D-35

Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno Matematički fakultet
Katedra za fiziku

ADIJABATSKE INVARIJANTE

DIPLOMSKI RAD

Mentor:
Dr. Božidar S. Milić

Kandidat:
Živana Milinković-Čekić

NOVI SAD 1973

Одбрањен на ПМФ-у Нови Сад 12.VI.1973 год.
са оценом 9 (девет).

Комисија:

1) [illegible]

2) [illegible]

3) [illegible]

Zahvaljujem se Dr Božidaru Miliću,
docentu Prirodno matematičkog fakulteta u Beogradu,na pomoći oko izbora teme,na savetima i upustvima, koji su mi pomogli da realizujem ovaj rad.

SADRŽAJ

§I. Uvod

Proučavajući kretanja čestica ili sistema, može se zaključiti da gotovo uvek postoje izvesne veličine, tipa parametara, koje karakterišu kretanje i menjaju se u vremenu vrlo sporo, tako da se mogu smatrati konstantnim. Tada se mogu formirati funkcije Hamiltonijana i tih parametara, koje nisu integrali kretanja, ali zbog adijabatske, spore promene spoljnih parametara one su konstantne vrednosti. Takve veličine koje zadržavaju svoj oblik zovu se adijabatske invarijante.

U klasičnoj fizici još dosta davno zapažena je konstantnost integrala dejstva pri malim i sporim primenama spoljnih parametara, to jest bilo je poznato postojanje adijabatskih invarijanti.

U doba prelaska sa klasičn-e na kvantnu mehaniku, adijabatske invarijante dobijaju veći značaj, naročito za kvantovanje Bor-Somerfelda pri proučavanju strukture atoma vodonika/I927./

Ponovo aktuelne postaju adijabatske invarijante u doba početaka rada na fizici plazme, kada Alfen, proučavajući polarnu svetlost i kosmičke zrake, uspeva da dokaže da je orbitalni magnetni moment naelektrisanih čestica, koje rotiraju oko pravca magnetnih linija sile i u nehomogenom polju Zemlje adijabatska invarijanta/I942/.

Na konstantnosti magnetnog momenta u suštini bazira konstrukcija uredjaja za proizvodnju korisne energije pri kontrolisanim termonuklearnim reakcijama.Na pitanje o experimentalnoj proveri adijabatskih invarijanti, u ovom slučaju, medju prvima je svojim radovima odgovorio Rodinov/I957/,potvrdjujući postojanje adijabatskih invarijanti pri kretanju naelektrisane čestice izmedju magnetnih ogledala. Kalsrud/I957/ razmatra problem harmonijskog oscilatora sa malim promenama koeficijen-ta elastičnosti i pokazuje da se njegov odnos energije u frekvencije pojavljuje kao adijabatska invarijanta, što će biti dovedeno u vezu sa Bor-Somerfeldovim pravilima kvantovanja.

Uskoro posle toga Kruskal/I958/ dobija analogan rezultat za čestice koje rotiraju, a Lenard/I959/ za anharmonijski oscilator.

Izučavanje Van Alenovih pojasa u magnetnom polju Zemlje od strane Nortrapa i Telera/I96o/, dovodi do uvođenja novih invarijanti, od kojih su najznačajnije tako zvana longitudinalna adijabatska invarijanta, u slučaju kada se čestica koja rotira oko magnetne linije sile, kreće napred i nazad duž te linije i periodično se vraća u početni položaj, i tako zvana fluksna invarijanta.

Adijabatske invarijante se dovedene u vezu sa finitnošću kretanja, to jest njihovo postojanje je posledica finitnosti. Zbog toga se za niz problema postavlja pitanje da li se adijabatske invarijante održavaju ili ne, za duže vreme.
Skoro je dokazano da se u nekoliko slučajeva, pri oscilovanju naelektrisane čestice između magnetnih ogledala, adijabatske invarijante održavaju neograničeno vreme, to jest da je kretanje finitno u beskonačnom intervalu vremena.
U sadašnjem stanju dostignuta je unifikacija svih radova na adijabatskim invarijantama. Pokazalo se da ti radovi imaju jednu zajedničku suštinsku crtu- da su adijabatske invarijante povezane sa sistemom Hamiltonovih jednačina čija su rešenja periodična ili skoro periodična.

§2. Rekapitulacija Hamilton-Jakobijevog formalizma

Zakoni mehanike mogu se formulisati pomoću Lagranževe funkcije L i iz nje izvedenih Lagranževih jednačina kretanja, kada mehanički sistem opisujemo pomoću generalisanih koordinata.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad L = T - U$$

Za fizički sistem koji ima n stepeni slobode ove jednačine obrazuju sistem od n simultanih običnih diferencijalnih jednačina drugog reda u odnosu na nepoznate koordinate q_i.
Vršeći prelaz na opisivanje pomoću generalisanih koordinata i impulsa, dobijamo kao jednačine kretanja sistem od $2n$ diferencijalnih jednačina prvog reda sa $2n$ nepoznatih funkcija: $p(t)$ i $q(t)$.
To su Hamiltonove kanonske jednačine kretanja:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Veličina $H(p,t,q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ naziva se Hamiltonova funkcija, i ona kod izolovanih sistema predstavlja energiju sistema:

$$H = T + U$$

Osim od dinamičkih promenjivih q i $\dot{q}$ odnosno p i q Lagranževa odnosno Hamiltonova funkcija mogu zavisiti i od različitih parametara, to jest od veličina koje karakterišu mehaničko svojstvo sistema ili spoljašnjeg polja koje deluje na sistem.
Ako jedan takav parametar označimo sa λ, lako se vidi da postoji veza:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{(p,q)} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{(\dot{q},q)}$$

Specijalno za

$$\lambda = t \Rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{(p,q)} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{(q,\dot{q})}$$

2.I. Dejstvo kao funkcija koordinate

Hamiltonov princip može da se formuliše u obliku: $\delta S = 0$
gde je: $S = \int L dt + \text{const.}$ tako zvano Hamiltonovo dejstvo.
Drugim rečima, stvarno kretanje sistema odvija se tako da dejstvo ima stacionarnu vrednost, koja je u najvećem broju slučajeva minimum.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i = L$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i = H$$

$$dS = \sum_i p_i dq_i - Hdt$$

$$S = \int (\sum_i p_i dq_i - Hdt)$$

Ako predpostavimo da Lagranževa a sa njome i Hamiltonova funkcija ne sadrže explicitno vreme, tada se energija sistema održava:

$$H(p,q) = E = \text{const.}$$

$$S = \int \sum_i p_i dq_i - Et ,$$

pri čemu se $W = \int \sum_i p_i dq_i$ naziva redukovanim dejstvom.

2.2. Kanonska transformacija i Hamilton-Jakobijeva jednačina

Kod Lagranževih jednačina moguće je vršiti punktualne transformacije oblika $Q_i = Q_i(q,t)$ u konfiguracionom prostoru.
Hamiltonove jednačine, međutim, dopuštaju zbog ravnopravne uloge nezavisno promenjivih p i q , znatno šire klase transformacija.
Ako pri izvesnoj transformaciji starih na nove promenjive Hamiltonove kanonske jednačine kretanja zadržavaju invarijantan oblik, tada se ta transformacija naziva kanonska.
Uslov za kanonsku transformaciju dobija se ia principa najmanjeg dejstva za stare i nove promenjive:

$$\delta \int (\sum_i p_i dq_i - Hdt) = 0$$

$$\delta \int (\sum_i P_i dQ_i - H' dt) = 0$$

Principi su ekvivalentni ako se njihovi podintegralni izrazi razlikuju za totalni diferencijal proizvoljne funkcije F koordinata, impulsa i vremena. Ona se naziva generatrisa transformacije i karakteristična je za svaku kanonsku transformaciju.
Posmatrajmo slučaj kada se pri kanonskoj transformaciji dobija novi Hamiltonijan jednak nuli: $H'(Q,P,t) = 0$
Tada se kao nove kanonske promenjive dobijaju konstante kretanja:

$$P_i = -\frac{\partial H'}{\partial q_i} = 0 \implies P_i = \alpha_i = \text{const.}$$

$$Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \implies Q_i = \beta_i = \text{const.}$$

Pri toj transformaciji generatrisa ima oblik:

$$F = S(q_i, P_i, t) = S(q_i, \alpha_i, t)$$

a $$H = H(q_i, p_i, t) = H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t)$$

Novi Hamiltonijan je:

$$H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Poslednja jednačina naziva se Hamilton-Jakobijeva jednačina, koja je parcijalna diferencijalna jednačina sa nepoznatom funkcijom generatrisom S i sa nezavisno promenjivim koordinatama q_i i vremenom t. NJeno potpuno rešenje: $S = S(q_1 \ldots q_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n, t)$, obično se naziva glavna Hamiltonova funkcija, mada se u literaturi, po neki put ovaj termin koristi samo za ono specijalno opšte rešenje gornje Hamilton-Jakobijeve jednačine u kome su integracione konstante jednake početnim vrednostima generalisanih koordinata.

Ako H nije explicitna funkcija vremena H-J jednačina ima oblik:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) = 0$$

Integral te jednačine je: $S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t$

gde je:

$$\alpha_1 = H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i})$$

Funkcija W je karakteristična Hamiltonova funkcija, ona ne zavisi od vremena i dobijena je kao deo glavne Hamiltonove funkcije.

Posmatrajmo kanonsku transformaciju pri kojoj su novi impulsi konstante kretanja, pri čemu je: $\alpha_1 = H$

Ako kao generatrisu uzmemo: $W(q, P)$

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} , \qquad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$$

$$H(q_i, p_i) = H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = \alpha_1$$

$$\frac{dW}{dt} = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i = \sum_i p_i \dot{q}_i$$

$$W = \int \sum_i p_i \dot{q}_i dt = \int \sum_i p_i dq_i$$

Vidi se da se karakteristična Hamiltonova funkcija poklapa sa redukovanim dejstvom.

2.3. Metod kanonske transformacije

Postoje dva metoda primene kanonske transformacije pri rešavanju problema mehanike.

Jedan od njih se odnosi na slučaj kada Hamiltonijan sistema ostaje konstantan. U tom slučaju se transformacijom dobijaju nove koordinate koje su ciklične i tada je integracija novih Hamiltonovih jednačina trivijalna.

Drugi metod sastoji se u takvim kanonskim transformacijama, koje znače prelaz od $q(t)$ i $p(t)$ na početne $q(t_0)$ i $p(t_0)$, kada su koordinate i impulsi funkcije početnih položaja i vremena.
Taj metod je opštiji i primenjiv je kada H sadrži vreme.

