

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

ZAVISNOST SUPERPROVODNOG PRAGA ENERGIJE OD IMPULSA

-diplomski rad-

Kandidat:

Vaštag Katalin

Novi Sad, 1979.

Iskreno se zahvaljujem profesoru dr. Bratislavu Tošiću koji mi je predložio temu za diplomski rad i svojim savetima pružio dragocenu pomoć pri njegovoj izradi.

Nastan Katalin

S A D R Ž A J

Uvod.....	1.
1. Superprovodnost-teorija Bardina, Kupera i Šrifera.....	2.
1.1. Opšte o problemu superprovodnosti.....	2.
1.2. Frelihova teorija.....	5.
1.3. Superprovodni prag energije-model BCS.....	10.
2. Jedno novo rešenje za superprovodni prag energije.....	14.
2.1. Formulisanje jednačine na osnovu Frelihove teorije...	14.
2.2. Rešenje za superkonduktivni prag energije.....	17.
2.3. Normiranje rešenja.....	21.
Zaključak.....	23.
Literatura.....	24.

Uvod

Cilj ovog diplomskog rada je da se potraži rešenje one jednačine za superkonduktivni prag energije koju daje Frelihova teorija. Kao što se zna u teoriji BCS (Bardin, Kuper i Šrifer)-a Frelihov rezultat je uprošćen pretpostavkom da je elektron-elektron interakcija u uzanom sloju impulsa na granici Fermijeve sfere nezavisno od impulsa! Ovo je dovelo do superkonduktivnog praga energije koje takodje ne zavisi od impulsa.

Ovde će biti zadržana analitička formula elektron-elektron interakcije koja sledi iz Frelihove teorije i posle standardnih Bogoliubivih transformacija biće rešavan jednačinom za superkonduktivni prag energije bez drastičnih uprošćenja koja pretpostavlja teorija BCS. Rešenje ove jednačine biće superkonduktivni prag energije koji zavisi od impulsa, tako da će moći da se izvrši impulsna selekcija Kuperovih-parova i proceni pri kavim impulsima oni maksimalno pojačavaju superprovodni efekat.



1. SUPERPROVODNOST-TEORIJA BARDINA-KUPERA I ŠRIFERA

1.1. Opšte o problemu superprovodnosti

Pojam superprovodnosti eksperimentalno je konstatovao 1911. godine holandski fizičar Kamerling Onnes. On je konstatovao da živa na temperaturi od $4,2^{\circ}\text{K}$ potpuno gubi svoj električni otpor. Kasnije je konstatovano da i ostali metali i legure gube električni otpor na temperaturama koje su više od absolutne nule. Ovi rezultati bili su paradoksalni u tom smislu što se gubljenje otpora za metalne provodnike očekivalo striktno na apsolutnoj nuli. Radi se o tome što se otpor metalnog provodnika ponaša po zakonu

$$R = R_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right) \quad (1.1.1.)$$

koji ima potpuno istu formulu kao i gasni zakoni Geja Lisaka i Šarla. Treba odmah napomenuti da se do obrasca (1.1.1.) došlo empirijskim putem i to merenjem otpora na temperaturama daleko višim od absolutne nule. Proveravanje ovog zakona na niskim temperaturama koje je izvršio K. Onnes, pokazalo je da u oblasti niskih temperatura on ne važi i da otpor isčezava pre apsolutne nule.

Kretanje elektrona bez trenja (nestanak otpora) nije moglo da se objasni u okvirima klasične fizike. Prve ideje za rešavanje ovoga problema pojavile su se skoro trideset godina posle Onesovog otkrića, kada je P. Kapica otkrio pojam superfluidnosti tečnog He^4 ikada je nešto kasnije Bogoliubov objasnio ovaj efekat kondenzacijom heliumovih atoma na nivou nulte kinetičke energije. Tada je ustanovljen i kriterijum po kome se moglo zaključiti pod kojim se će uslovima vršiti kretanje bez trenja.

Tečnost se kreće bez trenja ako usled trenja u tečnosti nastaju elementarne ekscitacije koje imaju pozitivan minimum fazne brzine

$$\min \frac{E_p}{P} > 0 \quad (1.1.2.)$$

Uovoj formuli P je impuls elementarnih pobudjenja, a E_p energija pobudjenja.

Posle ovih radova postalo je jasno da fenomen superprovodnosti treba analizirati sa sličnih pozicija kao i fenomen superfluidnosti, jer superprovodnost nije ništa drugo od kretanje nanelektrisanih čestica bez trenja.⁴

Prva teškoća u pravljenju analogije sa tečnim He^4 nastala je usled činjenice da su atomi He^4 boze čestice, i da ih se u jednom kvantnom stanju može naći neograničeno mnogo, dok su elektroni fermi čestice, a kao što se zna u jednom kvantnom stanju može se naći najviše jedan fermion. Pošto je superfluidnost He^4 objašnjeno sakupljanjem ogromnog broja bozona u stanju sa nultim impulsom, nije bilo jasno kako objasniti superprovodljivost kad se u stanju sa nultim impulsom mogu naći najviše dva elektrona (elektroni sa suprotnim spinovima). Da bi se postigla analogija sa fenomenom superfluidnosti pretpostavljeno je da se elektroni sparuju i to sa suprotnim spinovima i obrazuju stabilne parove koji imaju osobine boze čestica jer je ukupni spin para ravan nuli. Ovu ideju razradio je Kuper, proračunao je energiju veze para i njegov radijus, pa se njemu u čast ovi nosioci superprovodne struje nazivaju Kuperovi parovi.

Drugu teškoću, kada se već došlo na ideju parova, predstavljava je činjenica da se elektroni kao istoimeno nanelektrisane čestice odbijaju, pa nije bilo jasno kako se oni zbližavaju na takva rastojanja na kojima usled sile izmene nastupa njihovo uzajamno privlačenje i obrazovanje parova.

Objašnjenje je dao Frelih polazeći od činjenice da su lošiji provodnici obično bolji superprovodnici (imaju višu kritičnu temperaturu). Pošto do otpora dolazi usled elektron-fonon interakcije i otpor je u normalnom stanju veći utoliko je ova interakcija jača, Frelih dolazi na misao da ista ova interakcija u izvesnim temperaturskim domenima počinje da igra suprotnu ulogu to jest vezuje elektrone u parove i na taj način omogućava nastanak superprovodnosti.

Posle ovoga teorija superprovodnosti je krenula sa „mrtve tačke“ i godine 1956. Bardin, Kuper i Šrifer na bazi Frelihovih radova formulišu teoriju superprovodnosti koja se veoma dobro slaže sa eksperimentalnim podacima.

Prema teoriji BCS-a superprovodno kretanje vrše Kuperovi parovi. Energetski spektar Kuperovih parova ima energetski prag

$$\lim_{n \rightarrow 0} E_C(n) = \Delta \neq 0 \quad (1.1.3.)$$

i veličina ovog praga definiše veličinu kritične superprovodne temperature. Spektar do koga su došli BCS ima pozitivan minimum fazne brzine u impulsnom sloju oko granice Fermijeve sfere. Pa prema tome Kuperovi parovi mogu da se kreću bez trenja. Superprovodnost prestaje kada topotni kvanti $\frac{kT}{B}$ dostignu vrednost energetskog praga Δ .

