I N S T I T U T Z A F I Z I K U
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
UNIVERZITET U NOVOM SADU

SAJFERT VJEKOSLAV:

SPEKTRALNA FUNKCIJA I MAGNETIZACIJA HAJZENBERGOVOG FEROMAGNETA NA NISKIM TEMPERATURAMA

(DIPLOMSKI RAD)

NOVI SAD
1977.G

Zahvaljujem se mentoru Dr Mariu Škrinjaru na pomoći u izboru, vodjenju i usmeravanju rada pri izradi i pisanju ove teme

Vjekoslav Sajfert

S A D R Ž A J

U V O D

Poslednjih dvadesetak godina pojavili su se u literaturi mnogi radovi u kojima je tretiran problem ponašanja magnetizacije u Hajzenbergovom feromagnetu na niskim temperaturama. Fundamentalnu teoriju za niskotemperaturni razvoj magnetizacije dao je Dajson u svojim radovima [7], gde je pokazao da je prva popravka za magnetizaciju, usled anharmonijskih efekata, proporcionalna T^4.

U kasnijim radovima taj rezultat je dobijen metodom Grinovih funkcija, od kojih ćemo spomenuti samo rad [6] gde je Dajsonov rezultat dobijen u Pauli reprezentaciji, i [3] gde je korišćena egzaktna reprezentacija Pauli operatora preko Boze operatora.

U radu [4] korišćen je drugi metod, i to razvoj za spektralnu funkciju i njene momente pomoću kojeg je, u Pauli reprezentaciji, dobijen rezultat različit od Dajsonovog za niskotemperaturski razvoj magnetizacije. Naime, u tom radu prva popravka za magnetizaciju usled anharmonijskih efekata je proporcionalna T^3.

U ovom radu pokazaćemo da se i metodom koji je predložen u radu [4] može dobiti Dajsonov rezultat, ako se koristi egzaktna Boze reprezentacija za Pauli operatore.

I HAJZENBERG-OV FEROMAGNET

1.1. O MAGNETIZMU

Magnetna svojstva supstancija karakterišu se pomoću magnetizacije $\vec{M}$. Eksperimentalno je utvrdjeno da je magnetizacija funkcija spoljašnjeg magnetnog polja $\vec{\mathcal{H}}$. Za neke magnetne materijale u odredjenom intervalu temperatura i polja i pri kvazistatičkom procesu namagnetisanja ta zavisnost ima linearni karakter:

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{\mathcal{H}} \qquad 1.$$

Koeficijent χ se naziva magnetna susceptibilnost. Ako je susceptibilnost negativna ($\chi < 0$) radi se o dijamagneticima. Veličina χ za ove materijale je reda 10^{-6}. Tipični predstavnici su: inertni gasovi, mnoga organska jedinjenja i niz metala. Materijali sa $\chi > 0$ su paramagnetici. Susceptibilnost χ je takodje mala - reda 10^{-3} do 10^{-6}. Tipični paramagnetici su: kiseonik, soli retkih zemalja, elementi grupe gvoždja i alkalni metali.

Prvu teoriju o magnetizmu dao je Veber. U svojoj teoriji on iznosi ideju da magnet predstavlja skup tzv. uredjenih elementarnih magneta i da su sve magnetne pojave rezultat razuredjivanja tog uredjenog skupa. U ovoj teoriji nije sadržano objašnjenje prirode elementarnih magneta, što predstavlja nedostatak ove teorije. Medjutim, i kod savremenog tumačenja ovog prirodnog fenomena polazilo se od toga da je magnet sistem uredjenih elementarnih magneta.

Ovaj rad je posvećen feromagnetizmu i nekim pojavama vezanim za njega.

Tipični predstavnici feromagnetika su prelazni metali: gvoždje (Fe), kobalt (Co) i nikl (Ni). Magnetizam je ovde uslovljen elektronima iz nepopunjenih ljuski i to 3d kod Fe i 4f kod retkih zemalja (jer je magnetni moment popunjene ljuske jednak nuli).

Rezultati merenja pokazuju da se magnetni momenti atoma jakih feromagnetnih materijala poklapaju sa vrednostima sopstvenih magnetnih momenata elektrona nepopunjenih ljuski, a da orbitalni momenti ne daju vidan doprinos. Na osnovu toga su Frenkel i Hajzenberg došli do pretpostavke da se makroskopski magnetni moment javlja kao rezultat spinskog uredjenja elektrona nepopunjene ljuske.

Klasično tumačenje feromagnetizma zasniva se na Vajsovoj fenomenološkoj teoriji. Prema ovoj teoriji sve feromagnetne supstance pri temperaturama koje su niže od neke kritične moraju biti spontano namagnetisane i u odsustvu polja. Ovakav je zaključak važio samo za feromagnetike koji su bili prethodno namagnetisani, jer ako feromagnetici nisu prethodno namagnetisani, ne pokazuju efekat namagnetisanosti. Da bi objasnio ovu protivrečnost, Vajs je postavio svoju drugu hipotezu prema kojoj se svaka feromagnetna supstanca sastoji iz velikog broja domena spontano namagnetisanih do zasićenja. U namagnetisanom stanju ovi domeni su haotično rasporedjeni. U spoljašnjem magnetnom polju oni se delimično usmeravaju u pravcu magnetnih linija sila što uslovljava da je ukupna magnetizacija različita od nule. Kada feromagnetik nije namagnetisan, magnetni momenti domena su haotično orijentisani u prostoru tako da je magnetizacija uzorka u celini jednaka nuli.