Hamiltonijan je	konstantan $H(p,q) = const.$	bilo koja funkcija $H = H(q,p,t)$
Uzimamo kanonske transformacije	svi impulsi $P_i = const.$	sve koordinate i impulsi Q_i i P_i su const.
Novi Hamiltonijan	$H' = H(P_i) = \alpha_1$	$H' = 0$
Nove jednačine imaju oblik	$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = \omega_i$ $\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0$	$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0$ $\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0$
Rešenja su funkcije	$Q_i = \omega_i t + \beta_i$ $P_i = \gamma_i$	$Q_i = \beta_i$, $P_i = \gamma_i$
Generatrisa transformacije	karakteristična Hamiltonova fun. $W(q,P)$	glavna Hamiltonova funkcija $S(q,p,t)$
H-J jednačine imaju oblik	$H(q,\frac{\partial W}{\partial q}) - \alpha_1 = 0$	$H(q,\frac{\partial S}{\partial q},t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
Totalni integral sadrži	n-I konstantu, sa α_1 ima n nezavisnih $\alpha_1 \dots \alpha_n$	n nezavisnih kons. $\alpha_1 \dots \alpha_n$
Novi impulsi	$P_i = \gamma_i(\alpha_1 \dots \alpha_n)$	$P_i = \gamma_i(\alpha_1 \dots \alpha_n)$
Tot. integral kao funkcija impulsa	$W = W(q_i, \gamma_i)$	$S = S(q_i, \gamma_i, t)$
Jednačine transformacije	$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$ $Q_i = \frac{\partial W}{\partial \gamma_i} = \omega_i(\gamma_i) + \beta_i$	$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ $Q_i = \frac{\partial S}{\partial \gamma} = \beta_i$

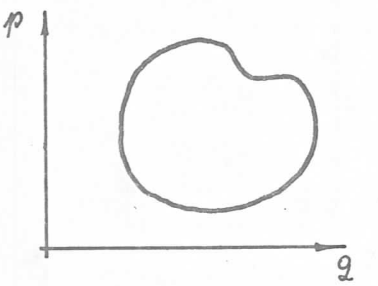
§3. Periodično kretanje

Neophodno je tačno definisati smisao termina "periodično kretanje" da bi pri proučavanju kretanja neke tačke ili sistema znali kada se taj termin može upotrebiti.

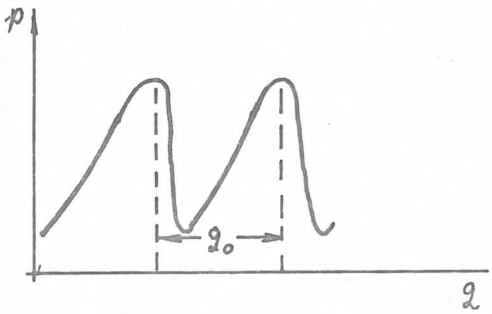
Ako posmatramo sistem sa jednim stepenom slobode, njegova fazna tačka ima dvodimenziono kretanje, to jest kreće se u faznoj ravni / p,q /.

Mogu se razlikovati dvaoblika periodičnog kretanja, od kojih se jedan naziva libracija a drugi rotacija.

Libracija ili oscilovanje je takvo kretanje kod koga su q(t) i p(t), dve periodične funkcije vremena sa istim periodima. Primer takvog kretanja je kretanje oscilatornih sistema, od kojih je najjednostavniji linearni harmonijski oscilator, kod koga fazna tačka opisuje zatvorenu trajektoriju./ Sl. 3.1./



Sl.3.1. LIBRECIJA



SL.3.2. ROTACIJA

Kretanje drugog tipa, koje se naziva rotacija, je takvo kod koga pri promeni koordinate q sistem ponovo dobija istu konfiguraciju./ q se menja pri tom za q_o /. Primer takvog kretanja je rotacija krutog tela oko nepokretne ose. Koordinata q je ovde ugao rotacije φ i njegovo povećanje za $2\pi,(q_o)$ ne menja položaj sistema, odnosno tela. Vrednost koordinate q nije ograničena i može se neograničeno menjati. U ovom slučaju fazna tačka ne opisuje zatvorenu, već otvorenu krivu a p je periodična funkcija q sa periodom q_o. /Sl.3.2./

Promatrajući primer prostog klatna može se videti da se kod istog fizičkog sistema mogu susresti obe vrste periodičnog kretanja, i libracija i rotacija. Zaista koordinata q je tada ugao otklona a energija tog sistema ima konstantnu vrednost, koja iznosi:

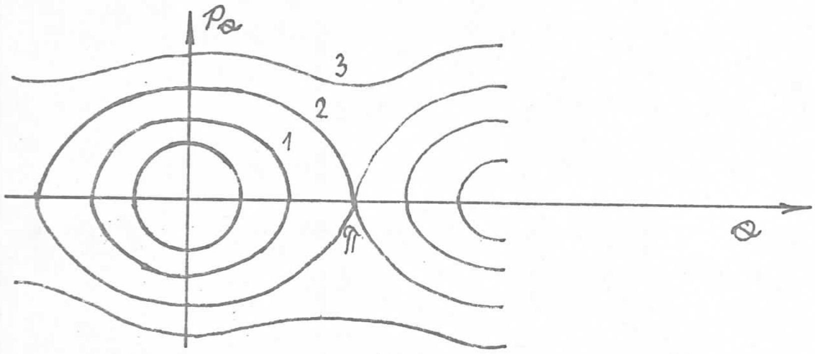
$$E=\frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$

gde je l dužina klatna.

Rešeno explicitno po p_θ :

$$p_\theta=\sqrt{2ml^2(E + mgl\cos\theta)}$$

Ovaj izraz predstavlja jednačinu fazne tačke ovog sistema.
Za E<mgl dobija se $|\theta| < \theta'$ gde je $\theta' = \arccos\left(-\frac{E}{mgl}\right)$
Tada klatno osciluje između $-\theta'$ i $+\theta'$ i to je kretanje tipa libracije.
/Trajektorija je kriva I. na sl.3.3./



Sl. 3.3.

Za E > mgl vidi se da θ neograničeno raste i dobija se periodično kretanje tipa rotacije. Tada je energija klatna dovoljno velika i onoprolazi kroz vertikalan položaj $\theta = \pi$ /kriva 3. na sl.3.3./
Za E = mgl kriva ima oblik2. na Sl.3.3.
Usistemima koji imaju više stepeni slobode, to jest kod kojih se fazna tačka kreće u višedimenzionom faznom prostoru, najjednostavnije je ograničiti se na posmatranje jednačina koje se mogu rešiti razdvajanjem promenjivih. U tom slučaju kretanje će biti periodično ako pri projekciji fazne tačke na svaku ravan q_i, p_i dobijamo periodično kretanje ranije opisanog tipa /to jest libraciju ili rptaciju/
Tada je zbog, razdvojenosti promenjivih u Hamilton-Jakobijevoj jednačini, svaki je impuls funkcija pripadajuće generalisane koordinate i n konstantni/ q_i, α_i /

$$p_i = p_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

Toje jednačina koja predstavlja projekciju trajektorije fazne tačke na ravan / q_i, p_i /
Kao primer može se uzeti harmonijski oscilator sa tri stepena slobode, sa različitim koefijentima elastičnosti. Kretanje oscilatora u ovom slučaju nije obavezno periodično pošto periodi komponentnih kretanja mogu biti nesamerljivi, pa trajektorija ima oblik Lisažuovih figura.
Takvo kretanje naziva se približno periodično.

§4. Promenljive dejstvo-ugao

Na Hamilton-jakobijevom metodu zasniva se jedan efektan način proučavanja sistema čije je kretanje periodično.
U tom metodu kao novi impulsi uzimaju se ne konstante α_i, koje ulaze u totalni integral Hamilton-Jakobijeve jednačine, već konstante J_i, koje su funkcije n nezavisnih monstanti α_i i koje se nazivaju dejstvima.
Generalisanoj koordinati odgovara veličina ω_i , koja se naziva ugaona promenjiva.
Ulogu generatrise pri ovoj kanonskoj transformaciji igra redukovano dejstvo, ili kako se još naziva karakteristična Hamiltonova funkcija:

$$W(q,J)$$

4.1. Promenljive dejstvo-ugao za dvodimenziono kretanje fazne tačke

Pomoću promenjivih dejstvo-ugao može se dati nova formulacija jednačina kretanja zatvorenog sistema.
Izvršavanjem kanonske transformacije promenjivih p i q, uzimajući kao generatrisu $W(q,J)$ uvodimo nove kanonske promenjive J i ω .
Funkcija $W(q,J)$ se određuje za datu energiju sistema i za zatvoran sistem J će biti samo funkcija energije sistema.
Zbog toga se poklapaju parcijalni izvodi:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)_E = p \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)_J$$

Dejstvo se uvodi izrazom: $J = \frac{1}{2\pi}\oint p\, dq$

Napisano u skladu sa kanonskom transformacijom: $J = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\partial W(q,J)}{\partial q}\, dq$

Za ugaonu promenjivu se dobija: $\omega = \frac{\partial W(q,J)}{\partial J}$

Funkcija generatrise $W(q,J)$ ne zavisi explicitno od vremena i nova Hamiltonova funkcija H' se poklapa sa starom H.

$$H' = E(J)$$

Hamiltonove jednačine za kanonske promenjive imaju oblik:

$$\dot{J} = 0 \qquad \dot{\omega} = \frac{dE(J)}{dJ}$$

Vidi se da je $J = \text{const.}$, a ugaona promenjiva je linearna funkcija vremena:

$$\omega = \frac{dE}{dJ}\, t + \text{const}$$

Ako je koordinata ciklična, tada je njen odgovarajući impuls konstantan.
Odgovarajuća trajektorija u ravni/q,p/ je horizontalna prava linija, koja nema jasno izražen periodični karakter. Takvokretanje možemo smatrati kao granični slučaj periodičnog, tipa rotacije, pri čemu koordinata q ima proizvoljan period./Graničan slučaj za velike energije krive 3. na slici3.3./
Kako je kod rotacije koordinata ugao, prirodno je da se kao perid tih koordinata uzme veličina 2π.
Tada se vidi da dejstvo $W(q,J)$ nije jednoznačna funkcija, po isteku svakog perioda ta se funkcija ne vraća u početni položaj, već dobija priraštaj:

$$\Delta W = 2\pi J \qquad \text{pošto je} \qquad W = \int p\, dq$$

dok je: $\Delta\omega = \Delta \frac{\partial W}{\partial J} = \frac{\partial}{\partial J}\Delta W = 2\pi$

U izrazu $J = \frac{1}{2\pi}\oint p_i\, dq_i$ integral ide od nule do 2π.

