

7-142

Природно-математички факултет
Радна заједница заједничких послова
НОВИ САД

Примљено: 11. V 1978			
Орг. јед.	Број	Прилог	Вредност
03	4/98		

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA FIZIKU

SK

METODI MERENJA MAGNETNE INDUKCIJE

- diplomski rad -

Kandidat

M U H I B E L A

S A D R Ž A J

	strana
Uvod	1
I Fizičke osnove merenja magnetnog polja	1
1. 1. Magnetna sila	2
1. 2. Elektromagnetna indukcija	3
1. 3. Magnetostrikcija	3
1. 4. Faraday-ev efekat	3
1. 5. Nuklearna magnetna rezonancija	4
1. 6. Galvanomagnetični efekti	5
1. 6. 1. Hall-ov efekat	7
1. 6. 2. Gauss-ov efekat	14
1. 6. 3. Ettinghausen-ov efekat	16
1. 6. 4. Nernst-ov efekat	16
1. 7. Termomagnete pojave	17
1. 7. 1. Righi-Leduc-ov efekat	17
1. 7. 2. Maggi-Righi-Leduc-ov efekat	18
1. 7. 3. Transverzalni Nernst-Ettinghausenov efekat	18
1. 7. 4. Longitudinalni Nernst-Ettinghausen-ov efekat	18
II Merenje magnetne indukcije fluksmetrom	20
III Merenje magnetne indukcije na osnovu Hall-ovog efekta	25
3. 1. Merenje magnetne indukcije pomoću kristala silicijuma	25
3. 2. Merenje magnetne indukcije Hall-ovom sondom	28
Zaključak	31
Literatura	32

Uvod

Ovaj rad prikazuje načine merenja magnetne indukcije. Centralna tema rada je merenje indukcije fluksmetrom i na osnovu Hall-ovog efekta. U tu svrhu izvršene su kalibracije poluprovodničkih uzoraka i fluksmetara u poznatom magnetnom polju i tako su postale pogodne za merenje nepoznate magnetne indukcije.

I Fizičke osnove merenja magnetnog polja

U ovom poglavlju opisaćemo one pojave koje se javljaju pod uticajem magnetnog polja odnosno koje se upotrebljavaju za merenje magnetne indukcije. Nismo u mogućnosti da damo potpuni zbir tih pojava i metoda jer se ne može obuhvatiti u jednom radu tako obilan materijal. Zato ćemo prikazati samo one pojave i metode koje su najkarakterističnije i najviše primenjivane u mernoj tehnici.



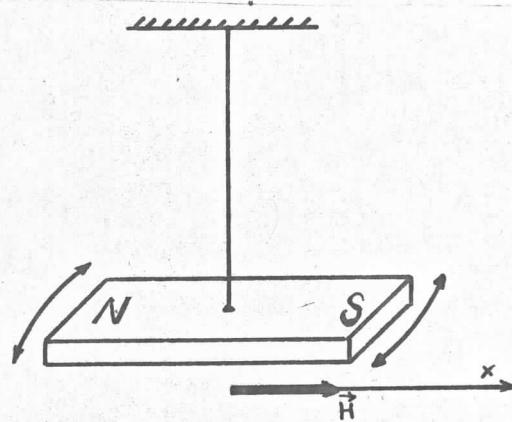
1. 1. Magnetna sila

Na provodnik dužine $d\vec{l}$ u kojoj teče struja jačine I magnetno polje će delovati silom koja je srazmerna sa indukcijom polja:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}).$$

Merenjem magnetne sile može se odrediti i magnetna indukcija.

Magnetna sila meri se analitičkom vagom, torzionim metodama ili na neki drugi način. Magnetometri su takvi instrumenti kod kojih se magnetna indukcija određuje na osnovu obrtnog momenta permanentnog magneta u magnetnom polju. Poznata je i sledeća izvedba:



Slika 1.1.

Magnetna šipka ili igla može se slobodno kretati oko vertikalne ose a ravnotežni položaj je u Ox pravcu. Ako šipku izvedemo iz ravnotežnog položaja javljaju se obrtne oscilacije sa periodom

$$T = \sqrt{\frac{I}{mH}}$$

Znajući moment inercije (I) i magnetni moment magneta (m) merenjem T može se naći jačina magnetnog polja.

1. 2. Elektromagnetna indukcija

Neke metode za merenje magnetne indukcije zasnivaju se na pojavi elektromagnetne indukcije.

Prilikom promene fluksa $\Delta\Phi = S \Delta B$ kroz kalem prečnika S i broja navoja N indukuje se elektromotorna sila

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -NS \frac{dB}{dt}.$$

Naponski udar se meri pomoću balističkog galvanometra. Ovu pojavu ćemo detaljnije razmatrati u drugom poglavlju.

1. 3. Magnetostrikcija

Poznata je i pojava kada feromagnetna tela pod uticajem magnetnog polja menjaju svoje dimenzije. Magnetostrikcija se naziva i kao Joulle-ov efekat a najviše se primenjuje kod dobijanja ultrazvuka.

1. 4. Faraday-ev efekat

Optički inaktivne supstance pod uticajem magnetnog polja postaju aktivne u pravcu polja. Ugao obrtanja ravnih polarizacija svetlosti zavisi od magnetne indukcije:

$$\varphi = V d B.$$

d je put svetlosti u materijalu a V je Verdet-ov koeficijent čija vrednost zavisi od materijala, od temperature i od talasne dužine svetlosti.

- o -

U mernoj tehnici posebnu ulogu igraju atomske i nuklearne metode. Ovde ćemo dati jedan karakterističan primer.

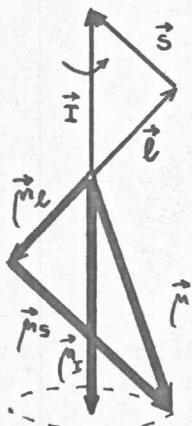
1. 5. Nuklearna magnetna rezonancija

Magnetni moment atomskog jezgra sa spinom I dat je na sledeći način:

$$\mu_I = g_I \mu_N I,$$

gde je $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$ nuklearni magneton.

Nuklearni g -faktor za svako jezgro uzima karakteristične vrednosti. Kada se jezgro nađe u magnetnom polju indukcije B_0 , vektor magnetnog momenta jezgra može zauzeti $2I+1$ različitih položaja. Vektorski model je dat na donjoj slici:



Vektorski model jezgra

Slika 1.2.

Na primer, vektor magnetnog momenta vodonika, protona, u magnetnom polju može posedovati samo dve orijentacije: paralelnu i antiparalelnu u odnosu na magnetno polje B_0 .

Spin protona je $I = \frac{1}{2}$ pa broj mogućih orijentacija je $2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$. Energetska razlika između dve orijentacije je:

$$\Delta E = 2 \mu_I B_0 = 2 g_I \mu_N I B_0 = g_I \mu_N B_0.$$

Prelaz iz paralelne u antiparalelnu orijentaciju ogleda se u selektivnoj apsorpciji energije spoljašnjeg magnetnog polja. Prilikom prelaza iz antiparalelne u paralelnu orijentaciju ova energija se emituje u obliku zračenja. Energija emitovanih kvanata je:

$$\Delta E = \hbar \gamma = \hbar \omega = g_I \mu_N B_0.$$

Do apsorpcije energije ΔE može doći ako normalno na magnetno polj indukcije B_0 deluje promenljivo polje sa frekvencijom

$$\mathcal{D} = \frac{\Delta E}{h} \quad \text{odnosno} \quad \mathcal{D} = \frac{q_I M_N B_0}{h} = \frac{2 M_I B_0}{h}$$

Vidi se da frekvencija linearno zavisi od magnetnog polja B_0 preko jedne konstante

$$B_0 = k \mathcal{D}$$

Za protone $k = 2,34858 \cdot 10^{-8} \text{ T s}$.

Ovu pojavu nazivamo protonskom rezonancijom.