Na kraju treba napomenuti da o kondenzaciji Kuperovih parova na granici Fermijeve sfere ne može da se govori jer operatori Kuperovih parova takodje delimično zadovoljavaju Fermi statistiku i parovi se ne mogu kondenzovati na jednom energetskom nivou. Tako je na kraju došlo do paradoksalne situacije u tom smislu što se u teoriju superprovodnosti stalno tražila analogija sa teorijom superfluidnosti i ovo je dovelo do rešenja problema, ali se na kraju ispostavilo da je osnovni efekat-kondenzacija-odsutan u slučaju superprovodnog kretanja.

1.2. Frelihova teorija

Da bi se izložila Frelihova teorija nastanka privlačnih sila izmedju elektrona, potrebno je, pre svega, formulisati hamiltonijan elektron-fonon interakcije. To se može postići na taj način što se hamiltonijan elektronskog sistema:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \mathcal{E}(\vec{k}) \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \quad (1.2.1.)$$

Furije-transformacijama

$$a_{\vec{k}} = N^{-\frac{1}{2}} \sum_{\vec{u}} a_{\vec{u}} e^{i \vec{k} \cdot \vec{u}} \quad ; \quad \hat{a}_{\vec{k}}^+ = N^{-\frac{1}{2}} \sum_{\vec{u}} \hat{a}_{\vec{u}}^+ e^{i \vec{k} \cdot \vec{u}} \quad (1.2.2.)$$

prevode u konfiguracioni prostor:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\vec{u}} \mathcal{E}_1 \hat{a}_{\vec{u}}^+ \hat{a}_{\vec{u}} + \sum_{\vec{u} \vec{m}} \mathcal{E}_2 (\vec{u} - \vec{m}) \hat{a}_{\vec{u}}^+ \hat{a}_{\vec{m}} \\ \mathcal{E}_1 &= N^{-\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}} \mathcal{E}(\vec{k}) \quad ; \quad \mathcal{E}_2 (\vec{u} - \vec{m}) = N^{-\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}} \mathcal{E}(\vec{k}) e^{-i \vec{k} \cdot (\vec{u} - \vec{m})} \end{aligned} \quad (1.2.3.)$$

Ovaj hamiltonijan odgovara „zamrznutom“ kristalu. Zbog oscilovanja atoma rešetke svako \vec{n} dobija priraštaj $\vec{\zeta}(\vec{n})$, tako da se može pisati:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 (\vec{u} - \vec{m}) &\rightarrow \mathcal{E}_2 \left\{ (\vec{u} - \vec{m}) + [\vec{\zeta}(\vec{u}) - \vec{\zeta}(\vec{m})] \right\} \approx \\ &\approx \mathcal{E}_2 (\vec{u} - \vec{m}) + [\vec{\zeta}(\vec{u}) - \vec{\zeta}(\vec{m})] \nabla_{\vec{u}-\vec{m}} \mathcal{E}_2 (\vec{u} - \vec{m}) \end{aligned} \quad (1.2.4.)$$

Poslednji rezultat dođen je uz pretpostavku da su atomski pomeraji mali. Na niskim temperaturama ovakva pretpostavka je opravdana. Na osnovu (1.2.4.), hamiltonijan elektron-fonon interakcije može se napisati u obliku:

$$\hat{H}_{int} = \sum_{\vec{u} \vec{m}} [\vec{\zeta}(\vec{u}) - \vec{\zeta}(\vec{m})] \nabla_{\vec{u}-\vec{m}} \mathcal{E}_2 (\vec{u} - \vec{m}) \quad (1.2.5.)$$

Ako se atomski pomeraj izrazi preko fononskih operatora b_i^+

$$\begin{aligned} \vec{\zeta}(\vec{u}t) &= \sum_{\vec{k}j} \sqrt{\frac{t}{2MN\omega_j(\vec{k})}} \vec{l}_j(\vec{k}) [b_j(\vec{k}) e^{i \vec{k} \cdot \vec{u} - it\omega_j(\vec{k})} \\ &\quad + b_j^+(\vec{k}) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{u} + it\omega_j(\vec{k})}] \end{aligned} \quad (1.2.6.)$$

iskoristi formula (1.2.3.) i uzmu Furije-transformacije elektronskih operatora koje su inverzne transformacijama (1.2.2.), hamiltonijan interakcije (1.2.5.) postaje:

$$\hat{H}_{int} = N^{-\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} F_{\vec{k}, \vec{q}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}}^- (b_{\vec{q}}^+ + b_{-\vec{q}}^+) \quad (1.2.7.)$$

$$F_{\vec{k}, \vec{q}} = -i \sqrt{\frac{\hbar}{2m \omega(\vec{q})}} [(\vec{q} - \vec{k}) \vec{l}(\vec{q}) \mathcal{E}_2(\vec{q} - \vec{k}) + \vec{k} \vec{l}(\vec{q}) \mathcal{E}_2(\vec{k})]$$

$$F_{\vec{k}-\vec{q}, -\vec{q}}^* = F_{\vec{k}, \vec{q}}$$

Treba napomenuti da je ovde uzeta u obzir interakcija elektrona i longitudinalne fononske grane, jer je ona dominantna u odnosu na interakciju elektrona i transverzalnih fonona.

Pošto je formiran hamiltonijan elektron-fonon interakcije, kompletan hamiltonijan sistema koji sadrži elektrone, mehaničke oscilacije i njihovu uzajamnu interakciju može se napisati u obliku:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} X_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}^- + \sum_{\vec{k}} Y_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}}^- + N^{-\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} F_{\vec{k}, \vec{q}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}}^- (b_{\vec{q}}^+ + b_{-\vec{q}}^+) \quad (1.2.8.)$$

U gornjoj formuli $X_{\vec{k}}$ je energija elektrona koja se "očitava" od energije Fermi-sfere:

$$X_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} - \mu = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} - \frac{\hbar^2 K_F^2}{2m} \quad (1.2.9.)$$

dok je $Y_{\vec{k}}$ energija fonona:

$$Y_{\vec{k}} = \hbar \omega(\vec{k}) = \hbar \nu k \quad (1.2.10.)$$

Rukovodjen idejom da elektron-fonon interakcija može da izazove privlačne sile izmedju elektrona, Frelih je izvršio unitarnu transformaciju hamiltonijana (1.2.8.) sa ciljem, da elektron-fonon interakciju zameni nekom ekvivalentnom elektron-elektron interakcijom. Uopštem slučaju unitarna transformacija se može realizovati pomoću antiermitskog operatora S :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i to na sledeći način:

$$\hat{H}_{eq} = e^{-\frac{1}{2} S} \hat{H} e^{\frac{1}{2} S} \quad (1.2.11.)$$

Frelih se odlučio za aproksimaciju:

$$\hat{H}_{eq} = \hat{H} - [\hat{S}, \hat{H}] + \frac{1}{2} [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]] \quad (1.2.12.)$$

i operator \hat{S} odabrao u obliku:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \hat{S}_1 - \hat{S}_1^+ ; \quad \hat{S}_1 = \sum_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} \lambda_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} \hat{a}_{\vec{\alpha}}^+ \hat{a}_{\vec{\alpha}-\vec{\beta}} \hat{b}_{\vec{\beta}} \\ [\hat{S}, \hat{H}] &= [\hat{S}_1, \hat{H}] + [\hat{S}_1^+, \hat{H}]^+ \end{aligned} \quad (1.2.13.)$$