Sledi da je za sve ciklične koordinate: $J = p$
Ako bismo linearnu vezu između ω i vremena $\omega = \frac{dE}{dJ}t + const.$
Pisali u obliku: $\omega = \omega_0 t + \beta$
što je opšte rešenje u ovoj vrsti kanonskih transformacija, tada je

$$\Delta\omega = 2\pi = \omega\tau \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

gde je τ period izmene koordinate, Odatle se vidi fizički smisao veličine ω. To je frekvencija promene koordinate.
Može se zaključiti da ako p i q /ili ma koja njihova jednoznačna funkcija F/q,p// izrazimo pomoću kanonskih promenjivih, onda F ne menja svoje vredn osti pri promeni ω za 2π /pri datoj vrednosti J /. Znači da je svaka jednoznačna funkcija F/q,p/ izražena preko kanonskih promenjivih periodična funkcija promenjive ω sa periodom 2π.

4.2. Promenljive dejstvo-ugao za višedimenziono kretanje fazne tačke

Neka sistem sa više stepeni slobode vrši finitno kretanje u odnosu na sve koordinate, i predpostavimo da je moguće potpuno razdvajanje promenjivih u Hamilton-Jakobijevim jednačinama.
Redukovano dejstvo predstavlja tada sumu funkcija od kojih svaka zavisi samo od jedne koordinate: $W=\sum_i W_i(q_i)$
Generalisani impulsi su:

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i}=\frac{\partial W_i}{\partial q_i}$$

Svako S_i može da se piše:

$$S_i=\int p_i\,dq_i$$

Ove funkcije su nejednoznačne, ali pošto smo predpostavili da je kretanje finitno, priraštaj koordinate za ma koji interval vremena mora biti konačan.
Promena q_i u tom intervalu izaziva i promenu W:

$$\Delta W=\Delta W_i=2\pi J_i$$

gde je $J_i=\frac{1}{2\pi}\oint p_i\,dq_i$, promena dejstva za jedan period.
Promenjive dej stvo-ugao uvodimo preko kanonske transformacije kao i za sistem sa jednim stepenom slobode:

$$\omega_i=\frac{\partial W(q,J)}{\partial J_i}=\sum_k\frac{\partial W_k(q_k,J)}{\partial J_i}$$

Jednačine kretanja sa novim promenjivim:

$$\dot{J}_i=0\quad,\quad\dot{\omega}_i=\frac{\partial E(J)}{\partial J_i}$$

imaju integrale oblika:

$$J_i=\text{const}\quad,\quad\omega_i=\frac{\partial E(J)}{\partial J_i}\,t+\text{const}$$

Pri ukupnoj promeni napred i nazad, svake koordinate q_i menja se ω_i za 2π.

$$\Delta\omega_i=2\pi\qquad\Delta\omega_i=\oint\delta\omega_i$$

$\delta\omega_i$ je beskonačno mala promena koja odgovara beskonačno maloj promeni q_j :

$$\delta\omega_i=\frac{\partial\omega_i}{\partial q_j}\,d\,q_j$$

$$\Delta\omega_i = \oint \frac{\partial \omega_i}{\partial q_j}\, d\, q_j = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}\, d\, q_j$$

$$\Delta\omega_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_j\, dq_j$$

Pošto je: $\oint p_j\, dq_j = 2\pi J_j$

dobije se: $\Delta\omega_i = 2\pi \frac{\partial J_j}{\partial J_i} = 2\pi \delta_{ij}$

$$\Delta\omega_i = \begin{cases} 2\pi & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Može se zaključiti da veličine $\omega_i(q, J_i)$ nisu jednoznačne funkcije koordinata pošto se pri njihovom vraćanju na početnu vrednost ω_i menja za ceo umnožak od 2π.
Može se posmatrati funkcija $\omega_i(p, q)$ u faznom prostoru sistema. $J_i(p, q)$, su jednoznačne funkcije p i q i stavljajući to u $\omega_i(q_i, J_i)$ dobijamo funkciju $\omega_i(p.q)$, koja se menja za ceo umnožak od 2π, računajući i nulu, prilikom obilaska po ma kojoj zatvorenoj konturi.
Svaka jednoznačna F/p,q/ izražena pomoću kanonskih promenjivih je periodična funkcija promenjivih ω_i sa periodom 2π za svaku od njih.
Zato je možemo rastaviti u Furijeov red:

$$F = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_s=-\infty}^{\infty} A_{n_1 \cdots n_s}\, e^{i(n_1\omega_1 + \cdots n_s\omega_s)}$$

gde su $n_1 \;\ldots\; n_s$, celi brojevi.
Pošto su ugaone promenjive funkcije vremena , onda je i F zavisno od vremena

$$F = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_s=-\infty}^{\infty} A_{n_1 \cdots n_s}\, e^{it\left(n_1 \frac{\partial E}{\partial J_1} + \cdots + n_s \frac{\partial E}{\partial J_s}\right)}$$

Svaki član ove sume je periodičan sa frekvencijom:

$$n_1 \frac{\partial E}{\partial J_1} + \ldots + n_s \frac{\partial E}{\partial J_s} = \sum_i n_i \omega_i \qquad /i = 1 \ldots s/$$

Pošto u opštem slučaju sve te frekvencije nisu celi umnošci, ili racionalni delovi ma koje od njih, onda cela suma nije strogo periodična funkcija. Zbog toga kretanje sistema u opštem slučaju strogo periodično ni u celini, niti pojedinačno za ma koju koordinatu, već ga možemo smatrati za više periodično.

To znači da kroz makako dugo vreme sistem ne prolazi ponovo kroz neko početno stanje, ali za jako dugo vreme prolazi vrlo blizu tog stanja. Zato ovo kretanje nazivamo približno periodično.
Takva je funkcija već spomenuta za harmonijski oscilator sa tri stepena slobode i sa različitim koeficijentima elastičnosti.
Približno periodičnu funkciju možemo dobiti pomoću generatrise W,kada q_i izvrši potpunu promenu;pokazano je ranije da se ω poveća za 2π a karakteristična funkcija za $2\pi J_i$.
U saglasnosti sa ranijom jednačinom $\omega_k = \frac{\partial W}{\partial J_k}$ vidi se da jednačina

$$W' = W - \sum_i \omega_i J_i$$

koja je mnogo periodična definiše Ležandrovu transformaciju q, J na prom enljive q, ω.
$W'(q,\omega)$ je istog tipa kao i generatrisa $F/q,Q/$koja transformiše q i p na kanonske promenljive ω, J.
Zbog toga što konfiguracija sistema nije strogo periodične funkcija $\omega_i = \frac{\partial E}{\partial J_i}$ kretanja moraju biti nesamerljive.U protivnom posle dugog vremena konfiguracija sistema se ponavlja.
Medjutim u koliko su dve ili više ovih funkcija /za proizvoljne J_i / samerljive kažemo da u sistemu postoji degeneracija,a ako su svih s funkcija samerljive postoji potpuna degeneracija kretanja sistema Tada je kretanje strogo periodično i stvarne trajektorije /kao i projekcije fazne trajektorije na pojedine fazne ravni q_i, p_i/ svih čestica su zatvorene linije.
Postojanje degeneracije kretanja dovodi do nekoliko posledica.
Prva je smanjenje broja nezavisnih veličina / J_i /od kojih zavisi energija.
Za $n_1 \omega_1 = n_2 \omega_2; (n_1 \frac{\partial E}{\partial J_1} = n_2 \frac{\partial E}{\partial J_2})$ u energiju ulaze J_1 i J_2 u obliku zbira $n_2 J_1 + n_1 J_2$
Druga važna posledica degeneracije kretanja je uvećanje broja integrala kretanja u odnosu na nedegenerisano kretanje sa istim brojem stepeni slobode.
Ako nema degeneracije od ukupnog broja integrala kretanja jednoznačni su s,a ostali mogu da se predstave u obliku:

$$\omega_i \frac{\partial E}{\partial J_k} - \omega_k \frac{\partial E}{\partial J_i}$$

Zbog nejednoznačnosti ugaonih promenljivih ove veličine nisu jednoznačn e funkcije stanja.

Ako postoji degeneracija, izraz $\omega_i n_k - \omega_k n_i$ zbog odnosa: $n_1 \omega_1 = n_2 \omega_2$ nije jednoznačan, ali nejejednoznačnost se svodi na dodavanje celog umnoška od 2π. Zbog toga je dovoljno uzeti trigonometrijsku funkciju te veličine i dobiti novi jednoznačni integral kretanja.

Mnoge činjenice povezane sa degeneracijom, dobro se ilustruju na prim eru kretanja pod dejstvom centralnih sila $F = -\frac{k}{r^2}$ /u polju $U = -\frac{k}{r}$ /

Na to pitanje ćemo se vratiti u odeljku 5.2a.

§5.1. Adijabatske invarijante za dvodimenziono kretanje fazne tačke

Posmatrajmo sistem koji vrši konačno kretanje sajednim stepenom slobode i karakteriše se nekim parametrom λ, kojim se odredjuje svojstvo samog sistema ili spoljašnjeg polja u kome se sistem nalazi. Neka se λ menja adijabatski, tj. vrlo sporo pod uticajem spoljnih sila u toku vremena. Uslov adijabatičnosti promene λ može da se piše $\tau \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda$, što znači da se λ malo promeni za vreme perioda kretanja sistema τ. Energija ovakvog sistema, pošto on nije zatvoren, nije konstanta kretanja.

Brzina promene energije $\dot{E}$ mala je zbog spore promene parametra λ. Može se dokazati da izvesne funkcije E i λ pri kretanju ostaju konstantne i nazivaju se adijabatske invarijante.

Brzina promene energije kod sistema čiji Hamiltonijan zavisi od vremena jedino preko parametra λ:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

Pošto se sporo menja za parametar važi: $\bar{\dot{\lambda}} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \dot{\lambda}(t)\,dt \approx \dot{\lambda}$

tako da je $\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}$, gde crta označava usrednjenje po vremenu.

Pošto je, prema tome: $\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \frac{\partial H}{\partial \lambda}\,dt$ sledi: $\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \frac{\partial H}{\partial \lambda}\,dt$

Prema Hamiltonovim jednačinama: $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ i $dt = \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}$

$\tau = \int_0^{\tau} dt = \oint \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}$, gde se integracija vrši po celoj promeni koordinate za jedan perijod.

