EINSTEINOVA TEORIJA RELATIVNOSTI
i GAUGE INVARIJANCIJA

diplomski rad

Institut za fiziku
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Novom Sadu

mentor:
dr Ištvan Bikit

student:
Anton Remeli

U Novom Sadu,
oktobar 1983.

Primedbe

(1) Pod pojmom vektora se podrazumeva veličina

$$\overline{V} = \overline{e}_t V^t + \overline{e}_x V^x + \overline{e}_y V^y + \overline{e}_z V^z .$$

Ona ima jednu vremensku i tri prostorne komponente. Skalarni proizvod je definisan sa

$$\overline{V}_\circ \overline{V} = V^\nu \overline{e}_\nu \circ \overline{e}_\mu V^\mu = V^\nu g_{\nu\mu} V^\mu = V_\mu V^\mu .$$

U ortogonalnim (lokalno-geodetskim) koordinatama $g_{\mu\nu}$ će biti:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} .$$

(2) Skup komponenti, to je V^μ definisano preko $\overline{V} = \overline{e}_\mu V^\mu$.
Skup "projekcija", to je V_μ definisano preko $V_\mu = \overline{V}_\circ \overline{e}_\mu$.
"Projekcija" je zato pod znacima navoda, što stvarna geometrijska projekcija ima metriku

$$g_{\cdot} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

, a mi radimo sa takvom projekcijom "$\circ$", koja pre nego što stvarno projektuje "." četvorni vektor $\overline{V}$, prvo ga konjugira u $\overline{V}^*$ (na takav način, da prostornu komponentu vektora preobrati u negativnu), pa ga tek onda projektuje u običnom smislu reči:

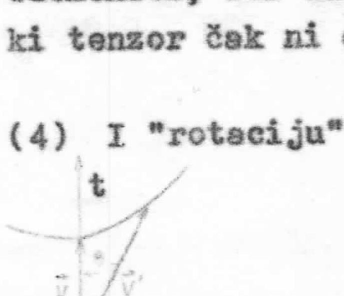
$$\overline{V}_\circ \overline{V} = \overline{V}^* . \overline{V} = (\overline{V}_t - \overline{V}_{xyz})(\overline{V}_t + \overline{V}_{xyz}) = V_t^2 - V_{xyz}^2 .$$

(3) Ni "transpozicija" nije ona uobičajena transpozicija kada se matrični elementi transponiraju okolo dijagonale matrice. Transponirana matrica je definisana sa

$$\overline{M} = \overline{g}\, M\, g \qquad \text{tj.} \qquad \overline{M}_{j} = g_{ik}\, M_{l}\, g = M .$$

Ovo je u slučaju $g = (+++)$ stvarno samo prosta transpozicija elemenata, ali za $g = (+---)$ stvar je malo složenija. Ako metrički tenzor čak ni dijagonalan nije, transpozicija je najopštija.

(4) I "rotaciju" treba shvatiti uslovno. Ograničimo li se na dvodimenzioni prostorno-vremenski dijagram, vektor $\overline{V}$ pri Lorentzovoj transformaciji prelazi u $\overline{V}' = e^{\theta}\, \overline{V}$, a to je "rotacija" za hiperbolični ugao θ . θ je parametar brzine $\mathrm{tgh}\theta = x/t = v$.



(5) Lorentzove transformacije su definisane prvenstveno između inercionih sistema. Ali kada je prostor zakrivljen, tj. kada postoji gravitaciona interakcija, tada ne postoje inercioni sistemi koji bi se kretali pravom linijom. Najravnija putanja, to je putanja slobodnog pada, tzv. geodetska putanja. Slobodno padajući koordinatni sistem je lokalno geodetski sistem. U lokalno geodetskim sistemima svi zakoni fizike važe na isti način, kao što je to slučaj sa inercionim sistemima. Lokalno geodetski sistem je direktno uopštenje pojma inercionog sistema. Između dva lokalno geodetska sistema takođe možemo definisati Lorentzove transformacije, koje su, za razliku od Lorentzovih transformacija inercionih sistema, prostorno-vremenski promenljive. To je lako uvideti, jer dva lokalno geodetska sistema stalno menjaju svoju uzajamnu brzinu.

Konkretno, razmotrimo dvodimenzioni slučaj, kada se dva sistema kreću jedan u odnosu na drugi duž x pravca. U slučaju d da se kreću konstantnom brzinom v jedan u odnosu na drugog, Lorentzove transformacije iz jednog u drugi sistem biće oblika

$$L = e^{\theta} \quad , \quad \vec{V}' = e^{\theta}\, \vec{V} \quad , \quad \mathrm{th}\,\theta = v \ .$$

Pretpostavimo, da događaj $\vec{V}$ miruje u sistemu K, i da je ovaj sistem već daleko odjezdio napred u pravcu x+ ose (pozitivan smer). I neka se tamo počne osećati dejstvo gravitacionog polja duž x ose. Gledano iz našeg sistema K', sistem K će početi da se kreće ubrzano, pa će parametar brzine takođe da raste sa promenom vremena i prostorne koordinate: $\theta = \theta(t,x)$. Lorentzove transformacije više neće biti konstantne, već će biti promenljive.

(6) U kvantnoj mehanici pod pojmom skalarnog proizvoda vektora stanja podrazumeva se integral $\int \psi^* \psi$ po celom prostoru. Mi ćemo skalarnim proizvodom zvati već i sam umnožak $\psi^* \psi$, jer u opštem slučaju ψ može biti n-komponentna funkcija

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \ , \qquad \psi^+ = (\psi_1^*, \psi_2^*, \ldots, \psi_n^*) = (\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^n)$$

koja ima formalno-vektorski karakter.

$$\rho = \psi^+ \psi = \psi^\alpha \psi_\alpha$$

([illegible])

(7) Pod kompleksnim vektorom se podrazumeva vektor u kompleksnoj ravni

$$\overline{k} = \overline{e}_i k + \overline{e}_i k$$

koji predstavlja kompleksni broj $k = Re(k) + i\,Im(k)$.
Kada se $\overline{e}_i$ i $\overline{e}_i$ poklapaju sa realnom i imaginarnom osom, tada operator adjungiranja u matričnoj reprezentaciji ima oblik

$$q_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} .$$

Kada g_{ij} deluje na k^j, daće kompleksno konjugirani vektor k_i :

$$k_i = q_{ij} k^j \qquad k^* = q k \ .$$

(8) Uniterne/gauge transformacije imaju znatnu fizičku srodnost
(8) sa Lorentzovim transformacijama. Pretpostavimo da možemo da merimo kompleksnu fazu θ vektora stanja Ψ, slično kao što možemo da merimo Brzinu/parametar brzine $\overline{\theta}$ jednog događaja $\overline{V}$ .Ako nema interakcije (elektromagnetne,slabe ili jake), faza tog vektora stanja biće ista za svaku tačku prostora i neće se menjati u vremenu. Isto tako ni parametar brzine neće se menjati u vremenu i biće isti u ma kojoj tački prostora. Ali ako postoji gravitaciona interakcija, svojstveni sistem u kojem događaj $\underline{V}$ miruje, trpeće različita ubrzanja u različitim tačkama prostora, te će parametar brzine varirati od jedne do druge tačke prostora. Isto tako, ako postoji elektromagnetna interakcija, faza θ će varirati od jedne do druge tačke prostora. Promenu faznog ugla možemo protumačiti kao posledicu razmene fotona, koji je nosilac elektromagnetne interakcije, a opisan je četvornim potencijalom A_μ. Promenu parametra brzine θ_μ možemo protumačiti kao razmenu gravitona opisanih tenzornim potencijalom $\varphi_{\mu\nu}$. Lokalno geodetska metrika $\eta_{\mu\nu} = (+---)$ se menja u metriku zakrivljenog prostora $g_{\mu\nu}$, prema formuli $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{k}\,\varphi_{\mu\nu}$ u bližoj okolini lokalno geodetskog sistema.Ali dok fotoni ne interaguju međusobno, dotle gravitoni $\varphi_{\mu\nu}$ interaguju i međusobno, pa za veće razdaljine dolazi do nelinearne superpozicije gravitona, i $g_{\mu\nu}$ više nikako neće biti moguće izraziti pomoću tenzornog potencijala $\varphi_{\mu\nu}$. Zbog toga su Einsteinove jednačine, za razliku od Maxwellovih, suštinski nelinearne. Tačka. Pri lokalnim gauge transformacijama, $e^{i\theta(x)}$, četvorni potencijal se menja u $A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + d_\mu \theta$; pri lokalnim Lorentzovim transformacijama $e^{\theta(x)}$, tenzorni potencijal se menja u $\varphi_{\mu\nu} \longrightarrow \varphi'_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} + d_\mu \theta_\nu + d_\nu \theta_\mu$.
Sličnost je poražavajuća, kako bi rekao Utiyama.[15-8.32]

P R E D G O V O R

Einstein je težio ujedinjenju fundamentalnih interakcija. Kada je postavio taj svoj program, bile su poznate gravitaciona interakcija (koju opisuje teorija gravitacije = opšta teorija relativnosti),i elektromagnetna interakcija (koja je obuhvaćena Maxwell-Lorentzovom teorijom elektromagnetnog polja). Einstein i mnogi drugi naučnici, na primer: Weyl,Kaluza,Klein i drugi, nisu uspeli da ostvare tu vrlo primamljivu ideju, a u međuvremenu otkrivene su još dve fundamentalne interakcije: slaba i jaka nuklearna interakcija. U ono doba nije bilo nikakvih izgleda za ujedinjenje sve četiri interakcije.

U poslednjih dvadeset,i deset godina došlo je do velikog napretka. Počele su da se uobličavaju gauge teorije slabe i jake interakcije. Weinberg i Salam su 1973 godine objavili ujedinjenu teoriju slabe i elektromagnetne interakcije. Kvantna hromodinamika je dala teorijski model jake interakcije. Postoje realni izgledi za ujedinjenje kvantne hromodinamike i Weinberg-Salamove teorije u veliku ujedinjenu teoriju elektromagnetne,slabe i jake interakcije. Poslednji korak u unifikacijama bilo bi još ujedinjenje sa četvrtom preostalom interakcijom, sa gravitacijom.