sa ciljem da proizvoljnu funkciju $\lambda_{\vec{\alpha}\vec{\beta}}$ odredi tako da iz ekvivalentnog hamiltonijana eliminiše deo koji je linearan po fononskim operatorima. Posle nalaženja komutatora i zanemarivanja članova proporcionalnih $a^+ a b^+ b$ ekvivalentni hamiltonijan postaje:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eq} &= \sum_{\vec{K}} X_{\vec{K}} \hat{a}_{\vec{K}}^+ \hat{a}_{\vec{K}} + \sum_{\vec{K}} Y_{\vec{K}} \hat{b}_{\vec{K}}^+ \hat{b}_{\vec{K}} + N^{-\frac{1}{2}} \sum_{\vec{K}\vec{q}} F_{\vec{K},\vec{q}} \hat{a}_{\vec{K}}^+ \hat{a}_{\vec{K}-\vec{q}} (\hat{b}_{\vec{q}}^+ + \hat{b}_{-\vec{q}}^+) - \\ &- \sum_{\vec{K}\vec{q}} \lambda_{\vec{K},\vec{q}} (X_{\vec{K}-\vec{q}} - X_{\vec{K}} + Y_{\vec{q}}) \hat{a}_{\vec{K}}^+ \hat{a}_{\vec{K}-\vec{q}} \hat{b}_{\vec{q}} - \sum_{\vec{K}\vec{q}} \lambda_{\vec{K}-\vec{q},-\vec{q}}^* (X_{\vec{K}} - X_{\vec{K}-\vec{q}} + \\ &+ Y_{\vec{q}}) \hat{a}_{\vec{K}}^+ \hat{a}_{\vec{K}-\vec{q}} \hat{b}_{-\vec{q}}^+ - N^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\vec{K}_1 \vec{K}_2 \vec{K}_3 \\ \vec{K}_1 \vec{K}_2 \vec{K}_3}} \{ \lambda_{\vec{K}_1, \vec{K}_1 - \vec{K}_3}^* F_{\vec{K}_2, \vec{K}_3 - \vec{K}_1} + \\ &+ \lambda_{\vec{K}_1 + \vec{K}_2 - \vec{K}_3, \vec{K}_1 - \vec{K}_3}^* F_{\vec{K}_3, \vec{K}_2 - \vec{K}_1}^* - \frac{1}{2} N^{\frac{1}{2}} \lambda_{\vec{K}_1, \vec{K}_1 - \vec{K}_3}^* \lambda_{\vec{K}_1 + \vec{K}_2 - \vec{K}_3, \vec{K}_1 - \vec{K}_3}^* (X_{\vec{K}_2} - \\ &- X_{\vec{K}_1 + \vec{K}_2 - \vec{K}_3} + Y_{\vec{K}_1 - \vec{K}_3}) - \frac{1}{2} N^{\frac{1}{2}} \lambda_{\vec{K}_1, \vec{K}_1 - \vec{K}_3}^* \lambda_{\vec{K}_1 + \vec{K}_2 - \vec{K}_3, \vec{K}_1 - \vec{K}_3}^* (X_{\vec{K}_3} - \\ &- X_{\vec{K}_1} + Y_{\vec{K}_1 - \vec{K}_3}) \} \} \quad (1.2.14.) \end{aligned}$$

Ako se uzme:

$$\lambda_{\vec{K},\vec{q}} = N^{-\frac{1}{2}} \frac{F_{\vec{K},\vec{q}}}{X_{\vec{K}-\vec{q}} - X_{\vec{K}} + Y_{\vec{q}}} \quad t.j. \quad \lambda_{\vec{K}-\vec{q},-\vec{q}}^* = N^{-\frac{1}{2}} \frac{F_{\vec{K},\vec{q}}}{X_{\vec{K}} - X_{\vec{K}-\vec{q}} + Y_{\vec{q}}} \quad (1.2.15.)$$

i dobijeni rezultat usrednji po fononskom vakuumu (što znači da se u računima uzimaju u obzir samo spontane emisije fonona) dolazi se do sledećeg efektivnog hamiltonijana:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \langle 0_\phi | \hat{H}_{\text{eq}} | 0_\phi \rangle = \sum_{\vec{K}} X_{\vec{K}} a_{\vec{K}}^+ a_{\vec{K}} - N \sum_{\vec{K}_1 \vec{K}_2 \vec{K}_3}^{-1} \phi_{\vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3}^+ a_{\vec{K}_1}^+ a_{\vec{K}_2}^+ a_{\vec{K}_3} a_{\vec{K} + \vec{K}_2 - \vec{K}_3} \quad (1.2.16.)$$

gde je:

$$\begin{aligned} \phi_{\vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3} &= \frac{F_{\vec{K}_1, \vec{K}_2 - \vec{K}_3} F_{\vec{K}_2, \vec{K}_3 - \vec{K}_1} - 2^{-1} F_{\vec{K}_1, \vec{K}_1 - \vec{K}_3} F_{\vec{K}_1 + \vec{K}_2 - \vec{K}_3, \vec{K}_1 - \vec{K}_3}^*}{X_{\vec{K}_3} - X_{\vec{K}_1} + Y_{\vec{K}_1 - \vec{K}_3}} + \\ &+ \frac{F_{\vec{K}_1 + \vec{K}_2 - \vec{K}_3, \vec{K}_1 - \vec{K}_3}^* F_{\vec{K}_3, \vec{K}_3 - \vec{K}_1} - 2^{-1} F_{\vec{K}_1, \vec{K}_1 - \vec{K}_3} F_{\vec{K}_1 + \vec{K}_2 - \vec{K}_3, \vec{K}_1 - \vec{K}_3}^*}{X_{\vec{K}_2} - X_{\vec{K}_1 + \vec{K}_2 - \vec{K}_3} + Y_{\vec{K}_1 - \vec{K}_3}} \end{aligned} \quad (1.2.17.)$$

Kao što se vidi, rezultat Frelihove transformacije je zamena elektron-fonon interakcije u originalnom hamiltonijanu, elektron-elektron interakcijom u ekvivalentnom hamiltonijanu. Dalja analiza se sastoji u ispitivanju uslova pod kojima efektivna elektron-elektron interakcija postaje privlačna. U tom cilju se iz (1.2.16.) izdvaja deo koji odgovara procesima izmedju elektrona koji imaju suprotne impulse:

$$\vec{k}_1 = \vec{k}; \vec{k}_2 = -\vec{k}; \vec{k}_3 = -\vec{q}; \vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 = \vec{q} \quad (1.2.18.)$$

Osim toga funkciju $(\vec{q} - \vec{k}) \vec{l}(\vec{q}) \mathcal{E}_2(\vec{q} - \vec{k}) + \vec{k} \vec{l}(\vec{q}) \mathcal{E}_2(\vec{k})$ koja figuriše u izrazu (1.2.7.) za $F_{\vec{k}, \vec{q}}$ zamenjuje njenom srednjom kvadratnom vrednošću:

$$\Psi = \left\{ N^{-\frac{1}{2}} \sum_{\vec{K}, \vec{q}} [(\vec{q} - \vec{k}) \vec{l}(\vec{q}) \mathcal{E}_2(\vec{q} - \vec{k}) + \vec{k} \vec{l}(\vec{q}) \mathcal{E}_2(\vec{k})] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.19.)$$

tako da je:

$$F_{\vec{k}, \vec{q}} = -i \Psi \sqrt{\frac{\hbar}{2M\nu q}} \quad (1.2.20.)$$

i zavisi samo od drugog indeksa. Za suprotne impulse i $F_{\vec{k}, \vec{q}}$ koje zavisi samo od drugog indeksa funkcija $\phi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3}$ postaje:

$$\phi_{\vec{k}, \vec{q}} = \frac{|F_{\vec{k}, \vec{q}}|^2 Y_{\vec{k} + \vec{q}}}{(X_{\vec{k}} - X_{\vec{q}})^2 - Y_{\vec{k} + \vec{q}}^2} ; |F_{\vec{k}, \vec{q}}|^2 = \frac{\hbar \Psi^2}{2M\nu q} \quad (1.2.21.)$$

tako da je izdvojeni deo hamiltonijana (1.2.16.):

$$\tilde{H} = \sum_{\vec{k}} X_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}} - N^{-1} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \frac{|F_{\vec{k}+\vec{q}}|^2 Y_{\vec{k}+\vec{q}}}{(\chi_{\vec{k}} - \chi_{\vec{q}})^2 - Y_{\vec{k}+\vec{q}}^2} \alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{-\vec{k}}^+ \alpha_{-\vec{q}} \alpha_{\vec{q}}$$

(1.2.22.)