Eksperimenti vršeni sa kristalima feromagnetika govore o pojavi magnetno kristalne anizotropije. Pošto je makroskopski uzorak sastavljen od velikog broja kristalnih zrna, to su kristalografski pravci statistički rasporedjeni. Stoga se magnetna anizotropija uzorka kompenzuje.

Kako su domeni sastavljeni iz velikog broja atoma (10^{15}) u njihovom formiranju moraju učestvovati i sile sprege sa kristalnom rešetkom. U jednom domenu su na apsolutnoj nuli magnetni momenti svih atoma paralelni (paralelni su spinovi elektrona nepopunjenih ljuski). Tada je gustina magnetnog momenta jednaka proizvodu magnetnog momenta elementarnog nosioca i broja nosilaca u jedinici zapremine. Odmah treba uočiti da su magnetni momenti domena orijentisani u pravcu ose lake magnetizacije (pravac u kome se magnetno zasićenje postiže sa najmanjom jačinom polja - naziva se pravac lake magnetizacije), jer je to u smislu interakcije medju atomima energetski najpovoljniji slučaj.

Pošto sile interakcije dovode do uredjenosti magnetnih momenata elementarnih nosilaca, odnosno do uredjenosti skupa spinova elektrona a toplotno kretanje razuredjuje takav sistem, sa povišenjem temperature energija toplotnih kvanata biće u jednom trenutku istog reda veličine kao i konstanta interakcije. Tada će nastati razgradjivanje magnetne rešetke. Ova temperatura, pri kojoj nastaje razgradjivanje magnetne rešetke, naziva se temperatura prelaza.

Priroda interakcije se u početku shvatala kao dipol-dipol interakcija magnetnih momenata. Medjutim, znalo se da konstanta dipol-dipol interakcije iznosi oko 10 Bolcmanovih konstanti (K_B), dok su tačke prelaza za feromagnetike reda: 100 za lantanide i 1000 Bolcmanovih konstanti za gvoždje, kobalt i nikl. Otuda je jasno da dipol-dipolna interakcija ne može biti odgovorna za uredjivanje sistema spinova, jer bi u protivnom magnetni materijal mogao postojati samo do 10 ^{0}K, a to protivreči eksperimentalnim rezultatima. Pokazalo se da su sile interakcije medju spinovima čisto kvantnomehaničkog porekla. Pošto dva elektrona ne možemo razlikovati medjusobno, a zbog Paulijevog principa moraju biti opisani antisimetričnim funkcijama,u matričnom elementu energije dobijamo jedan dopunski član koji se naziva energija izmene. Ocenjuje se da je ova energija izmene reda 100 do 1000 Bolcmanovih konstanti, a to znači da ovakva hipoteza odgovara eksperimentalnim rezultatima.

Prema tome, zaključak bi bio sledeći: feromagnet je sistem uredjenih spinova koji medjusobno interaguju silama izmene. Na temperaturi 0 ^{0}K svi spinovi su usmereni u jednom pravcu, tj. paralelni su. Osa duž koje su orijentisani naziva se osa kvantizacije. Sa porastom temperature sistem spinova se "razuredjuje". Kada se dostigne temperatura prelaza, statistički posmatrano, svi spinovi imaju srednju vrednost u pravcu ose kvantizacije jednaku nuli.

1.2. PODELA MAGNETNIH MATERIJALA

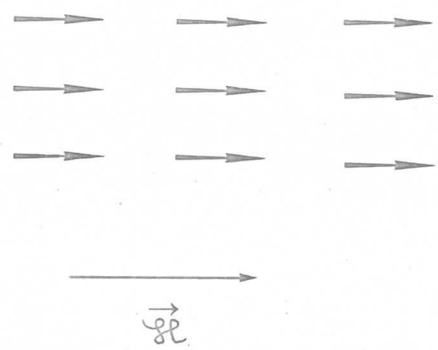
Imajući u vidu ono što je rečeno u prethodnom paragrafu možemo izvršiti finiju podelu magnetnih materijala

FEROMAGNETICI

Feromagnetike predstavljamo spinskom rešetkom čiji je integral izmene izmedju najbližih suseda pozitivan.

U ovu grupu spadaju: gvoždje, nikl, kobalt, jedan deo lantanida, mnogobrojne legure i jedinjenja tih elemenata sa neferomagnetnim elementima.

Pri temperaturama koje su niže od Kirijeve tačke svi spinovi u proseku su orijentisani u jednom pravcu, te je rezultujući magnetni moment znatan. U odsustvu spoljašnjeg polja orijentacija magnetnog polja nije odredjena. Medjutim, pošto uvek postoji anizotropija kristala, vektor magnetizacije se uvek usmerava duž ose lake magnetizacije.



Spontana magnetizacija za $T \lesssim T_C$, data je izrazom:

$$M(T) \cong \text{const}\,\sqrt{1 - T/T_C}$$

gde je sa T_C označena Kirijeva temperatura.