Sada se može pisati:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{\oint \frac{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}{\frac{\partial H}{\partial p}}\,dq}{\oint \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}}$$

Integracija naznačena u formuli vrši se duž fazne trajektorije pri datoj konstantnoj vrednosti λ ,i duž koje Hamiltonijan ima konstantnu vrednost E,a impuls je funkcija koordinate q i dva nezavisna konstantna parametra E i λ odnosno p/q,E, λ /.
Ako Hamiltonijan H/p,q, λ /=E diferenciramo po parametru λ :

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}+\frac{\partial H}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial \lambda}=0 \qquad \text{ili} \qquad \frac{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}{\frac{\partial H}{\partial p}}=-\frac{\partial p}{\partial \lambda}$$

Sada se može pisati:

$$\overline{\frac{dE}{dt}}=-\frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda}dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial E}dq}$$

ili

$$\oint\left(\frac{\partial p}{\partial E}\cdot\overline{\frac{\partial E}{\partial p}}+\frac{\partial p}{\partial \lambda}\cdot\frac{d\lambda}{dt}\right)dq=0$$

Ovu jednačinu definitivno možemo pisati u obliku: $\overline{\frac{dJ}{dt}}=0$

gde je $J=\frac{1}{2\pi}\oint p\,dq$

gde se integrali po trajektoriji kretanja za dato E i λ .
Vidi se da ova veličina ostaje pri sporoj promeni parametra λ konstantna,tj.ona je adijabatska invarijanta.
J je funkcija energije sistema i parametra λ .
Period kretanja sistema je: $\tau=\oint\frac{\partial p}{\partial E}dq=2\pi\frac{\partial J}{\partial E}$

U ovom slučaju,kod kretanja sa jednim stepenom slobode,fazni prostor se svodi na dvodimenonalni /p,q/ sistem i fazna trajektorija sistema koji vrši periodično kretanje je zatvorena kriva. Integral uzet duž te trajektorije je jednak površini ograničenoj tom trajektorijom.
Može se pisati: $J=-\frac{1}{2\pi}\oint q\,dp$ ili $J=\frac{1}{2\pi}\iint dp\,dq$

5.1a. Adijabatska invarijanta za linearni harmonijski oscilator

Hamiltonijan ima oblik: $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{kq^2}{2}$ gde je $k=m\omega^2$ koeficijent elastičnosti. Ako je $k=$ const. onda je H integral kretanja. Ali ako se k sporo menja sa vremenom umesto integrala kretanja sistem ima jednu adijabatsku invarijantu koju ćemo naći na sledeći način:
Jednačina Hamilton-Jakobija ima oblik:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2+\frac{kq^2}{2}+\frac{\partial S}{\partial t}=0$$

Njen integral može da se piše u obliku: $S/q,\alpha,t/=W/q,\alpha/-\alpha t$
Isključujući vreme t:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2+\frac{kq^2}{2}=\alpha$$ a integracija daje: $W=\sqrt{mk}\int dq\sqrt{\frac{2\alpha}{k}-q^2}$

$$J=\frac{1}{2\pi}\oint p\,dq=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q}dq=\sqrt{mk}\oint\sqrt{\frac{2\alpha}{k}-q^2}\,dq$$

Predpostavljajući da je: $q=\sqrt{\frac{2\alpha}{k}}\cdot\sin\varphi$ dobijamo:

$$J=\frac{2\alpha}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi$$

gde se integrali po potpunoj promeni φ od 0 do 2π

$$J=\alpha\sqrt{\frac{m}{k}}$$

a $E=\alpha=H=J\sqrt{\frac{k}{m}}$, gde je $\sqrt{\frac{k}{m}}=\omega$

Sada se može pisati da je: $E=J\cdot\omega$, odnosno $\frac{\partial H}{\partial J}=\sqrt{\frac{k}{m}}=\omega$

• • • • •

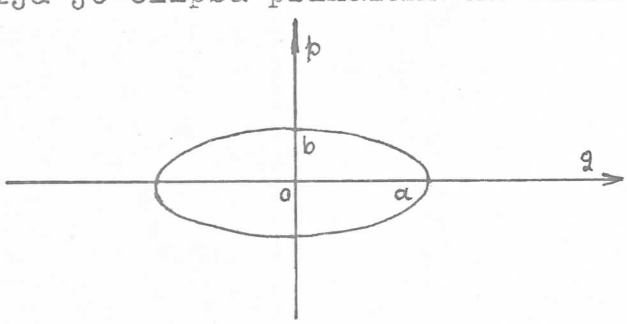
Ili preko površine koju ograničeva fazna trajektorija:

$T=\frac{1}{2}mv^2$ $\qquad U=\frac{1}{2}m\omega^2q^2$

Ako je $H=E=$const.

$$E=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2\Rightarrow\frac{q^2}{\frac{2E}{m\omega^2}}+\frac{p^2}{2mE}=1$$

Trajektorija je elipsa prikazana na slici 5.1a.1.



Polu ose elipse su: $a=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$; $b=\sqrt{2mE}$

Površina elipse je:

$$S=\pi\cdot a\cdot b=\pi\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}\cdot 2mE}=2\pi\frac{E}{\omega}$$

Sada je: $J=\frac{1}{2\pi}\cdot S=\frac{E}{\omega}$

Tako je dobijena adijabatska invarijanta,koja pokazuje da se pri sporoj promeni koeficijenta elastičnosti k energija linearnog harmonijskog oscilatora menja srazmerno frekvenciji.

5.1b.Klatno sa promenljivom dužinom

Slično se može pokazati i za prosto matematičko klatno.Pri malim amplitudama oscilovanja energija takvog klatna iznosi: $E=J\cdot\omega$
Ako se posmatra klatno koje se sastoji iz teške tačke obešene na nit , koja je provučena kroz otvor tako da se dužina klatna može menjati.Ako je ta promena dužine klatna spora, može se u trenutku vremena govoriti o definisanju perioda oscilovanja.
Promenljiva $J=\frac{E}{\omega}$ pri tome ostaje konstantna,što znači da je ona adijabatska invarijanta.

5.2.Adijabatske invarijante za višedimenziono kretanje fazne tačke

I za sisteme sa više stepeni slobode pri finitnom kretanju dejstvo je adijabatska invarijanta.
Kod ovakvog sistema može da postoji proizvoljan broj spoljnih parametara,ali se dokazivanje može radi jednostavnosti,izvesti samo za jedan od njih.
Neka se parametar $\lambda(t)$ menja sporo u vremenu.I ovaj put pri kanonskoj transformaciji starih promenljivih /p,q/ na nove J,ω kao funkciju generatrise uzimamo Hamiltonovu karakterističnu funkciju W,ili što je isto,zbog istih oblika izraza koji ih definišu,redukovano Hamiltonovo dejstvo, koje je funkcija q,J i $\lambda/t/$ odnosno $W/q,J,\lambda/t//$

Stara Hamiltonova funkcija je $H=E/J/$ali nova H^*neće se u ovom slučaju poklapati sa starom.

$$H^* = E(J) + \frac{\partial W}{\partial t} = E(J) + \Lambda \cdot \dot{\lambda} \qquad \text{gde je: } \Lambda = \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)_J$$

Hamiltonove jednačine sada daju:

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial H'}{\partial \omega_i} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega_i}\dot{\lambda}$$

Ovu jednačinu usrednjavamo po intervalu vremena,koji je velik u odnosu na perijod promene koordinate sisteme,ali je mali u odnosu na vreme u kome se parametar λ znatno promeni,pa je: $\bar{\dot{\lambda}} = \dot{\lambda}$
Dovodeći $\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega_i}$ na srednju vrednost može se smatrati da se to vrši pri stalnoj vrednosti λ i da kretanje ima približno periodičan karakter. W je nejednoznačna funkcija koordinate pošto se pri vraćanju koordinate na početnu vrednost W uveća za $2\pi J_i$.
izvod$\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)_J$ je jednoznačna funkcija zbog diferenciranja pri J_i = const.,pa član $2\pi J_i$ koji je dovodio do nejednoznačnosti tada izčezava.
Srednja vrednost $\overline{\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega_i}}$ takve funkcije postaje jednaka nuli i odatle sledi:

$$\frac{\partial J_i}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega_i}\right)_J \cdot \dot{\lambda} = 0$$

Iz prethodnog izraza sledi adijabatska invarijantnost dejstva J_i
Može se zaključiti da je osnovna osobina sistema,kod kojih se promenljive mogu razdvojiti,jednoznačnost integrala kretanja J_i čiji je broj jednak broju stepeni slobode.
U opštem slučaju kod sistema čije se promenljive nemogu da razdvoje, jednoznačni integrali kretanja se mogu pojaviti samo usled homogenosti i izotropije prostora i homogenosti vremena /E,p,M/.

5.2a.Keplerov problem dvaju tela

Posmatraćemo,zbog opštosti,prostorno kretanje,a kasnije ćemo kretanje ograničiti na ravan.
Računajući u svernim koordinatama: $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$
Kanonski impulsi imaju oblik:

$$p_r = m\dot{r}\,; \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad i \quad p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$

Hamiltonijan sistema je:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{k}{r}$$

Pri $k < 0$ orbita planete nije ograničena i kretanje nije ograničeno. Uvodeći u račun karakterističnu Hamiltonovu funkciju:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \Theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\Theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right] - \frac{k}{r} = \alpha_1 = E = \text{const}.$$

Može se pisati: $W = W_r(r) + W_\Theta + W_\varphi(\varphi)$

Stavljajući to u posebnu jednačinu vidi se da se φ pojavljuje samo u jednom članu: $\frac{1}{r^2 \sin^2\Theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2$

i jednačina za E je zadovoljena za svako φ samo pod uslovom da je:

$$\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} = \alpha_\varphi = \text{const}.$$

Sada se može pisati:

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial \Theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\Theta}\right]\right\} - \frac{k}{r} = E$$

Slično kao i malo pre vidimo da se Θ nalazi u članu:

$$\left(\frac{\partial W_\Theta}{\partial \Theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\Theta} = \alpha_\Theta^2 = \text{const}$$

i postupamo kao i malo pre sa φ da bi jednačina bila zadovoljena za bilo koje Θ.