Znak drugog člana u (1.2.22.) zavisi od znaka imenioca. S obzirom na (1.2.9.) i (1.2.10.) može se pisati:

$$D = (\chi_{\vec{k}} - \chi_{\vec{q}})^2 - Y_{\vec{k}+\vec{q}}^2 = \frac{\hbar^4}{4m^2} [K^2(K^2 - k_0^2) + q^2(q^2 - k_0^2) - 2Kq(Kq - k_0^2 \cos \theta(\vec{k}, \vec{q}))]$$

(1.2.23.)

gde je:

$$k_0 = \frac{\omega v}{\hbar} \sim 10^6 \text{ cm}^{-1}$$

(1.2.24.)

ako se uzme da je brzina zvuka $v \sim 5 \cdot 10^5 \text{ cm sec}^{-1}$. Sada je očigledno da za $k, q \gg k_0$ imenilac postaje pozitivan: $D \rightarrow \left[\frac{\hbar^2(K^2 - q^2)}{2m} \right]^2$, pa je zato drugi član u izrazu (1.2.22.) negativan i dovodi do privlačenja elektrona. Ovo je završni rezultat Frelihove analize i on se može formulisati na sledeći način: efektivna elektron - elektron interakcija, koja nastaje usled virtualne razmene fonona, izaziva privlačenje izmedju elektrona sa suprotnim impulsima i to samo u onom domenu gde su elektronski impulsi veći od impulsa $k_0 = \frac{\omega v}{\hbar} \sim 10^6 \text{ cm}^{-1}$.

1.3. Superprovodni prag energije- model BCS

Na osnovu Frelihovog rezultata Bardin, Kuper i Šrifer su dali modelni hamiltonijan elektronskog sistema koji bi trebalo da objasni fenomen superprovodljivosti. Oni su uveli u račun i elektronske spinove i ograničili se samo na elektrone sa suprotnim spinovima i suprotnim impulsima. Njihov modelni hamiltonijan ima oblik:

$$H_{BCS} = \sum_{\vec{k}} \chi_{\vec{k}} [\alpha_{\vec{k}}^{\dagger}(\frac{1}{2}) \alpha_{\vec{k}}(\frac{1}{2}) + \alpha_{-\vec{k}}^{\dagger}(-\frac{1}{2}) \alpha_{-\vec{k}}(-\frac{1}{2})] - \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} W_{\vec{k}, \vec{q}} \alpha_{\vec{k}}^{\dagger}(\frac{1}{2}) \alpha_{-\vec{k}}^{\dagger}(-\frac{1}{2}) \alpha_{-\vec{q}}(-\frac{1}{2}) \alpha_{\vec{q}}(\frac{1}{2}) \quad (1.3.1.)$$

gde je funkcija $W_{\vec{k}, \vec{q}}$ definisan na sledeći način:

$$W_{\vec{k}, \vec{q}} = \begin{cases} W > 0 & \text{za } K_F - K_G \leq k, q \leq K_F + K_G \\ 0 & \text{van ovog intervala} \end{cases} \quad (1.3.2.)$$

$$K_G \ll K_0 \sim 10^6 \text{ cm}^{-1}$$

U hamiltonijanu BCS-modela može se izvršiti sledeća kanonička transformacija Fermi-operatora a^{\dagger} i a :

$$a_{\vec{k}}(1/2) = u_{\vec{k}} a_{\vec{k}}(1) + v_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger}(2) \quad a_{\vec{k}}^{\dagger}(1/2) = u_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}}(1) + v_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}}(2) \quad (1.3.3.)$$

$$a_{-\vec{k}}(-1/2) = u_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}}^{\dagger}(1) - v_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}}(2) \quad a_{-\vec{k}}^{\dagger}(-1/2) = u_{\vec{k}} a_{\vec{k}}(2) - v_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger}(1)$$

Realne i parne funkcije $u_{\vec{k}}$ i $v_{\vec{k}}$ zadovoljavaju uslov:

$$u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 = 1 \quad (1.3.4.)$$

koji se dobija iz zahteva da operatori a^{\dagger} i a budu takodje Fermi-operatori. Na primer:

$$1 = \{a_{\vec{k}}^{\dagger}(1/2), a_{\vec{k}}(1/2)\} = u_{\vec{k}}^2 \{a_{\vec{k}}^{\dagger}(1), a_{\vec{k}}(1)\} + v_{\vec{k}}^2 \{a_{\vec{k}}(2), a_{\vec{k}}^{\dagger}(1)\} + \dots \quad (1.3.5.)$$

Ako se (1.3.3.) zameni u (1.3.1.) i iskoristi (1.3.2.) onda se hamiltonijan BCS-modela svodi na:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{BCS} = & \sum_{\vec{k}} (2X_{\vec{k}}\mu_{\vec{k}}^2 - \Delta\mu_{\vec{k}}\nu_{\vec{k}}) + \sum_{\vec{k}} [X_{\vec{k}}(\mu_{\vec{k}}^2 - \nu_{\vec{k}}^2) + 2\Delta\mu_{\vec{k}}\nu_{\vec{k}}] [\alpha_{\vec{k}}^+(1)\alpha_{\vec{k}}(1) + \\ & + \alpha_{\vec{k}}^+(2)\alpha_{\vec{k}}(2)] + \sum_{\vec{k}} [2X_{\vec{k}}\mu_{\vec{k}}\nu_{\vec{k}} - \Delta(\mu_{\vec{k}}^2 - \nu_{\vec{k}}^2)] [\alpha_{\vec{k}}^+(1)\alpha_{\vec{k}}^+(2) + \alpha_{\vec{k}}(2)\alpha_{\vec{k}}(1)] \end{aligned} \quad (1.3.6.)$$

$$\Delta = \frac{W}{eN} \sum_q \mu_q \nu_q$$

Treba napomenuti da je (1.3.6.) dobijen iz (1.3.1.) tako što su zanemarene sve forme četvrtog reda po operatorima α^+ i α . Stabilizacija hamiltonijana (1.3.6.) zahteva eliminaciju članova proporcionalnih $\alpha\alpha^+$ i $\alpha\alpha$. Ovo se postiže tako što se koeficijenti uz ovakve operatorske produkte izjednače sa nulom:

$$2X_{\vec{k}}\mu_{\vec{k}}\nu_{\vec{k}} - \Delta(\mu_{\vec{k}}^2 - \nu_{\vec{k}}^2) = 0 \quad (1.3.7.)$$

Ako se uzme u obzir da je $\mu_{\vec{k}}^2 + \nu_{\vec{k}}^2 = 1$ lako se dolazi do sledećeg rezultata:

$$\mu_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{X_{\vec{k}}}{\sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} \right) \quad ; \quad \nu_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{X_{\vec{k}}}{\sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} \right)$$

$$\mu_{\vec{k}}\nu_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} \quad (1.3.8.)$$