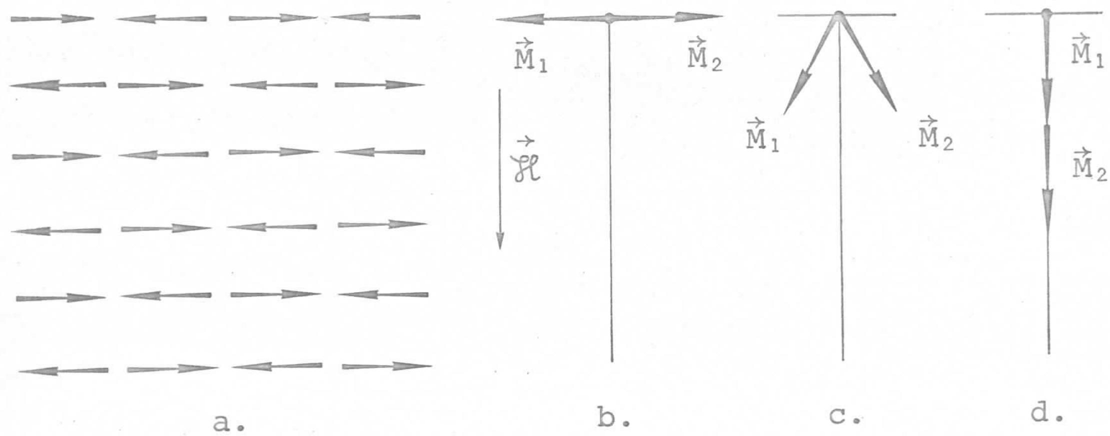
Pri $T \to 0$

$$M(T) = M_0(1 - A_1 T^{3/2} - A_2 T^{5/2} - \dots)$$

gde su A_i konstante, a M_0 magnetizacija zasićenja.

ANTIFEROMAGNETICI

Antiferomagnetni raspored spinova možemo predstaviti kao skup dveju ili više feromagnetnih podrešetki čiji je rezultujući magnetni moment jednak nuli. Ako magnetni kristal sadrži samo dve podrešetke sa jednakim, ali antiparalelnim spinovima, onda ćemo imati slučaj kao na priloženoj slici:



a. i b. - u odsustvu spoljašnjeg polja,
c. - u slabom polju
d. - u jakom polju

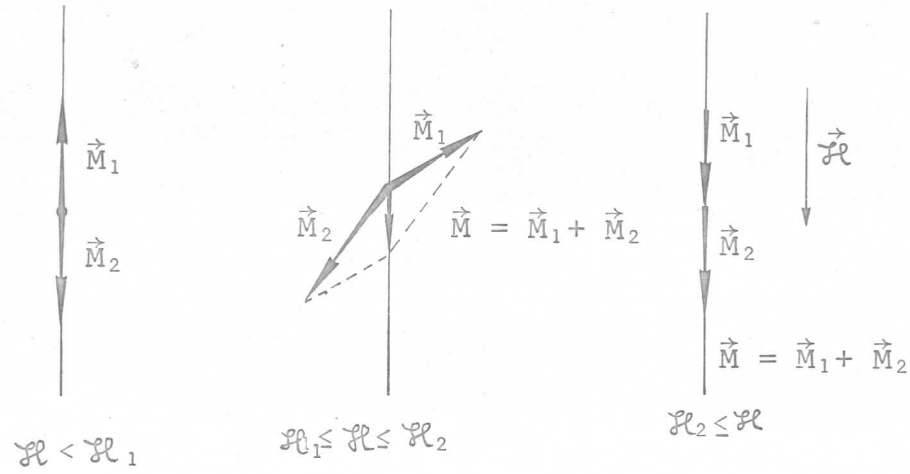
Sa povišenjem temperature magnetizacija podrešetki slabi. Kada se postigne temperatura T_n (tzv. Nelova temperatura) magnetizacija podrešetki teži nuli. Na temperaturama većim od T_n antiferomagnetici se ponašaju kao paramagnetici.

FERIMAGNETICI

Za ovu vrstu kristala karakteristično je da im se magnetna podrešetka sastoji iz nekoliko podrešetki čiji su spinovi različitih veličina i orijentacija, tako da je rezultujući magnetni moment različit od nule.

Da bi smo prikazali ponašanje ferimagnetika u spoljašnjem magnetnom polju, radi jednostavnosti smatraćemo da se radi o ferimagnetiku sa dve podrešetke i odgovarajućim momentima $\vec{M}_1$ i $\vec{M}_2$ i kritičnim poljima $\vec{\mathcal{H}}_1$ i $\vec{\mathcal{H}}_2$.

Na slici je šematski prikazan raspored spinova u ferimagnetiku:



a. b. c.

a. - u slabom polju,

b. - u jakom polju,

c. - u veoma jakom polju.

Osim navedenih, mogu se javiti još neki tipovi jako magnetnih materijala (npr. spiralne strukture).

2. HAMILTONIJAN HAJZENBERGOVOG FEROMAGNETA ZA SPIN S = 1/2

U daljem radu proučavaćemo samo feromagnete u kojima je interakcija izmene dominantna interakcija medju spinovima.

Najopštiji oblik hamiltonijana takvog feromagneta u spoljašnjem magnetnom polju, možemo napisati u obliku (vidi |2|.

$$H = -\mu\mathcal{H}\sum_{\vec{n}} S^z_{\vec{n}} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\vec{m}} \Big[I^x_{\vec{n},\vec{m}} S^x_{\vec{n}} S^x_{\vec{m}} + I^y_{\vec{n}\vec{m}} S^y_{\vec{n}} S^y_{\vec{m}} + I^z_{\vec{n}\vec{m}} S^z_{\vec{n}} S^z_{\vec{m}} \Big]$$

gde su:

μ - magnetni moment atoma

$\mathcal{H}$ - spoljašnje magnetno polje

$\vec{n},\vec{m}$ - vektori kristalne rešetke

S^x, S^y, S^z - operatori projekcije spina

$I^x_{\vec{n},\vec{m}}$, $I^y_{\vec{n}\vec{m}}$, $I^z_{\vec{n}\vec{m}}$ - integrali izmene koji u teoriju ulaze kao fenomenološki parametri

