overset{*}{F}{}^{(2)}_{k_1,k_2,k_3,j}\,P^{+}_{k_1+k_2-k_3}C_{k_3j}P_{k_2}P_{k_1}+\frac{1}{N}\sum_{\substack{k_1,k_2,k_3\\ jj'}}F^{(3)}_{k_1k_2k_3jj'}P^{+}_{k_1}C^{+}_{k_2j}C_{k_3j'}P_{k_1+k_2-k_3}+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{k_1k_2k_3jj'}\overset{*}{F}{}^{(3)}_{k_1,k_2,k_3,j,j'}P^{+}_{k_1+k_2-k_3}C^{+}_{k_3j'}C_{k_2j}P_{k_1}$$

II 3.6.

gde je

$$F^{(1)}_{k_1,k_2,k_3}=\mu_{k_1-k_3}+\frac{\beta_{k_1}\beta_{k_2}}{\Delta}-\frac{1}{N}\sum_{q}\frac{\beta_q\beta_{q+k_1-k_3}}{\Delta}$$

$$F^{(2)}_{k_1,k_2,k_3,j}=-\beta_{k_1}\overset{(0)}{\Phi}_{k_3j}\left(\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{\Delta+\varepsilon_{k_3j}}\right)$$

$$F^{(3)}_{k_1,k_2,k_3,j,j'}=-\frac{\overset{(0)}{\Phi}_{k_2j}\,\overset{(0)}{\Phi}_{k_3j'}}{\Delta+\varepsilon_{k_3j'}}$$

II 3.7.

Posle zamene $P_k \to B_k$ i prelaska na polaritone dobijamo

a) U slučaju interakcije sa jednom fotonskom granom

$$H_4^{2\rightleftarrows 2}=\frac{1}{N}\sum_{\substack{k_1,k_2,k_3\\ \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}}\Gamma_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1k_2k_3)\,\xi^{+}_{\rho_1}(k_1)\,\xi^{+}_{\rho_2}(k_2)\,\xi_{\rho_3}(k_3)\,\xi_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)$$

II 3.8.

$$\Gamma_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1,k_2,k_3)=F^{(1)}(k_1,k_2,k_3)\,\overset{*}{g}_{\rho_1}(k_1)\,\overset{*}{g}_{\rho_2}(k_2)\,g_{\rho_3}(k_3)\,g_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)+$$

$$+ F^{(2)}(k_1,k_2,k_3)\overset{*}{g}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{g}_{\rho_2}(k_2)h_{\rho_3}(k_3)g_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3) +$$

$$+ \overset{*}{F}{}^{(2)}(k_1+k_2-k_3,k_3,k_2)g_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)g_{\rho_3}(k_3)\overset{*}{h}_{\rho_2}(k_2)\overset{*}{g}_{\rho_1}(k_1) +$$

$$+ F^{(3)}(k_1,k_2,k_3)\overset{*}{g}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{h}_{\rho_2}(k_2)h_{\rho_3}(k_3)g_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3) +$$

$$+ \overset{*}{F}{}^{(3)}(k_1+k_2-k_3,k_3,k_2)g_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)h_{\rho_3}(k_3)\overset{*}{h}_{\rho_2}(k_2)\overset{*}{g}_{\rho_1}(k_1)$$

II 3.9.

b) <u>Slučaj tri polaritonska nivoa</u>

$$H_4^{2\rightleftarrows 2} = \frac{1}{N}\sum_{\substack{k_1k_2k_3\\ \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}} \Omega_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1,k_2,k_3)\,\overset{+}{\xi}_{\rho_1 k_1}\xi_{\rho_2 k_2}\xi_{\rho_3 k_3}\xi_{\rho_4, k_1+k_2-k_3}$$

II 3.10.