Na osnovu ovoga, hamiltonijan (1.3.6.) postaje:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{BCS} = & \sum_{\vec{k}} \left[X_{\vec{k}} - \frac{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}{\sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} \right] + \\ & + \sum_{\vec{k}} \sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2} [\alpha_{\vec{k}}^+(1)\alpha_{\vec{k}}(1) + \alpha_{\vec{k}}^+(2)\alpha_{\vec{k}}(2)] \end{aligned} \quad (1.3.9.)$$

Dobijeni izraz za hamiltonijan BCS-modela odnosi se samo na uski sloj impulsa oko graničnog impulsa K_F Fermi-sfere. Debljina ovoga sloja iznosi $2K_G$, gde je $K_G \sim 10^5 \text{ cm}^{-1}$. Pošto je $K_F \gg K_G$ izraz za elektronsku energiju se može približno uzeti u sledećem obliku:

$$X_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2}{2m} (K^2 - K_F^2) = \frac{\hbar^2}{2m} (K + K_F)(K - K_F) \approx \frac{\hbar^2 K_F}{m} (K - K_F) =$$

Ako se uvede promenljiva $\bar{J} = P - P_F$, onda izraz za energiju elementarnih ekscitacija postaje:

$$E_J = \sqrt{\Delta^2 + P_F^2 m^{-2} \bar{J}^2} \quad (1.3.11.)$$

U neposrednoj blizini granice Fermi-sfere je $\bar{J} \approx 0$, pa se može pisati:

$$E_J \approx \Delta + \frac{P_F^2 \bar{J}^2}{2m^2 \Delta}$$

Ako se formira izraz za faznu brzinu:

$$v_F = \frac{E_J}{\bar{J}} = \frac{\Delta}{\bar{J}} + \frac{P_F^2}{2m^2 \Delta} \bar{J} \quad (1.3.12.)$$

vidi se da on ima minimalnu vrednost:

$$\min v_F = \min \left(\frac{E_J}{\bar{J}} \right)_{\bar{J}} = \frac{m \Delta}{P_F} \sqrt{\Delta} = \sqrt{\Delta} \frac{P_F}{m} \quad (1.3.13.)$$

Pošto fazna brzina elementarnih ekscitacija koje kreiraju operatori a^+ ima pozitivan minimum, uslov za superfluidni transfer elektrona je ispunjen i time se može objasniti nestanak električnog otpora na temperaturama koje su nešto iznad absolutne nule. Operatori a^+ i a kreiraju i anihiliraju Kuperove parove, a do njihove kondenzacije, ako se o njih uopšte može govoriti, (operatori a^+ i a su takodje Fermi-operatori) dolazi ne u stanju sa nultim impulsom, već u stanju sa impulsom $P=P_F$.

Iz dosadašnjih razmatranja vidi se da veličina Δ igra bitnu ulogu u procesu superfluidnog transfera elektrona. Ako je ovaj prag energije ravan nuli, onda ne važi (1.3.12.) i u sistemu nastaje električni otpor. S obzirom na (1.3.6.) i (1.3.8.) veličina Δ se određuje iz uslova:

$$1 = \frac{W}{4N} \sum_K \left(\vec{X}_K^2 + \Delta^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.3.14.)$$

Odavde se vidi da uslov (1.3.14.) ima smisla samo ako je $W > 0$, tj. ako izmedju elektrona deluju privlačne sile. Da bi se dobio eksplicitni izraz za Δ potrebno je u (1.3.14.) preći od sumiranja na integraciju. S obzirom na (1.3.10.), uslov (1.3.14.) se može pisati na sledeći način:

$$1 = \frac{Wa^3}{8\pi^2 \hbar v_F} \int_{K_F - KG}^{K_F + KG} dK \frac{K^2}{\sqrt{(K - K_F)^2 + (\Delta t^{-1} v_F)^2}} \approx \frac{Wa^3 K_F^2}{8\pi^2 \hbar v_F} \int_{-KG}^{+KG} \frac{dK}{\sqrt{X^2 + \frac{\Delta^2}{\hbar^2 v_F^2}}} =$$

$$= \frac{W\alpha^3 K_F^2}{8\pi^2 \hbar v_F} \ln \frac{\sqrt{K_G^2 + \frac{\Delta^2}{\hbar^2 v_F^2}} + K_G}{\sqrt{K_G^2 + \frac{\Delta^2}{\hbar^2 v_F^2}} - K_G} \approx \frac{W\alpha^3 K_F^2}{8\pi^2 \hbar v_F} \ln \frac{4\hbar^2 v_F^2 K_G^2}{\Delta^2}$$

$$N_F = \frac{P_F}{m} ; \quad \alpha^3 = \frac{V}{N}$$

pa se za energetski prag Δ dobija izraz:

$$\Delta_{BCS} = 2\hbar v_F K_G \ell - \frac{4\pi^2 \hbar N_F}{W\alpha^3 K_F^2} = 2 \frac{P_F P_F}{m} \ell - \frac{4\pi^2 \hbar^3}{W m P_F \alpha^3} \quad (1.3.15.)$$

Odavde se vidi da Δ raste sa porastom konstante interakcije W . Ako se užme $K_G \sim 10^4 \text{ cm}^{-1}$ i $K_F \sim 10^8 \text{ cm}^{-1}$, onda je Δ pri veoma velikom W reda $0,001-0,01$ elektron volta. Ako se uzmu u obzir temperaturski efekti, onda se ispostavlja da Δ opada sa porastom temperature i da na nekoj kritičnoj temperaturi T_C postaje ravno nuli. S obzirom na procenjeni red veličine za Δ , kritične temperature iznose oko $10-20^\circ \text{K}$.

2. JEDNO NOVO REŠENJE ZA SUPERPROVODNI PRAG ENERGIJE

2.1. Formulisanje jednačine na osnovu Frelihove teorije

Kao što se videlo iz prethodnog izlaganja BCS su pretpostavili da je efektivna elektron-elektron interakcija različita od nule u uskom sloju impulsa oko granice Fermijeve sfere i da u ovom intervalu ne zavisi od impulsa. Van ovog intervala interakcija ravan nuli (vidi formulu 1.3.2.).

Ovdećemo pokušati da izvršimo analizu startujući od Frelihovog rezultata:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \chi_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} - N^{-1} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \frac{|F_{\vec{k}, \vec{q}}|^2 Y_{\vec{k}, \vec{q}}}{(\chi_{\vec{k}} - \chi_{\vec{q}})^2 - Y_{\vec{k}, \vec{q}}^2} a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^+ a_{-\vec{q}} a_{\vec{q}} \quad (2.1.1.)$$