Prostiji model za opisivanje magnetnih osobina feromagneta je Hajzenbergov izotropni model, kod kojeg je

$$I_x = I_y = I_z = I_{\vec{n},\vec{m}}$$

U tom slučaju hamiltonijan dobija oblik:

$$H = -\mu\mathcal{H}\sum_{\vec{n}} S^z_{\vec{n}} - \frac{1}{2}\cdot\sum_{\vec{n},\vec{m}} I_{\vec{n},\vec{m}}\, \vec{S}_{\vec{n}}\, \vec{S}_{\vec{m}}$$

Za osu magnetizacije je uzeta z osa. Ako uvedemo operatore:

$$S^{\pm}_{\vec{n}} = S^x_{\vec{n}} \pm i\, S^y_{\vec{n}}\,, \quad S^z_{\vec{n}}$$

koji zadovoljavaju sledeće komutacione relacije

$$[S^+_{\vec{n}}, S^-_{\vec{m}}] = 2\, S^z_{\vec{n}}\, \delta_{\vec{n},\vec{m}}$$

$$(S^+_{\vec{n}})^{2s+1} = (S^-_{\vec{m}})^{2s+1} = 0$$

$$\{S^+_{\vec{n}}, S^-_{\vec{n}}\} = 2S(S+1) - 2(\, S^z_{\vec{n}}\,)^2$$

Možemo transformisati gornji hamiltonijan na oblik koji je pogodniji za dalji rad. Mi ćemo se posebno zadržati na slučaju spina $S = 1/2$. U tom slučaju hamiltonijan dobija oblik:

$$H = H_0 + [\mu\mathcal{H} + \frac{1}{2} J_0] \sum_{\vec{n}} (\frac{1}{2} - S^z_{\vec{n}}) - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}}\, S^-_{\vec{n}}\, S^+_{\vec{n}} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}}\, (\frac{1}{2} - S^z_{\vec{n}})(\frac{1}{2} - S^z_{\vec{m}})$$

gde je:

$$H_0 = -\frac{1}{2}N\mu\mathcal{H} - \frac{1}{8}NJ_0$$

dok za operatore spina dobijamo sledeće komutacione relacije:

$$[S^{+}_{\vec{n}}, S^{-}_{\vec{m}}] = 2\, S^{z}_{\vec{n}}\, \delta_{\vec{n},\vec{m}}$$

$$(S^{+}_{\vec{m}})^2 = (S^{-}_{\vec{n}})^2 = 0$$

$$\{S^{+}_{\vec{n}}\; S^{-}_{\vec{n}}\} = 1$$

Sada ćemo sa spinskih preći na Paulijeve operatore pomoću relacija:

$$S^{-}_{\vec{n}} = P^{+}_{\vec{n}} \qquad S^{+}_{\vec{n}} = P_{\vec{n}}$$

$$\frac{1}{2} - S^{z}_{\vec{n}} = P^{+}_{\vec{n}}\, P_{\vec{n}}$$

Oni zadovoljavaju sledeće komutacione relacije:

$$[P_{\vec{n}}, P^{+}_{\vec{m}}] = (1 - 2\, P^{+}_{\vec{n}}\, P_{\vec{n}})\, \delta_{\vec{n}\vec{m}}$$

$$(P^{+}_{\vec{n}})^2 = (P_{\vec{n}})^2 = 0$$

$$[P^{+}_{\vec{n}}, P^{+}_{\vec{m}}] = [P_{\vec{n}}, P_{\vec{m}}] = 0$$

U Pauli reprezentaciji hamiltonijan Hajzenbergovog feromagneta dobija oblik:

$$H = H_0 + \Delta \sum_{\vec{n}} P^{+}_{\vec{n}}\, P_{\vec{n}} - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}}\, P^{+}_{\vec{n}}\, P_{\vec{n}} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} P^{+}_{\vec{n}} P^{+}_{\vec{m}} P_{\vec{m}} P_{\vec{n}}$$

gde smo sa Δ označili

$$\Delta = \mu \mathcal{H} + \frac{1}{2} J_0$$

Ovaj poslednji oblik hamiltonijana koristićemo u sledećim glavama.

II MAGNETIZACIJA HAJZENBERGOVOG FEROMAGNETA ZA S = 1/2 NA NISKIM TEMPERATURAMA

1. ZAKON DISPERZIJE ZA MAGNONE

Kao što smo ranije napomenuli, zakon disperzije za magnone nećemo tražiti metodom Grinovih funkcija, već preko spektralne intenzivnosti koji je u suštini alternativni metod u odnosu na metod Grinovih funkcija. Ideja je data u članku [4], i sastoji se u sledećem:

Po definiciji spektralne intenzivnosti srednju vrednost komutatora dva operatora možemo napisati na sledeći način:

$$\langle [A(t), B(t')] \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; I_{\vec{a}\vec{b}}(\omega)\left(e^{\frac{\omega}{\theta}} - 1\right) e^{-i\omega(t - t')} \qquad 1.1.$$

Ako stavimo $t = 0$, $t' \equiv t$, zatim

$$A(t) = P_{\vec{a}}(0) \qquad B(t') = P^{+}_{\vec{b}}(t)$$

i uvedemo smenu

$$I_{\vec{a}\vec{b}}(\omega)\left(e^{\frac{\omega}{\theta}} - 1\right) = S_{\vec{a}\vec{b}}(\omega) \qquad 1.2.$$

jednačina (1.1.) dobija sledeći oblik:

$$<[P_{\vec{a}}(0), P^{+}_{\vec{b}}(t)]> = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, S_{\vec{a}\vec{b}}(\omega)\, e^{i\omega t} \qquad 1.3.$$