Merenje magnetnog polja B_0 metodom nuklearne rezonancije, svodi se na merenje frekvencije \mathcal{D} . Pojava rezonancije može se vrlo precizno ustanoviti na različite načine, a frekvencija se može vrlo tačno izmeriti.

1. 6. Galvanomagnetni efekti

One pojave koje se javljaju u materijalima pri istovremenom dejstvu električnog i magnetnog polja, nazivaju se galvanomagnetni efekti.

U električnom i magnetnom polju nanelektrisane čestice se kreću pod uticajem električne i Lorentz-ove sile:

$$\vec{F} = e \vec{E} + e (\vec{v} \times \vec{B}) = e \vec{E} + e [\vec{v} \vec{B}] = m^* \ddot{\vec{r}}$$

m^* je efektivna masa čestice.

U magnetnom polju nanelektrisana čestica sa komponentama brzine v_x i v_y kreće se na sledeći način:

Magnetno polje deluje na normalnu komponentu brzine, i čestica se kreće po krugu poluprečnika

$$r = \frac{m^* v_x}{e B} = \frac{v_x}{\omega_c} \quad ,$$

a duž polja se pomera konstantnom brzinom \vec{v}_\parallel . Rezultujuća trajektorija je cilindrična zavojnica (helikoidalna linija).

Električno polje će menjati samo \vec{v}_\parallel brzinu.

U prisutstvu transverzalnih \vec{E} i \vec{B} polja putanja čestice sa početnom brzinom $\vec{v}_\parallel = 0$ je cikloida sa poluprečnikom kruga

$$\tau = \frac{m^* E}{e B^2},$$

a centar kruga se kreće pravolinijski u normalnom pravcu, i na jedno i m na drugo polje brzinom drifta

$$\vec{v}_d = \frac{[EB]}{B^2}.$$

U slučaju $\vec{v}_\parallel \perp \vec{B}$ trajektorija je toroida, a u slučaju $\vec{v}_\parallel \parallel \vec{B} \perp \vec{E}$ ne deluje ni električno ni magnetno polje. U čvrstim telima sudari ometaju ovo usmereno kretanje čestice, i posle svakog sudara putanja su određena sa novim parametrima.

Odnos srednjeg slobodnog vremena i periode obrtanja će definisati jakost prisutnog polja:

- Kod jakih polja

$$\frac{\tau}{T} = \frac{\zeta \omega_c}{2\pi} = \frac{e\zeta}{m^*} \frac{B}{2\pi} \gg 1.$$

Kako je srednja dužina slobodnog puta $l = v\tau = r\omega_c\zeta$, odavde sledi da je jako ono polje gde je ispunjen uslov

$$\frac{l}{r} \gg 1 \quad \text{ili} \quad l \gg r.$$

- Kod slabih polja

$$\frac{e\zeta}{m^*} \frac{B}{2\pi} \ll 1 \quad \text{ili je} \quad \tau \gg l$$

a krivina putanja je neznatna.

Među galvanomagnetske efekte spadaju:

1. Hall-ov efekat
2. Gauss-ov efekat
3. Ettinghausen-ov efekat
4. Nernst-ov efekat

U mernoj tehnici najviše se primenjuju Hall-ov i Gauss-ov efekat pa ćemo te pojave detaljnije opisati.

1. 6. 1. Hall-ov efekat

Još 1879 godine E. H. Hall je otkrio da se između bočnih ivica tanke metalne ploče, koje je postavljena normalno u magnetno polje, i kroz koju protiče električna struja, javlja se potencijalna razlika. Ova pojava je otkrivena i kod poluprovodnika.

Posmatrajmo poluprovodnik poprečnog preseka $a \cdot c$ i dužine b . Neka je smer električnog polja x -osa, tj. $\vec{E} = (E, 0, 0)$ a smer magnetnog polja je $\vec{B} = (0, B, 0)$ ili y -osa. Prilikom uspostavljanja električnog polja javlja se struja

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Posle uključivanja magnetnog polja deluje i Lorentz-ova sila

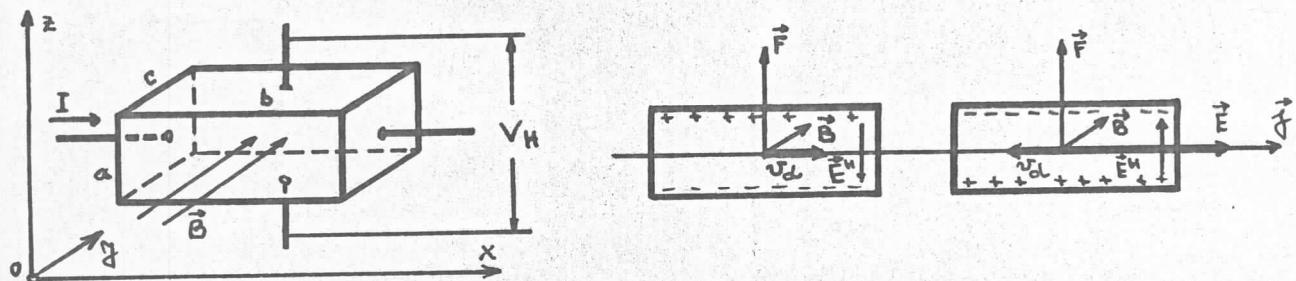
$$\vec{F} = e(\vec{v}_d \times \vec{B}).$$

čija smer ne zavisi od predznaka nosioca nanelektrisanja jer je

$$\vec{v}_d = \rho_d \vec{E} = \frac{e \langle \xi \rangle}{m^*} \vec{E} \quad \text{odnosno}$$

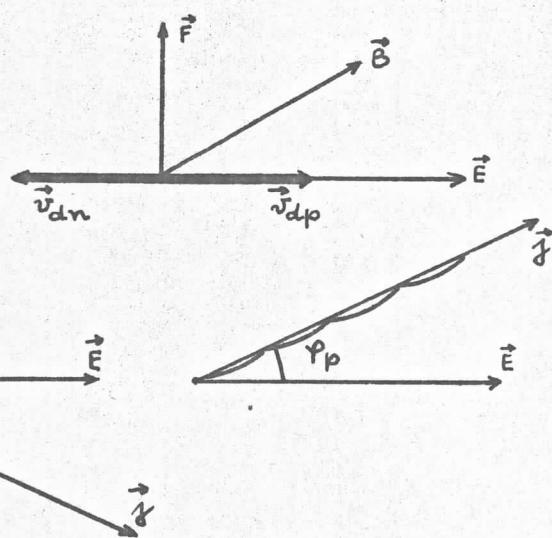
$$\vec{F} = e^2 \frac{\langle \xi \rangle}{m^*} (\vec{E} \times \vec{B}).$$

Glavni nosioci nanelektrisanja, tj. elektroni kod n-tipa i šupljine kod p-tipa kretaju se prema graničnim pljpsnim kristala i tamo se nagomilavaju. Usled koncentracije tih nanelektrisanja javlja se transverzalno električno polje \vec{E}^H koje deluje na ostale nosioce i uravnotežava elektromagnetnu силу. \vec{E}^H je Hall-ovo polje a pojava je prikazana na donjoj slici:



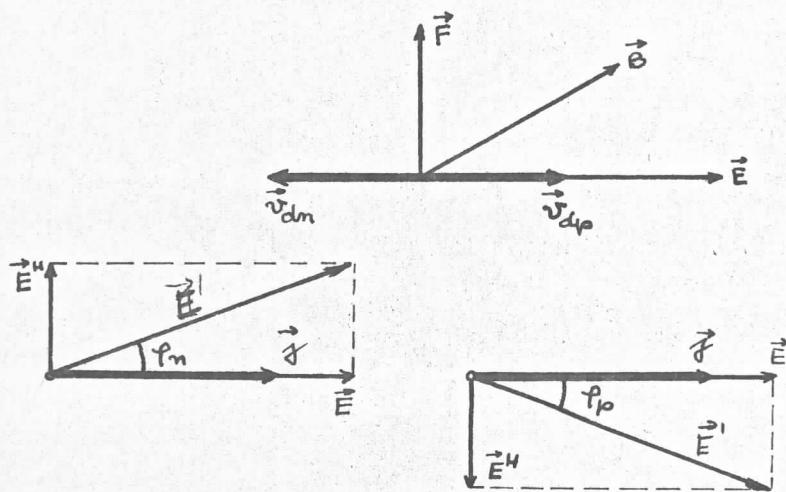
SLIKA 13.