Oznake u gornjem izrazu su sledeći:

$$F_{\vec{k}, \vec{q}} = -i \Psi \sqrt{\frac{\hbar}{2M\nu q}}$$

$$\Psi = \sqrt{\frac{1}{N^2} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} [(\vec{q} - \vec{k}) \cdot \vec{l}(\vec{q}) E_2(\vec{q} - \vec{k}) + \vec{k} \cdot \vec{l}(\vec{q}) E_2(\vec{k})]^2}$$

$$\Psi = \hbar \nu K \quad |\vec{K}| \equiv K$$

$$\chi_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} / \mu \quad ; \quad \mu = \frac{\hbar^2 K_F^2}{2m} \quad (2.1.2.)$$

$$E_2(\vec{u} - \vec{m}) = N^{-1} \sum_{\vec{k}} E_2(\vec{k}) e^{-i \vec{k}(\vec{u} - \vec{m})}$$

$$E_2(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}$$

Ako se uvedu u račun i spinska stanja elektrona onda se hamiltonijan (2.1.1.) može napisati u obliku:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \chi_{\vec{k}} [a_{\vec{k}}^+ (\frac{1}{2}) a_{\vec{k}} (\frac{1}{2}) + a_{-\vec{k}}^+ (-\frac{1}{2}) a_{-\vec{k}} (-\frac{1}{2})] -$$

$$- \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \phi_{\vec{k}, \vec{q}} a_{\vec{k}}^+ (\frac{1}{2}) a_{-\vec{k}}^+ (-\frac{1}{2}) a_{-\vec{q}} (-\frac{1}{2}) a_{\vec{q}} (\frac{1}{2}) \quad (2.1.3.)$$

S obzirom na (2.1.2.) interakciju pozitivno oblikuj.

$$\phi_{\vec{k}\vec{q}} = \frac{4m^2\psi^2}{\hbar^2 M} \frac{1}{(\vec{k}+\vec{q})^2} \frac{1}{(\vec{k}-\vec{q})^2 - (\frac{mv}{\hbar})^2} \quad (2.1.4.)$$

Na ovom mestu izvršićemo aproksimaciju koja je dobra samo u blizini granice Fermijeve sfere, to jest

$$(\vec{k}+\vec{q})^2 \approx (2k_F)^2 = 4k_F^2$$

Tada izraz za $\phi_{\vec{k}\vec{q}}$ postaje

$$\phi_{\vec{k}\vec{q}} = \frac{m^2\psi^2}{M\hbar^2 k_F^2} \frac{1}{(\vec{k}-\vec{q})^2 - K_0^2} ; \quad K_0 = \frac{mv}{\hbar} \quad (2.1.5.)$$

gde je $v \sim 10^5 \text{ cm sec}^{-1}$.

Ponavljajući istu proceduru kao i u trećem paragrafu prethodne glave, to jest prelazeći od operatora a na operator α po formulama (1.3.3.) dolazimo do zaključka da energija elementarnih pobudjenja ima oblik:

$$E(\vec{k}) = \sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2} \quad (2.1.6.)$$

i da se superprovodni prag energije određuje formula:

$$\Delta_{\vec{k}} = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{q}} \frac{\phi_{\vec{k},\vec{q}} \Delta_{\vec{q}}}{\sqrt{X_{\vec{q}}^2 + \Delta_{\vec{q}}^2}} \quad (2.1.7.)$$

Pretpostavljajući da je $X_{\vec{q}} \gg \Delta_{\vec{q}}$ (2.1.8.), jednačinu (2.1.7.) možemo pisati u obliku:

$$\Delta_{\vec{k}} = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{q}} \frac{\phi_{\vec{k},\vec{q}} \Delta_{\vec{q}}}{X_{\vec{q}}} \quad (2.1.9.)$$

Energija elektrona je data sa:

$$X_{\vec{q}} = \frac{\hbar^2}{2m} (q^2 - k_F^2) = \frac{\hbar^2}{2m} (q - k_F)(q + k_F) \quad (2.1.10.)$$

Ako u ovoj formuli izvršimo aproksimaciju

$$q + k_F \approx 2k_F ; \quad q - k_F = k_G \quad (2.1.11.)$$

gde je $k_G \sim 10^5 \div 10^6 \text{ cm}^{-1}$ granični impuls sloja oko Fermi sfere, jednačina (2.1.9.) može se napisati u obliku:

$$\Delta_{\vec{k}} = \frac{A}{2N} \sum_{\vec{q}} \frac{\Delta_{\vec{q}}}{(\vec{k}-\vec{q})^2 - K_0^2} \quad (2.1.12.)$$

gde je

$$A = \frac{m^3 \psi^2}{2M k_F^3 K_G^3 \hbar^4} \quad (2.1.13.)$$



Posle prelaska sa sume na integral po pravilu

$$\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \longrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{K} \quad (2.1.14.)$$

za određivanje superkonduktivnog praga energije dobijamo jednačinu:

$$\Delta(\vec{K}) = \frac{VA}{2(2\pi)^3} \int d^3 \vec{q} \frac{\Delta(\vec{q})}{(\vec{K} - \vec{q})^2 - K_0^2} \quad (2.1.15.)$$

$$\Delta(\vec{K}) \equiv \Delta \vec{z} ; \Delta(\vec{q}) \equiv \Delta \vec{q}$$

koja se bitno razlikuje od odgovarajuće jednačine teorije BCS.

2.2. Rešenje za superkonduktivni prag energije

Jednačina

$$\Delta(\vec{k}) = \frac{VA}{2(2\pi)^3} \int d^3\vec{q} \frac{\Delta(\vec{q})}{(\vec{k}-\vec{q})^2 - k_0^2}$$

$$\Delta(\vec{k}) \equiv \Delta \vec{r} \quad ; \quad \Delta(\vec{q}) \equiv \Delta \vec{q} \quad (2.2.1.)$$

koja definiše veličinu superkonduktivnog praga energije je homogena integralna jednačina pa prema tome njeno rešenje sadrži proizvoljno multiplikativnu konstantu. Odredjivanjem ove konstante ćemo se pozabaviti kasnije, ovde ćemo pristupiti formalnom rešavanju jednačine (2.2.1.).

Izvršićemo sledeće Furijeove transformacije veličine koje figurišu u (2.2.1.):

$$\Delta(\vec{k}) = \int d^3\vec{p} \Delta(\vec{p}) e^{i\vec{k}\vec{p}}$$

$$\frac{1}{(\vec{k}-\vec{q})^2 - k_0^2} = \int d^3\vec{R} F(\vec{R}) e^{i\vec{R}(\vec{k}-\vec{q})}$$

$$(2.2.2.)$$

Posle zamene (2.2.2.) u (2.2.1.), ova poslednja jednačina svodi se na algebarske jednačine sledećeg oblika:

$$\left[1 - \frac{VA}{2} F(\vec{r}) \right] \Delta(\vec{r}) = 0 \quad (2.2.3.)$$

Pre nego što pristupimo rešavanju ove algebarske jednačine potrebno je naći funkciju $F(\vec{r})$. Na osnovu (2.2.2.), posle inverzne Furije transformacije lako zaključujemo da funkcija $F(\vec{r})$ definisana izrazom:

$$F(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{Q} \frac{\ell}{Q^2 - k_0^2} \quad (2.2.4.)$$

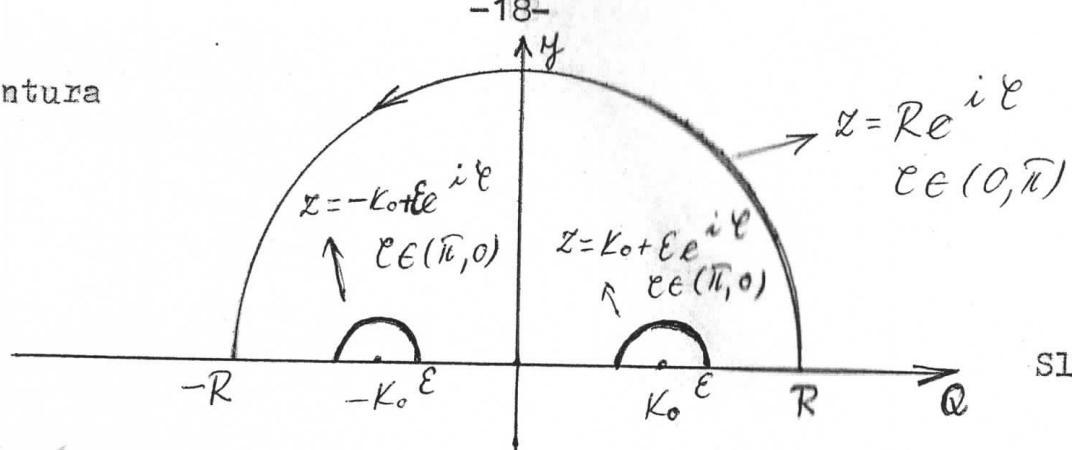
Posle integracije po polarnom uglu ϑ i zamene $\cos\vartheta=x$ poslednju jednačinu svodimo na oblik:

$$F(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{dQ Q \sin Qr}{Q^2 - k_0^2} \quad (2.2.5.)$$

