Univerzitet u Novom Sadu

PRIRODNOMATEMATIČKI FAKULTET

D I P L O M S K I R A D

FAZNI PROSTOR U FIZICI ELEMENTARNIH ČESTICA

Izradila:
Čović Anka

Novi Sad 1977

S A D R Ž A J :

1. U V O D

1.1. S - matrica

Ljudska saznanja se stalno produbljuju. Nove tehnike i naučne metode omogućavaju izvodjenje novih i sve preciznijih eksperimenata, pa je potreba predvidjanja rezultata eksperimenata sve neophodnija.

Gledano najopštije svi rezultati fizičkih eksperimenata mogu se opisati S-matricom, koja medjutim u opštem slučaju nije poznata.

S-matrični elemenat je amplituda prelaza iz nekog stanja i u stanje f. $|i\rangle$ je početno stanje (Šredingerovo), a $|f\rangle$ je konačno stanje.

Posmatra se udaljeno $|i\rangle$, inicijalno (Šredingerovo) stanje ($t \equiv -\infty$), gde su čestice medjusobno dovoljno daleko i interaguju. Kako vreme raste ($t \sim 0$) one se približavaju, medjusobom interaguju, pa se te ili proizvedene čestice detektuju posle interakcije ($t \equiv +\infty$). Konačno stanje $|f\rangle$ koje se posmatra ($t \equiv +\infty$) dato je sa $U(t, -\infty)|i\rangle$.

$$U(\infty, -\infty)|i\rangle = S|i\rangle$$

Amplituda nalaženja konačnog stanja $|f\rangle$ data je preklapanjem $\langle i | S | f\rangle$.

Izraz za matrični elemenat je

$$S_{fi} = \langle i | S | F\rangle = \langle i | S | f\rangle$$

Odavde se vidi da ako je poznata S-matrica može se izračunati $|f\rangle$.

1.2. Fermijevo zlatno pravilo

Problem verovatnoće prelaza iz jednog stanja i u drugo stanje f, računate na jedinicu vremena, rešavaće se teorijom perturbacija.

Posmatraće se kvantna stanja, blizu jedno drugom, što znači da se matrični elementi vrlo sporo menjaju u funkciji od broja kojim je obeleženo kvantno stanje. Sa ρ (f) obeležava se gustina konačnih stanja u odnosu na energiju E, dN broj stanja u intervalu dE_f.

$$dN = \rho(f)\, dE_f$$

odnosno

$$\rho(f) = \frac{dN}{dE_f}$$

Verovatnoća prelaza se obeležava sa P. Dva bliska kvantna stanja ($E_i \sim E_f$) daju verovatnoću prelaza po vremenu, izrazom

$$\frac{P}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} \, |H'_{fi}|^2 \rho(f) \tag{1.1}$$

$$W = \frac{\text{verovatnoća prelaza}}{\text{jedinica vremena}} = \frac{P}{t}$$

Jednačina (1.1) se može pisati i

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi_f | \, H' | \Psi_i \rangle|^2 \rho(f) \tag{1.2}$$

Uopštavanjem može se ρ (f) označiti sa F. F predstavlja faktor koji je funkcija energije i mase pojedinih čestica u konačnom stanju. Jednačina (1.2) dobija izgled

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \, |H'_{fi}|^2 \, F \tag{1.3}$$

Ova jednačina je čuveno Fermijevo pravilo kvantne mehanike često se naziva i Fermijevo zlatno pravilo, pa i zlatno pravilo kvantne mehanike.

Jednačina (1.3) daje verovatnoću prelaza u jedinici vremena iz nekog početnog stanja $|i\rangle$ u konačno stanje $|f\rangle$. Važna je u teoriji kvantnih prelaza, kvantnog zračenja itd.

Da bi se pronašla verovatnoća prelaza, iz (1.3) sledi, da se mora naći kvadrat matričnog elementa.