- a) Kod poluprovodnika beskonačnih dimenzija nema Hall-ovog polja, a ugao između vektora električnog polja i gustine struje je φ (Hall-ov ugao). Na slici 1.4. smo prikazali kako se javlja ovaj ugao kod različitih naelektrisanja.



slika 1.4.

- b) Kod poluprovodnika konačnih dimenzija (slika 1.5.) Hall-ovo polje će kompenzovati Lorentz-ovu силу и носиoci naelektrisanja se kreću pravolinijski duž x-ose (slika 1.5.).



slika 1.5.

Sada se nosioci naelektrisanja kreću tako, kao da deluje samo prvobitno električno polje \vec{E} . Vektori \vec{E} i \vec{j} su kolinearni, međutim između rezultujućeg električnog polja $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{E}^H$

i gustine struje \vec{j} nalazi se ugao φ . Prethodne i sadašnje ekvipotencijalne površine su takođe pod Hall-ovim uglom φ .

Hall je eksperimentalnim putem došao do sledeće jednačine:

$$\vec{E}^H = R(\vec{B} \times \vec{j}). \quad (1)$$

R je Hall-ova konstanta i zavisi od osobine uzorka a izračunava se iz sledeće ravnoteže:

$$e\vec{E}^H + \vec{F} = 0,$$

odavde je

$$\vec{E}^H = -\frac{1}{e}\vec{F} = -(\vec{v}_d \times \vec{B}) = -\rho_d(\vec{E} \times \vec{B}).$$

S druge strane je iz (1)

$$\vec{E}_H = -R(\vec{j} \times \vec{B}) = -RG(\vec{E} \times \vec{B}).$$

Poređenjem ove dve jednačine vidi se da je

$$RG = \rho_d \quad \text{ili} \quad R = \frac{\rho_d}{G} = \frac{\rho_d}{en\rho_d} = \frac{1}{en}.$$

Merenjem Hall-ovog napona

$$V_H = cE^H = cRB\vec{j} = cRB \frac{I}{ac} = R \frac{IB}{a},$$

debljine ploče, jačine struje I i magnetne indukcije B može se naći koncentracija nosioca naelektrisanja.

Predznak Hall-ove konstante nam pokazuje i mehanizam provođenja. Hall-ov ugao se nađe na sledeći način (slika 1.5.):

$$t_H = \frac{E^H}{E} = -R \frac{B \cdot E}{E} = -M_d B.$$

- o -

Hall-ov efekat možemo objasniti i pomoću kvantne mehanike i statističke fizike.

Rešenjem Schrödinger-ove jednačine kristala i uvođenjem statističkih pojmova, dobija se Boltzmann-ova transportna jednačina:

$$\begin{aligned} \vec{j} = & e^2 K_{11}' \vec{E} - e K_{11}' T \nabla \frac{F}{T} - e K_{21}' \frac{\nabla T}{T} + \\ & + \left[\frac{e^3}{m^*} K_{12}' \vec{E} - \frac{e^2}{m^*} K_{12}' T \nabla \frac{F}{T} - \frac{e^2}{m^*} K_{22}' \frac{\nabla T}{T}, \vec{B} \right] + \\ & + \left(\frac{e^4}{m^{*2}} K_{13}' \vec{E} - \frac{e^3}{m^{*2}} K_{13}' T \nabla \frac{F}{T} - \frac{e^3}{m^{*2}} K_{23}' \frac{\nabla T}{T}, \vec{B} \right) \vec{B} \quad (2) \end{aligned}$$

U prvom redu prvi član se odnosi na omsku struju, a drugi i treći član pokazuju one struje, koje potiču od dejstva hemijskog potencijala (difuzija) i temperaturnog gradijenta (termoelektrične struje).

Drugi red se odnosi na transverzalne galvanomagnetne i termomagnetne struje, a treći red nam pokazuje one longitudinalne strujne promene, koje se javljaju pod dejstvom magnetnog polja.

K_{rs}' je tenzor transportnih koeficijenata čiji elementi su dati kao

$$K_{rs}'^{ij} = -\frac{1}{4\pi^3} \int_{(V_k)} \frac{E^{r-1} \vec{\epsilon}^s}{1 + \frac{e^2 \vec{\epsilon}^2}{|m^*|} (\vec{B}, m^* \vec{B})} \frac{\partial f_0}{\partial E} v_i v_j d \vec{\epsilon}_k .$$

a) Uzmimo na primer poluprovodnik beskonačnih dimenzija. U opštem slučaju može se predpostaviti, da je poluprovodnik homogen ($\nabla F=0$) i izotermičan ($\nabla=0$). Jednačina (2) se svodi na

$$\vec{j} = e^2 K'_{11} \vec{E} + \frac{e^3}{m^*} K'_{12} [\vec{E} \vec{B}] + \frac{e^4}{m^{**}} K'_{13} (\vec{E} \vec{B}) \vec{B}.$$

Kod transverzalnih $\vec{B}=(0, B, 0)$ i $\vec{E}=(E, 0, 0)$ polja skalarni proizvod je nula, pa se dobija da je

$$\vec{j} = e^2 K'_{11} \vec{E} + \frac{e^3}{m^*} K'_{12} [\vec{E} \vec{B}], \quad (3)$$

a komponente su

$$j_x = e^2 K'_{11} E_x, \quad j_y = 0, \quad j_z = \frac{e^3}{m^*} K'_{12} B E_x. \quad (4)$$

Na osnovu slike 1.4. i jednačine (4), Hall-ov ugao je dat kao:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{j_z}{j_x} = \frac{e}{m^*} \frac{K'_{12}}{K'_{11}} B = M_H B,$$

gde je

$$M_H = \frac{e}{m^*} \frac{K'_{12}}{K'_{11}} \quad (5)$$

Hall-ova pokretljivost

b) Kod poluprovodnika konačnih dimenzija (slike 1.3. i 1.5.) treba da se pojavi električno polje i duž z-ose. Inače bi došlo do paradoksalne situacije: U slučaju $\vec{E}=(E_x, 0, 0)$ i $\vec{B}=(0, B, 0)$ gustina struje je $\vec{j}=(j_x, 0, 0)$. To se vidi i na slici 1.5. Međutim za $j_z=0$ iz (4) dobijaju se nemogući uslovi: $E_x=0$ i $j_x=0$. Zbog toga ćemo predpostaviti da su vektori dati u ovom obliku:

$$\vec{E}=(E_x, E_y, E_z); \quad \vec{B}=(0, B, 0); \quad \vec{j}=(\bar{j}_x, 0, 0).$$

Kako je $[\mathbf{EB}] = (-E_z B, 0, E_x B)$, komponente vektora gustine struje (3) su:

$$j_x = e^2 K'_{11} E_x - \frac{e^3}{m^*} K'_{12} B E_z \neq 0 \quad (6)$$

$$j_y = e^2 K'_{11} E_y = 0 \rightarrow E_y = 0$$

$$j_z = e^2 K'_{11} E_z + \frac{e^3}{m^*} K'_{12} B E_x = 0$$

Iz poslednjeg reda i (5) jačina Hall-ovog polja je

$$E_z = -\frac{e}{m^*} \frac{K'_{12}}{K'_{11}} B E_x = -\gamma^H B E_x \quad (7)$$