Sada se može pisati:

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_\Theta^2}{r^2}\right) = 2m\left(E + \frac{k}{r}\right)$$

Zbog posmatranja kretanja u prostoru za tri stepena slobode imamo tri promenljiva dejstva

$$J_1 = J_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi \, d\varphi = \oint \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$J_2 = J_\Theta = \frac{1}{2\pi}\oint p_\Theta \, d\Theta = \oint \frac{\partial W_\Theta}{\partial \Theta} d\Theta$$

$$J_3 = J_r = \frac{1}{2\pi}\oint p_r \, dr = \oint \frac{\partial W_r}{\partial r} dr$$

Pomoću konstanti koje smo ranije uveli može da se piše:

$$J_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint \alpha_\varphi \, d\varphi$$

$$J_\Theta = \frac{1}{2\pi}\oint \sqrt{\alpha_\Theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\Theta}} \, d\Theta$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi}\int \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\Theta^2}{r^2}} \, dr$$

Prvi integral ako se integrali od 0 do 2π daje:

$$J_\varphi = \alpha_\varphi = p_\varphi$$

Zaključujemo da je φ ciklična koordinata Hamiltonijana.

Integral: $$J_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta$$

rešava se metodom Van Fleka i dobija se: $J_\theta = (\alpha_\theta - \alpha_\varphi)$

Integral:
$$J_r = \frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}\,dr$$
može da se piše sada u obliku:
$$J_r = \frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{(J_\theta - J_\varphi)^2}{r^2}}\cdot dr$$
Ovaj integral se može dosta jednostavno rešiti pomoću teorije reziduma, kako je to prvi predložio Somerfeld.

Dobija se: $$J_r = -(J_\theta + J_\varphi) + k\sqrt{\frac{m}{2|E|}}$$
$$H = E = -\frac{mk^2}{2(J_r + J_\theta + J_\varphi)^2}$$
Pošto se H javlja kao funkcija zbira $(J_r + J_\theta + J_\varphi)$ zaključuje se da su funkcije ω_φ, ω_θ i ω_r jednake, tj. kretanje je potpuno degenerisano, što znači i strogo periodično, a trajektorija je zatvorena kriva.

• • • • • •

Ako kretanje u polju centralnih sila $U = -\frac{k}{r}$ posmatramo u ravni i koristimo polarne koordinate / φ, r /
$$J_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} p_\varphi\, d\varphi = p_\varphi = M$$
$$J_r = \frac{1}{2\pi}\oint_{r=max}^{r=min}\sqrt{2m\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}} = -M + k\sqrt{\frac{m}{2|E|}}$$
Energija odatle ima oblik: $E = -\frac{mk^2}{2(J_r + J_\varphi)^2}$

Zbog $E < 0$ orbita je elipsa sa parametrom i excentritetom:
$$p = -\frac{M^2}{mk} = -\frac{J_\varphi^2}{mk}$$
$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2M^2E}{mk^2} = 1 - \left(\frac{J_\varphi}{J_\varphi + J_r}\right)^2$$

Zbog adijabatske invarijantnosti J_r i J_φ pri sporoj promeni koeficijenta k ili mase m dobija se još jedan integral kretanj. Očito je da excentricitet orbite ostaje konstantan a njene dimenzije su obrnuto proporcionalne m i k.

5.2b. Bor-Somerfeldovi uslovi kvantovanja

U kvantn oj mehanici promenljive dejstvo-ugao ne mogu da se koriste u tako širokom dijapazonu kao u klasičnoj. Međutim mogu se vrlo lepo primeniti u kvantnim uslovima Somerfelda, i za proučavanje kvantne teorije Borovog atoma.

Pri tome treba rešeni problem klasične mehanike vezan za kretanje tela u centralnom polju primenuti i na kretanje u atomu i dodati samo uslove kvantovanja.

Ako uslov degeneracije kretanja u polju centralnih sila napišemo u obliku:

$$\omega_\varphi - \omega_\theta = 0 \qquad ; \qquad \omega_\theta - \omega_r = 0$$

Možemo formirati funkciju:

$$F = (\omega_\varphi - \omega_\theta) J_1' + (\omega_\theta - \omega_r) J_2' + \omega_r J_3'$$

odakle se vidi:

$$\omega_1' = \omega_\varphi - \omega_\theta$$
$$\omega_2' = \omega_\theta - \omega_r$$
$$\omega_3' = \omega_r$$

Kako se i moglo očekivati nove frekvencije ω_1' i ω_2' su jednake nuli.

Uvodimo nove promenljive J_i':

$$\left.\begin{aligned} J_\varphi &= J_1' \\ J_\theta &= J_2' - J_1' \\ J_r &= J_3' - J_2' \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} J_1' &= J_\varphi \\ J_2' &= J_\varphi + J_\theta \\ J_3' &= J_\varphi + J_\theta + J_r \end{aligned}$$

Hamiltonijan tada ima oblik:

$$H = -\frac{mk^2}{2 J_3'^2}$$

Sistem promenljivih ω' i J' može se iskoristiti da se odredi položaj orbite u prostoru a pomoću J_i' može se pokazati i razmer orbite i njena forma / dužina glavne poluose i veličina excentriciteta/.

U kvantnim uslovima Somerfelda spominju se "prave" promenljive, J koje imaju vrednost nh, gde je h kvant dejstva, a n proizvoljan ceo broj./"Prava" promenljiva je ona čija sopstvena frekvencija nije degenerisana i različita je od nule. Može se zaključiti iz ranijeg da je to J_3' /

Prema tome promen ljive J su lišene ranijeg smisla, koji su imale u klasičnoj mehanici, i njihova veza sa nh može se iskoristiti za kvantovanje.

Posmatrajmo primer atoma vodonika:

$$\left.\begin{array}{l} J_3' = J_\varphi + J_\theta + J_r \\ J_3' = nh \\ k = Ze^2 \end{array}\right\}$$

Energija ima oblik: $E = -\frac{mZ^2e^2}{2n^2k^2}$ gde je n glavni kvantni broj

U slučaju apsolutno degenerisanog sistema n je jedini kvantni broj. Medjutim ako se u račun uzme precesija perihela u ravni orbite i uvede popravka,tada ugaona promenljiva ω_2' odredjuje položaj perihela.Ona se menja sa vremenom a promenljiva J_2' "prava" promenljiva pa se može pisati: $J_2' = lk$
gde je l radijalni kvantni broj.
Pošto su sada frekvencije ω_3' i ω_2' različite od nule,energija zavisi i od J_3' iod J_2' ,odnosno od n i k.
Da bi apsolutno otklonili degeneraciju može se uvesti homogeno magnetno polje,uperen o duž proizvoljne ose;na primer z.
Ravan orbite tada vrši Larmorovu precesiju oko te ose i ugao ω_1' se ravnomerno povećava.Sada J_1' postaje "pravo" promenljivo dejstvo i može se pisati: $J_1' = mh$
gde je m magnetni kvantni broj.
Sada energija zavisi od sva tri kvantna broja i kao rezultat toga dobija se cepanja spektralnih linija,dolazi do pojave poznate pod im enom normalni Zemanov efekat./Ukoliko se u obzir uzme i spin dobija se anomalni Zemanov efekat/
Proučavanje složenijih sistema nego što je vodonokov atom, pokazuje da se pojavljuju mnogi dopunski uslovi usled dopunskih sila i metod promenljivih dejstvo-ugao nije više efikasan.
Medjutim može se zaključiti da u naj jednostavnijim slučajevima /kao što je atom vodonika/korišćenje dejstava govori o tome da je u kvantnim procesima svako stanje sistema adijabatska invarijanta, pošto spore promene spoljnih parametara ne dovodi do prelaska sistema iz jednog stanja u drugo.

§6. Kretanje naelektrisanih čestica

Najširu primenu teorija adijabatskih invarijanti našla je u proučavanju naelektrisanih čestica, u elektromagnetnim poljima, čiji se parametri adijabatski menjaju. / Na primer magnetno polje sa malom prostornom nehomogenošću ili magnetno polje koje se sporo menja sa vremenom./

Pitanja vezana za karakteristike kretanja naelektrisanih čestica u ovim uslovima su od interesa u čitavom nizu grana fizike; na primeru u fizici plazme, elektronskoj i jonskoj optici, fizici jonosfere, teoriji nuklearnih akceleratora, kosmičkoj elektrodinamici i fizici Sunca.

U svim primenama ove teorije radi se o skupovima naelektrisanih čestica, i ukoliko je gustina mala mogu se u prvoj aproksimaciji zanemariti sudari između čestica, to jest izračunati karakteristike individualnog kretanja u spoljašnjem polju.

Ukoliko se naelektrisane čestice kreću pod dejstvom električnog polja koje je konstantno : $\vec{E} = const.$,
dolazi do kretanja jona i elektrona u suprotnim smerovima, zbog različitih znakova naelektrisanja, odnosno do razdvajanja naelektrisanja.

Kada polje nije konstantno, već je prosto periodično: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$
kretanje se može razložiti na dve komponente:

a. oscilatorno

b. jednako usled početne brzine

U mnogim praktičnim primerima u fizici plazme koriste se sistemi sa magnetnim poljima. Takve pojave se mogu generisati i u ogromnom rastojanju međuzvezdanog prostora.

Jedan od tipičnih primera je magnetno polje Zemlje, koje utiče na putanju kosmičkih zraka i na jonski omotač.

6.1. Kretanje naelektrisanih čestica u statičkom i uniformnom magnetnom polju

Jedn ačina kretanja čestice u ovom slučaju ima oblik:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

gde je $\vec{v}$ brzina individualne čestice.

Integracija ove jednačine daje:

$$m v_x = q y B + C_1$$

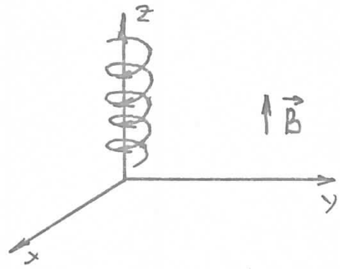
$$m v_y = -q x B + C_2$$

Kako je: $v_x^2 + v_y^2 = v_{0\perp}^2$, gde je $v_{0\perp}$ projekcija brzine na ravan oxy, tada je: $(qxB - C_2)^2 + (qyB + C_1)^2 = m^2 v_{0\perp}^2$

što je jednačina kruga sa poluprečnikom: $r_l = \frac{m v_\perp}{qB}$

što je tako zvani Larmorov radijus.

Ciklotronsku učestalost možemo definisati kao: $\omega_l = \frac{v_\perp}{r_l} = \frac{qB}{m}$



Sl.6.1.1.

Trajektorija naelektrisane čestice prikazana je na slici 6.1.1. sa koje se vidi da je na kružno kretanje superponirano jednako kretanje u pravcu magnetnih linija sile, i čestica se kreće po zavojnici.