Specijalna teorija relativnosti je Lorentz-invarijantna teorija. Lorentzove transformacije su globalnog karaktera, i u suštini predstavljaju "rotaciju" koordinatnog sistema u prostorvremenu. Opšta teorija relativnosti je lokalno-Lorentz-invarijantna teorija. Kao što iz zahteva za lokalnom gauge invarijancijom sledi postojanje interakcije, tako i opšta teorija relativnosti implicitno sadrži u sebi gravitacionu interakciju. Između Einsteinove teorije i savremenih gauge teorija postoji izvesna srodnost.

PREGLED SADRŽAJA

U ovom radu biće prikazani matematički osnovi opšte teorije relativnosti i U(1) lokalne gauge invarijancije. Da bi analogija bila što uočljivija, lokalna gauge invarijancija biće formulisana u duhu Einsteinove teorije. Za to je potrebno uvesti pojam zakrivljenosti kompleksnog prostora.

U uobičajenim prikazima gauge teorija, afina koneksija se uvodi zahtevom da Lagranžijanska gustina bude gauge invarijantna. Ovde će afina koneksija biti uvedena pomoću zakrivljenosti kompleksnog prostora. Afina koneksija u suštini znači vezu između dva susedna vektora, jedan u tački x, drugi u tački $x + dx$. Ona nam je potrebna da bi smo gradijent/izvod vektora mogli jednoznačno definisati i u zakrivljenim prostorima. Kovarijantni izvod realnih vektora obrađen je u odeljcima $2_)$ i $3_)$, kovarijantni izvod kompleksnih vektora u paralelnim odeljcima $2^+{}_)$ i $3^+{}_)$.

U zakrivljenim prostorima dve nekolinearne translacije u opštem slučaju ne komutiraju. Zbog toga komutator komponenti kovarijantnog gradijenta nije ravan nuli, već je proporcionalan meri zakrivljenosti prostora. To je prikazano u odeljku $4_)$ za realne prostore, i u odeljku $4^+{}_)$ za kompleksne prostore.

U $5_)$ i $5^+{}_)$ konstruisane su opšte kovarijantne i gauge invarijantne funkcije dejstva, i uveden je fizički uzrok zakrivljenosti realnog i kompleksnog prostora: materija sa jedne i električni naboj sa druge strane. Varijacijom funkcije dejstva dobijamo Einsteinove jednačine gravitacionog polja i Maxwellove jednačine elektromagnetnog polja.

1) Geometrija Riemannovog prostor-vremena

Oblik klasičnih zakona mehanike zavisi od izbora koordinatnog sistema. Newtonovi zakoni važe samo za inercione sisteme, dok u proizvoljnim koordinatnim sistemima poprimaju drugu formu. Sa čisto geometrijskog gledišta, i jedan i drugi opis su potpuno ekvivalentni. Zbog toga bi dobro bilo, da oblik fizičkih zakona ne zavisi od načina opisa. Drugim rečima, poželjno je da radimo sa prostorom u kojem pojam vektora nosi objektivno značenje neovisno od izbora koordinatnog sistema.
Ovo je u stvari zahtev za opštom kovarijancijom, i ispunjava ga <u>metrički prostor</u>.[12-14.1] (referenca-poglavlje.odeljak)

Osnovna osobina jednog vektora u metričkom prostoru je ta, da skalarni proizvod ne zavisi od konkretnog izbora koordinatnog sistema. Stoga $M = V_\mu V^\mu$ spada u jednoznačno merljive veličine. (U specijalnoj teoriji relativnosti četvorna razdaljina dva događaja, $s^2 = x_\mu x^\mu = c^2t^2 - \vec{x}^2$, zadovoljava baš taj uslov.)

Kada radimo u najopštijem, zakrivljenom prostoru Riemanna (od sada i nadalje pod pojmom "prostor" podrazumeva se "prostor-vreme"), tada jedan pravi vektor ("prostorno-vremenski vektor") mora imati dve reprezentacije. Kontravarijantna reprezentacija je <u>skup komponenti</u> vektora, a kovarijantna je <u>skup projekcija</u> tog vektora u istoj bazi. I kovarijantni vektor možemo protumačiti da je skup komponenti, ali skup komponenti u drugoj <u>kovarijantnoj bazi</u>, koja je ortogonalna na prvu <u>kontravarijantnu bazu</u>.

U takvom jednom metričkom prostoru očito je, da kontra- i kovarijantne komponente jednog vektora nisu nezavisne jedna od druge. One se jednoznačno mogu preobratiti iz jedne u drugu reprezentaciju, pošto su obe reprezentacije ekvivalentne.
Prelaz iz jedne reprezentacije u drugu omogućava nam takozvani <u>metrički tenzor $g_{\mu\nu}$</u> :

<u>M:</u> $V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$ i $V^\nu = g^{\nu\lambda} V_\lambda$,

iz čega dalje direktno sledi

$$V_\mu = g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} V_\lambda \quad \text{tj.} \quad g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = I^\lambda_\mu \quad .$$

Drugim rečima, $g_{\mu\nu}$ je inverzni tenzor od $g^{\mu\nu}$.

Da bi smo Lorentzove transformacije,koje skalarni proizvod ostavljaju nepromenjenim (tj. ne narušavaju metriku prostora), mogli prikazati što prostije, tada V^{μ} obeležimo prosto sa V , a V_{μ} obeležimo sa $\bar{V}$. Lorentzovu transformaciju

$$L^{\mu}_{\ \nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \qquad \left(V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \text{ , vidi još 1o-83} \right)$$

prosto obeležimo sa L ($V' = L\,V$), a njenu transpoziciju sa $\bar{L}$.

Vektor V u jednom drugom koordinatnom sistemu (koji se translatorno kreće u odnosu na prvi) imaće oblik

$$V' = L\,V \ ,$$

a iz zahteva za invarijantnost skalarnog proizvoda sledi

<u>L:</u> $M = V_{\mu} V^{\mu} = \bar{V}\,V$

$$M = \bar{V}'V' = \overline{L\,V}\;L\,V = \bar{V}\,\bar{L}L\,V = \bar{V}\,V$$

pod uslovom $\bar{L}L = I$, tj. $\bar{L} = L^{-1}$. Kažemo da su Lorentzove transformacije ortogonalne. One u stvari predstavljaju "rotaciju" vektora u prostor-vremenu.

Za Lorentzove transformacije se podrazumeva da su globalne, to jest, da ne zavise od četvorne koordinate x^{μ} . To je moguće u nezakrivljenim Euklidovim prostorima gde je $g_{\mu\nu}$ = const .

U najopštijem slučaju zakrivljenog prostor-vremena, nikako ne možemo izbeći zavisnost $g_{\mu\nu}$ od x , te stoga i Lorentzove transformacije obavezno zavise od x . Zakoni fizike više nisu Lorentz-invarijantni, već su samo lokalno-Lorentz-invarijantni. (tj. opšte-kovarijantni). Međutim, i za $L = L(x)$ važi relacija $\bar{L}L = I$, šta znači da Lorentzove transformacije i nadalje predstavljaju "rotaciju" koordinatnog sistema,tj. vektora, koja ostavlja skalarni proizvod nepromenjenim, uz tu razliku da je svakoj tački prostora pridružena druga "rotacija".

1^{+}) Geometrija kompleksnog prostora

Osnovna merljiva veličina kvantne mehanike je gustina verovatnoće stanja, tj. skalarni prozvod vektora stanja

$\underline{L^{+}:}$ $\rho = \psi^{*}\psi = \psi'^{*}\psi'$

gde je $\psi' = U\psi$, u potpunoj analogiji sa Lorentzovom transformacijom, i analogno važi relacija

$$U^{+}U = I \ , \quad tj. \quad U^{+} = U^{-1}$$

gde oznaka $^{+}$ znači transpoziciju i kompleksno konjugiranje, i to zovemo adjungiranjem. Vidimo da U-transformacije ispunjavaju tzv. uslov unitarnosti $U^{+} = U^{-1}$. Analogno ortogonalnim transformacijama Lorentza, unitarne transformacije vrše rotaciju vektora stanja u kompleksnoj ravni.

Unitarna transformacija takođe može biti globalna, to jest nezavisna od prostorne koordinate x , a može biti i lokalna $U = U(x)$. U oba slučaja skalarna gustina verovatnoće stanja ostaje nepromenjenom.

Kvantnomehanički zahtev za jednoznačno merljivom gustinom verovatnoće zadovoljava kompleksni metrički prostor

$\underline{L^{+}:}$ $N = k^{*}k = k^{*}k^{\cdot}$.

Kao što vidimo, i kompleksni vektori k imaju dve ekvivalentne reprezentacije, a prelaz iz jedne u drugu omogućava nam tzv. operator adjungiranja q :

$\underline{M^{+}:}$ $k^{*} = q^{+}k$ i $k = q\,k^{*}$,

iz čega direktno sledi

$$k^{*} = q^{+}q\,k^{*} \quad tj. \quad q^{+}q = I \ .$$

Vidimo da je q^{+} inverzni operator od q .