Zamenom (7) u (6) dobija se

$$j_x = e^2 K'_{11} E_x + \frac{e^4}{m^{*2}} \frac{K'^{12}_2}{K'^{11}_1} B^2 E_x = \sigma_B E_x \quad (8)$$

Specifična provodljivost duž x-ose je definisana kao

$$\sigma_B = e^2 K'_{11} + \frac{e^4}{m^{*2}} \frac{K'^{12}_2 B^2}{K'^{11}_1} = e^2 K'_{11} [1 + \gamma^H B^2] \quad (9)$$

U saglasnosti sa jednačinom (1) Hall-ova konstanta je

$$R = -\frac{\vec{E}^H}{[\vec{j} \cdot \vec{B}]} = -\frac{E_z}{j_x B} \quad ,$$

a jednačine (7) i (8) daju sledeću vezu:

$$E_z = -\gamma^H B E_x = -\gamma^H B \frac{j_x}{\sigma_B} \quad .$$

Upoređenjem ove dve jednačine dobićemo da je

$$R = \frac{\gamma^H}{\sigma_B} \quad .$$

Zamenom (5) i (9) u ovu relaciju

$$R = \frac{\gamma^H}{e^2 K'_{11} (1 + \gamma^H B^2)} = -\frac{\frac{e}{m^*} \frac{K'_{12}}{K'_{11}}}{e^2 K'_{11} [1 + \frac{e^2}{m^{*2}} (\frac{K'_{12}}{K'_{11}})^2 B^2]} \quad .$$

Znajući koeficijente

$$K'_{11} = \frac{n}{m^*} \left\langle \frac{\tilde{e}}{1 + \tilde{m}^2 B^2} \right\rangle_i \quad K'_{12} = \frac{n}{m^*} \left\langle \frac{\tilde{e}^2}{1 + \tilde{m}^2 B^2} \right\rangle ,$$

može se dobiti relacija koja pokazuje kako zavisi Hall-ova konstanta od magnetnog polja:

$$R = \frac{\frac{e}{m^*} \left\langle \frac{\tilde{e}^2}{1 + \tilde{m}^2 B^2} \right\rangle}{\frac{e^2 n^2}{m^*} \left\langle \frac{\tilde{e}}{1 + \tilde{m}^2 B^2} \right\rangle \left[1 + \frac{e^2}{m^{*2}} \left\langle \frac{\tilde{e}^2}{1 + \tilde{m}^2 B^2} \right\rangle^2 B^2 \right]} .$$

Pomoću jednačine $\tilde{m} = \frac{e \tilde{e}}{m^*}$ Hall-ova konstanta je

$$R = \frac{1}{en} \frac{\left\langle \frac{\tilde{m}^2}{1 + \tilde{m}^2 B^2} \right\rangle}{\left\langle \frac{\tilde{m}}{1 + \tilde{m}^2 B^2} \right\rangle^2 + \left\langle \frac{\tilde{m}^2}{1 + \tilde{m}^2 B^2} \right\rangle^2 B^2} .$$

U opštem slučaju za različite nosioce nanelektrisanja:

$$R = \frac{\sum e_\alpha n_\alpha \left\langle \frac{\tilde{m}_\alpha^2}{1 + \tilde{m}_\alpha^2 B^2} \right\rangle}{\left(\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \left\langle \frac{\tilde{m}_\alpha}{1 + \tilde{m}_\alpha^2 B^2} \right\rangle \right)^2 + \left(\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \left\langle \frac{\tilde{m}_\alpha^2}{1 + \tilde{m}_\alpha^2 B^2} \right\rangle \right)^2 B^2}$$

a) Za slabo magnetno polje, koje smo definisali kao

$$\frac{e \tilde{e}}{m^*} \frac{B}{2\pi} \gg 1$$

može se dokazati da je Hall-ova konstanta $R = \frac{A}{en}$. A zavisi od mehanizma rasejanja.

Kod nedegenerisanih poluprovodnika

$$A = \frac{\Gamma\left(\frac{f}{2} + 2p\right) \cdot \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{f}{2} + p\right)\right]^2}$$

(Γ je gama funkcija).

Kod rasejanja na jonskim primesama $p = \frac{3}{2}$ a $A = \frac{315\pi}{512}$
a prilikom rasejanja na termičkim fononima

$$p = -\frac{1}{2}; \quad A = \frac{3\pi}{8} = 1,18.$$

- b) Kod jakih polja $R = \frac{1}{ne}$ i Hall-ova konstanta ne zavisi od mehanizma rasejanja.

1. 6. 2. Gauss-ov efekat

U magnetnom polju dolazi do manjeg ili većeg porasta specifičnog električnog otpora metala i poluprovodnika. Promenu otpora poluprovodnika u magnetnom polju, ispitao je prvi put J. W. Harding (1933). Primetio je, da otpor poluprovodnika raste sa kvadratom magnetne indukcije. Do istog rezultata je došao i A. Sommerfeld (1934) kod metala.

U materijalu nanelektrisane čestice se kreću u pravcu električnog polja (\vec{E}) a srednje rastojanje između dva uzastopna sudara je ℓ (srednja dužina slobodnog puta). Ako na uзорак beskonačne dimenzije deluje magnetsko polje indukcije \vec{B} (čvrsto $\vec{E} \perp \vec{B}$), između prethodno kolinearnih \vec{E} i \vec{j} vektora javlja se ugao φ (Hall-ov ugao). Zbog toga se smanjuje i srednja dužina slobodnog puta u pravcu vektora jačine električnog polja, odnosno:

$$\ell_x = \ell \cos \varphi.$$

Kako je

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

i kod malih uglova $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ gornji izraz je dat u ovom obliku:

$$\ell_x = \ell \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \approx \ell \left(1 - \frac{m^2 B^2}{2}\right).$$

Ovde smo uzeli u obzir i jednačinu

$$\operatorname{tg} \varphi = -mB$$

(m je pokretljivost).

Kako je $b \ll l$, brzina drifta se smanjuje, a tako se smanjuje i pokretljivost, pa otpor uzorka se povećava. Uzimajući u obzir i statističku raspodelu puteva, gornja jednačina se svodi na

$$\frac{\Delta S}{S_0} = \frac{S_B - S_0}{S_0} = M^2 B^2 .$$

S_0 je specifični otpor bez magnetnog polja a S_B je specifični otpor u magnetnom polju indukcije B . Može se uvesti jedna nova veličina:

$$H = \frac{1}{B^2} \frac{S_B - S_0}{S_0}$$

koja omogućava da se dobija sledeći izraz za specifični otpor u funkciji magnetne indukcije:

$$S_B = S_0 (1 + HB^2) .$$

Kod uzorka konačnih dimenzija uspostavlja se Hall-ovo polje, koje će kompenzovati Lorentz-ovu silu. Nosioci nanelektrisanja bi se kretali pravolinijski u pravcu električnog polja i ne bi trebalo doći do povećanja otpora u magnetnom polju. Međutim nosioci nanelektrisanja nemaju istu brzinu, tako da Hall-ovo polje može kompenzovati Lorentz-ovu силу само kod onih nanelektrisanja, koja se kreću prosečnom brzinom drifta. Brze i spore čestice biće skrenute, pa bivaju podvrgнуте većem broju sudara. Doprinos ovih čestica u provođenju se smanjuje, a to dovodi do povećanja otpornosti. Promena otpornosti zavisi od materijala, a isto tako i od oblika uzorka. Takođe su primećena i izvesna odstupanja između teorije i eksperimenata (W. Shockley, 1953). Taj fenomen se povezuje sa anizotropnošću električnih svojstava u kristalima.

Ova pojava se koristi za merenje magnetne indukcije. Za tu svrhu se često upotrebljava spirala iz bizmuta, koji se ističe velikom pokretljivošću nosioca nanelektrisanja, a samim tim i povećanjem otpora u magnetnom polju. Kod bizmuta prilikom promene magnetne indukcije od 0-1 T promena otpora je oko 50%. Savremene otporne magnetne sonde od



indium-antimona (In Sb) daju povećanje otpora od 2500%.