Naelektrisanoj čestici koja kruži u magnetnom polju pridružuje se magnetni dipolni moment, definisan kao proizvod struje koja protiče kroz orbitu, površinu ograničenu orbitom.

$$\mu = I \cdot \pi \cdot r_l^2$$

Za jednu česticu: $I = \frac{q}{\tau_l}$, gde je τ_l vreme jednog obrta.

$$\tau_l = \frac{2\pi}{\omega_l} = \frac{2\pi m}{qB}$$

Može se pisati:

$$\mu = \frac{q}{\tau_l} \cdot \pi \cdot r_l^2 = \frac{q}{\frac{2\pi m}{qB}} \cdot \left(\frac{m v_\perp}{qB}\right)^2 = \frac{\frac{m v_\perp^2}{2}}{B} = \frac{W_\perp}{B}$$

gde je $W_\perp$ energija čestice koja odgovara kretanju u pravcu normalnom na $\vec{B}$. Pošto je $W_\perp = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2} m v_{0\perp}^2$

izlazi da je u slučaju homogenog magnetnog polja orbitalni magnetni moment integral kretanja. Viditćemo docnije da je u slučaju nehomogenog i nestacionarnog magnetnog polja ova veličina jedna adij abatska invarijanta.

Fluks m agnetnog polja kroz orbitu je:

$$\phi = B \cdot \pi \cdot r_l^2 = \frac{2\pi}{q^2} \mu$$

srazmeran sa magnetnim momentom.

Ako sa λ_s označimo srednji slobodni put čestice, tada se iz odnosa: $\frac{\lambda_s}{r_L}$ može odrediti uticaj magnetnog polja.

Za $\frac{\lambda_s}{r_L} \gg 1$ imamo jako polje i retku plazmu, te čestice naprave više sudara nego obrta.

Za $\frac{\lambda_s}{r_L} \ll$ imamo slabo polje i gustu plazmu, i uticaj polja je mali jer između bliskih sudara čestica pređe samo jedan deo orbite koji se može smatrati pravom linijom.

6.1. Kretanje u magnetnom polju koje nije homogeno i stacionarno

Ukoliko se čestica koja je naelektrisana nalazi u nestacionarnom i nehomogenom magnetnom polju, i ako ne deluju nikakve druge sile tada se magnetno polje može prikazati kao superpozicija homogenog i stacionarnog polja $\vec{B}_o$ i jednog proizvoljnog polja $\vec{B}'(\vec{r},t)$.
Sada jednačina kretanja čestice ima oblik:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{v}\times\vec{B}_o + e\vec{v}\times\vec{B}'(\vec{r},t)$$

Ukoliko se dopunski član $ev\times\vec{B}'(\vec{r},t)$, koji se javlja u odnosu na jednačinu kretanja za homogeno i stacionarno polje može može smatrati za malu perturbaciju, moguće je primeniti metod sukcesivnih aproksimacija, i tako naći adijabatske invarijante.
Pod tim uslovima iz jednačine se vidi da kretanje čestice vrlo malo odstupa od kretanja u homogenom i stacionarnom polju.
Ukoliko se magnetno polje $\vec{B}'$ veoma malo menja na rastojanju reda veličine Larmorovog radijusa u polju $\vec{B}_o$ i u vremenskom intervalu reda veličine ciklotronske rotacije, to jest ako su ispunjeni adijabatski uslovi:

$$\frac{r_L\left|\frac{\partial B_i}{\partial x_k}\right|}{|B_j|} \ll 1 \; ; \quad \frac{\left|\frac{dB_i}{dt}\right|}{\omega_L|B_j|} \ll 1 \qquad (i,j,k = 1,2,3)$$

ili napisani u obliku:

$$r_L\frac{d\ln B}{dt} \ll 1 \; ; \quad \frac{1}{\omega_L}\frac{d\ln B}{dx} \ll 1$$

mogu se pri proučavanju kretanja čestica dobiti izvesne konstantne veličine.

6.2a. Kretanje u nestacionarnom magnetnom polju

Većina velikih plazmenih mašina koriste vremenski promenjivo magnetno polje i zbog toga je proučavanje kretanja naelektrisanih čestica u takvim poljima vrlo zn ačajno.
Ako se magnetno polje vrlo sporo menja u odnosu na ciklotronsku učestanost, zadovoljen je uslov adijabatičnosti i magnetno polje se malo razlikuje na početku i na kraju kružne orbite.
Kretanje je tada u ravni normalnoj na magnetne linije sile, malo pertubirana ciklotronska rotacija, odnosno ima karakteristike približno periodičnog kretanja.
Zbog promene magnetnog polja dolazi do indukcije električnog i zbog toga do promene energije čestice.
Tada integraciju u Maxvelovoj jednačini:

$$\oint_L \vec{E}\, d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S}$$

vršimo po jednoj orbiti u pravcu kretanja čestice.
Promena energije čestice po jednoj orbiti iznosi: $\Delta \vec{E}_\perp = q \oint_L \vec{E}\, d\vec{l}$

Izjednačavanje ovih jednačina pokazuje da je:

$$\Delta \vec{E}_\perp = -q \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S}$$

Vršeći integraciju po površini ograničenoj orbitom izraz $\frac{dB}{dt}$ za vreme jednog obrta smatramo konstantnim i pišemo:

$$\Delta \vec{E} = q \frac{d\vec{B}}{dt} \iint d\vec{S} = q \frac{d\vec{B}}{dt} \pi r_l^2$$

Zbog togašto je τ_l malo u poređenju sa intervalom vremena u kome se B znatno promeni:

$$\frac{d\vec{E}_\perp}{\tau_l} \approx \frac{d\vec{E}_\perp}{dt}$$

Može se sada pisati:

$$\frac{d\vec{E}_\perp}{dt} = \frac{q\pi r_l^2}{\tau_l} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} = \mu \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Od ranije je poznata relacija: $\vec{E}_\perp = \mu \vec{B}$, čije diferenciranje daje:

$$\frac{d\vec{E}_\perp}{dt} = \mu \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B} \frac{d\mu}{dt}$$

Upoređivanje daje:

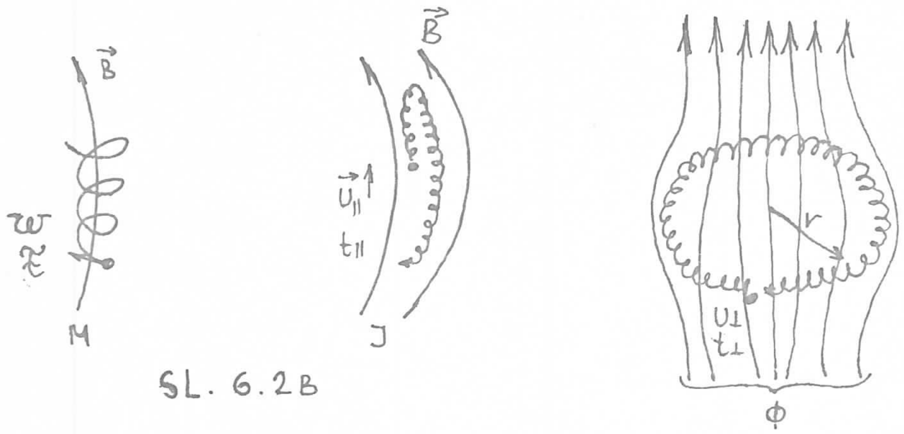
$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \Rightarrow \mu = const$$

Kao zaključak može se konstatovati da je pri sporim promenama magnetnog polja, orbitalni magnetni momenat adijabatska invarijanta. Znači da se energija čestice menja u istom odnosu kao i magnetno polje.

Fluks magnetnog polja kroz orbitu je proporcionalan magnetnom momentu, zbog čije konstantnosti i on u toku vremena zadržava stalnu vrednost. To znači da se pri povećanju polja poluprečnik orbite smanjuje da bi fluks ostao stalan.

6.2b. Kretanje u nehomogenom magnetnom polju

Poznavanje trajektorije je značajno u slučajevima kada je energija naelektrisanih čestica dovoljno velika, tako da je njihov Larmorov radijus uporediv sa karakterističnim promenama polja, kao na primer u fizici kosmičkih zraka ili u elektronskoj i jonskoj optici.
U fizici plazme čestice se najčešće kreću pod dejstvom vrlo jakog magnetnog polja i njihov Larmorov radijus je vrlo mali.
Tada nije značajno poznavanje trajektorije , a kre-tanje je vrlo složen-o.
Čestice se kreću po Larmorovim krugovima čiji se centri sporo pomeraju kako uzduž, tako i popreko magnetnih linija polja.
Takvo kretanje predstavlja superpoziciju rotacije i driftnog kretanja čiji se vodeći centar pomera.
Zbog toga takvo kretanje možemo rastaviti na tri periodična komponentna kretanja,koja čestica vrši istovremeno.
Prvo: Čestica se kreće u krug oko linija sile sa brzinom $\vec{w}$ i sa periodom $\tau = \frac{2\pi}{|\omega_L|}$ .To je ciklotronska rotacija čestice.
Drugo: Vodeći centar se slobodno kreće duž linija sile,sa brzinom $\vec{v}_{\parallel}$ i periodom $t_{\parallel}$ čestica osciluje izmedju magnetnih ogledala.
Treće: Vodeći centar se sporo pomera normalno na linije sile,pri čemu se čestica u magnetnom polju vrti po čitavoj konfiguraciji sa brzinom $v_{\perp}$ i periodom $t_{\perp}$
Obično je $\tau \ll t_{\parallel} \ll t_{\perp}$
Sa ova tri kretanja povezane su i tri adijabatske invarijante.
Na sl.6.2b. ova tri kretanja su ilustrovana.



SL. 6.2B

Neka je magnetno polje slabo perturbirano, odnosno neka je slabo nehomogeno u pravcu X-ose, a neka linije sile imaju pravac Z-ose:

Jednačina kretanja ima oblik: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = q|\vec{v}\times\vec{B}|$; $\vec{v} = \vec{U} + \vec{w}$

Odnosno: $\ddot{x} = \frac{q}{m}(B_0 + \alpha x)\dot{y}$

$$\ddot{y} = \frac{q}{m}(B_0 + \alpha y)\dot{x}$$

$$\ddot{z} = 0$$

Treća jednačina je neinteresantna jer opisuje prosto uniformno kretanje duž Z-ose.

Druge dve su: $\ddot{x} = \omega_{\ell} y + \varepsilon x\dot{y}$

$$\ddot{y} = -\omega_{\ell} x - \varepsilon x\dot{x}$$

gde je $\varepsilon = \frac{q}{m}\alpha$

Ovako dobijene jednačine su slabo nelinearne i mogu se rešiti sukcesivnim aproksimacijama po malom parametru ε / α je malo/. Pomoću uvedenog malog parametra ε mogu da se povežu Larmorovski radijus sa karakterističnim prostornim veličinama magnetnog polja ili ciklotronski period sa karakterističnim vremenskim veličinama polja.