Dalje, u jednačini (1.3.) potrebno je operator $P^{+}_{\vec{b}}(t)$, koji je dat u Hajzenbergovoj reprezentaciji

$$P^{+}_{\vec{b}}(t) = e^{i\hat{H}t} P^{+}_{\vec{b}}(0)\, e^{-i\hat{H}t} \qquad 1.4.$$

razviti u red po t. Koristeći razvoj za eksponencijalnu funkciju i definiciju komutatora, za operator $P^{+}_{\vec{b}}(t)$ dobijamo sledeći red:

$$P^{+}_{\vec{b}}(t) = P^{+}_{\vec{b}}(0) + it[\hat{H}, P^{+}_{\vec{b}}(0)] + \frac{(it)^2}{2!}[\hat{H},[\hat{H}, P^{+}_{\vec{b}}(0)]] + \dots \qquad 1.5.$$

Slično možemo razviti u red funkciju $e^{i\omega t}$ koja figuriše na desnoj strani jednačine (1.3.)

$$e^{i\omega t} = 1 + i\omega t + \frac{(i\omega t)^2}{2!} + \dots \qquad 1.6.$$

te izjednačavanjem koeficijenata leve i desne strane jednačine (1.3.) uz iste stepene argumenta t, dobijamo sledeću jednačinu za spektralnu funkciju i njene momente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega S_{\vec{a}\vec{b}}(\omega) = <[P_{\vec{a}}, P^{+}_{\vec{b}}]> \qquad 1.7.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \omega\, S_{\vec{a}\vec{b}}(\omega) = <[P_{\vec{a}}, [\hat{H}, P^{+}_{\vec{b}}]]> \qquad 1.8.$$

ili u opštem slučaju za n-ti moment

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \omega^n\ S_{\vec{a}\vec{b}}(\omega) = \langle [P_{\vec{a}}, [\ \cdots\ [\hat{H}, [\hat{H}, P^+_{\vec{b}}]] \rangle \qquad 1.9.$$

gde se na desnoj strani jednačine (1.9.) pojavljuje n-tostruki komutator. U gornjim relacijama stavili smo $P_{\vec{a}}(0) \equiv P_{\vec{a}}$ i $P^+_{\vec{b}}(0) \equiv P^+_{\vec{b}}$.

Koristeći komutacione relacije za Pauli operatore i hamiltonijan za Hajzenbergov feromagnet u obliku ($\mathcal{H} = 0$):

$$\hat{H} = \frac{1}{2} J_0 \sum_n P^+_{\vec{n}} P_{\vec{m}} - \frac{1}{2} \sum_{nm} I_{\vec{n}\vec{m}} P^+_{\vec{n}} P_{\vec{m}} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{nm} I_{\vec{n}\vec{m}} P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}} P^+_{\vec{m}} P_{\vec{m}} \qquad 1.10.$$

mi ćemo, koristeći jednačine (1.7.) i (1.8.) izračunati spektar elementarnih eksitacija u Hajzenbergovom feromagnetu.

Potražimo najpre komutator na desnoj strani jednačine (1.7.). Ako uzmemo u obzir da se relativna magnetizacija po čvoru rešetke, koja je definisana relacijom

$$\sigma = \frac{\mu \langle S^z \rangle}{\mu S} = \frac{\langle S^z \rangle}{S},$$

za spin $S = 1/2$ može izraziti preko Pauli operatora relacijom

$$\sigma = 1 - 2 \langle P^+_{\vec{a}} P_{\vec{a}} \rangle = 1 - 2\,\bar{n} \qquad 1.11.$$

dobijamo

$$\langle [P_{\vec{a}}, P^{+}_{\vec{b}}] \rangle = \{ 1 - 2\langle P^{+}_{\vec{a}}\, P_{\vec{a}} \rangle \} \delta_{\vec{a},\vec{b}} = \sigma\, \delta_{\vec{a},\vec{b}} \qquad 1.12.$$

Ako ovaj rezultat zamenimo u (1.7.), dobijamo

$$\int d\omega \quad S_{\vec{a}\vec{b}}(\omega) = \sigma\, \delta_{\vec{a},\vec{b}} \qquad 1.13.$$

odakle sledi

$$S_{\vec{a}\vec{b}}(\omega) = \sigma\, \delta_{\vec{a}\vec{b}} \quad \delta(\omega - E) \qquad 1.14.$$

Ako sada uzmemo Furije transformaciju:

$$S_{\vec{a}\vec{b}}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} S_{\vec{q}}(\omega)\; e^{i\vec{q}(\vec{a} - \vec{b})}$$

i imamo u vidu da je

$$\delta_{\vec{a},\vec{b}} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q}(\vec{a} - \vec{b})}$$

dobijamo:

$$S_{\vec{k}}(\omega) = \sigma\; \delta(\omega - E) \qquad 1.15.$$

$$I_{\vec{k}}(\omega) = S_{\vec{k}}(\omega) \cdot (e^{\frac{\omega}{\theta}} - 1)^{-1} \qquad 1.15.a.$$