1. 6. 3. Ettinghausen-ov efekat

Prilikom sudara nosioca nanelektrisanja i kristalne rešetke poluprovodnika uspostavlja se termodinamička ravnoteža. Dejstvo Lorentz-ove sile i Hall-ovog polja zavisi od brzine kretanja ovih čestica. Zbog toga je rasejanje "toplih" i "hladnih" nosilaca nanelektrisanja različit. Prilikom sudara sa rešetkom, elektroni mogu da predaju energiju (poluprovodnik se zagreva) a mogu i primati (poluprovodnik se hlađi). Zbog ove pojave, normalno u odnosu na magnetnu indukciju \vec{B} i gustine struje \vec{j} javlja se termički gradijent (Ettinghausen-ov efekat):

$$\nabla T^E = - A^E (\vec{B} \times \vec{j}) = A^E (\vec{j} \times \vec{B}).$$

Ettinghausen-ov koeficijent se definiše na sledeći način:

$$\frac{\partial T^E}{\partial z} = A^E B_j j_x \quad \text{odnosno} \quad A^E = \frac{\nabla_z \cdot T^E}{B_j \cdot j_x}.$$

Ova pojava je neparna, tj. smer termičkog gradijenta zavisi od smera magnetne indukcije i struje. U stručnoj literaturi ova pojava se naziva i transverzalnim termomagnetskim efektom.

1. 6. 4. Nernst-ov efekat

Nernst-ov efekat je longitudinalni galvanomagnetski efekat. Duž gustine struje \vec{j} javlja se termički gradijent, koji ne zavisi od smera magnetnog polja, ali menja smer sa promenom smera struje.

Struja "toplih" i "hladnih" elektrođa u smeru \vec{j} je različia, i to prouzrokuje sledeću temperaturnu raspodelu duž x-ose:

$$\frac{\partial T^N}{\partial x} = A^N B_y^2 j_x .$$

Odavde se vidi da predznak Nernst-ovog efekta ne zavisi od smera magnetnog polja, tj. ovaj je paran efekat

1. 7. Termomagnetne pojave

One pojave koje se javljaju u poluprovodniku gde ne teče električna struja a prisutan je temperaturni gradijent i magnetno polje, nazivaju se termomagnetne pojave.

1. 7. 1. Righi-Leduc-ov efekat

Ako u uzorku poluprovodnika uspostavimo temperaturni gradijent duž x-ose $\nabla_x T$, pod uticajem okomitog magnetnog polja javlja se sledeći temperaturni gradijent:

$$\nabla_z T = A^{RL} B_y \nabla_x T .$$

Ovaj transverzalni termomagnetični efekat se karakteriše pomoću Righi-Leduc-ove konstante, koja se definiše na sledeći način:

$$A^{RL} = \frac{\nabla_z T}{B_y \nabla_x T} .$$

Uzrok ove pojave je sledeći: -uticaj magnetnog polja na "toplje" i "hladnije" elektrone je različit i to direktno prouzrokuje onaj poprečni temperaturni gradijent, koji će stvarati protok energije duž z-ose. Ugao između rezultujućeg protoka energije i temperaturnog gradijenta

$$\nabla T = (\nabla_x T, 0, \nabla_z T) \quad \text{je} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\nabla_z T}{\nabla_x T} = A^{RL} B .$$

1. 7. 2. Maggi-Righi-Leduc-ov efekat

Pod dejstvom uzdužnog temperaturnog gradijenta i magnetnog polja javlja se promena toplotne provodljivosti. Ova longitudinalna termomagnetna pojava se karakteriše na sledeći način:

$$\lambda = \frac{1}{B^2} \frac{\kappa_0 - \kappa_B}{\kappa_0}$$

gde je κ_0 toplotna provodljivost bez magnetnog polja, a κ_B je provodljivost u prisustvu magnetnog polja indukcije B .

1. 7. 3. Transverzalni Nernst-Ettinghausen-ov efekat

Pod dejstvom temperaturnog gradijenta $\nabla T = (\nabla_x T, 0, 0)$ javlja se protok energije duž x-ose. Transverzalno magnetno polje $\vec{B} = (0, B_y, 0)$ će izazvati sledeće električno polje:

$$E_z^{NE} = A_{\perp}^{NE} B_y \nabla_x T$$

i javlja se transverzalna potencijalna razlika V_z^{NE} . Nernst-Ettinghausen-ov koeficijent eksperimentalno se određuje kao

$$A_{\perp}^{NE} = \frac{V_z^{NE}}{\alpha B \nabla_x T} .$$

Ova pojava je transverzalni termo-galvanomagnetični efekat i podseća nas na Hall-ov efekat.

1. 7. 4. Longitudinalni Nernst-Ettinghausen-ov efekat

Kod ovog longitudinalnog termo-galvanomagnetičnog efekta duž temperaturnog gradijenta $\nabla_x T$ uspostavlja se električno polje. Usled temperaturne raspodele prisutno je i

termoelektrično polje $E_x^\alpha = \alpha \nabla_x T$ (Seebeck-ov efekat)
 a kolinearno magnetno polje će izazvati promenu ovog polja.
 α je absolutna diferencijalna termoelektrnomotorna sila,
 i zavisi od promene koncentracije, od koeficijenta difuzije i od provodljivosti:

$$\alpha = \frac{eD}{G} \frac{dn}{dT}$$

Promena električnog polja usled magnetne indukcije može se dobiti na sledeći način:

$$E_x^\alpha(B) - E_x^\alpha(0) = [\alpha(B) - \alpha(0)] \nabla_x T = A_{||}^{NE} \alpha(0) B^2 \nabla_x T.$$

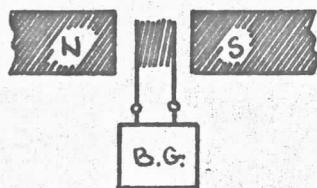
$A_{||}^{NE}$ je koeficijent longitudinalnog Nernst-Ettinghausen-ovog efekta i dat je u ovom obliku:

$$A_{||}^{NE} = \frac{\alpha(B) - \alpha(0)}{\alpha(0) B^2} = \frac{1}{B^2} \frac{\Delta \alpha}{\alpha_0},$$

i direktno zavisi od promene termoelektrnomotorne sile.

II Merenje magnetne indukcije fluksmetrom

Princip rada fluksmetra se zasniva na pojavi elektromagnetne indukcije. Sastoji se iz probnog navoja i balističkog galvanometra (slika 2.1.)



Slika 2.1.

Površina navoja (S) treba da bude tolika da se mereno magnetsko polje u navoju može smatrati homogenim. Kad se kalem postavi u normalno magnetsko polje početni fluks je $\Phi_0 = NSB$. Ako se probni navoj naglo iznese iz magnetskog polja (u toku vremena δ) magnetski fluks se smanjuje do $\Phi_\delta = 0$ i javlja se elektromagnetska indukcija:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad , \quad \text{odnosno} \quad \int_0^{\delta} \mathcal{E}_i dt = - (\Phi_\delta - \Phi_0) = \Phi_0$$

ili

$$\int_0^{\delta} \mathcal{E}_i dt = R \int_0^{\delta} I dt = RQ = \Phi_0$$

Merenjem strujnog udara može se odrediti početni fluks kroz probni navoj, a samim tim i magnetska indukcija:

$$B = \frac{\Phi_0}{N \cdot S}$$

Balistički galvanometri su pogodni za merenje strujnog udara. Kod ovog galvanometra pokretni navoj ima povećani moment inercije, i pod uticajem kratkotrajne struje ($\delta \ll T$) navoj biva "bačen" (odavde i naziv ovog instrumenta). Otklon X zavisi od struje: $I_0 = kX_0$, gde $\frac{1}{k} = \frac{X_0}{I_0}$ predstavlja osetljivost instrumenta i to se određuje pomoću struje stalne jačine I_0 . Količina nanelektrisanja strujnog

udara nalazi se iz prvog maksimalnog otklona:

$$Q_0 = K \frac{T}{2\pi} X_1 - K_b X_1 .$$

K_b je balistički redukciono faktor instrumenta.