Integral koji figuriše u (2.2.5.) rešava se u kompleksnoj ravni. Bira se integral tipa:

$$\oint_C \frac{Z \ell^{irz} dz}{Z^2 - k_0^2} = 0 \quad (2.2.6.)$$

i kontura



Slika 1.

Tada možemo pisati:

$$0 = \oint_C \frac{z e^{irz}}{z^2 - K_0^2} dz = \int_{-R}^R \frac{i R e^{i\theta} d\theta}{R^2 e^{2i\theta} - K_0^2} e^{-rR \cos \theta} e^{-rR \sin \theta} + \\ + \int_{-K_0 - \epsilon}^{-K_0 + \epsilon} \frac{dQ Q e^{irQ}}{Q^2 - K_0^2} + \int_{-K_0 + \epsilon}^{K_0 - \epsilon} \frac{dQ Q e^{irQ}}{Q^2 - K_0^2} + \int_{K_0 + \epsilon}^R \frac{dQ Q e^{irQ}}{Q^2 - K_0^2} + \\ + \int_{\pi}^0 \frac{(-K_0 + \epsilon e^{i\theta}) e^{ir(-K_0 + \epsilon e^{i\theta})} i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{(-K_0 + \epsilon e^{i\theta} - K_0)(-K_0 + \epsilon e^{i\theta} + K_0)} + \\ + \int_{\pi}^0 \frac{(K_0 + \epsilon e^{i\theta}) e^{ir(K_0 + \epsilon e^{i\theta})} i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{(K_0 + \epsilon e^{i\theta} - K_0)(K_0 + \epsilon e^{i\theta} + K_0)}$$

$$R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dQ Q e^{irQ}}{Q^2 - K_0^2} - \frac{i\pi}{2} e^{-irk_0} - \frac{i\pi}{2} e^{irk_0} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dQ Q e^{irQ}}{Q^2 - K_0^2} = i\pi \cos K_0 r$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dQ Q \cos Q r}{Q^2 - K_0^2} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dQ Q \sin Q r}{Q^2 - K_0^2} = i\pi \cos K_0 r$$

to jest konačno

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dQ Q \sin Q r}{Q^2 - K_0^2} = \frac{\pi}{2} \cos K_0 r \quad (2.2.7.)$$

Na osnovu dobijenog rezultata zaključujemo da je

$$F(r) \equiv F(r) = \frac{\cos K_0 r}{4\pi r} \quad (2.2.8.)$$

Jednačina (2.2.3.) dobija oblik:

$$(1 - \frac{VA}{8\pi r} \cos K_0 r) \Delta(\vec{r}) = 0 \quad (2.2.9.)$$

Rešenje ove jednačine data je sa :

$$\Delta(r) = \tilde{C} \delta(r - r_0) \quad (2.2.10.)$$

Pri čemu je r_0 najmanji koren jednačine

$$\cos K_0 r = \frac{8\pi}{VA} r \quad (2.2.11.)$$

Poslednja jednačina se može rešiti samo grafički i zbog toga je neophodno da se proceni red veličine A. Ako se uzme

$$m \sim 10^{-27} \text{ gr} , M \sim 10^{-22} \text{ gr} , \Psi \sim 10^{-12} \text{ } 10^7 \sim 10^{-5}$$

$$\Psi \sim 10^{-5} \text{ g cm}^{-1} , k_F \sim 10^8 \text{ cm}^{-1} , k_G \sim 10^6 \text{ cm}^{-1} \quad (2.2.12.)$$

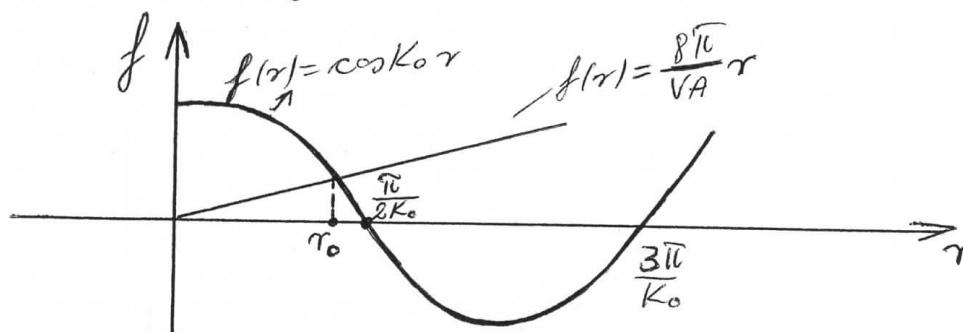
$$\hbar \sim 10^{-27} \text{ erg sek}$$

nalazimo da je

$$A \sim 5 \cdot 10^8 \text{ erg} \quad (2.2.13.)$$

Ako još pretpostavimo da je zapremina kristala $V \sim 1 \text{ cm}^3$ onda je jasno da prava na desnoj strani jednačine (2.2.11.) ima izvanredno mali koeficijent pravca i da prvi put seče funkciju $\cos K_0 r$ u blizini tačke (slika 2.):

$$r_0 \approx \frac{\pi}{2k_0} \sim 10^{-5} \text{ cm} \quad (2.2.14.)$$



Slika 2.

Pošto je $\Delta(\vec{K}) = \int d^3\vec{r} \Delta(\vec{r}) e^{i\vec{K}\vec{r}}$ (2.2.15.)

i $\Delta(\vec{r}) = \tilde{C} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ (2.2.16.)

lako dolazimo do rezultata :

$$\Delta(K) = C \frac{\sin r_0 K}{r_0 K} \quad (2.2.17.)$$

Kao što se vidi dobijeni prag energije, za razliku od odgovarajućeg praga energije u BCS teorije zavisi od talasnog vektora \vec{k} ili od impulsa $P = \hbar k$. Ovo rešenje sadrži i proizvoljnu konstantu pa kao otvoreno ostaje pitanje određivanje ove proizvoljne konstante. Ovim problemom pozabavićemo u sledećem paragrafu.

2.3. Normiranje rešenja

U prethodnom paragrafu dođen je izraz za superkonduktivni prag energije Δ . Veličina Δ , sa razliku od teorije BCS zavisi od impulsa i sadrži proizvoljnu multiplikativnu konstantu. Ova proizvoljna konstanta se polagajuće zbog toga što je integralna jednačina za određivanju veličinu Δ homogena.

Da bi teorija dobila svoju konačnu formu neophodno je da se proizvoljna konstanta C odredi na osnovu nekih dopunskih uslova.