Matrični elemenat je u opštem slučaju nepoznat, jer je interakcija izmedju čestica nepoznata (naročito ako su u pitanju jake interakcije). Interakcija predstavlja dinamički aspekt u opisu verovatnoće prelaza, ostalo iz te jednačine (1.3) je kinematički faktor. On se može konkretno izračunati.

2. F A Z N I   P R O S T O R

"2.1. Klasična definicija faznog prostora

Da bi se prikazalo stanje sistema, uvodi se pogodni višedimenzionalni Euklidov prostor i to takav da svakom stanju sistema odgovara izvestan deo ovog prostora koji se može svesti i na tačku.

Ako se uoči neki sistem čestica sa n stepeni slobode,dinamičko stanje sistema geometrijski se može prikazati uvodjenjem Euklidovog 2n-dimenzionalnog prostora. Tačka se predstavlja skupom svih generalisanih koordinata i impulsa sistema:

$$x = (q_1, q_2, \ldots\ldots q_n, p_1, p_2, \ldots\ldots p_n)$$

Ovako definisan Euklidov 2n-dimenzionalni prostor naziva se FAZNI PROSTOR, a svaka tačka ovog prostora FAZNA ili REPREZENTATIVNA TAČKA.

Trenutno dinamičko stanje sistema predstavlja se jednom jedinom tačkom u faznom prostoru. Kretanje sistema u trodimenzionalnom prostoru svodi se na kretanje odgovarajuće fazne tačke u 2n-dimenzionalnom prostoru dajući FAZNU TRAJEKTORIJU.

Stanja se ponekad mogu definisati samo položajem ili impulsima čestica. Tada se može uzeti Euklidov n-dimenzionalni prostor u kome se pod tačkom podrazumeva uredjeni skup generalisanih koordinata $(q_1, q_2, \ldots\ldots q_n) \equiv$ KONFIGURACIONI PROSTOR,odnosno skup generalisanih impulsa $(p_1, p_2, \ldots\ldots p_n) \equiv$ IMPULSNI PROSTOR. Ova dva sistema se smatraju podsistemima faznog prostora. U daljem izlaganju upotrebljava se uglavnom impulsni prostor.

Definisano stanje kretanja, posmatrane čestice (koordinata položaja (x,y,z) i impulsa (p_x, p_y, p_z))može biti predstavljena sa tačkom u 6-sto dimenzionalnom faznom prostoru. Svakoj čestici u faznom prostoru odgovaraju odredjena stanja za kretanje čestice.

U klasičnoj mehanici prostora ne ograničava se gustina prikazanih tačaka. Data vrednost za x može se kombinovati sa makojom vrednošću p.U principu je moguće istovremeno, sa beskonačnom tačnošću, poznavati koordinate ikoličine kretanja, te tako ograničiti tačku u faznom prostoru.

U klasičnoj fizici stanje sistema se definiše preko vrednosti (na primer energije) koje se mogu kontinualno menjati. U kvantnoj fizici neke fizičke veličine imaju niz diskretnih vrednosti.

Govori se o faznoj ćeliji a šta je ona ustvari?

Za stanje sistema uzima semali elemenat faznog prostora γ^n, gde γ ima dimenzije dejstva, proizvod koordinate i impulsa , a n predstavlja broj stepeni slobode. Ovako definisan elemenat faznog prostora naziva se ELEMENTARNA FAZNA ĆELIJA. Najmanja moguća vrednost fazne ćelije na osnovu relacije neodredjenosti iznosi h^n (h Plankova konstanta, n broj stepeni slobode).

Izraz za faznu ćeliju je

$$d\Gamma = \prod_{i=1}^{n} dx_i \, dp_i$$

Fazna ćelija predstavlja deo zapremine faznog prostora koju ispunjavaju fazne tačke sistema. Svakom stanju odgovara izvesna fazna ćelija u faznom prostoru i obrnuto, čime je uspostavljena veza izmedju stanja sistema kao fizičkog pojma i faznog prostora.