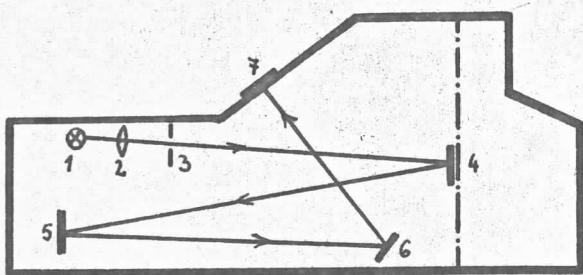
Ako se uzme u obzir i prigušenje:

$$Q_0 = K \frac{T}{\sqrt{4\pi^2 - \lambda^2}} k \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{\lambda} \cdot X_1 = K_b X_1$$

gde je $\lambda = \ln k = \ln \frac{x_3}{x_1}$ logaritamski dekrement prigušenja.

- o -

Probne navoje smo kalibrirali pomoću galvanometra sa svetlosnom skazaljkom. Kod ovog instrumenta, kao i kod balističkog galvanometra $T \gg \tau$ i otklon zavisi od strujnog udara. Princip rada galvanometra sa svetlosnom skazaljom prikazan je na donjoj slici:



1. Sijalica sa reflektorom
2. Kondenzor
3. Svetlosni procep
4. Ogledalo
5. Cilindrično ogledalo
6. Ravno ogledalo
7. Skala

Slika 2.2.

Kalibracija probnih navoja vršena je na sledeći način:

Prvo smo izmerili indukciju homogenog magnetnog polja pomoću teslametra a zatim smo probni kalem postavili u magnetno polje, tako da površina bude normalna na homogeno polje. Posle se kalem naglo izvuče iz polja i pročita se otklon galvanometra.

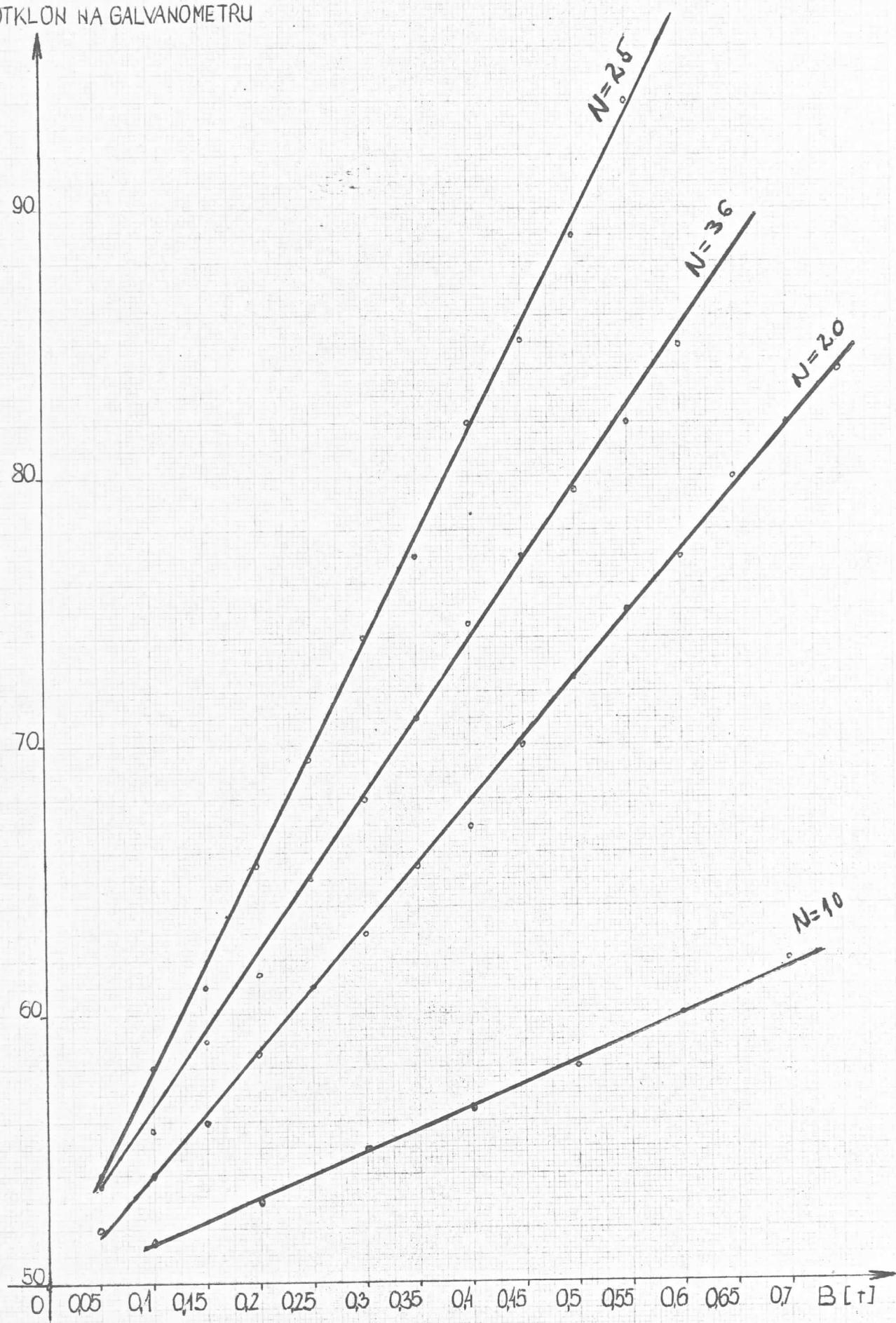
- a) Homogeno magnetno polje se dobija pomoću laboratorijskog elektromagneta (Newport Instruments Type-C)
- b) Magnetna indukcija se meri pomoću teslametra čehoslovačke proizvodnje (0-5 T)
- c) Multiflex-galvanometar sa svetlosnom skazaljkom Type MG-4 osetljivosti $6 \cdot 15 \frac{mA}{mm}$. Koristi se maksimalna osetljivost instrumenta. Širina skale je od 0 do 100, a za ravnotežni položaj uzima se sredina (50).
- d) Probni navoji su na držačima

Tačnost merenja pomoću takvog fluksmetra zavisi pre svega od instrumenata, pomoću kojih se vrši kalibracija. Kod ovog merenja postoji mogućnost velike subjektivne greške. Prilikom merenja za mernu grešku je uzimana polovina (kod galvanometra) odnosno četvrtina (kod teslametra) vrednosti jednog podeoka skale u okolini položaja skazaljke. Snimili smo kalibracione krive pomoću kojih se mogu izmjeriti i nepoznato magnetno polje.