Mnoge dinamičke veličine mogu se razložiti u red po parametru ε .

Tri napred pomenuta kretanja: sa brzinom $\vec{w}$ po Larmorovskom radijusu, i sa brzinama $\vec{U}_{\parallel}$ i $\vec{U}_{\perp}$ uzduž i popreko magnetnih linija sile pri malim perturbacijama u prvoj aproksimaciji su nezavisna i odgovaraju trima stepenima slobode.

Pogodnom kanonskom transformacijom mogu se uvesti generalisane koordinate i odgovarajući impulsi, koji karakterišu kretanje čestice: (q_3, p_3) kao kanonske promenljive povezane sa rotacijom, $(\varepsilon q_2, p_2)$ koje karakterišu brzinu $\vec{U}_{\parallel}$ i određuju položaj vodećeg centra pri kretanju uzduž magnetnih linija sile i $(\varepsilon q_1, \varepsilon p_1)$ povezane sa brzinom $\vec{U}_{\perp}$, kojom vodeći centar driftuje popreko na magnetne linije sile polja $\vec{B}$.

Postojanje triju adijabatskih invarijanti povezanih sa tri komponentna kretanja može se dokazati usrednjavanjem Hamiltonijana.
U prvom koraku ako se izvrši usrednjavanje Hamiltonijana po bržim rotacijama čestice,kao rezultat se dobija Hamiltonijan,koji opisuje kretanje sa dva stepena slobode.Oni odgovaraju uzdužnom i poprečnom driftu vodećeg centra, a u Hamiltonijanu kao parametar figuriše magnetni momenat μ .
Ako se zatim izvrši usrednjavanje po uzdužnom kretanju sistema,dobija se Hamiltonijan sa jednim stepenom slobode,koji opisuje srednji poprečni drift vodećeg centra i sadrži parametre μ i J .
I na kraju pri usrednjavanju po poprečnom driftu,kao konstanta kretanja dobija se magnetni fluks Φ obuhvaćen trajektorijom toga drifta.
Ako se uvedu oznake: $\vec{w}=\frac{d\vec{r_l}}{dt}$ i $\vec{U}=\frac{d\vec{c}}{dt}$
gde je $\vec{r_l}$ radijus orbite a $\vec{c}$ vektor položaja centra obrtanja.
$\vec{U}$ i $\vec{c}$ ne zavise od vremena.
Ako se uvedu generalisani impulsi i prostorne koordinate :
$p_k=p_k[\Theta(t),t]$ i $q_k=q_n[\Theta(t),t]$,tada je Θ povezano sa frekvencijom obrtanja,periodično zavisi od vremena i vrlo sporo se menja.
Integral dejstva tada može da se piše u obliku: $J=\oint\left[p_k\frac{\partial q_k}{\partial\Theta}\right]d\Theta$
Vreme t se može smatrati svugde gde se pojavi explicitno,kao konstantno.

$$J=\oint m\left[\vec{w}\,\frac{\partial\vec{r_l}}{\partial\Theta}\right]_t d\Theta=m\oint\vec{w}\,d\vec{r_l}=m\int_0^{\tau}w^2dt$$ pošto je $d\vec{r_l}=\left(\frac{\partial\vec{r_l}}{\partial\Theta}\right)d\Theta$

Za malu promenu $\vec{w}$ i w^2 za jedan period:

$$J\approx m\,w^2\tau\approx const.$$

gde je period obrtanja po Larmorovoj orbiti: $\tau=\frac{2\pi m}{|q|B}=\frac{2\pi}{\omega_l}$
Pošto je $\mu=\frac{m\omega_l^2}{2B}$ sledi: $\mu\approx\frac{|q|}{4\pi m}J\approx\frac{|q|w^2\tau}{4\pi}\approx const.$

Vidi se da magnetni momenat ima konstantnu vrednost.
Posmatrajmo kretanje kada se rotirajuća čestica kreće napred i nazad,duž magnetne linija sile,vraćajući se posle perioda $t_{\parallel}$ gotovo u prvobitni položaj.Drugim rečima,predpostavimo da su Larmorov radijus i period obrtanja po Larmorovskoj orbiti veoma mali u odnosu na karakteristike polja.Rastojanje između dva položaja u kojima se čestica nalazi za vreme $t_{\parallel}$ treba da bude poredka Larmorovog radijusa.

Ako μ možemo smatrati za konstantnu veličinu, pri čemu μB ima ulogu potencijalne energije, posmatramo uzdužno kretanje kao kretanje sistema sa koordinatama s i $\vec{p}_{\parallel} = m\vec{v}_{\parallel} = m(\frac{d\vec{s}}{dt})$

Očigledno je da $H_{\parallel} = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2$ treba da ima minimum za položaj u nekoj tački S na magnetnoj liniji.

Integral dejstva može da se piše u obliku:

$$J_{\parallel} = \oint [p_{\parallel} \frac{\partial s}{\partial \Theta_{\parallel}}]_t \, d\Theta_{\parallel} = m \oint v_{\parallel} \, ds \approx const$$

i naziva se longitudinalna invarijanta.

Ako u integral dejstva uvrstimo izraz : $v_{\parallel} = \frac{ds}{dt}$ dobija se:

$$J_{\parallel} = \oint p_{\parallel} \, ds = m \int^{t_{\parallel}} v_{\parallel}^2 \, dt = m \langle v_{\parallel}^2 \rangle t_{\parallel} \approx const.$$

gde je $\langle v_{\parallel}^2 \rangle$ srednja vrednost $v_{\parallel}^2$ za vreme perioda $t_{\parallel}$.

Na kraju može se videti da se pri usrednjavanju poprečnog driftnog kretanja može dobiti još jedna konstantna veličina.

To kretanje može se prikazati kao približno periodično, tako što čestica za vreme $t_{\perp}$ izvrši punu rotaciju unaokolo konfiguracije i vraća se u blizinu svoga prvobitnog položaja. Pri tome u nižem poredku po parametru ε usrednjenje poprečnog drifta može se opisati pomoću promenljivih: $\alpha = \varepsilon p_i$ i $\beta = \varepsilon q_i$.

Integral dejstva sada ima oblik: $J_{\perp} = \oint \alpha \, d\beta$

Za bilo koji vektor može da se piše: $\vec{A} = \alpha \nabla \beta + \nabla \chi$

i za $\nabla \chi = 0$ možemo uzeti da je $\vec{A}$ vektorski potencijal: $\vec{B} = rot \vec{A}$

Sada se može pisati: $J_{\perp} = \oint \vec{A} \, d\ell = \Phi \approx const.$

Znači da čestica koja se kreće periodično unaokolo konfiguracije sa brzinom $\vec{v}_{\perp}$ i periodom $t_{\perp}$, svojom trajektorijom obuhvata konstantan fluks, ako su promene magnetnog polja za period $t_{\perp}$ male.

Ako je μ konstantna veličina tada je promena $v_{\perp}$ srazmerna sa $\frac{\frac{\partial B}{\partial r}}{B}$

Ako posmatramo slučaj kada magnetno polje duž trajektorije čestice možemo aproksimativno da pišemo u obliku:

$$B(r,t) \approx B(r_0,t) \left(\frac{r_0}{r}\right)^{C_1}$$

gde je za $t=0$ i $r=r_0$, a C_1 konstantna veličina različita od nule.

Tada je $\frac{\frac{\partial B}{\partial r}}{B}$ i poprečna brzina drifta $v_{\perp}$ srazmerna sa $\frac{1}{r}$ i

$$\langle v_{\perp}^2 \rangle t_{\perp} \approx const$$

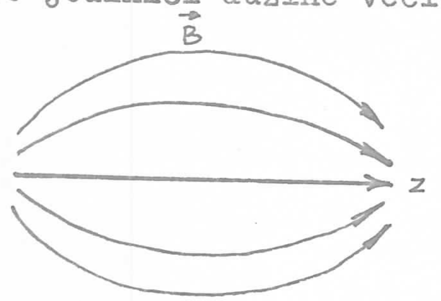
Za slabo asimetrično magnetno polje $v_{\perp}$ se ne menja mnogo sa vremenom.

Adijabatska invarijanta	Brzina	Period	Potrebni uslovi	Fizički mehanizam
magnetni moment μ	obrtanje $\vec{\omega}$	obrtanja $\tau = \frac{2\pi}{\omega_l}$ $\omega^2 \tau = const.$	$\tau \ll t$	promena poprečne energije pri smanjenju ili povećanju Larmorovskog radijusa
longitudinalna invarijanta J	uzdužnog drifta $\vec{v}_\parallel$	uzdužnog oscilovanja $t_\parallel$ $\langle v_\parallel^2 \rangle t_\parallel \approx const$	$\tau \ll t_\parallel \ll t$ $M \approx const$	promena uzdužne energije pri povećanju ili smanjenju rastojanja između magnetnih ogledala
fluksna invarijanta ϕ	poprečnog drifta $\vec{v}_\perp$	obrtanje unaokolo konfiguracije $t_\perp$ $\langle v_\perp^2 \rangle t_\perp = const$	$\tau \ll t_\parallel \ll t_\perp \ll t$ $M \approx const$ $J \approx const$	smanjenje ili povećanje orbite čestice ili poprečnih dimenzija plazme

t-period izmene polja $\vec{B}$

6.2c. Magnetno ogledalo

Da bi odredili adijabatske invarijante za konstantno magnetno polje, posmatrajmo polje oblika kao na slici 6.2c. koje se može realizovati pomoću solenoida čiji je broj namotaja po jedinici dužine veći na njegovim krajevima nego na sredini.



Takva konfiguracija magnetnog polja naziva se magnetna klopka, koja se sastoji od dva magnetna ogledala, ili magnetna boca sa zapušačima.

Posmatramo statičko magnetno polje u pravcu z-ose sa slabim perturbacijama. Komponente polja su: B_x, B_y, B_z.

Intenzitet ukupnog magnetnog polja je:

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + (B_o + B_z)^2}$$

Kod magnetnog ogledala imamo slučaj kada su promene magnetnog polja:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial y}, \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Predpostavimo da je magnetno polje, kako smo gore napisali, u pravcu z-ose malo perturbirano i tražimo odnos izmedju aksijalne / uzimamo da je magnetno polje aksijalno simetrično / i radijalne komponente polja.

$$B_r = -\frac{1}{2} r \frac{dB_z}{dz}$$

Na česticu koja kruži oko linija sile polja $\vec{B}_o$, zbog postojanja radijalne komponente magnetnog polja deluje sila u z-pravcu:

$$F_z = qu_\perp B_r,$$

tako da se dobije:

$$F_z = -\frac{1}{2} qu_\perp r \frac{dB_z}{dz}$$

gde je r radijus orbite.