(U matričnom pisanju relacija kompleksne ravni koristili smo se sledećim konvencijama:

$$k = k^{a}, \quad k^{*} = k_{a} \ , \quad q = q^{ab} \quad i \quad q^{+} = q_{ab} \ ;$$

$$k^{a} = q^{ab}\,k_{b} = q^{a1}k_{1} + q^{a2}k_{2} \ . \qquad)$$

2) Pojam kovarijantnog izvoda

U koordinatnim sistemima Euklidovog prostora sa $g_{\mu\nu}$ = const izvod skalara S daće kovarijantni vektor V_μ

S: $$\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = V_\mu \quad .$$

Ako diferenciramo proizvoljni tenzor, dobićemo nov tenzor koji je za red veći. Tako na primer izvod vektora daje tenzor drugog reda

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = T^\mu_{\ \nu} \ .$$

Ali ovakva definicija izvoda nije dovoljno opšta: U krivolinijskim koordinatama (a to posebno važi za zakrivljene Riemannove prostore, gde drugačije koordinate nisu ni moguće), obični diferencijal neće dati novi tenzor. Na primer

M: $$dV_\mu = d(g_{\mu\nu} V^\nu) = dg_{\mu\nu} V^\nu + g_{\mu\nu} dV^\nu \quad .$$

Vidimo da zavisnost metričkog tenzora od koordinata, $dg_{\mu\nu} \neq 0$, narušava metričku osobinu diferencijalno malog vektora dV_μ , tj. univerzalna relacija metričkih prostora **M** više ne važi:

$$\cancel{dV_\mu = g_{\mu\nu} dV^\nu} \quad !$$

A to znači da naš prostor ili nije metrički, pa time niti postoje pravi vektori u njemu (za koje važi pravilo vektorskog sabiranja za vektore u bliskim tačkama, tzv. afina koneksija), ili pravi vektori ipak postoje bez obzira na način opisa, te stoga uobičajena derivacija nije ispravna u generalisanim sistemima, već ju treba uopštiti. 12-14.2

To je razlog da na mesto običnog uvedemo kovarijantni diferencijal sa oznakom D . U skladu sa definicijom vektora, ova operacija treba dati

MM: $$DV_\mu = D(g_{\mu\nu} V^\nu) = g_{\mu\nu} DV^\nu , \quad \text{tj.} \quad Dg_{\mu\nu} = 0 \ .$$

Stoga kovarijantni izvod D definišemo relacijom

D: $$Dg_{\mu\nu} = 0 \quad \text{i} \quad Dg^{\mu\nu} = 0 \ .$$

2) Pojam kovarijantnog izvoda

U koordinatnim sistemima Euklidovog prostora sa $g_{\mu\nu} = \text{const}$ izvod skalara S daće kovarijantni vektor V_μ

S: $$\frac{\partial S}{\partial x_\mu} = V_\mu \quad .$$

Ako diferenciramo proizvoljni tenzor,dobićemo nov tenzor koji je za red veći. Tako na primer izvod vektora daje tenzor drugog reda

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x_\nu} = T^\mu{}_\nu \quad .$$

Ali ovakva definicija izvoda nije dovoljno opšta: u krivolinijskim koordinatama (a to posebno važi za zakrivljene Riemannove prostore, gde drugačije koordinate nisu ni moguće), obični diferencijal neće dati novi tenzor. Na primer

M: $$dV_\mu = d(g_{\mu\nu} V^\nu) = dg_{\mu\nu} V^\nu + g_{\mu\nu} dV^\nu \quad .$$

Vidimo da zavisnost metričkog tenzora od koordinata, $dg_{\mu\nu} \neq 0$, narušava metričku osobinu diferencijalno malog vektora dV_μ , tj. univerzalna relacija metričkih prostora M više ne važi:

$$\cancel{dV_\mu = g_{\mu\nu} dV^\nu} \quad !$$

A to znači da naš prostor ili nije metrički,pa time niti postoje pravi vektori u njemu (za koje važi pravilo vektorskog sabiranja za vektore u susednim tačkama, tzv. afina koneksija), ili pravi vektori ipak postoje bez obzira na način opisa, te stoga uobičajena derivacija nije ispravna u generalisanim sistemima, već ju treba uopštiti.[12-14.2]

To je razlog da na mesto običnog diferenciranja uvedemo kovarijantni izvod sa oznakom D . U skladu sa definicijom vektora, ova operacija treba dati

MM: $$DV_\mu = D(g_{\mu\nu} V^\nu) = g_{\mu\nu} DV^\nu \,, \quad \text{tj.} \quad Dg_{\mu\nu} = 0 \quad .$$

Stoga apsolutni izvod D definišemo relacijom

D: $$Dg_{\mu\nu} = 0 \quad \text{i} \quad Dg^{\mu\nu} = 0 \quad .$$

2^+) Kovarijantni izvod kompleksnog vektora

U uobičajenom kompleksnom prostoru, gde je operator adjungiranja q jednostavno definisan da vektor k kompleksno konjugira u k, nema problema sa izvodom

$\underline{S^+}$: $$\frac{\partial k}{\partial x^\mu} = W_\mu \qquad (W_\mu = k_{,\mu}) .$$

U daljem pretpostavimo da i operator adjungiranja zavisi od četvorne koordinate x. Tada će običan izvod narušiti operaciju adjungiranja $\underline{M^+}$ (koja bi morala biti opštevažeća za sve kompleksne vektore, makar oni bili i infinitezimalno mali):

$\underline{M^+}$: $$dk^+ = d(q^+ k) = dq^+ k + q^+ dk \quad .$$

To je razlog da na mesto običnog uvedemo kovarijantni izvod sa oznakom D . Ovaj izvod treba dati

$$Dk^+ = D(q^+ k) = q^+ Dk \ , \qquad \text{tj.} \qquad Dq^+ = 0 \ .$$

Znači, kovarijantni izvod kompleksnog vektora definisan je sa

$\underline{D^+}$: $$Dq^+ = 0 \qquad \text{i} \qquad Dq = 0 \quad .$$

3) Christoffelovi simboli

Pošto skalar M (na primer $M = V_\mu V^\mu$), (više) ne zavisi od izbora koordinatnog sistema i nije [illegible] metričkim tenzorom $g_{\mu\nu}$, to kovarijantni izvod skalara mora biti jednak običnom izvodu:

$$DM = dM \quad , \text{ili}$$

$$DV_\mu V^\mu + V_\mu DV^\mu = dV_\mu V^\mu + V_\mu dV^\mu \quad .$$

Ova relacija je zadovoljena ako pretpostavimo sledeću vezu između ta dva izvoda:

$\underline{C_1}$: $$DV^\mu = dV^\mu + G^\mu_{\alpha\nu} V^\alpha dx^\nu \quad ,$$

$\underline{C_2}$: $$DV_\mu = dV_\mu - G^\alpha_{\mu\nu} V_\alpha dx^\nu \quad ,$$

gde su $G^\alpha_{\mu\nu}$ diferencijalni koeficijenti, tzv. Christoffelovi simboli. $\underline{G^\alpha_{\mu\nu}\text{ nije tenzor}}$, pošto je dodat običnom diferencijalu koji prema jednačini $\underline{M}$ takođe nije tenzor. Tek zajedno (prema pravilima $\underline{C_{1,2}}$) oni će dati tenzor.12-14.2

Da bi smo pokazali da su Christoffelovi simboli simetrični po donjim indeksima, pretpostavimo da je vektor V_μ u stvari gradijent skalara S,

$$V_\mu = \frac{\partial S}{\partial x_\mu} = d_\mu S \quad .$$

Tada će biti

$$d_\nu V_\mu = \frac{\partial^2 S}{\partial x_\nu \partial x_\mu} = d_\mu V_\nu \; ,$$

i uz pomoć $\underline{C_2}$ dobićemo

$$D_\mu V_\nu - D_\nu V_\mu = (G^\alpha_{\mu\nu} - G^\alpha_{\nu\mu}) V_\alpha \quad .$$

Kako je u pravolinijskim Koordinatnim sistemima Euklidovog prostora kovarijantan izvod jednak običnom, leva strana ove jednačine biće ravna nuli.[10-85] Pošto je $D_\mu V_\nu - D_\nu V_\mu$ tenzor, on će morati i u svim proizvoljnim koordinatnim sistemima biti ravan nuli. Iz toga sledi

$$G^\alpha_{\mu\nu} = G^\alpha_{\nu\mu} \quad .$$

Za dobijanje veze između Christoffelovih simbola $G^\alpha_{\mu\nu}$, i metrike prostora $g_{\mu\nu}$, koristićemo definiciju kovarijantnog izvoda $Dg_{\mu\nu} = 0$ i pravilo $\underline{C_2}$.

$$D_\beta g_{\mu\nu} = d_\beta g_{\mu\nu} - G^\alpha_{\nu\beta} g_{\mu\alpha} - G^\alpha_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} = 0 \; ,$$

iz čega sledi

a) $$d_\beta g_{\mu\nu} = {}_\mu G_{\nu\beta} + {}_\nu G_{\mu\beta} \; , \qquad ({}_\mu G_{\nu\beta} = G^\alpha_{\nu\beta} g_{\mu\alpha}) \; .$$

Cikličnom permutacijom β, μ, ν indeksa dobijamo još sledeće dve relacije:

b) $$d_\mu g_{\nu\beta} = {}_\nu G_{\beta\mu} + {}_\beta G_{\nu\mu} \; ,$$

c) $$d_\nu g_{\beta\mu} = {}_\beta G_{\mu\nu} + {}_\mu G_{\beta\nu} \quad .$$

Načinićemo zbir b + c - a , i iskoristiti simetriju $G_{\mu\nu}$ po μ, ν indeksima. Rezultat je

$$2\, {}_\beta G_{\mu\nu} = d_\mu g_{\nu\beta} + d_\nu g_{\beta\mu} - d_\beta g_{\mu\nu} \quad .$$

Pomnožimo još sve sa $g^{\alpha\beta}$, da bi smo prvi indeks vratili na njegovo pravo mesto. Za vezu između Christoffelovih simbola i metrike konačno dobijamo

$\underline{C:}$ $$G^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (d_\mu g_{\nu\beta} + d_\nu g_{\beta\mu} - d_\beta g_{\mu\nu}) \quad .$$

$3^+)$ Četvorni potencijal A_μ

Pošto je $N = k^+ k$ skalar, njegov kovarijantni izvod mora biti jednak njegovom običnom izvodu

$$DN = dN \quad , \text{ili}$$

$$Dk^+ k + k^+ Dk = dk^+ k + k^+ dk \quad .$$

Ova relacija biće zadovoljena ako pretpostavimo sledeću vezu između ta dva izvoda:

$\underline{C_1^+}$: $$D_\mu k = d_\mu k - iA_\mu k \quad ,$$

$\underline{C_2^+}$: $$D_\mu k^+ = d_\mu k^+ + iA_\mu k^+ \quad .$$

Slično Christoffelovim simbolima koji nisu tenzori, ni koeficijenti A_μ nisu vektori kompleksnog prostora, jer to ni obični izvod $d_\mu k$ nije ($\underline{M^+}$). Ali pošto je taj obični izvod vektor metričkog prostora, tada i A_μ mora biti realni vektor.
(Napomena: iz $\underline{C_1^+}$ ne sledi $\underline{C_2^+}$, jer operator adjungiranja q^+, koji je primenljiv na levu stranu dveju jednačina nije primenljiv na sabirke desne strane pojedinačno, a nije tačna ni relacija $qi = = -iq$, koja važi u nezakrivljenim kompleksnim prostorima. Druga napomena: $ik = ki$ jer je reč o običnom množenju vektora k sa kompleksnim brojem i.)