Podaci merenja i kalibracione krive:

Nº	B (T)	N=25	N=36	N=20	N=10
		S=345,4 (mm ²)	S=154 (mm ²)	S=216,3 (mm ²)	S=154 (mm ²)
1	0,05 ± 1,25.10 ⁻³	54±0,5	53±0,5	52±0,5	
2	0,1	58,0 -"-	57,0 -"-	54,0 -"-	51±0,5
3	0,15	61,0	59,0	56,0	
4	0,2	65,5	61,5	58,5	53,0
5	0,25	69,5	65,0	61,0	
6	0,3	74,0	68,0	63,0	55,0
7	0,35	77,0	71,0	65,5	
8	0,4	82,0	74,5	67,0	56,5
9	0,45	85,0	77,0	70,0	
10	0,5	89,0	79,5	72,5	58,0
11	0,55± 2,5.10 ⁻³	94,0	82,0	75,0	
12	0,6	-"-	85,0	77,0	60,0
13	0,65			80,0	
14	0,7			82,0	62,0
15	0,75			84,0	

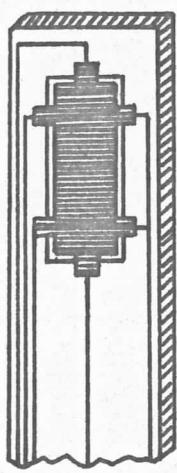
OTKLOŃ NA GALVANOMETRU



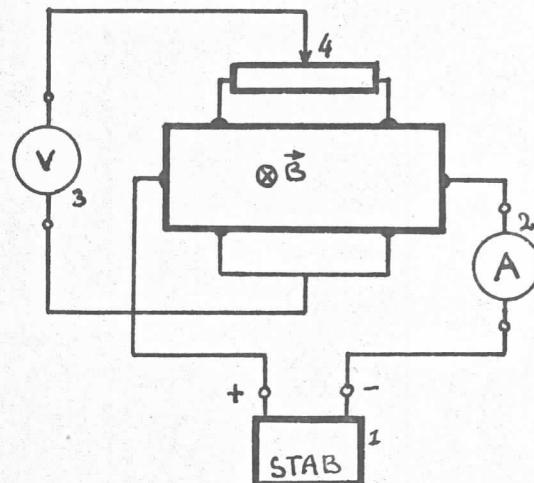
III Merenje magnetne indukcije
na osnovu Hall-ovog efekta

3. 1. Merenje magnetne indukcije pomoću
kristala silicijuma

Tanku ploču silicijuma sa šest izvoda postavili smo na držač pogodnih osobina (slika 31). Kontakti na kristalu su načinjeni lemljenjem i oni su u eksperimentalnim uslovima mogli smatrati omskim. Zatim smo držač uzorka pridržavan stezaljkom laboratorijskog stalka stavili u homogeno magnetno polje, tako da fluks kroz kristal bude najveći. Magnetno polje se dobija elektromagnetom sa podesivim polnim nastavcima (Newport Instruments Type-C). Polni nastavci elektromagneta su obezbedili homogenizaciju magnetnog polja. Menjanjem jačine električne struje moguće je kontinualno regulisati jačinu magnetnog polja. Kristal silicijuma smo vezali u strujno kolo, koje je prikazano na slici:



Slika 3.1.



Slika 3.2.

- 1- Stabilisani strujni izvor (Iskra, stabilized power supply, MA 4102)
- 2- Miliampermetar (Iskra, Unimer 3)
- 3- Voltmetar (Iskra, Unimer 3)
- 4- Potenciometar

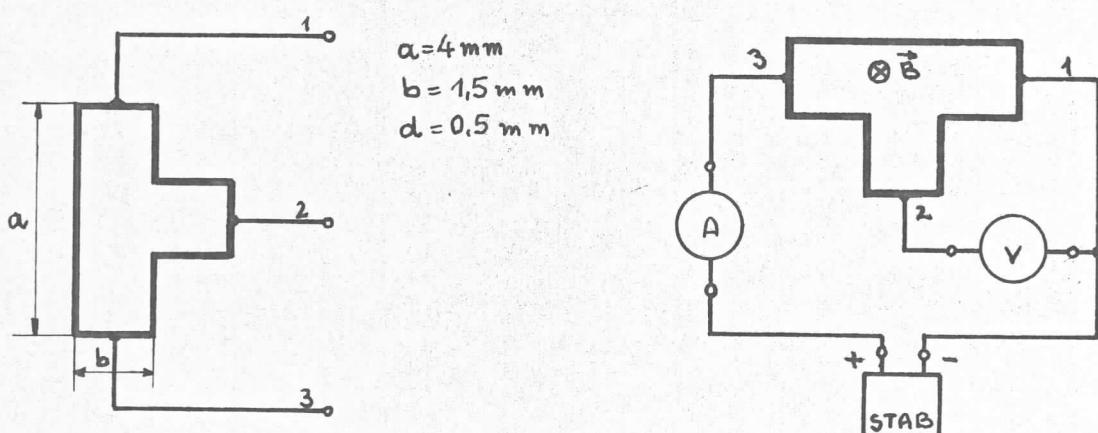
Pomoću potenciometra smo postigli to, da napon koji pokazuje voltmetar, bude nula pri proticanju struje konstantne jačine $I=1mA$ i magnetne indukcije $B=0$. Tako smo eliminisali dejstvo asimetrije kristala. Uključujući magnetno polje uspostavlja se Hall-ov napon. Međutim, prilikom merenja skazaljka voltmetra nije ostala u stabilnom položaju, iako smo obezbedili konstantnu struju i magnetno polje.

Nestabilan napon pokazuje sledeće:

- da kontakti nisu dobri,
- da su se u kristalu prilikom lemljenja i mehaničke obrade pojavile deformacije (pukotine).

Tako nismo bili u mogućnosti da vršimo bilo kakvo merenje.

Pažljivim ispitivanjem, primećene su neke veće pukotine koje smo odstranili, tako da je napon postao nešto stabilniji a kristal je ostao sa tri izvoda. Uzorak smo ponovo vezali u strujno kolo i stavili u magnetno polje.(sl.3.3)



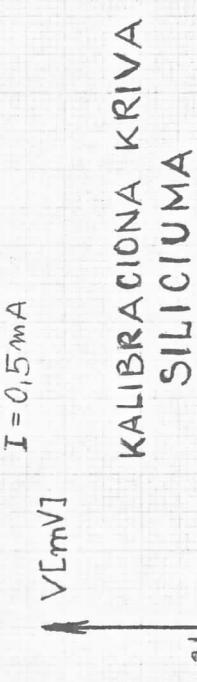
Slika 3.3.

Snimili smo kalibracionu krivu, koja pokazuje zavisnost između magnetne indukcije i napona.

Podaci merenja i kalibraciona kriva:

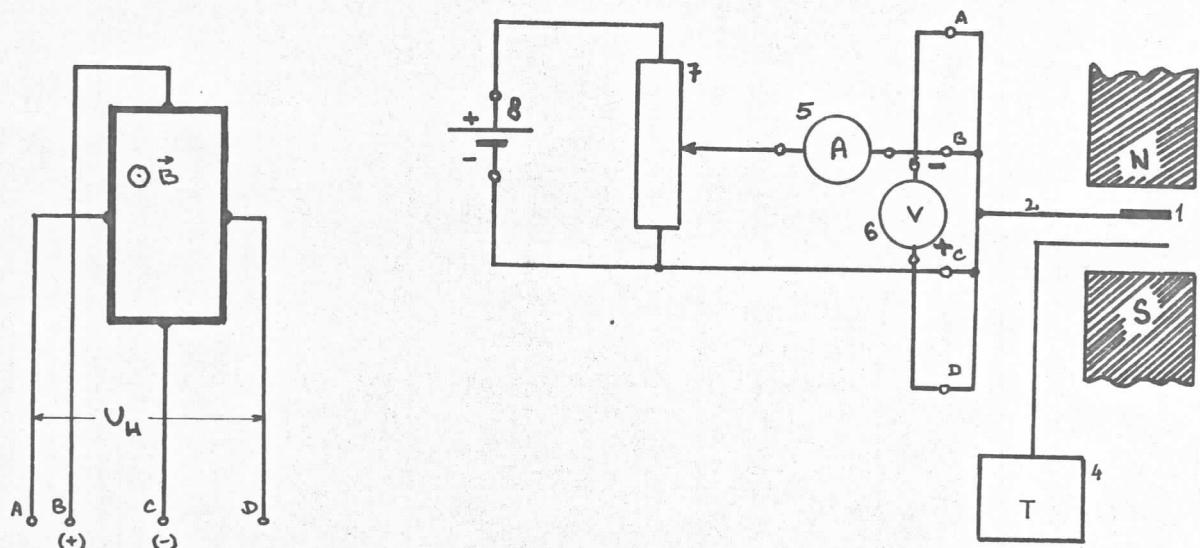
(T)	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7
(V)	288	289	29	292	294	295	296	297	298	299	300	301	302	305

27



3. 2. Merenje magnetne indukcije
Hall-ovom sondom

Hall-ova sonda (Hall-ov generator) od germanijuma sa četiri izvoda vezan je u strujno kolo prikazano na slici:



Slika 3.4.