Broj čestica u konačnom stanju biće N_1. Stanje sistema kretanja odredjeno je elementarnom ćelijom veličine $(2\pi\hbar)^3$. Broj čestica se može dati kao

$$N_1 = \frac{1}{(2\pi h)^3} \int dx\, dy\, dz\, dp_x\, dp_y\, dp_z$$

ili

$$N_1 = \frac{1}{(2\pi h)^3} \int d^3x\, d^3p$$

Ako je granica čestice geometriska zapremina V. Pisaće se

$$N_1 = \frac{V}{(2\pi h)^3} \int d^3p$$

Za čestice ukupne energije E (ili manje energije) i mase m, N_1 je broj ćelija u sfernoj zapremini impulsnog prostora

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = E^2 - m^2$$

Pošto je odredjen ukupan broj stanja, gustina faznog prostora se definiše kao broj stanja po jedinici energetskog intervala.

$$\rho_1(E) = \frac{dN_1}{dE} \qquad (2.1)$$

Ova jednačina se kratko naziva FAZNI PROSTOR za jednu tačku.

Možda je interesantno napomenuti da se gustina faznih tačaka u faznom prostoru nemenja u toku vremena

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \qquad (2.a)$$

to je Liuvilova teorema.

Uopštavanje na sistem sa n čestica je jednostavno. Broj konačnih stanja N_n jednak je sa produktom broja konačnih stanja svake čestice.

$$N_n = \left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\right]^n \int_{x_i p_i} \prod_{l=i}^{n} d^3x_i \, d^3p_i$$

Pošto su u praksi sve čestice ograničene istom geometriskom zapreminom $V = V_i = \int d^3x_i$, može se pisati

$$Nn = N_n = \left[\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\right]^n \int_{p_i} \prod_{i=1}^{n} d^3p_i \qquad (2.2)$$

Data formula daje broj raspoloživih ćelija u konačnom stanju za sistem od n čestica. Može se napomenuti, da ako čestica i ima spin jednačina (2.2) će se umnožiti za

$$\prod_{i=1}^{n} (2S_i + 1)$$

Slično se može uključiti i izotopni spin

Vidi se da faktor geometriske zapremine, spinski faktor i drugi, mogu biti uključeni u konačnu normalizaciju integrala faznog prostora, ovde će se ti faktori zanemariti i prosto izraziti.

$$\rho_n(E) = \frac{dN_n}{dE} = \frac{d}{dE}\int \prod_{i=1}^{n} d^3p_i$$

Integral treba da obuhvati sve moguće vrednosti $\vec{p}_i$. Zbog konzervacije zakona količine kretanja ($\vec{P}$), količina kretanja poslednje čestice sistema, n čestice nije nezavisna nego je data relacijom

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i - \vec{P} = 0$$

Uobičajeno je da se ovo ograničenje označava izrazom.

$$\rho_n(E) = \frac{d}{dE}\int \prod_{i=1}^{n-1} d^3p_i$$

koji ne obuhvata n česticu.

U ovom radu, dato ograničenje obuhvatiće se uvodjenjem Dirakove funkcije (za definiciju vidi dodatak 1.).

Po definiciji δ funkcije

$$\int d^3p_n \delta^3\left[\vec{p}_n - (\vec{p} - \sum_{i=1}^{n-1} \vec{p}_i)\right] = 1$$

ako se uzme u obzir

$$\vec{p}_n = \vec{p} - \sum_{i=1}^{n-1} \vec{p}_i$$

dobija se

$$\int d^3p_n \delta^3(\vec{p}_n - \vec{p}_n) = 1$$

Ovo je zakon o konzervaciji količine kretanja. Isto je i sa konzervacijom energije.

$$\sum_{i=1}^{n} E_i - E = 0$$

Pa se na osnovu funkcije

$$\int \delta\left(\sum_{i=1}^{n} E_i - E\right) dE = 1$$

Posmatrana gustina će se izračunati pomoću održanja energije i količine kretanja, ako je poznata relacija

$$\frac{d}{dE}\int \delta\left(\sum_{i=1}^{n} E_i - E \right) dE = \delta\left(\sum_{i=1}^{n} E_i - E \right)$$

Znači da se $\frac{d}{dE}$ može izraziti preko funkcije, pa je gustina

$$\rho_n(E) = \int \prod_{i=1}^{n} d^3p_i \, \delta^3\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i - \vec{p} \right)\delta\left(\sum_{i=1}^{n} E_i - E \right)$$

To je opšta formula za neinvarijantan fazni prostor, ona je simetrična u odnosu na sve čestice i zakon konzervacije je eksplicitnod dat (i za E i za p).