Da bi smo dobili vezu između četvornih potencijala A_μ i metrike kompleksnog prostora q^+, počićemo od pravila $\underline{C_2^+}$ i relacije $k^+ = q^+ k$. Posle ćemo iskoristiti pravilo $\underline{C_1^+}$, i na kraju definiciju $Dq^+ = 0$.

$$\begin{aligned} D_\mu k^+ &= d_\mu k^+ + iA_\mu k^+ \\ &= d_\mu(q^+ k) + iA_\mu q^+ k = d_\mu q^+ k + q^+ d_\mu k + iA_\mu q^+ k \qquad / \pm q^+ iA_\mu k \\ &= (d_\mu q^+ + iA_\mu q^+ + q^+ iA_\mu) k + q^+ (d_\mu k - iA_\mu k) \quad . \end{aligned}$$

U isto vreme je

$D_\mu k^+ = (D_\mu q^+) k + q^+ (D_\mu k)$, te za traženu vezu sledi

$\underline{C^+}$: $$D_\mu q^+ = d_\mu q^+ + iA_\mu q^+ + q^+ iA_\mu = 0 \quad .$$

Sa ovom poslednjom relacijom možemo pokazati kako će se transformisati A_μ kada kompleksni prostor podvrgnemo unitarnoj transformaciji

$$U = e^{i\theta(x)} \ .$$

$$k \rightarrow k' = U k$$

$$k^{+} \rightarrow k^{+\prime} = U^{+} k^{+} \quad (= U^{+} q^{+} k = U^{+} q\, U^{+} U k = U^{+} q\, U^{+} \; U k = q^{+\prime} k'$$

$$q^{+} \rightarrow q^{+\prime} = U^{+} q^{+} U^{+} \ .$$

Iz zahteva da relacija $\underline{C^+}$ važi i za zarotirani sistem prim, sledi

$$d_\mu q^{+\prime} + iA'_\mu q^{+\prime} + q^{+\prime} iA'_\mu = 0$$

$$d_\mu (U^{+} q^{+} U^{+}) + iA'_\mu U^{+} q^{+} U^{+} + U^{+} q^{+} U^{+} iA'_\mu = 0$$

$$d_\mu U^{+} q^{+} U^{+} + U^{+} d_\mu q^{+} U^{+} + U^{+} q^{+} d_\mu U^{+} + iA'_\mu U^{+} q^{+} U^{+} + U^{+} q^{+} U^{+} iA'_\mu = 0$$

$$-id_\mu \theta\, U^{+} q^{+} U^{+} + U^{+} d_\mu q^{+} U^{+} - U^{+} q^{+} U^{+} id_\mu \theta + iA'_\mu U^{+} q^{+} U^{+} + U^{+} q^{+} U^{+} iA' = 0$$

$$U^{+} \left(d_\mu q^{+} + i(A'_\mu - d_\mu \theta)\, q^{+} + q^{+} i(A'_\mu - d_\mu \theta) \right) U^{+} = 0$$

izraz u zagradi biće ravan nuli jedino pod uslovom da se A_μ transformiše u

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + d_\mu \theta \ .$$

Ako imamo složenu veličinu W_μ, koja je vektor kompleksnog i vektor realnog prostora u isti mah (a to je baš $D_\mu k$), tada će kovarijantni izvod biti kombinacija kovarijantnih izvoda realnog i kompleksnog prostora:

$\underline{C''}$: $\quad D_\nu W^\mu = d_\nu W^\mu + (G^\mu_{\alpha\nu} - iA_\nu I^\mu_\alpha) W^\alpha$, i

$\underline{C''}$: $\quad D_\nu W_\mu = d_\nu W_\mu - (G^\alpha_{\mu\nu} + iA_\nu I^\alpha_\mu) W_\alpha$.

4) <u>Riemannov tenzor zakrivljenosti prostora</u>

U Euklidovom prostoru redosled derivacije nije bitan:

$$d_\mu d_\nu V^\alpha = d_\nu d_\mu V^\alpha \; .$$

Nasuprot tome, u Riemannovom prostoru $D_\mu D_\nu V^\alpha$ u opštem slučaju nije jednako $D_\nu D_\mu V^\alpha$. Zbog ove osobine, razliku ta dva izvoda uzimamo za meru zakrivljenosti prostora:

$$D_\mu D_\nu V^\alpha - D_\nu D_\mu V^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta \; .$$

Tenzor zakrivljenosti možemo izračunati iz gornje definicije uz korišćenje pravila za kovarijantan izvod $\underline{C_1}$.

$$D_\mu D_\nu V^\alpha - D_\nu D_\mu V^\alpha = D_\mu (d_\nu V^\alpha + G^\alpha_{\beta\nu} V^\beta) - D_\nu (d_\mu V^\alpha + G^\alpha_{\beta\mu} V^\beta) =$$

$$= (D_\mu d_\nu - D_\nu d_\mu) V^\alpha + (G^\alpha_{\beta\nu} D_\mu - G^\alpha_{\beta\mu} D_\nu) V^\beta + (D_\mu G^\alpha_{\beta\nu} - D_\nu G^\alpha_{\beta\mu}) V^\beta =$$

$$= (d_\mu G^\alpha_{\beta\nu} - d_\nu G^\alpha_{\beta\mu} + G^\alpha_{\varepsilon\mu} G^\varepsilon_{\beta\nu} - G^\alpha_{\varepsilon\nu} G^\varepsilon_{\beta\mu}) V^\beta == (\not{D}_\mu G^\alpha_{\beta\nu} - \not{D}_\nu G^\alpha_{\beta\mu}) V^\beta \; .$$

Ovde smo uveli skraćenu oznaku $\not{D}_\mu$,koja samo gornjem indeksu pridružuje Christoffelov simbol (ostali se ionako potiru),. Tenzor zakrivljenosti biće tako

<u>R:</u> $$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \not{D}_\mu G^\alpha_{\beta\nu} - \not{D}_\nu G^\alpha_{\beta\mu} \; .$$

Značaj Riemannovog tenzora postaje nam jasan, kada vidimo da on zavisi samo od Christoffelovih simbola i njihovih izvoda, i stoga preko njih zavisi isključivo od metričkog tenzora $g_{\mu\nu}$ i njegovih izvoda, tj.. <u>$R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ zavisi samo od osobina metričkog polja</u>.

U Euklidovom prostoru sve komponente $g_{\mu\nu}$ mogu biti transformisane u konstante (pravolinijske koordinate), Christoffelovi simboli će iščeznuti za ceo prostor, te će stoga i Riemannov tenzor biti identički ravan nuli $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0$. Kako je reč o tenzorskoj jednačini, ona će važiti i za proizvoljne krivolinijske koordinatne sisteme Euklidovog prostora.

Nasuprot tome, u zakrivljenim Riemannovim prostorima $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ nikako neće nestati, ma kako birali koordinatni sistem (jer nije moguće konstruisati ni jedan pravolinijski koordinatni sistem), pa je Riemannov tenzor objektivna mera zakrivljenosti prostora.

Kontrakcijom Riemannovog tenzora dobijamo takozvani Riccijev simetrični tenzor

<u>RS:</u> $$R^\alpha_{\beta\mu\alpha} = R_{\beta\mu} = R_{\mu\beta} \; .$$

Kontrahirajući ga dalje sa metričkim tenzorom, dobijamo invarijantu zakrivljenosti

<u>RI:</u> $$R = R_{\beta\mu} \, g^{\beta\mu} \; .$$

4^{+}) Tenzor zakrivljenosti kompleksnog prostora

U slučaju obične kompleksne ravni redosled derivacije nije bitan:

$$d_\mu d_\nu k = d_\nu d_\mu k \quad .$$

Međutim, u slučaju da je svakoj tački četvornog prostora pridružena kompleksna ravan sa drugom zakrivljenošću: $q = q(x)$, tada $D_\mu D_\nu k$ neće više biti jednako $D_\nu D_\mu k$. Razliku ta dva izvoda možemo uzeti za meru zakrivljenosti kompleksnog prostora:

$$D_\mu D_\nu k - D_\nu D_\mu k = F_{\mu\nu} k \quad .$$

Ovaj tenzor možemo izračunati iz gornje definicije, koristeći pravila kovarijantnog izvoda $\underline{C_1^+}$ i $\underline{C_2''}$.

$$D_\mu D_\nu k - D_\nu D_\mu k = D_\mu (d_\nu k - iA_\nu k) - D_\mu (d_\nu k - iA_\nu k) =$$

$$= (D_\mu d_\nu - D_\nu d_\mu) k - i(A_\nu D_\mu - A_\mu D_\nu) k - i(D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu) k =$$

$$= -i(D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu) k = -i(d_\mu A_\nu - d_\nu A_\mu) k \quad , \quad \text{tj.}$$

$\underline{R^+:}$
$$F_{\mu\nu} = -i(d_\mu A_\nu - d_\nu A_\mu) \quad .$$

Vidimo da je zakrivljenost kompleksnog prostora čisto imaginarna, da zavisi od prvih izvoda potencijala, i da nije uslovljena zakrivljenošću realnog prostora ($D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = d_\mu A_\nu - d_\nu A_\mu$) .

Za kompleksne prostore sa $q = \text{const.}$ A_μ će iščeznuti. Zakrivljenost kompleksnog prostora identički će biti ravna nuli, i takvom će ostati i za proizvoljne koordinatne sisteme istog tog prostora.