$$\Omega_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1,k_2,k_3) = F^{(1)}(k_1,k_2,k_3)\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{X}_{\rho_2}(k_2)X_{\rho_3}(k_3)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3) +$$

$$+ F_1^{(2)}(k_1,k_2,k_3)\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{X}_{\rho_2}(k_2)Y_{\rho_3}(k_3)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3) +$$

$$+ \overset{*}{F}{}_1^{(2)}(k_1+k_2-k_3,k_3,k_2)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)X_{\rho_3}(k_3)\overset{*}{Y}_{\rho_2}(k_2)\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1) +$$

$$+ F_2^{(2)}(k_1,k_2,k_3)\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{X}_{\rho_2}(k_2)Z_{\rho_3}(k_3)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3) +$$

$$+ \overset{*}{F}{}_2^{(2)}(k_1+k_2-k_3,k_3,k_2)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)Y_{\rho_3}(k_3)\overset{*}{Z}_{\rho_2}(k_2)\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1) +$$

$$+ F_{11}^{(3)}(k_1,k_2,k_3)\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{Y}_{\rho_2}(k_2)Y_{\rho_3}(k_3)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3) +$$

$$+ \overset{*}{F}{}_{11}^{(3)}(k_1+k_2-k_3,k_3,k_2)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)Y_{\rho_3}(k_3)\overset{*}{Y}_{\rho_2}(k_2)\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1) +$$

$$+ F_{12}^{(3)}(k_1,k_2,k_3)\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{Y}_{\rho_2}(k_2)Z_{\rho_3}(k_3)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3) +$$

$$+ \overset{*}{F}{}_{12}^{(3)}(k_1+k_2-k_3,k_3,k_2)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)Y_{\rho_3}(k_3)\overset{*}{Z}_{\rho_2}(k_2)\overset{*}{X}_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3) +$$

$$+ F_{21}^{(3)}(k_1,k_2,k_3)\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{Z}_{\rho_2}(k_2)Y_{\rho_3}(k_3)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3) +$$

$$+ \overset{*}{F}{}_{21}^{(3)}(k_1+k_2-k_3,k_3,k_2)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)Z_{\rho_3}(k_3)\overset{*}{Y}_{\rho_2}(k_2)\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1) +$$

$$+ F_{22}^{(3)}(k_1,k_2,k_3)\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{Z}_{\rho_2}(k_2)Z_{\rho_3}(k_3)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3) +$$

$$+ \overset{*}{F}{}_{22}^{(3)}(k_1+k_2-k_3,k_3,k_2)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)Z_{\rho_3}(k_3)\overset{*}{Z}_{\rho_2}(k_2)\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1) +$$

$$F_{k_1k_2k_3 j} \equiv F_j(k_1,k_2,k_3) \quad ; \quad F_{k_1k_2k_3 jj'} \equiv F_{jj'}(k_1,k_2,k_3)$$

$$j, j' = 1, 2$$

II 3.11.

Treba napomenuti da su Hamiltonijani $\overset{2\rightleftarrows 2}{H_4} \sim \Omega$; $\overset{2\rightleftarrows 2}{H_4} \sim \Gamma$ samo Hamiltonijani dinamičke interakcije polaritona. Kinematička popravka interakcije polaritona dobija se tako što se u kvadratnom delu Hamiltonijana izvrši zamena

$$P_n = B_n - \overset{+}{B_n} B_n B_n \qquad \overset{+}{P_n} = \overset{+}{B_n} - \overset{+}{B_n}\overset{+}{B_n} B_n$$

$$\overset{+}{P_n} P_n = \overset{+}{B_n} B_n - \overset{+2}{B_n} B_n^2$$

Posle ove zamene dobijamo H_4^c u obliku

$$H_4^c = -\tilde{\Delta}\sum_n \overset{+}{B_n}\overset{+}{B_n} B_n B_n - \sum_{nm}{}' \tilde{\alpha}_{nm} \overset{+}{B_n}\overset{+}{B_n} B_n B_m - \sum_{nm}{}' \tilde{\alpha}_{nm} \overset{+}{B_n}\overset{+}{B_m} B_m B_m -$$

$$- \sum_{nk_3j} \tilde{\mathcal{Z}}_j(n,k_3) \overset{+}{B_n}\overset{+}{B_n} C_{k_3j} B_n + \sum_{nk_2j} \tilde{\mathcal{Z}}_j(n,-k_2) \overset{+}{B_n} \overset{+}{C}_{k_2j} B_n B_n$$

$$\tilde{\mathcal{Z}}_j(n,k) = \tilde{L}_j e^{ikn} \qquad \text{II 3.12.}$$

$$\tilde{L}_j(k) = L_j(k) + \frac{1}{2}\frac{\beta_k L_j(k)}{\Delta + \varepsilon_{kj}} + \frac{1}{2}\frac{\beta_k L_j^*(k)}{\Delta}$$