Najprirodniji dopunski uslov bio bi taj da sistem elementarnih ekscitacija sa energijom $E = \sqrt{X^2 + \Delta^2}$ ima minimum slobodne energije. Kao što je poznato minimum slobodne energije odgovara najstabilnije stanje sistema. Ovde se nećemo upuštati u komplikovane proračune slobodne energije i traženje njenog minimuma, jer možemo koristiti rezultate rada [5] gde je za sličan zakon disperzije pokazano da minimum slobodne energije odgovara nulta vrednost konstante ($C=0$). U tom slučaju zakon disperzije

$$E = \sqrt{X^2 + \Delta^2} \longrightarrow X \quad (2.3.1.)$$

što znači da Kuperovi parovi predstavljaju metastabilna stanja sistema. Stabilne ekscitacije sistema su „obučeni“ elektroni sa energijom X kao što pokazuje rezultat (2.3.1.).

Zbog ovoga se mora pronaći neki drugi kriterijum za određivanje konstante C. S obzirom da je superprovodni prag energije iz teorije BCS, Δ_{BCS} do sada mnogo puta eksperimentalno proveren ispostavilo se da je po redu veličine dobar, mi ćemo rešenje Δ normirati tako što ćemo zahtevati da u sloju talasnih vektora $(k_F - k_G, k_F + k_G)$ oko Fermijeve sfere srednja kvadratna vrednost veličine Δ bude ravno kvadratu veličine Δ_{BCS} koju daje teorija BCS-a.

S obzirom da je $k_F \gg k_G$ zapremina sfernog sloja u kome se vrši usrednjavanje može se izračunati na sledeći način:

$$\begin{aligned} \oint = \frac{4\pi}{3} [(k_F + k_G)^3 - (k_F - k_G)^3] &\approx \frac{4\pi}{3} [k_F^3 + 3k_F^2 k_G - \\ - k_F^3 + 3k_F^2 k_G] = \frac{4\pi}{3} 6k_F^2 k_G = 8\pi k_F^2 k_G \end{aligned} \quad (2.3.2.)$$

Prema tome uslov normiranja će glasiti:

$$\Delta_{BCS}^2 = \frac{C^2}{8\pi k_F^2 k_G} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{k_F - k_G}^{k_F + k_G} dk K^2 \Delta^2(K) \quad (2.3.3.)$$

Posle elementarnih integracija, iz formule (2.3.3.) dobija se sledeća vrednost za konstantu C:

$$C = \sqrt{2} K_F r_0 \left[1 - \frac{\sin r_0 K_F \cos r_0 K_F}{2 r_0 K_F} \right]^{-\frac{1}{2}} \Delta_{BCS} \quad (2.3.4.)$$

Na osnovu ovoga konačan izraz za superkonduktivni prag energije ima oblik:

$$\Delta(K) = \Delta_{BCS} \frac{2 \sqrt{r_0 K_F}}{\sqrt{2 r_0 K_F - \sin r_0 K_F \cos r_0 K_F}} \frac{K_F}{K} \sin K r_0 \quad K \in (K_F - K_G, K_F + K_G) \quad (2.3.5.)$$

Pošto je $r_0 \sim 10^{-5}$ cm i $K_F \sim 10^6$ cm dolazi se do zaključka da je $2 r_0 K_F \gg \sin r_0 K_F \cos r_0 K_F$ približan izraz za superkonduktivni prag energije:

$$\Delta(K) = \Delta_{BCS} \sqrt{2} \frac{K_F}{K} \sin K r_0 \quad (2.3.6.)$$

$$K \in (K_F - K_G, K_F + K_G)$$

Kao što se vidi dobijeni prag energije $\Delta(K)$ ima periodičnu zavisnost od K . Najveće vrednosti za $K = K_F - K_G$ dobija i to ukoliko je $(K_F - K_G) = (n+1/2) \frac{\pi}{r_0}$ gde je n neki ceo broj. Ova maksimalna vrednost iznosi:

$$[\Delta(K)]_{\max} = \sqrt{2} \frac{1}{1 - \frac{K_G}{K_F}} \Delta_{BCS} \approx \sqrt{2} \Delta_{BCS} \quad (2.3.7.)$$

Zaključak je da proračun koji je ovde izvršen daje u optimalnom slučaju superprovodni prag energije koji je ~~vezutno~~ veći od superkonduktivnog praga energije u teoriju BCS-a. S druge strane za vrednosti $K = \frac{n\pi}{r_0}$, gde je n neki ceo broj vrednost superkonduktivnog praga energije postaje ravno nuli.

Otuda se može izvesti opšti zaključak da neki Kuperovi parovi, sa impulsima bliskim donjem kraju superkonduktivnog sloja provozikuju $\sqrt{2}$ puta izrazitije superprovodni efekat nego što bi se očekivalo prema teoriji BCS-a, dok neki drugi sa impulsima $K = \frac{n\pi}{r_0}$ uopšte ne učestvuju u superkonduktivnom transferu.

ZAKLJUČAK

Rezultati analiza koji su izvršeni u ovom radu mogu se rezimirati na sledeći način:

- 1) Rešavanje jednačine za superkonduktivni prag energije sa tačno uzetom Frelihovom elektron-elektron interakcijom daje sinusoidalnu zavisnost praga energije od impulsa. Period ove funkcije karakteriše veličina r_0 koja je obrnuto proporcionalna brzini prostiranja zvuka kroz metal.
- 2) Maksimalan superprovodni efekt zapaža se kod Kuperovih parova čiji su impulsi na donjoj granici superprovodnog sloja to jest na impulsima $k \approx k_F - k_G$. Parovi sa impulsima $k = \frac{m\pi}{r_0}$ ne kreću se superfluidno.
- 3) U optimalnom slučaju vrednost superkonduktivnog praga energije dobijena u ovim radu $\sqrt{2}$ puta je veća nego u teoriji BCS-a.

Na kraju treba naglasiti da aproksimacije koje su izvršene u radu čine dobijene rezultate valjanim samo do uski sloj impulsa oko granice Fermi sfere. U oblasti $k \approx 0$ rezultati ne važe jer ne važi uljivoj oblasti ni aproksimacija koje su korišćene u računu.

Pored ovoga treba napomenuti da je postupak rešavanja dao prag energije određen do na multiplikativnu konstantu, koja nije mogla biti izračunata iz zahteva da sistem Kuperovih parova ima minimum slobodne energije. Ovaj zahtev vodio je na pretvaranje Kuperovih parova u elektrone. Na ovaj način pokazano je da su elektroni stabilan sistem u metalu a ne Kuperovi parovi. Konstanta C određeno je iz zahteva da srednja kvadratna vrednost nadjenog praga energije u superprovodnom sloju impulsa bude jednak kvadratu praga energije koji daje BCS teorija. Krajnji rezultat je bitno zavisao od pomenutog uslova normiranja, pa bi trebalo razmisliti i o nekakvima drugim tipovima normiranja.

Literatura

- /1/ H.Frölich: Proc. Roy. Soc. A215, 291 (1952).
- /2/ A.S.Davidov: Kvantovaja mehanika, GIFML, Moskva, 1963.
- /3/ D.N.Zubarev: Neravnovesnaja statističeskaja termodinamika, "Nauka", Moskva, 1971.
- /4/A.A.Abrikosov, L.P.Gorkov i I.E.Dzjalošinskij: Metodi kvantovoј teorii polja v statističeskoj fizike, GIFML, Moskva, 1962.
- /5/ S.D.Stojanović, I.P. Šetrajčić, M.J. Škrinjar, B.Tošić, Phys.Stat.Sol.79, 433 (1977).