U slučaju kada q nije konstanta i $A_\mu = A_\mu(x)$, zakrivljenost kompleksnog prostora različita je od nule, nikako se ne može ukloniti, i ista je za sve reprezentacije tog prostora. Unitarne transformacije ju ostavljaju nepromenjenom, jer

$$d_\mu A'_\nu - d_\nu A'_\mu = d_\mu A_\nu + d_\mu d_\nu \theta - d_\nu A_\mu - d_\nu d_\mu \theta = d_\mu A_\nu - d_\nu A_\mu \quad .$$

Iz ovog vidimo da je $F_{\mu\nu}$ objektivna mera zakrivljenosti kompleksnog prostora.

Simetrični tenzor daje kombinacija

$\underline{RS^+:}$
$$F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\ \nu} = F_{\mu\nu} \quad ,$$

invarijantu zakrivljenosti daće

$\underline{RI^+:}$
$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F \quad .$$

5) Einsteinove jednačine gravitacionog polja

Dosadašnjim čisto geometrijskim razmatranjima sada ćemo dati fizičku sadržinu. U mernom sistemu $c = \hbar = 1$, brzina i dejstvo su bezdimenzione veličine. Prostor i vreme imaju dimenzije dužine L, pa iz toga sledi da impuls i energija (masa) imaju dimenzije L^{-1} (da bi dejstvo bilo bezdimenziono). Sila ima dimenzije L^{-2}, električni naboj e je bezdimenziona veličina, te stoga jačina elektromagnetnog polja takođe ima dimenzije L^{-2}.

Jednačine gravitacionog polja izvešćemo iz principa najmanjeg dejstva. Pošto izvorom gravitacionog polja smatramo materiju, postavićemo zahtev da varijacija dejstva gravitacionog polja S_g i dejstva materije S_m bude ravna nuli: 10-95

$$\delta(S_g + S_m) = 0 \quad .$$

Integral dejstva gravitacionog polja trebamo konstruisati iz opšte-kovarijantnih elemenata (jer će tada i jednačine kretanja i jednačine polja biti opšte-kovarijantne), takvim, da bude skalar (sve do sada poznate funkcije dejstva su bile skalari). Funkcije oblika

$$\oint R_{\beta\mu}\, dS^{\beta\mu} \qquad \text{i} \qquad \oint G^{\alpha}_{\mu\alpha}\, dV^{\mu}$$

otpadaju, jer je varijacija na granicama oblasti ravna nuli. Izraz

$$\oint G^{\alpha}_{\mu\alpha}\, dx^{\mu}$$

bi mogao doći u obzir, ali nije i opšte-kovarijantan (Christoffelovi simboli nisu tenzori). Jedina mogućnost koja nam preostaje to je integral 10-93

$$-1/k \oint R\, dW \quad ,$$

sa $\quad dW = \sqrt{-g}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{-g}\, dw$

(g je determinanta metričkog tenzora, k je konstanta gravitacije i ima dimenzije L^2).

Dok za nalaženje jednačina kretanja variramo samo trajektorije (ili svojstvene funkcije $\psi(x)$ u kvantnoj mehanici), a polje smatramo unapred određenim (time pretpostavljamo da čestica svojim kretanjem samo neznatno utiče na polje), dotle za nalaženje jednačina polja treba varirati samo polje. 10-30

Varijacija S_g svodi se na varijaciju $R\sqrt{-g}$, šta daje

$$\delta(R_{\beta\mu} g^{\beta\mu}\sqrt{-g}) = \delta R_{\beta\mu} \; g^{\beta\mu}\sqrt{-g} + R_{\beta\mu}\,\delta g^{\beta\mu}\sqrt{-g} + R_{\beta\mu} g^{\beta\mu}\,\delta\sqrt{-g} \; .$$

Prvi član pri integraciji otpada jer

$$\delta R_{\beta\mu} \; g^{\beta\mu} = \delta(D_\mu G^\alpha_{\beta\alpha} - D_\alpha G^\alpha_{\beta\mu}) \, g^{\beta\mu}$$

u lokalno-geodetskim oblastima ($d_\nu g^{\beta\mu} = 0$, $G^\alpha_{\beta\mu} = 0$, $D_\mu = d_\mu$)
prelazi u

$$\delta(d_\mu G^\alpha_{\beta\alpha} - d_\alpha G^\alpha_{\beta\mu}) \, g^{\beta\mu} = d_\alpha (\delta G^\mu_{\beta\mu} \, g^{\beta\alpha} - G^\alpha_{\beta\mu} \, g^{\beta\mu}) = d_\alpha Z^\alpha \; .$$

Pri integraciji ove četvorne divergencije, možemo primeniti Gaussovu transformaciju u površinski integral lokalne oblasti ΔW. Zbir tih lokalnih površinskih integrala se unutar oblasti W uzajamno potire, a varijacija rezultujućeg integrala na granicama oblasti ravna je nuli.[10-95 , 11-12.4]

Uz $\delta\sqrt{-g} = -1/2 \sqrt{-g} \, g_{\beta\mu} \, \delta g^{\beta\mu}$ za varijaciju S_g konačno dobijamo

$$\delta S_g = -1/k \int \sqrt{-g} \; (R_{\beta\mu} - 1/2 \, g_{\beta\mu} R) \; \delta g^{\beta\mu} \, dw \; .$$

Funkcija dejstva materije biće integral $S_m = \int \rho \, dW$, gde je $\rho(x)$ gustina sveukupne energije/materije. (ref. 14) Varijacija po $g^{\beta\mu}$ će dati

$$\delta S_m = \int \sqrt{-g} \;\; T_{\beta\mu} \, \delta g^{\beta\mu} \; dw \qquad \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\rho)}{\partial g^{\beta\mu}} \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{-g} \, T_{\beta\mu} \right) .$$

$T_{\beta\mu}$ je po definiciji tenzor gustine energije-impulsa,[11] a iz zahteva da ukupna varijacija bude ravna nuli, za jednačine gravitacionog polja dobijamo

$$R_{\beta\mu} - 1/2 \, g_{\beta\mu} R = k \, T_{\beta\mu} \; .$$

5$^+$) Maxwellove jednačine elektromagnetnog polja

U opštoj teoriji relativnosti zvuči malo čudno, što gravitaciju zamenjujemo zakrivljenošću prostora. Ali to je zbog toga, što je Newtonova teorija aproksimativna, pa nam daje pogrešnu predstavu o tome šta je gravitacija. Maxwellova elektrodinamika je od samog početka bila egzaktna: od samog početka koristila je tenzor zakrivljenosti kompleksnog prostora, naravno pod drugim imenom, nazivajući ga jačinom elektromagnetnog polja. Redefinišimo A_μ u eA_μ, $F_{\mu\nu}$ u $-ieF_{\mu\nu}$, pa će sada A_μ i $F_{\mu\nu}$ tačno da se poklapaju sa uobičajenim četvornim potencijalom i tenzorom jačine elektromagnetnog polja.

Maxwellove jednačine dobićemo iz varijacionog principa, zahtevajući da integral dejstva bude opšte kovarijantan i gauge invarijantan. Pored člana sa invarijantom zakrivljenosti $\int F\, dW$, redef. figurisaće i

$$e \int A\, dx \;;$$

jer za razliku od Christoffelovih simbola koji nisu tenzori, A_μ je tenzor, i mada nije ujedno i vektor kompleksnog prostora, varijacija njegovog integrala biće gauge invarijantna usled

$$\delta \int d_\mu \theta\, dx^\mu = \delta \int d\theta = 0 \;.$$

Preko ovog člana ćemo uvesti izvor elektromagnetnog polja, skalarni naboj Q , definišući dejstvo naelektrisanja sa

$$S_Q = e\, Q \int A_\mu\, dx^\mu \;.$$

e je konstanta elektromagnetne interakcije, analogno gravitacionoj konstanti k . Naelektrisanje Q , koje je u sistemu mirovanja dato preko gustine naelektrisanja $Q = \int_I \rho\, dV$,

u nekom drugom referentnom sistemu imaće oblik

$$\int \rho\, dV = \int j^\nu dV_\nu \;. \qquad 10\text{-}29$$

j^ν je gustina struje. Preko nje izražen, integral S_Q biće:

$$S_Q = e \int j^\nu dV_\nu \int A_\mu dx^\mu = e \int A_\mu j^\mu dW \qquad (dV_\nu dx^\mu = I^\mu_\nu dW).$$

Za funkciju dejstva konačno možemo napisati

$$S = \int (eA_\mu j^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})\, dW \;,$$

i njena varijacija po potencijalima daće

$$\delta S = \int (ej^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu})\, dW = \int (ej^\mu \delta A_\mu + F^{\mu\nu} \delta D_\nu A_\mu)\, dW$$

iz kojeg uz primenu parcijalne integracije u lokalno-geodetskim sistemima ($D_\nu \rightarrow d_\nu$), sledi

$$\delta S = \int (ej^\mu - D_\nu F^{\mu\nu})\, \delta A_\mu\, dW = 0 \;, \quad \text{tojest:} \quad D_\nu F^{\mu\nu} = e\, j^\mu \;.$$

Ovim smo dobili Maxwellove jednačine elektromagnetnog polja. Izražene su u opšte-kovarijantnom obliku. U ovom obliku nisu ni one rešive, jer zahtevaju poznavanje metrike prostora . Metriku bi smo dobili ako bi rešili Einsteinove jednačine gravitacionog polja. Ove jednačine postaju linearne diferencijalne jednačine za slučaj slabih elektromagnetnih polja čija gustina energije ne menja zakrivljenost prostora, a u nezakrivljenim prostorima prelaze u proste linearne diferencijalne jednačine.