Nakon izvršene Furije transformacie i prelaska na polaritone dobijamo za

a) slučaj dva nivoa polaritona

$$H_4^c = -\frac{1}{N}\sum_{\substack{k_1k_2k_3\\ \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}} \tilde{\Gamma}^{(k_1,k_2,k_3)}_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4} \overset{+}{\xi}_{\rho_1k_1} \overset{+}{\xi}_{\rho_2k_2} \xi_{\rho_3k_3} \xi_{\rho_4,k_1+k_2-k_3} \qquad \text{II 3.13.}$$

$$\tilde{\Gamma}_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1,k_2,k_3) = \overset{*}{g}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{g}_{\rho_2}(k_2) g_{\rho_3}(k_3) g_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)\cdot(\tilde{\Delta}+\tilde{\alpha}_{k_1}+\tilde{\alpha}_{k_3}) +$$

$$+ \overset{*}{g}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{g}_{\rho_2}(k_2) h_{\rho_3}(k_3) g_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)\,\Phi_{k_3} -$$

$$- \overset{*}{g}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{h}_{\rho_2}(k_2) g_{\rho_3}(k_3) g_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)\,\Phi_{k_2} \qquad \text{II 3.14.}$$

b) Tri polaritonska nivoa

$$\mathbb{H}_4^{(c)} = -\frac{1}{N}\sum_{\substack{k_1k_2k_3\\ \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}} \widetilde{\Omega}_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1,k_2,k_3)\,\xi^+_{\rho_1 k_1}\xi^+_{\rho_2 k_2}\xi_{\rho_3 k_3}\xi_{\rho_4, k_1+k_2-k_3} \qquad \text{II } 3.15.$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega}_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1,k_2,k_3) = {} & (\widetilde{\Delta}+\widetilde{\alpha}_{k_1}+\widetilde{\alpha}_{k_3})\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{X}_{\rho_2}(k_2)X_{\rho_3}(k_3)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)+\\ & +\Phi_{k_3 1}\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{X}_{\rho_2}(k_2)Y_{\rho_3}(k_3)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)+\\ & +\Phi_{k_3 2}\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{X}_{\rho_2}(k_2)Z_{\rho_3}(k_3)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)-\\ & -\Phi_{k_2 1}\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{Y}_{\rho_2}(k_2)X_{\rho_3}(k_3)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)-\\ & -\Phi_{k_2 2}\overset{*}{X}_{\rho_1}(k_1)\overset{*}{Z}_{\rho_2}(k_2)X_{\rho_3}(k_3)X_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)\end{aligned}$$

II 3.16.

Kompletan Hamiltonijan koji odgovara procesima kombinacionog rasejanja polaritona ima oblik

a) U slučaju dva nivoa polaritona

$$\mathbb{H}_4^{cs} = \frac{1}{N}\sum_{\substack{k_1k_2k_3\\ \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}}\left[\Gamma_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1,k_2,k_3) - \widetilde{\Gamma}_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1,k_2,k_3)\right]\xi^+_{\rho_1}(k_1)\xi^+_{\rho_2}(k_2)\xi_{\rho_3}(k_3)\xi_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)$$

II 3.17.

Izrazi za funkcije dati su u prethodnim slučajevima

b) U slučaju tri nivoa polaritona

$$\mathbb{H}_4^{cs} = \frac{1}{N}\sum_{\substack{k_1k_2k_3\\ \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}}\left[\Omega_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1,k_2,k_3) - \widetilde{\Omega}_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1,k_2,k_3)\right]\xi^+_{\rho_1}(k_1)\xi^+_{\rho_2}(k_2)\xi_{\rho_3}(k_3)\xi_{\rho_4}(k_1+k_2-k_3)$$

II 3.18.

Kao što se vidi iz strukture Hamiltonijana ovaj Hamiltonijan opisuje procese rasejanja polaritona na polaritonima. Koeficijenti $\Omega+\widetilde{\Omega}$ ili $\Gamma+\widetilde{\Gamma}$ predtavljaju Furije likove efektivnog potencijala u kome se ovo rasejanje vrši.

Metodom funkcije Grina iz ovog dela Hamiltonijana može se izračunati pomeraj harmoniskih nivoa koji dolaze usled od kombinacionog rasejanja. U ovaj račun nećemo se upuštati. Može se samo reći da su ove popravke harmoniskog spektra proporcionalne koncentraciji polaritona, a ove su sa današnjim laserima od 10^{-6} do 10^{-3}.