Sada ćemo potražiti komutator sa desne strane jednačine (1.8.). Koristićemo komutacione relacije za Pauli operatore koji su dati u glavi I, dobijamo

$$[\hat{H}\,,\, P^{+}_{\vec{b}}] = \frac{1}{2}\Delta_a P^{+}_{\vec{b}} - \frac{1}{2} \sum_{\vec{m}} I_{\vec{b}\vec{m}}\, P^{+}_{\vec{m}} +$$

$$+ \sum_{\vec{m}} I_{\vec{b}\vec{m}} P^{+}_{\vec{m}} P^{+}_{\vec{b}} P_{\vec{b}} - \sum_{\vec{m}} I_{\vec{b}\vec{m}} P^{+}_{\vec{b}} P^{+}_{\vec{m}} P_{\vec{m}}$$

$$[P_{\vec{a}}, [\hat{H}, P^{+}_{\vec{b}}]] = \frac{1}{2}(\Delta\, \delta_{\vec{a},\vec{b}} - \frac{1}{2} I_{\vec{a}\vec{b}}) +$$

$$2\bar{n}\,(I_{\vec{a}\vec{b}} - J_0\, \delta_{\vec{a}\vec{b}}) + (\delta_{\vec{a}\vec{b}} \sum_{\vec{m}} I_{\vec{a}\vec{m}} P^{+}_{\vec{m}} P_{\vec{a}} - P^{+}_{\vec{a}} P_{\vec{a}}\, I_{\vec{a}\vec{b}}) +$$

$$+ 2(\delta_{\vec{a}\vec{b}} \sum_{\vec{m}} I_{\vec{a}\vec{m}} P^{+}_{\vec{a}} P^{+}_{\vec{m}} P_{\vec{m}} P_{\vec{a}} - I_{\vec{a}\vec{b}} P^{+}_{\vec{a}} P^{+}_{\vec{b}} P_{\vec{b}} P_{\vec{a}}) \qquad 1.16.$$

Ako gornji rezultat zamenimo u (1.8.) dobijamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \omega\, S_{\vec{a}\vec{b}}(\omega) = \frac{\sigma}{2}(\Delta\, \delta_{\vec{a},\vec{b}} - \frac{1}{2} I_{\vec{a}\vec{b}}) + (\bar{n} - \langle P^{+}_{\vec{b}} P_{\vec{a}} \rangle)\, I_{\vec{a}\vec{b}} +$$

$$+ (\sum_{\vec{m}} I_{\vec{a}\vec{m}} \langle P^{+}_{\vec{m}} P_{\vec{a}} \rangle - \bar{n} J_0)\, \delta_{\vec{a}\vec{b}} \qquad 1.17.$$

Treba napomenuti da smo članove koji sadrže srednje vrednossti proizvoda četiri Pauli operatora zanemarili pošto su oni proporcionalni kvadratu koncentracije magnona, što je u skladu sa tačnošću s kojom ćemo računati magnetizaciju u sledećem paragrafu.

Nakon Furije transformacije dobijamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \omega\, S_{\vec{k}}(\omega) = \frac{\sigma}{2}(J_0 - J_{\vec{k}}) + \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} (J_{\vec{k}} + J_{\vec{q}} - J_{\vec{0}} - J_{\vec{k}-\vec{q}})$$

$$\langle P^{+}_{\vec{q}} P_{\vec{q}} \rangle + 2\mu\mathcal{H} \qquad 1.18.$$

Ako u (1.18.) zamenimo $S_{\vec{k}}(\omega)$ iz (1.15.) dobićemo

$$\sigma E_{\vec{k}} = \frac{\sigma}{2} (J_{\vec{o}} - J_{\vec{k}}) + \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} (J_{\vec{k}} + J_{\vec{q}} - J_{\vec{o}} - J_{\vec{k}-\vec{q}}) \cdot$$

$$< P^{+}_{\vec{q}} P_{\vec{q}} > + \sigma \mu \mathcal{H} \qquad 1.19.$$

Deleći jednačinu (1.19.) sa σ dobijamo zakon disperzije za magnone

$$E_{\vec{k}} = \frac{1}{2} (J_{\vec{o}} - J_{\vec{k}}) + \frac{1}{N\sigma} \sum_{\vec{q}} (J_{\vec{k}} + J_{\vec{q}} - J_{\vec{o}} - J_{\vec{k}-\vec{q}}) \cdot$$

$$\cdot < P^{+}_{\vec{q}} P_{\vec{q}} > + \mu \mathcal{H} \qquad 1.20.$$

S obzirom da ćemo zanemariti članove proporcionalne $\bar{n}^2$, možemo u (1.20.) staviti $\sigma \simeq 1$ tako da dobijamo:

$$E_{\vec{k}} = \frac{1}{2} (J_{\vec{o}} - J_{\vec{k}}) + \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} (J_{\vec{k}} - J_{\vec{q}} - J_{\vec{o}} - J_{\vec{k}-\vec{q}})$$

$$\cdot < P^{+}_{\vec{q}} P_{\vec{q}} > + \mu \mathcal{H} \qquad 1.21.$$

Ovaj izraz za energiju magnona koristićemo u sledećem paragrafu za izračunavanje magnetizacije na niskim temperaturama.