1. - Hall-ov generator
2. - Držač kristala
3. - Laboratorijski elektromagnet (Type-C)
4. - Laboratorijski teslametar
5. - Ampermetar (Iskra, Unimer-3)
6. - Voltmetar (Iskra, Unimer-3)
7. - Potenciometar ($3 \text{ k}\Omega$)
8. - Izvor stabilnog napona od 1,5 V

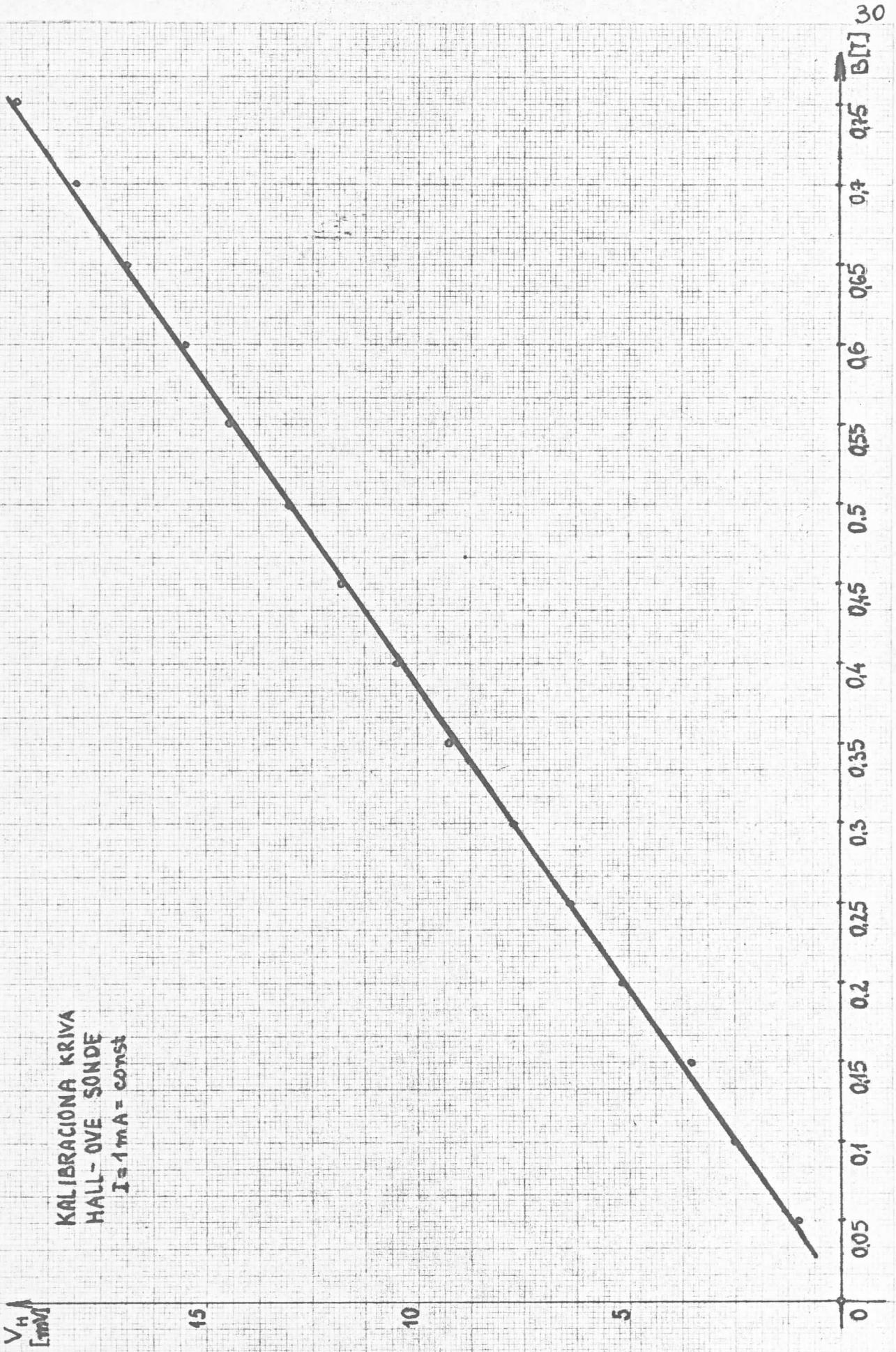
Merenjem Hall-ovog napona i magnetne indukcije snimili smo kalibracionu krivu ove sonde. Struja je bila konstantna ($I=1\text{mA}$). Pri merenju struje, Hall-ovog napona i magnetne indukcije za mernu grešku uzeli smo četvrtinu

vrednosti jednog podeoka skale u okolini položaja skazaljke. Zbog zaštitnog sloja nismo bili u mogućnosti da izmerimo debeljinu kristalne ploče i tako nismo mogli odrediti ni Hall-ovu konstantu. Zato ova Hall-ova sonda nije pogodna za direktno merenje magnetne indukcije. Međutim kalibraciona kriva nam može poslužiti da vršimo sondiranje nekog magnetnog polja određenih osobina. Tačnost naše sonde zavisi pre svega od tačnosti instrumenata kojima smo vršili kalibraciju.

Podaci merenja i kalibraciona kriva:

$$I = 1 \text{ mA} \pm 0,025$$

Nº	B (T)	V _H (mV)
1	0,05 $\pm 1,25 \cdot 10^{-3}$	1 $\pm 0,5$
2	0,1	2,5 \sim
3	0,15	3,5
4	0,2	5,2
5	0,25	6,5
6	0,3	7,9
7	0,35	9,2
8	0,4	10,5
9	0,45	11,8
10	0,5	13
11	0,55 $\pm 0,0025$	14,5
12	0,6	15,6
13	0,65	16,9
14	0,7	18,1
15	0,75	19,5



Zaključak

Radi potpunosti i bez ulazeња u detalje navešćemo sledeću strukturu tehnike merenja magnetne indukcije (međuvremeno ćemo naći i položaj naših metoda, koje smo dali u II i III poglavljju):

Merenje indukcije

- promenljivog i
- stacionarnog polja (obe naše metode)

Merenje indukcije

- unutar nekog materijala
- u zračnom prostoru (obe naše metode)

Metoda merenja magnetne indukcije može biti

- statička (Hall-ova sonda) i
- dinamička (fluksmetar).

Podelu možemo proširiti i sa stanovišta homogenosti i jačine polja, direktnosti-indirektnosti merenja, po načinu pokazivanja podataka itd.

U ovom radu je kratko dotaknuta teorija i tehnika merenja indukcije homogenog magnetnog polja. Uz pomoć tačnijih, preciznijih (digitalnih) instrumenata, uz veću opreznost mogli bismo dobiti i tačnije rezultate.

Alibegović

L I T E R A T U R A

- 1.) Kirijev: Fizika poluprovodnikov
(Félvezetők fizikája, Budapest 1968)
- 2.) V. Bego: Merenja u elektrotehnici
(Tehnička knjiga, Zagreb)-1975
- 3.) William Shockley: Elektrons and holes in semiconductors
(Félvezetők elektronfizikája,
Budapest, 1958)
- 4.) Franz X. Eder: Moderne Messmethoden der Phisik /Teil 3/
(Veb Deutscher Verlag Der Wissenschaften)
(Berlin, 1972)
- 5.) Javorskij-Detlaf: Sprovočník po fizike
(Fizikai zsebkönyv, Budapest, 1974)
- 6.) Budo: Kísérleti fizika (Budapest, 1968)
- 7.) D. Petrović: Električni merni instrumenti
(Tehnička knjiga, Beograd, 1976)