Pošto je:

$$\frac{1}{2} qu_\perp r = \frac{1}{2} mu_\perp^2 \frac{qr}{mu_\perp} = W_\perp \frac{q}{mu} \quad \frac{mu_\perp}{qB} = \frac{W_\perp}{B} = \mu$$

sledi:

$$F_z = -\mu \frac{dB_z}{dz}$$

Odavde se može zaključiti zbog čega se ova konfiguracija magnetnog polja naziva magnetno ogledalo, jer ako čestica ide ka krajevima sistema, $\frac{dB_z}{dz}$ raste pošto je polje postalo jače i čestica biva vraćena prema centru.

Pri pomeranju čestice pod dejstvom sile F_z za Δz

$$\Delta W_{\parallel} = F_z\, \Delta z = -\mu \frac{dB_z}{dz} \Delta z$$

Ovakva promena energije aksijalnog kretanja povlači sa sobom i promenu energije u normalnoj ravni. Uzimajući energiju čestice kao konstantnu / u stacionarnom polju /:

$$\Delta W_{\parallel} + \Delta W_{\perp} = 0 \implies \Delta W_{\perp} = \mu \frac{dB_z}{dz} \Delta z$$

za $\Delta z \to dz$ sledi:

$$\frac{dW_{\perp}}{dz} = \mu \frac{dB_z}{dz}$$

Sa druge strane pošto je: $W_{\perp} = \mu(B_o + B_z)$ diferenciranje daje:

$$\frac{dW_{\perp}}{dz} \quad \frac{d\mu}{dz}(B_o + B_z) + \mu \frac{dB_z}{dz} \qquad /\vec{B}_o = \text{const.}/$$

Uporedjivanje daje $\frac{d\mu}{dz} = 0 \implies \mu = \text{const.}$

Magnetni dipolni moment čestice je konstantan a to znači da je i fluks magnetnog polja kroz orbitu:

$$\phi = \frac{2\pi m}{q^2} \mu = \text{const}$$

U gotovo svim eksperimentima magnetna ogledala rade sa promenljivim magnetnim poljem koje se malo promeni za vreme jednog Larmorovskog perioda.

Može se tada uvesti i longitudinalna invarijanta obrascem:

$$J = \oint_c u_{\parallel}\, ds$$

gde je c kriva po kojoj se kreće vodeći centar izmedju krajnjih tačaka S_1 i S_2, u kojima se čestica vraća nazad. ds je element putanje vodećeg centra, a u produžna komponenta brzine.

Energija čestice je :

$$W = \frac{1}{2} m u_{\parallel}^2 + \mu B \implies u_{\parallel} = \left[\frac{2}{m}(W - \mu B)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Sada je : $J = \int\limits_{S_1}^{S_2} \left[\frac{2}{m}(W - \mu B)\right]^{\frac{1}{2}} ds$

Ako gornju granicu integrala uzmeno za pokretnu, posmatramo integral:

$$J(W,s,t) = \int\limits_{S_1}^{S} \left[\frac{2}{m}(W - \mu B)\right]^{\frac{1}{2}} ds$$

treba dokazati da je $\frac{dJ}{dt} = 0$, tj.

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial W} \cdot \frac{dW}{dt} + \frac{\partial J}{\partial s}\,\frac{ds}{dt} = 0$$

Imamo posebno

$$\frac{\partial J}{\partial t} = -\int\limits_{S_1}^{S} \left[\frac{2}{m}(W - \mu B)\right]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu}{m}\,\frac{\partial B}{\partial t}\right) ds,$$

$$\frac{\partial J}{\partial W} = \frac{1}{m} \int\limits_{S_1}^{S} \left[\frac{2}{m}(W - \mu B)\right]^{-\frac{1}{2}} ds$$

$\frac{dW}{dt} = m u_\parallel \dot{u}_\parallel + \mu \frac{\partial B}{\partial t} + \mu \frac{\partial B}{\partial s}\,\frac{ds}{dt}$, pošto je $B = B(s,t)$.

$$\frac{\partial J}{\partial s} = \left[\frac{2}{m}(W - \mu B)\right]^{\frac{1}{2}} - \int\limits_{S_1}^{S} \left[\frac{2}{m}(W - \mu B)\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu}{m}\,\frac{\partial B}{\partial s}\right) ds$$

Pošto je $\frac{ds}{dt} = u_\parallel$, sledi:

$$\frac{dJ}{dt} = -\int\limits_{S_1}^{S} \left[\frac{2}{m}(W - \mu B)\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu}{m}\,\frac{\partial B}{\partial t}\right) ds \; +$$

$$+ \left[u_\parallel \dot{u}_\parallel + \frac{\mu}{m}\,\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\mu}{m}\, u_\parallel\,\frac{\partial B}{\partial s}\right] \int\limits_{S_1}^{S} \left[\frac{2}{m}(W - \mu B)\right]^{-\frac{1}{2}} ds \; +$$

$$+\left[\frac{2}{m}(W-\mu B)\right]^{\frac{1}{2}} u_{\parallel} - u_{\parallel}\int_{S_1}^{S}\left[\frac{2}{m}(W-\mu B)\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\mu}{M}\frac{\partial B}{\partial s}\right) ds$$

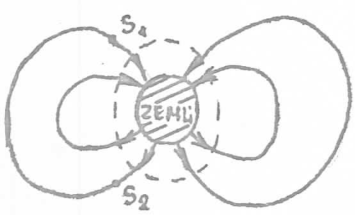
U tački $S=S_2$ kada se čestica reflektuje $u_{\parallel}=0$,

$$\frac{dJ}{dt}=-\int_{S_1}^{S_2}\left[\frac{2}{m}(W-\mu B)\right]^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu}{m}\frac{\partial B}{\partial t}\right) ds+\frac{\mu}{m}\frac{\partial B}{\partial t}\int_{S_1}^{S_2}\left[\frac{2}{m}(W-\mu B)\right]^{-\frac{1}{2}} ds$$

$\frac{\partial B}{\partial t}$ se može izvući ispred prvog integrala zbog male promene magnetnog polja u intervalu vremena, koji je potreban čestici da predje put od S_1-S_2. Sledi: $\frac{dJ}{dt}\doteq 0$, odakle se zaključuje da je J adijabatska invarijanta.

Može se pokazati da energija čestica, zahvaćenih magnetnim poljem raste, ako se krajevi ogledala sporo približavaju. Taj porast energije je osnova objašnjenja nastanka vrlo brzih čestica u kosmičkom zračenju prema jednoj od aktuelnih teorija /Fermi/.

6.2d. Kretanje naelektrisanih čestica u Van Alenovim pojasima Zemlje



Sl. 6.2d.

Magnetno polje zemlje prikazano na slici 6.2d. približnog je oblika kao i magnetno polje dipola.
Neka se vodeći centar čestice kreće duž magnetne linije sile. Oko polova magnetne linije sile su gušće, što znači da je u tim oblastima magnetno polje jače. Zbog toga u odredjenim tačkama S_1 i S_2 dolazi do refleksije naelektrisane čestice. Ovakvo oscilatorno kretanje se naziva Štermerovim oscilacijama.

Zbog zakrivljenosti magnetnih linija sile dolazi do pojave još jednog kretanja vodećeg centra /centrifugalni drift/, usled koga on prelazi sa jedne magnetne linije na drugu, tako da se čestica kreće oko Zemlje ako je pozitivna od zapada ka istoku i obrnuto ako je negativno.

Kada ne bi bilo ovog dopunskog centrifugalnog driftnog kretanja, kretanje čestice bi bilo skoro periodično.

§ 7. Zaključak

Može se zaključiti da se problem adijabatskih invarijanti može definisati sledećim redom:

1. Za sistem koji vrši periodično kretanje može se uvesti izvestan broj promenljivih dejstava J_i, koji su u neperturbiranom stanju integrali kretanja.
2. U jednačinu kretanja se uvodi dopunski parametar, koji je funkcija vremena.
3. Tada se definišu uslovi adijabatičnosti, koji dozvoljavaju takve promene dipunskog parametra, koje su beskonačno male u poredjenju sa periodom kretanja i karakterističnim veličinama sistema.

U prvoj aproksimaciji po parametru adijabatičnosti /pošto se dinamičke veličine razlažu u red po parametru ε /, mogle su se dobiti konstantne veličine, koje se u tim uslovima pojavljuju kao konstante kretanja.

Medjutim i u tačnijim analizama adijabatskih invarijanti dokazano je da se izvesne veličine pojavljuju kao invarijante sa tačnošću do članova višeg reda po parametru ε.

Za harmonijski oscilator sa sporom promenom koeficijenta elastičnosti dokazano je da se adijabatske invarijante održavaju do člana bilo kog reda. Analogne rezultate dobio je Kruskal za čestice koje izvode ciklotronsku rotaciju.

Adijabatska invarijantnost može da se naruši, na primer, pri rezonantnoj vezi izmedju Larmorovskog kretanja i uzdužnog oscilovanja. Tada se pojavljuje i veza izmedju odgovarajućih stepeni slobode, tako da se ta kretanja ne mogu proučavati kao nezavisna.

Može se zaključiti na kraju, da dobijanje adijabatskih invarijanti za odredjene sisteme, daje niz podataka o kretanju tog sistema što i predstavlja značaj ovih veličina.

LITERATURA

1. L.D.Landau-E.M.Lipšic: MEHANIKA /Beograd,1961/

2. Dr Đorđe Mušicki: UVOD U TEORIJSKU FIZIKU I /Beograd,1964/

3. Dr Đorđe Mušicki: UVOD U TEORIJSKU FIZIKU II /Beograd,1965/

4. Г. ГОЛДСТЕЙН: КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА /МОСКВА 1957/

5. ЛАНДАУ и ЛИФШИЦ: ТЕОРИЯ ПОЛЯ /МОСКВА 1962/

6. М. КРУСКАЛ: АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ /МОСКВА 1962/

7. Б. LЕНЕРТ: ДИНАМИКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ /МОСКВА 1967/

8. Dr Dobrilo Đ. Tošić: DINAMIKA NAELEKTRISANIH ČESTICA U ELEKTRIČNOM I MAGNETNOM POLJU /Beograd-Vinča,1973/

9. Dr Božidar S. Milić: UVOD U FIZIKU PLAZME /Beograd-skripta/