2. MAGNETIZACIJA NA NISKIM TEMPERATURAMA

U ovom paragrafu pokazaćemo kako se može dobiti Dajsonov rezultat za magnetizaciju na niskim temperaturama koristeći zakon disperzije iz prethodnog paragrafa. U tom cilju preći ćemo sa Pauli na Boze operatore koristeći egzaktnu Boze reprezentaciju za Pauli operatore:

$$P_n = \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2)^{\nu}}{(1+\nu)!} B^{+\nu}_{\vec{n}} B^{\nu}_{\vec{n}} \right] B_{\vec{n}} \qquad 2.1.$$

$$P^{+}_{\vec{n}} P_{\vec{n}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2)^{\nu}}{(1+\nu)!} B^{+\,\nu+1}_{\vec{n}} B^{\nu+1}_{\vec{n}} \qquad 2.2.$$

S obzirom da radimo na niskim temperaturama, gde je koncentracija magnona mala, umesto gornje formule koristićemo se približnim formulama:

$$P_{\vec{n}} = B_{\vec{n}} - B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \qquad 2.3.$$

$$P^{+}_{\vec{n}} = B^{+}_{\vec{n}} - B^{+}_{\vec{n}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \qquad 2.4.$$

$$P^{+}_{\vec{n}} P_{\vec{n}} = B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} - B^{+}_{\vec{n}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \qquad 2.5.$$

U niskotemperaturskom razvoju za magnetizaciju ići ćemo do članova proporcionalnih T^4, te ćemo u daljem računu sve članove koji bi dali popravke reda T^{92} i više, zanemariti. U skladu sa tim transformisaćemo izraz za magnetizaciju:

$$\sigma = 1 - 2 < P^{+}_{\vec{n}} \; P_{\vec{n}} > \qquad 2.6.$$

Ako Pauli operatore zamenimo pomoću relacije (2.5.) dobijamo:

$$\sigma = 1 - 2 < B^{+}_{\vec{n}} \; B_{\vec{n}} > + 2 < B^{+}_{\vec{n}} \; B^{+}_{\vec{n}} \; B_{\vec{n}} \; B_{\vec{n}} >$$

Poslednji član transformisaćemo pomoću Vikove teoreme, tako da dobijamo:

$$\sigma = 1 - 2 < B^{+}_{\vec{n}} \; B_{\vec{n}} > + 4 < B^{+}_{\vec{n}} \, B_{\vec{n}} >^{2}_{o} \qquad 2.7.$$

gde je:

$$< B^{+}_{\vec{n}} \, B_{\vec{n}} >_{o} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \left(e^{\frac{E^{(o)}_{\vec{k}}}{\theta}} - 1 \right)^{-1}$$

i

$$E^{(o)}_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \left(J_{\vec{o}} - J_{\vec{k}} \right) + \mu \mathcal{H}$$

S obzirom na tačnost kojom radimo, koristeći spektralnu funkciju iz prethodnog paragrafa i relaciju (2.5.) lako se može pokazati da je:

$$< B^{+}_{\vec{n}} \, B_{\vec{n}} > = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{\frac{E_{\vec{k}}}{\theta}} - 1} + 2 < B^{+}_{\vec{n}} \; B_{\vec{n}} >^{2}_{E^{o}_{\vec{k}}} \qquad 2.8.$$

gde je $E_{\vec{k}}$ dato sa (1.21.).

Ako zamenimo (2.8.) u (2.7.), dobijamo konačan izraz za magnetizaciju sa tačnošću do članova proporcionalnih T^4:

$$\sigma = 1 - \frac{2}{N} \sum_{\vec{k}} \left(e^{\frac{E_{\vec{k}}}{\theta}} - 1 \right)^{-1} \qquad 2.7.a.$$

gde je:

$$E_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\cdot(J_{\vec{o}} - J_{\vec{k}}) + \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} (J_{\vec{k}} + J_{\vec{q}} - J_{\vec{o}} - J_{\vec{k}-\vec{q}})\cdot$$

$$\cdot < B^{+}_{\vec{q}} B_{\vec{q}} >_{o} + \mu \mathcal{H} \qquad 2.9.$$

gde je uzeta aproksimacija:

$$< P^{+}_{\vec{q}} P_{\vec{q}} > \simeq < B^{+}_{\vec{q}} B_{\vec{q}} >_{o} = \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} \left(e^{\frac{J_{\vec{o}} - J_{\vec{k}}}{2}} - 1 \right)^{-1}$$

$$2.10.$$

što je u skladu sa tačnošću koju koristimo.

Da bi magnetizaciju izračunali s tačnošću do T^4 moramo zakon disperzije izračunati sa tačnošću do šestog stepena po intenzitetu talasnog vektora. S tom tačnošću zakon disperzije, u aproksimaciji najbližih suseda, dobija oblik:

$$E_{\vec{k}} = I\ [A_1(\rho)\ A'(\theta,\phi)\ |\vec{k}|^6 + B_1(\rho)\ B'(\theta,\phi)\ |\vec{k}|^4 +$$

$$+ C_1(\rho)\ |\vec{k}|^2 + D_1(\rho)] \qquad 2.12.$$

gde je

$$\left.\begin{aligned}
A_1(\rho) &= \frac{1}{720} \\
A'(\theta,\phi) &= \sin^6\theta\cos^6\phi + \sin^6\theta\sin^6\phi + \cos^6\phi \\
B_1(\rho) &= -\frac{1}{24} - \pi Z_{5/2}(\alpha)\rho^{5/2} \\
B'(\theta,\phi) &= \sin^4\theta\cos^4\phi + \sin^4\theta\sin^4\phi + \cos^4\theta \\
C_1(\rho) &= \frac{1}{2} - \pi Z_{5/2}(\alpha)\rho^{5/2} + \frac{\pi^2}{2} Z_{7/2}(\alpha)\rho^{7/2} \\
D_1(\rho) &= \frac{\mu\mathcal{H}}{I} \\
\rho &= \frac{kT}{2\pi I} \\
\alpha &= \frac{\mu\mathcal{H}}{kT} \\
Z_p(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^{-p} e^{-n\alpha} \\
&\phi,\theta \text{ - polarni uglovi}
\end{aligned}\right\} \quad 2.13.$$

Uvrštavajući (2.13.) u (2.12.), a ovu u (2.11.) dobijamo:

$$\sigma = 1 - 2Z_{3/2}(\alpha)\rho^{3/2} - \frac{3\pi}{2} Z_{5/2}(\alpha)\rho^{5/2} - \frac{33\pi^2}{16} Z_{7/2}\rho^{7/2} -$$

$$- 6\pi Z_{9/2}(\alpha)\rho^4 + 0(\rho^{9/2}) \qquad 2.14.$$

Uzimajući u obzir da je

$$\rho = \frac{kT}{2\pi I}$$

relaciju (2.14.) možemo napisati u obliku:

$$\sigma = 1 - aT^{3/2} - bT^{5/2} - cT^{7/2} - dT^4 + 0(T^{9/2}) \qquad 2.15.$$

gde su a, b, c, d odgovarajuće konstante.