2.2. Neinvarijantni i invarijantni fazni prostor

Fermijevo zlatno pravilo dato jednačinom (1.3) može se izračunati na dva načina

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M'|^2 \rho(E) \tag{1.3a}$$

i

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M''|^2 R(E) \tag{1.3b}$$

M'je matrični elemenat Lorentz - neinvarijantan (kao slučaj za matrični elemenat nerelativističke teorije). M" je Lorentz-invarijantan (matrični elemenat proračunat u relativističkoj kvantnoj teoriji).

W će biti isto u oba slučaja posmatranja. R(E) i ρ(E) se medjusobno razlikuju. ρ(E) je Lorentz neinvarijantan, a R(E) je invarijantan. Matrični elementi M′ i M" su različiti i u opštem slučaju nepoznati, naročito za prelaze jakih interakcija.

Najprostiji slučaj se može ovako predstaviti. Izaberu se dva bliska kvantna stanja, njihova amplituda prelaza $|S_{fi}|$ je zanemarljivo malo promenjena. Uzima se da je matrični elemenat konstantan.

Znači ako je

M′= const. dobija se neinvarijantni fazni prostor

ili

M" = const. dobija se invarijantni fazni prostor

Fermi je koristio neinvarijantni fazni prostor. Invarijantni fazni prostor se više upotrebljava, zbog tačnijeg a i lakšeg izračunavanja.

2.3. Neinvarijantni fazni prostor

U (1.3a) interpretaciji Fermijevog pravila ako se predpostavi M′= const., dobija se nenvarijantni fazni prostor. Klasičnim putem je izračunato ρ(E) i ono iznosi

$$\rho_n(E) = \int \prod_{i=1}^{n} d^3p_i \, \delta^3\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i - \vec{p} \right) \delta\left(\sum_{i=1}^{n} E_i - E \right) \tag{2.4}$$

što predstavlja izraz za NEINVARIJANTAN FAZNI PROSTOR. d^3p_1 je faktor faznog prostora.

2.3.a. Neinvarijantni fazni prostor za dve čestice

Posmatra se sistem od dve čestice u konačnom stanju $|f\rangle$, date su njihove mase i odgovarajuće količine kretanja m_1, m_2 i p_1, p_2 respektivno. Posmatranje se vrši u sistemu centra mase. Poznata je jednačina (4.2) i izraz $E_i^2 - m^2 = p_i^2$ pa će gustina za konačni slučaj iznositi

$$\rho_2 = \rho_2(E) = \int d^3p_1\, d^3p_2\, \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\, \delta(E_1 + E_2 - E)$$

$$= \int d^3p_1\, d^3p_2\, \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\, \delta(\sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_2^2} - E)$$

Integraljenjem preko p_2 dobija se

$$\rho_2 = \int d^3p_1\, \delta(\sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_1^2} - E)$$

Ceo izraz se radi olakšanja može dati u polarnim koordinatama

$$d^3\vec{p}_1 = p_1^2\, dp_1\, d\Omega_1$$
$$d\Omega_1 = d(\cos\theta_1)\, d\Phi_1$$
$$d^3p_1 = p_1^2\, dp_1\, d\Phi_1\, d(\cos\theta_1)$$