Z A K L J U Č A K

Paralelnim prikazom opště kovarijantne i lokalno gauge invarijantne "logike", neposredno vidimo sličnosti između ove dve oblasti, ali isto tako u samom korenu uočavamo i razlike između gravitacione i elektromagnetne interakcije:

- Prva razlika izvire iz činjenice da je gauge invarijancija pojam kvantne mehanike, tj. elektromagnetna, slaba i jaka interakcija su u svom osnovu kvantni fenomeni, dok pojam opšte kovarijancije pripada isključivo klasičnoj fizici. Usled toga metrika, kovarijantni izvod, i tenzor zakrivljenosti nose različito fizičko značenje u ove dve oblasti. Šematski prikazano

	GAUGE TEORIJE	GRAVITACIJA	FIZIČKO ZNAČENJE: GAUGE TEOR.	FIZIČKO ZNAČENJE: GRAVITACIJA
kompleksna, nefizička oblast	oblast "metrika"			
realna, fizički merljiva oblast	kovar. izvod	metrika	EM-potencijal	gravitacioni "potencijal"
	"zakrivljenost"	kovar. izvod	EM-sila	"sila" gravitacije
		zakrivljenost		

Mada su gauge teorije i gravitacija slične po tome da se pogodnim izborom gaugea i pogodnim izborom koordinatnog sistema, koeficijenti u kovarijantnim izvodima, A_μ i $G^\alpha_{\mu\nu}$, mogu anulirati, njihovo fizičko značenje je sasvim različito:

a) sa $A_\mu = 0$ mi smo samo promenili potencijal za konstantan iznos, ali elektromagnatna sila ("zakrivljenost" kompleksnog prostora) ostala je nepromenjena:

$$F_{\mu\nu} = d_\mu A_\nu - d_\nu A_\mu \,.$$

b) sa $G^\alpha_{\beta\mu} = 0$ mi smo elimininirali silu (!) gravitacije (slobodno padajući lift), pri čemu je zakrivljenost prostora ostala nepromenjena:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = d_\mu G^\alpha_{\beta\nu} - d_\nu G^\alpha_{\beta\mu} \,.$$

- Na ovo se nadograđuje druga osnovna razlika između gravitacije i gauge invarijantnih teorija. Dok tenzor zakrivljenosti kompleksnih prostora (koji je nezavisan od izbora gaugea) zavisi od prvih izvoda potencijala, dotle Riemannov tenzor (koji je nezavisan od izbora koordinatnog sistema) zavisi od drugih izvoda metrike. Ako bi smo sada u konstrukciji Lagranžijana, po ugledu na $F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, koristili invarijante $R' = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ ili $R'' = R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}$, tada bi pri varijaciji dejstva dobili takve jednačine polja, koje sadrže i četvrte izvode metričkog tenzora. A to nije poželjno, pošto su svi dosadašnji zakoni fizike prvog i najviše drugog reda. Ako bi jednačine bile četvrtog reda, tada bi za opis evolucije metrike, pored početnih i graničnih uslova, morali zadati i početne vrednosti drugih i trećih izvoda metrike.[13-3.4]

A baš ta činjenica, što invarijantu zakrivljenosti kompleksnih prostora možemo konstruisati isključivo takvom da bude najmanje kvadratna po $F_{\mu\nu}$, daje osnovnu karakteristiku elektromagnetnom polju. Dobro bi bilo da je i Lagranžijan gravitacionog polja na neki način kvadratičan, jer iz takvog Lagranžijana direktno sledi linearnost jednačina polja, a iz toga princip superpozicije ("zbir dva rešenja je takođe rešenje jednačine"[10-27]) koji je fundamentalni princip kvantne mehanike. Tu leži osnovni razlog poteškoćama u kvantizaciji teorije gravitacije, pošto je ona, za razliku od gauge teorija, suštinski nelinearna.

Ali pri vrlo visokim energijama (10^{19}GeV), i kod gravitacione interakcije morala bi doći do izražaja fundamentalna kvantna ossobina ...

Preostaje nam jedino da se nadamo u uspešnost supersimetričnih gauge teorija, kod kojih se interna gauge simetrija meša sa prostorno-vremenskom simetrijom, ali:

"We shall come back
to this point of view later."

A. Einstein, The Meaning of Relativity
(fifth ed. p. 56)

R E F E R E N C E

GEOMETRIJA

1.N.V.Efimov Higher Geometry /Mir,Moskva 1980
2.Jànossy,Tasnàdi Vektorszàmitàs /Tankönyvkiadò,Budapest 1978
3.Ròzsa Pàl Lineàris algebra ès alkalm./Müszaki kk.Bp.1976
4.Lànczos K. A geometriai tèrfogalom fejlődèse /Gond.Bp.1968
5.D-E.Liebscher Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal /Akademie Verlag,Berlin 1977

GRAVITACIJA

6.A.Einstein The Meaning of Relativity /Princeton 1955 (1922)
7.Max Born Einstein relativitàselmèlete (1921)
8.H.Weyl Raum - Zeit - Materie /Springer Vl.Berlin 1921
9.L.Infeld On Variational Principles in Relativistic Dinamic /Sonderdruck der Max-Planck-Festschrift 1958
10.Landau,Lifschitz Th,Ph.II,Klassische Feldtheorie /Ak.Vl.Berlin 197
11.S.Weinberg Gravitation and Cosmology /Willey,New York 1972
12.H.Yilmaz Theory of Relativity and ... /Blaisdell 1965
13.Hawking,Ellis Large Scale Structure of Space-Time /Cambridge 197
14.P.A.M.Dirac General Theory of Relativity /Willey 1975
15.R.Utiyama Teorija otnositeljnosti /Atomizdat 1979
16.C.Møller The Theory of Relativity /Clarendon,Oxford 1972
17.Taylor,Wheeler Spacetime Physics /Freemann & Co.London 1963
18.Chiu,Hoffmann Gravitation and Relativity /Benjamin,New York 1964
19.Sachs,H.Wu General relativity for mathematicians
20.I.S.Lukačević Osnovi teorije relativnosti /Naučna knj.Bg.1980
21.H.Stephani Allgemeine Relativitätstheorie
22.directeur Louis de Broglie Problémes Actuels en Théorie de la Relativité /Revue d'Optique,Paris 1959
23.D.Ivanenko Kvantovaja gravitacija i topologija /Mir,M.1973
24.P.Bergmann Unitary Field Theories - The continuing search for a way to unite gravitation and other fields /Physics Today,March 197

GAUGE TEORIJE

25.Serge Rudaz Introduction to the Standard Model SU(3) SU(2) U(1 /Kupari lectures,1982
26.L.Jauneau Introduction to the new Physics /Kupari 1982
27.B.Kovačević Ujedinjavanje fundamentalnih interakcija i gauge teorije /diplomski rad,Novi Sad 1981
28.T.Hübsch Kvantna hromodinamika kao teorijski model interakcije hadrona /dipl.N.Sad 1981
29.V.B.Beresteckij A zèrus töltès ès az aszimptotikus szabadsàg /Fizikai Szemle 1977
30.C.Sachrayda Understanding the Dynamics of quarks and gluons (8
31.G.Costa Introduction to GUT's and SuSy-GUT's /Kupari 1983
32.H.Nicolai Id. to Supersymmetry and Supergravity /Kupari 1983
33.T.Gottschalk Hadronization and Fragmentation /Kupari 1983
34.P.Hasenfratz Introduction to Lattice QCD /Kupari 1983
35.Becher,Böhm, Joos Eichentheorien der Starken und Elektroschwachen Wechselwirkung /Teubnes,Stuttgart 1981

- DODATAK -

PARALELNI PRIKAZ

ELEKTROMAGNETIZMA I GRAVITACIJE

(usmena odbrana diplomskog rada 7.12.1983. u Novom Sadu, napisana na zahtev ispitne komisije)

U sledećem izlaganju biće "na prste" nabrojane osnovne osobine Maxwellove elektrodinamike, i paralelno sa njom i osnovne osobine gravitacionog polja. Koristiće se najpogodnije simplifikacije, a nit izlaganja biće više intuitivna negoli deduktivna. Kao osnovni postulat koristiće se samo Coulombov zakon za naelektrisanje, I Newtonov zakon gravitacionog privlačenja. Izvore električnog ili gravitacionog polja smatraćemo prostim, te će se ma koji nestatički slučaj pogodnim izborom koordinatnog sistema lako moći prevesti u statički oblik. Specijalna teorija relativnosti će biti most između ta dva slučaja, algoritam prikaza biće: A: "kako to vidi posmatrač koji miruje" i B: "a kako to vidi posmatrač koji se kreće?" .

1, Elektrodinamika

A: Coulombov zakon elektrostatičkog privlačenja glasi:

$$\overline{E} = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\overline{r} \qquad \text{ili} \qquad \operatorname{div} \overline{E} = n$$

u diferencijalnom obliku; n je gustina naelektrisanja sa

$$Q = \int n \, dV \ .$$

Jačina električnog polja se još može izraziti kao

$$\overline{E} = - \operatorname{grad} A_0 \ ,$$

gde A_0 predstavlja elektrostatički potencijal. Isto to napisano preko četvorovektora je oblika

$$E_\lambda = d_\lambda A_0 - d_0 A_\lambda \qquad (= E_{\lambda 0}),$$

pri čemu je

$$d_\lambda = (d_0 , -\operatorname{grad}) \qquad \text{i} \qquad A_\lambda = (A_0 , 0, 0, 0) \ .$$

B: Iz sistema koji se kreće mi vidimo da pored naelektrisanja n' (znak prim je zato, što se elektron spljošti u pravcu kretanja,-to je relativistički efekat), imamo i struju $\overline{J} = n'\overline{v}$. Pisano četvorovektorom ovo u stvari znači da n poprima i dodatne komponente n_μ:

$$n \longrightarrow n_\mu = (n', n'\overline{v}) \ , \qquad \text{ili slikovito:}$$

pri čemu se koristimo konvencijom da je $\overline{v} < 1$ i $c = 1$.