Izraz

$$dT^4 = \delta\, \sigma_{ANH} \qquad 2.16.$$

predstavlja anharmonijsku korekciju za magnetizaciju. Izraz (2.15.) možemo sada napisati na sledeći način:

$$\sigma = \sigma_{BL} + \delta\, \sigma_{ANH} \qquad 2.17.$$

gde je

$$\sigma_{BL} = 1 - aT^{3/2} - bT^{5/2} - cT^{7/2} + 0(T^{9/2})$$

poznati Blohov rezultat za magnetizaciju u harmonijskoj aproksimaciji.

Napomenimo na kraju da se, u slučaju kada magnetizaciju odredjujemo direktno preko Pauli operatora, dobija drugačiji rezultat za niskotemperaturski razvoj, tj. kao prva popravka usled anharmonijskih efekata dobija se:

$$\delta\ \sigma_{ANH} = a^2\ T^3 \qquad 2.18.$$

kao što je dobijeno u [4] i u nekim radovima Tjablikova [5]. Ovaj rezultat sledi iz činjenice da se za magnetizaciju, koristeći spektralnu funkciju $I_{\vec{k}}(\omega)$ iz prethodnog paragrafa (1.15.a.) dobija sledeći izraz:

$$\sigma = \frac{1}{1 + \frac{2}{N}\sum\limits_{\vec{k}}{}' (e^{\frac{E_{\vec{k}}}{\theta}} - 1)} \simeq 1 - \frac{2}{N}\sum_{\vec{k}} (e^{\frac{E_{\vec{k}}}{\theta}} - 1) +$$

$$+ \left[\frac{2}{N} \sum_{\vec{k}} (e^{\frac{E_{\vec{k}}}{\theta}} - 1)^{-1} \right]^2 \qquad 2.19.$$

Drugi član u formuli (2.19.) daje popravku proporcionalnu T^3.

Da je ovaj rezultat netačan pokazao je Tjablikov u radu [6], gde je metodom Grinovih funkcija pomoću Pauli operatora dobio Dajsonov rezultat. Kao što je tamo pokazano, potrebno je zakon disperzije izračunati sa većom tačnošću nego što je dato u prethodnom paragrafu i u radovima [4] i [5]. U skladu sa tim, i rezultat koji je dobijen u radu [4] pomoću spektralne funkcije ($\delta\ \sigma_{ANH} \simeq T^3$) ne može se smatrati tačnim, jer se zakon disperzije mora izračunati sa većom tačnošću, tj. mora se u razvoju za spektralnu funkciju i njene momente (formula (1. 9.) uzeti u obzir i jednačina za drugi moment.

Kao što smo pokazali u ovom paragrafu, prelaskom sa Pauli na Boze operatore jednostavnijim računom se može doći do tačnog rezultata za niskotemperaturski razvoj magnetizacije.

ZAKLJUČAK

Rezultati ovog rada mogu se rezimirati ukratko na sledeći način:

a. U prvoj glavi su dati neki elementi opšte teorije o magnetizmu

b. U prvom paragrafu druge glave, koristeći razvoj za spektralnu funkciju i njene momente, dat je zakon disperzije za magnone u Hajzenbergovom feromagnetu sa spinom $s = 1/2$. Ovaj metod je, kao alternativa metodu Grinovih funkcija, predložen u radu [4].

c. U drugom paragrafu druge glave, dat je niskotemperaturski razvoj za relativnu magnetizaciju po čvoru rešetke, s tačnošću od $T^{9/2}$. Za razliku od rezultata koji su dobijeni u radu [4], gde je prva popravka na Blohov rezultat proporcionalna T^3, pokazano je, da se prelazom sa Pauli na Boze operatore, za popravku na Blohov rezultat usled anharmonijskih efekata dobija poznati Dajsonov rezultat:

$$\delta \sigma_{ANH} = dT^4 .$$

Napomenimo na kraju, da bi se ovim metodom, koristeći jednačine za više momente spektralne funkcije, moglo izračunati i vreme života elementarnih eksitacija u feromagnetiku.

L I T E R A T U R A

[1.] С. В. Тябликов: Методы квантовой теории магнетизма, "Наука", Москва (1965).

[2.] Под редакцией П. Ландсберга: Задачи по термодинамике и статистической физике, "Мир", Москва (1974).

[3.] М. Шкрињар: Магистарски рад, Београд, 1972.

[4.] S. Trimper: Phys. stat. sol (b) 54, k 87 (1972).

[5.] С. В. Тябликов: ФММ 15 (5), 641 (1963).

[6.] С. В. Тябликов, Е. М. Сорокина: ФММ 24,(2),200 (1967).

[7.] F. J. Dyson: Phys. Rev. 102.,1217 (1956);
Phys. Rev. 102.,1230 (1956).