II §4. OBLAST REZONANSE

Sada ćemo razmotriti poseban slučaj, odnosno oblast rezonanse. Pod rezonansom se naziva slučaj kada se preseca- ju fotonska i eksitonska grana. Šire posmatrano to je oblast gde je $E_e \approx E_F$. Za taj slučaj možemo pisati da je

$$Z + \tilde{\alpha}_k - \varepsilon_k \approx 0 \equiv \delta_k$$

Na osnovu toga možemo izračunati vrednosti funkcija $S_1(K)$ i $S_2(K)$ date u paragrafu 2 glava II.

U navedenoj aproksimaciji $Z + \varepsilon_k + \alpha_k \approx \delta_k$ dobija se

$$S_1(k) = -|\phi_k| + \frac{1}{2}\delta_k \quad ; \quad S_2(k) = |\phi_k| + \frac{1}{2}\delta_k$$

$$\delta_k << \phi_k$$

Na isti način mogu se naći i transformacione funkcije "g" i "h" i one su jednake

$$g_1(k) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\delta_k}{2|\phi_k|}\right) \quad ; \quad h_1(k) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g_2(k) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\delta_k}{2|\phi_k|}\right) \qquad h_2(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Potražimo amplitudu verovatnoće u navedenoj aproksimaciji

$$\varphi = \beta_{k_2}\frac{\alpha_{k_1} - \gamma_{k_1+k_2}}{4\Delta} + \phi^{(0)}_{k_1}\left(\frac{\beta_{k_2}}{4\Delta} + \frac{1}{2}\,\frac{\gamma_{k_1+k_2} - \alpha_{k_2}}{\Delta + \varepsilon_{k_j}}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\phi^{(0)}_{k_1}\phi^{(0)}_{k_2}}{\Delta + \varepsilon_{k_1}}$$

$$\alpha \approx \gamma \qquad \Delta \approx \varepsilon$$

$$\varphi = \frac{\phi^{(0)}_{k_1}}{4\Delta}\left(\beta_{k_2} - \phi^{(0)}_{k_2}\right)$$

Kako je $\overset{3\rightleftarrows 1}{H^{n}_{4}}$ (izraz II 3.3.) odnosno

$$\hat{H}_4^{3\rightleftarrows 1} = \frac{1}{N} \sum_{\substack{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 \\ k_1 k_2 k_3}} \left\{ \varphi \, \xi^{+}_{\rho_4}(k_1+k_2+k_3)\, \xi_{\rho_3}(k_3)\, \xi_{\rho_2}(k_2)\, \xi_{\rho_1}(k_1) + \overset{*}{\varphi}\, \xi^{+}_{\rho_1} \xi^{+}_{\rho_2} \xi^{+}_{\rho_3} \xi_{\rho_4}(k_1+k_2+k_3) \right\}$$

Možemo pisati za početno (inicijalno) stanje

$$|i\rangle \quad |0_{\rho_4, k_1+k_2+k_3}\rangle |n_{\rho_3 k_3}\rangle |n_{\rho_2 k_2}\rangle |n_{\rho_1 k_1}\rangle$$

s obzirom na delovanje operatora na dato stanje dobija se za finalno stanje

$$\langle 1_{\rho_4 k_1+k_2+k_3}| \langle n_{\rho_3 k_3} - 1| \langle n_{\rho_2 k_2} - 1| \langle n_{\rho_1 k_1} - 1|$$

$$\sqrt{(n_{\rho_3 k_3} - 1)(n_{\rho_2 k_2} - 1)(n_{\rho_1 k_1} - 1)}$$

Smatrajući da se radi o monohromatskim fotonima(fotoni koji pripadaju istoj grani) sledi da je

$$1 \ll n \approx n_{\rho_3 k_3} \approx n_{\rho_2 k_2} \approx n_{\rho_1 k_1}$$

pa je
$$\sqrt{n_{\rho_3 k_3} \cdot n_{\rho_2 k_2}\, n_{\rho_1 k_1}} = n^{3/2}$$

Numeričke vrednosti funkcija koje ulaze u sastav amplitude verovatnoće su :

$$\phi^{(0)}_{k} \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ erg}$$

$$\beta = 10^{-13} \text{ erg} \qquad S = \frac{\phi^{(0)}_{k_1}}{4\Delta} \left(\beta_{k_2} - \phi^{(0)}_{k_2} \right)$$