Pošto u Coulombovom zakonu

$$\operatorname{div} \overline{E} = n \qquad \text{ili} \qquad d^\lambda E_\lambda = n$$

n dobija jedan indeks kada pređemo na nestatički slučaj, tada isto tako i $\overline{E}$ mora dobiti taj dodatni indeks:

$$E_\lambda \longrightarrow E_{\lambda\mu} \qquad (E_{\lambda\mu} = d_\lambda A_\mu - d_\mu A_\lambda) \ ,$$

te stoga Coulombov zakon u proizvoljnom sistemu ima oblik

$$d^{\lambda} E_{\lambda} = n \longrightarrow d^{\lambda} E_{\lambda\mu} = n_{\mu} ,$$

a ovo nije ništa drugo do MAXWELLOVE JEDNAČINE ELEKTROMAGNETNOG POLJA, jer gornja jednačina prepisana klasičnim simbolima jeste

$$\operatorname{div} \vec{E} = n'$$
$$\operatorname{rot} \vec{H} + \dot{\vec{E}} = \vec{j} .$$

Treću i četvrtu Maxwellovu jednačinu dobićemo kao identitete na osnovu same definicije tenzora jačine elektromagnetnog polja

$$E_{\lambda\mu} = d_{\lambda} A_{\mu} - d_{\mu} A_{\lambda} .$$

Na ovaj način, prostom Coulombovom zakonu neposredno se nadovezuju Maxwellove jednačine, i vidimo, da ako postoji naboj, onda se sasvim logično pored električnog javlja i magnetno polje, -posmatramo li ga iz sistema koji se kreće u odnosu na njega. Pošto je Newtonov zakon gravitacionog privlačenja pandan Coulombovom zakonu elektrostatičkog privlačenja, nameće se veliko pitanje:

DA LI JE GRAVITACIONA INTERAKCIJA TOLIKO RAZLIČITA OD ELEKTROMAGNETNE, KOLIKO SU I EINSTEINOVE JEDNAČINE GRAVITACIONOG POLJA RAZLIČITE OD MAXWELLOVIH JEDNAČINA ELEKTROMAGNETNOG POLJA ?

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu} \quad \overset{?}{\longleftrightarrow} \quad \begin{array}{c} \operatorname{div} \vec{E} = n' \\ \operatorname{rot} \vec{H} + \dot{\vec{E}} = \vec{j} \end{array}$$

Odgovor glasi:

- N E -

Na sledećim stranicama biće pokazana sličnost gravitacionog sa elektromagnetnim poljem.

2) Gravitodinamika

A: Krenimo od Newtonovog zakona za jačinu gravitacionog polja

$$\vec{E} = k \frac{M}{4\pi r^2} \vec{r}_0 \qquad \text{ili} \qquad \operatorname{div} \vec{E} = k\, m \; ,$$

gde m predstavlja gustinu materije, (k je gravitaciona konstanta)

$$M = \int m \, dV \; .$$

Jačina gravitacionog polja može se izraziti preko gravitacionog potencijala A :

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} A \qquad \text{ili} \qquad E_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \; .$$

B: Prema teoriji relativnosti iz drugog sistema mi to vidimo kao

$$m \longrightarrow m_\mu = (m'', m'' \, \vec{v})$$

pri čemu dvostruki prim (unutrašnji krug) ukazuje na to da telo pored toga što se spljošti, pretrpi i relativističko uvećanje mase. Za razliku od naboja Q koji je skalar, masa M raste sa brzinom.

Kako je gustina materije m usled translacije dobila dodatni indeks $_\mu$, istog mora dobiti i vektor jačine gravitacionog polja $\vec{E}$:

$$E \longrightarrow E_{\lambda\mu}$$

te za $\operatorname{div} \vec{E} = k\, m$ konačno dobijamo

$$\partial^\lambda E = km \longrightarrow \partial^\lambda E_{\lambda\mu} = k\, m_\mu \; .$$

Zadnja jednačina napisana u klasičnom formalizmu biće

$$\operatorname{div} \vec{E} = k\, m''$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} + \dot{\vec{E}} = k\, \vec{K} \qquad\qquad (\vec{K} = m'' \, \vec{v})$$

a to su tražene "MAXWELLOVE JEDNAČINE GRAVITACIJE" .

3) <u>Slikoviti prikaz Maxwellovih jednačina</u>

kod elektrona u pokretu dolazi do transverzalne kolimacije silnica $\bar{E}$-polja, u istoj meri kao što se elektron i spljoštio u pravcu kretanja. Ali to bi značilo da se dva elektrona odbijaju jače ili slabije u zavisnosti od toga iz kog sistema ih gledamo, i zbog toga će se javiti magnetno polje $\bar{H}$ koje će kompenzirati jače odbijanje ("paralelne struje se privlače"). Prva skica prikazuje Coulombov zakon, a druga slikovito predstavlja prvu i drugu jednačinu Maxwella.

4) <u>Slikoviti prikaz gravitacije</u>

Gravitacija se sasvim slično ponaša kao i elektrodinamika, i ovde gravitaciono polje će se relativistički spljoštiti, pa će doći do kolimacije silnica, koju će onda kompenzirati pojava gravitomagnetnog polja $\bar{H}$. Ali kod gravitacionog polja javiće se i dodatne silnice (isprekidana linija) usled relativističkog povećanja mase. Ukoliko je sve ovo tačno, nameće se pitanje:

PA ZAŠTO ONDA NIJE DETEKTOVANO MAGNETNO POLJE GRAVITACIJE ?

Odgovor je sledeći:

Pošto su svakodnevne brzine daleko manje od brzine svetlosti, $v \ll c$, sledi da je i $\bar{k} \ll m$, te stoga druga Maxwellova jednačina gravitacije praktično otpada, jer gravitomagnetno polje $\bar{H}$ je u potpunosti potisnuto prisustvom gravitostatičkog polja $\bar{E}$.

U elektrodinamici je potpuno ista stvar, $\bar{j} \ll n$, ali pošto tu postoji i pozitivan i negativan naboj, mi ćemo napraviti ~~sx~~ strujni provodnik koji je statički neutralan, a da u njemu teče struja. Na takav način eliminisali smo elektrostatički efekt prvoga reda, $n^{+} + n^{-} = 0$, i direktno možemo meriti milionima puta slabije relativističke efekte !

Kod gravitacije tako nešto nije moguće (negativna masa bila bi u suprotnosti sa principom ekvivalencije), pa smo prinuđeni da dinamičke efekte gravitacije tražimo u senci neuporedivo jačih statičkih efekata. Savremena tehnika već je na samom pragu mogućnosti da izmeri magnetogravitacione efekte.

Takozvani LENSE-THYRRINGOV EFEKAT će biti verovatno najpre utvrđen, pošto ovde imamo enormno veliku rotirajuću masu, Zemlju, koja na taj način proizvodi gravitomagnetno polje slično zatvorenom strujnom krugu, ili Riccarovom experimentu u kojem se neposredno pokazalo da rotirajući naelektrisani disk stvara magnetno polje. Gravitomagnetno polje Zemlje pokazalo bi se u otklonu putanje satelita od one koju predviđa klasična Newtonova teorija. Ali da se utvrdi to odstupanje nije ni najmanje trivijalan zadatak, jer svi perturbirajući činioci kao Mesec, Sunce i druge planete utiču više na putanju satelita od samog magnetogravitacionog dejstva.

Pa ipak postoji jedan efekat koji je utvrđen još početkom prošloga veka, koji je po intenzitetu veći od mogućih perturbirajućih efekata i koji se nikako ne može objasniti Newtonovom teorijom. To je PRECESIJA MERKUROVE ORBITE, i možemo se upitati dali ju možda "Maxwellove jednačine gravitacije" mogu objasniti?

Odgovor je: - N E - .

Razlog za precesiju orbite je sasvim druge prirode:

Fotoni koji prenose elektromagnetno dejstvo su električno neutralni i usled toga nemaju razloga da interaguju međusobno. Za razliku od njih, gravitoni koji prenose dejstvo gravitacionog polja, samom činjenicom što poseduju izvesnu energiju, nisu "maseno neutralni" te se i međusobno privlače (jer energija je ekvivalentna masi).

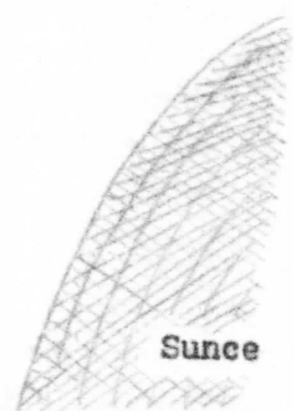
U daljoj analizi zamislimo dvodimenzioni statički naboj, onako kako je nacrtan na prethodnoj strenici: šta će se dogoditi sa lepezom sferno-simetričnih gravitacionih silnica, koje se međusobno privlače? U prvi mah bi smo rekli da ne može ništa da se promeni, jer privlačenje je isto kako na jednu, tako i na drugu stranu. Ali zamislimo da je papir elastičan, i mada teži da bude ravan, pod dejstvom suviše jake privlačne sile među gravitonima, on će se skvrčiti i iskriviti isto kao kad na razapetu gumenu ravan stavimo jednu olovnu kuglu. Odnos prečnika (od centra udubljenja) i obima kružnice više neće biti 2π, već će biti utoliko manji koliko je udubljenje dublje.

Po istom principu postaje i trodimenzioni prostor zakrivljen, obujam kružnice i broj π postaju manji kako se približavamo Suncu, te stoga i Newtonov zakon gravitacije

$$\vec{E} = k \frac{M}{4\pi r^2} \vec{r}$$

na malim udaljenostima od Sunca dobija oblik

$$\vec{E} = k \frac{M}{4\pi r^2} \vec{r}$$



tj. usled $\pi < \pi$ sila privlačenja je jača od očekivane, Merkur biva jače privučen i malo duže zadržan u blizini Sunca, i zbog toga, umesto da opiše eliptičnu putanju, on pravi rozetu - precesirajuću elipsu .

5) Gauge invarijancija elektrodinamike

Da bi smo sve ovo doveli u vezu sa gauge invarijancijom kako u teoriji elektromagnetizma tako i u teoriji gravitacije, treba se prevazići sledeća gruba aproksimacija koja je bila u osnovi dosadašnjeg razmatranja:

"POLJE DELUJE NA ČESTICU, A SAMO SE PRI TOM NE MENJA" i

"PROSTOR ODREĐUJE INERCIONU PUTANJU,A SAM SE PRI TOM NE MENJA"

Ove dve tvrdnje rečene su pod pretpostavkom da je izvor polja daleko veći od probne čestice,te ma kakvo dejstvo ono izvršilo na česticu,potencijal polja ostaće praktično isti.U stvarnosti, po izvršenom dejstvu S, potencijal polja će opasti sa A na A' (jednostavnosti radi posmatramo iz statičkog sistema):

$$A_0 \longrightarrow A'_0 \# A_0 - E_{int} ,$$

izvršeno dejstvo je $S = \int E_{int}\, dt$, ili $E_{int} = d_0 S$,

te tako možemo pisati:

$$A_0 \longrightarrow A'_0 = A_0 - d_0 S , \text{ ili}$$

$$\longrightarrow A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - d_\mu S$$

kada interakciju posmatramo iz sistema koji se kreće u odnosu na polje. Pri tom se talasna funkcija elektrona koji je pretrpeo dejstvo transformisala prema

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{-iS}\psi .$$

Lako je uveriti se da su Maxwellove jednačine invarijantne na gauge transformaciju, pošto tenzor jačine elektromagnetnog polja pri tom ostaje nepromenjen:

$$E_{\lambda\mu} = d_\lambda A_\mu - d_\mu A_\lambda$$

$$E'_{\lambda\mu} = d_\lambda A'_\mu - d_\mu A'_\lambda =$$

$$= d_\lambda A_\mu - d_\lambda d_\mu S - d_\mu A_\lambda + d_\mu d_\lambda S = E_{\lambda\mu} .$$

Na ovaj način vidimo da Maxwellove jednačine

$$d_\lambda E_{\lambda\mu} = j_\mu \quad \Longleftrightarrow \quad d_\lambda E'_{\lambda\mu} = j_\mu$$

sadrže u sebi i samu interakciju, i da su tačnije nego što smo pretpostavljali.To neće biti slučaj i sa "Maxwellovim jednačinama za gravitaciju".

5) Mehanizam elektromagnetne interakcije

Maxwellove jednačine napisaćemo preko četvornog potencijala koristeći Lorentzov uslov $\partial^{\mu} A_{\mu} = 0$, i $\partial^{\mu} \partial_{\mu} S = 0$:

$$\partial^{\mu} E_{\mu\nu} = j_{\nu} \quad \longrightarrow \quad \partial^{\mu} \partial_{\mu} A_{\nu} = j_{\nu} \ .$$

$\partial^{\mu} \partial_{\mu}$ zamenićemo uobičajenim simbolom $\Box$, i napisaćemo Maxwellove jednačine u blizini oscilirajuće struje $\vec{J}$ prvo, a onda daleko od nje u praznom prostoru

$$\Box \vec{A} = \vec{J} \qquad \text{i} \qquad \Box \vec{A} = 0 \ .$$

Oscilirajuću struju ćemo prikazati jednim dipolom, koji će, prema prvoj jednačini, primorati i elektromagnetni potencijal $\vec{A}$ da oscilira

Oscilirajući elektromagnetni potencijal se "odlepljuje" od svog izvora, i rasprostire se kroz prostor brzinom c, u skladu sa M Maxwellovim jednačinama za vakuum. $\Box \vec{A} = 0$ u stvari predstavlja talasnu jednačinu fotona, koji je spin-jedan čestica.

Pošto su "Maxwellove jednačine za gravitaciju" jednake sa jednačinama elektromagnetnog polja, mogli bi smo očekivati da je gravitaciona interakcija analogna elektromagnetnoj, i da je mehanizam nastanka gravitacionih talasa isti. Ali pokušavajući da konstruišemo oscilirajući maseni dipol, suočićemo se sa nepremostivim teškoćama. Mada su "Maxwellove jednačine za gravitaciju" tačne i primenljive za postojane i nepromenljive materijalne struje $\vec{F}$,nikako ne možemo proizvesti oscilirajuću struju materije, jer NE POSTOJI NEGATIVNI GRAVITACIONI NABOJ (neg. masa).

Izlaz je jasno u kvadrupolnim oscilacijama, ali pre nego što pređemo na njih, "Maxwellove jednačine za gravitaciju" zamenićemo sa tačnijim jednačinama koje neprotivrečno sadrže u sebi i relativističko povećanje mase (obeleženo unutrašnjim krugom).

Za razliku od mase, naelektrisanje čestice isto je kako u mirujućem tako i u pokretnom koordinatnom sistemu. Masa u stvari nije skalar poput naboja Q, već je nulta komponenta četvornog impulsa P_{μ}. To je i suštinska razlika između gravitacije i elektromagnetizma: gravitacija je za jednu dimenziju složenija teorija, pošto njen nosilac nije skalar već je vektor. Zbog toga "Maxwellove jednačine za gravitaciju" treba da dobiju još jedan indeks prema algoritmu:

$$M \Longrightarrow P_{\mu} = (M, M\vec{v})$$

$$m_{\mu} \Longrightarrow m_{\mu\nu} \qquad (= T_{\mu\nu})$$

$$\mathfrak{E}_{\lambda\nu} \Longrightarrow \mathfrak{E}_{\lambda\mu\nu}$$

$$\mathfrak{A}_{\mu} \Longrightarrow \mathfrak{A}_{\mu\nu} \qquad (= g_{\mu\nu}) \qquad \mathfrak{C}_{\lambda\mu\nu} = d_{\lambda} \mathfrak{A}_{\mu\nu} - d_{\mu} \mathfrak{A}_{\lambda\nu}$$

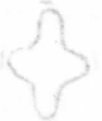
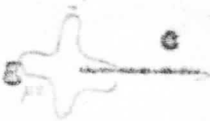
$$d^{\lambda} \mathfrak{E}_{\lambda\mu} = k m_{\mu} \Rightarrow d^{\lambda} \mathfrak{C}_{\lambda\mu\nu} = k T_{\mu\nu} \xRightarrow[d^{\mu} g_{\mu\nu} = 0]{} \boxed{d^{\lambda} d_{\lambda} g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}} ,$$

pri čemu smo odmah postavili i Lorentzov uslov na gravitacioni potencijal $g_{\mu\nu}$, i time dobili linearizovane Einsteinove jednačine gravitacionog polja. Za male razdaljine, one već sasvim tačno opisuju mehanizam gravitacione interakcije. Na većim distancama čak ni ove jednačine neće biti tačne, jer će doći do nelinearne superpozicije gravitona.

6') <u>Mehanizam gravitacione interakcije</u>

Neko superelastično telo neka vrši kvadrupolne oscilacije:

$$\Box g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} \qquad\qquad \Box g_{\mu\nu} = 0 \; ;$$

 $T_{\mu\nu}$ ... $g_{\mu\nu}$  .

Kvadrupolne oscilacije indukuju oscilirajući gravitacioni potencijal koji se "odlepljuje" od izvora i brzinom svetlosti prostire kroz prostor. Znak "približno nula" u jednačini za vakuum, znači da se gravitoni međusobno privlače, i to će biti put ka dobijanju tačnih Einsteinovih jednačina gravitacionog polja, ako za slučaj vakuuma napišemo $\Box g_{\mu\nu} = k t_{\mu\nu}$, gde je $t_{\mu\nu}$ gustina napona energije-impulsa samih gravitona. Primenom iterativnog postupka dobijamo skalarnu krivinu prostora R, koja je u stvari Lagranžijan gravitacionog polja, pa iz nje slede Einsteinove jednačine gravitacije.

6) <u>Gauge transformacije gravitacije</u>

Preostaje nam još da vidimo kakvo značenje imaju gauge transformacije u gravitaciji. Kako gauge transformacije elektrodinamike imaju formu

$$A_{\mu} \longrightarrow A'_{\mu} = A_{\mu} + d_{\mu}\theta \; , \qquad (\theta = -S)$$

gauge transformacije gravitacionog potencijala mogle bi imati oblik

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + d_{\mu}\theta_{\nu} + d_{\nu}\theta_{\mu} \; .$$

Možemo se uveriti da ovakve transformacije odgovaraju prostorno -vremenskoj translaciji

$$x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + \theta_\mu \quad ,$$

pri čemu je θ_μ parametar translacije. Ovo je analogno kvantno -mehaničkim transformacijama, kod kojih se talasna funkcija (koordinata) elektrona menja prema

$$\psi \longrightarrow \psi' = \psi + h$$

kada deluje operator $\hat{H}$ na stanje ψ: $\hat{H}\psi = \psi'$. Tek u specijalnom slučaju da je operator $\hat{H}$ unitaran, ova transformacija postaje gauge transformacija pogodna za opis elektromagnetne interakcije:

$$\psi \longrightarrow \psi' = \psi + i\theta\psi \quad \text{sa} \quad \psi' = \hat{U}\psi \;, \quad \hat{U} = e^{i\theta} \;.$$

PRI ČISTO GRAVITACIONOJ INTERAKCIJI (slobodno padanje) parametar translacije biće

$$\theta_\mu = \int \theta^\nu_\mu dx_\nu = \int \theta_{\mu\nu} dx^\nu \quad ,$$

pri čemu je $\theta_{\mu\nu}$ antisimetrični generator lokalnih Lorentzovih transformacija, a integrali se po geodetskoj putanji. Za tako dobijene translacije (slobodno padanje duž geodezije) važi relacija

$$d_\mu \theta_\nu = \theta_{\mu\nu} \quad ,$$

usled čije antisimetrije direktno sledi $d_\mu \theta_\nu + d_\nu \theta_\mu = 0$, tj. gauge transformacije duž geodezije ostavljaju gravitacioni potencijal nepromenjenim! Možemo napisati

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad \text{i}$$

$$V_\mu \longrightarrow V'_\mu = e^{\theta^\nu_\mu} V_\nu \quad ,$$

gde $L = e^{\theta^\nu_\mu}$ predstavlja lokalne Lorentzove transformacije, u potpunoj analogiji sa lokalnim gauge transformacijama elektrodinamike $U = e^{i\theta}$. Za infinitezimalne rotacije biće

$$x'_\mu = x_\mu + \theta^\nu_\mu x_\nu \qquad \sim \qquad \psi' = \psi + i\theta\psi \quad .$$

ZAKLJUČAK:

... ima neka čudna veza ...