$$\Delta \approx 5 \cdot 10^{-12} \text{ erg} \qquad S = -10^{-15}$$

$$S = -10^{-15} \Rightarrow |S|^2 = 10^{-30}$$

Ukupna verovatnoća za slepljivanje tri polaritona sa impulsom "K" u jedan polariton sa impulsom 3K (utrojenim impulsom) je data kao

$$n = 10^{20}\ ;\ N = 10^{+24}$$

$$M = |S|^2 \cdot n \left(\frac{n}{N}\right)^2 = 10^{-18}$$

Kako je laserom moguće postići koncentraciju polaritona oko 10^{20} a izračunata verovatnoća za navedeni proces slepljivanja polaritona iznosi 10^{-18},možemo zaključiti da na 10^{20} polaritona sa impulsom "K" dolazi oko 100 polaritona sa impulsom "3K".

-ENERGIJA U NAVEDENOJ APROKSIMACIJI-

$$E_1(k) = \frac{\tilde{\Delta} + \tilde{\alpha}_k - \varepsilon_k}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}\delta_k^2 + |\phi_k|^2}$$

$$E_1(k) = \frac{\tilde{\Delta} + \tilde{\alpha}_k - \varepsilon_k}{2} + |\phi_k| \left[1 + \frac{|\delta_k|^2}{(2|\phi_k|)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$E_1(k) \cong \frac{\tilde{\Delta} + \tilde{\alpha}_k - \varepsilon_k}{2} + |\phi_k|$$

$$E_2(k) \cong \frac{\tilde{\Delta} + \tilde{\alpha}_k - \varepsilon_k}{2} - |\phi_k|$$

ZAKLJUČAK

Rezultati ovog rada mogu se rezimirati ukratko na sledeći način:

a) unitarnom transformacijom eksitonskih i fotonskih stanja dobijen je ekvivalentni hamiltonijan sistema kristal plus EM polje u kome NEMA neodržanja kvazi čestica.

b) dijagonalizacijom kvadratnog dela ekvivalentnog hamiltonija nađeni su harmoniski spektri polaritona i to za dva slučaja,naime za slučaj kada eksitoni interaguju sa samo jednom fotonskom granom i za slučaj kada interaguju sa obe fotonske grane.

c) nađene su transformacione funkcije između eksitonskih,fotonskih i polaritonskih operatora.Ove funkcije su kud i kamo manje glomazne nego odgovarajuće funkcije u metodi Bogoljubova,a to je veoma značajno sa čisto računske tačke gledišta jer se računi svih polaritonskih karakteristika mogu izvesti brže i lakše.

d) ocenjena je verovatnoća tropolaritonske apsorpcije i pokazano je da ona pri polaritonskim koncentracijama reda 10^{-4} iznosi 10^{-18} . To znači da se na 10^{20} stvorenih polaritona stvori oko 100 sa trostrukim impulsom i energijom koji su nastali slepljivanjem u jedan.Ovaj rezultat se razlikuje od ranije dobijenih rezultata koji su pri istim uslovima davali verovatnoću reda 10^{-16}.Pošto su ovi rezultati dobijeni bez korekcija efekata neodržanja razlika u rezultatu nije neznatna,jasno je da se ovom problemu i za druge sisteme mora posvetiti mnogo više pažnje nego što mu je do sad u literaturi posvećivano.

LITERATURA

1. А.С. ДАВЫДОВ: „Теория молекулярных экситонов" НАУКА, МОСКВА, 1968.
2. В.М. АГРАНОВИЧ: „ТЕОРИЯ ЭКСИТОНОВ" НАУКА, МОСКВА 1968.
3. U.Fano Phys.Rev. 103, 1202 (1956)
4. J.J. Hopfield Phys. Rev 112, 1555 (1958)
5. В.М. АГРАНОВИЧ ЖЭТФ 37, 430 (1959)
6. H. Fröhlich Phys. Rev. 79, 845 (1950)
7. Н.Н. БОГОЛЮБОВ: ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ, КИЕВ, 1949.
8. В.М. АГРАНОВИЧ, Б.С. ТОШИЧ ЖЭТФ 53, 149 (1967)
9. Л.Н. ОВАНДЕР УФН 86, 31 (1965)