Integracija preko $\cos\theta$ i Φ daje faktor 4π $(0<\theta<2\pi,\ 0<\varphi<\pi)$. Izraz za $\rho_2(E)$ izgleda ovako

$$\rho_2(E) = 4\pi \int p_1^2\, dp_1\, A$$

gde je A dato

$$A = (\sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_1^2} - E)$$

za konačan izraz potrebno je da A=0

$$\frac{dA}{dp_1} = \frac{p_1}{E_1} + \frac{p_2}{E_2} = \frac{p_1 E}{E_1 E_2} \qquad \text{gde je } E = E_1 + E_2$$

i za uslov za A dobija se

$$p_1 = \frac{\{[E^2 - (m_2 + m_1)^2][E^2 + (m_1 - m_2)^2]\}^{1/2}}{2E}$$

Integraljenjem po p_1

$$\rho_2(E) = \frac{4\pi p_1 E_1 E_2}{E}$$

$$\rho_2(E) = \frac{\{[E^2 - (m_2 - m_1)^2][E^2 - (m_2 + m_1)^2]\}^{1/2}}{2E} \frac{4\pi}{E} \frac{E^4 - (m_2^2 - m_1^2)^2}{4E^2} \qquad (2.4a)$$

daje izraz za neinvarijantan fazni prostor dve čestice.

2.4. V eza efektivnog preseka i verovatnoća prelaza

Verovatnoća prelaza je P, fektivni presek σ, njihova veza je data

$$P = \frac{\sigma}{A}$$

A je površina mete. Efikasan presek se u praksi koristi u ovom obliku

$$\sigma = \frac{N}{l\rho}$$

N broj čestica u zapremini interakcije V, l zbir dužina ulaznih trgova u faznu ćeliju, ρ gustina. U obliku diferencijala

$$d\sigma = \frac{dN}{l\rho} = \frac{dN}{f_{lab}\, V\, T\, \rho_{lab}} \qquad (2.5)$$

f površina preseka, V zapremina, T vreme merenja. VT je četvorodimenzionalni zapremina, a predstavlja skalar. Dovoljno je naći $_{lab}f_{lab}$ u funkciji kovarijantnih veličina.

$$f_{lab}\rho_{lab} = \rho_1 \rho_2\, F$$

pa se uvrsti u jednačinu (2.5).

Naprimer:

A + B   C + D + F

Ograniči se na ovaj tip procesa radi eksplicitnih rezultata. Količine kretanja čestice su respektivno date sa $p_1', p_2', p_1, p_2, p_3$. Izraz za efikasan presek dat je

$$d\sigma = \frac{f(p_1', p_2', p_1, p_2, p_3)\, d^3p_1\, d^3p_2\, d^3p_3}{\rho_1 \rho_2\, FVT} \qquad (2.6)$$

gde je

$$dN(p_1', p_2', p_1, p_2, p_3) = f(p_1', p_2', p_1, p_2, p_3)\, d^3p$$

broj svih dogadjaja nekog procesa u intervalu p_i, $p_i + dp_i$ $(i=1,2,3)$

$$d\sigma = \frac{dN}{\rho_1 \rho_2\ FVT}$$

Trodimenzionalni zapreminski element u prostoru količine kretanja d^3p nije invarijantna veličina, ni funkcija f nije invarijantna funkcija, ali efikasan presek je invarijantna veličina.

Dokaz:

Rasejane čestice leže u intervalu θ , $\theta + d\theta$, za $d\theta$ odgovarajući broj dogadjaja je

$$dN = f(\theta)\, d\theta$$

efikasni presek ima izgled

$$d\sigma = \frac{f(\theta)\, d\theta}{\rho_1 \rho_2\ FVT}$$

Ukupan efikasan presek se nalazi integraljenjem i predstavlja invarijantnu veličinu. Efikasni presek je funkcija ugla θ pa je i $d\sigma/d\theta$ invarijantna veličina.

Da bi desna strana jednačine (2.(6)) bila invarijantna treba je podeliti jednom invarijantnom veličinom tako da cela strana bude jedna jedina invarijantna veličina. Naprimer desna strana se podeli sa E, gde ona ima vrednost

$$E = (|p|^2 + m^2)^{1/2}$$

To je invarijantna veličina tako da se dobija $d^3p/2E$

$$\delta(p^2 + m^2)\, \theta(E)\, d^4p = \frac{d^3p}{2E}$$

$$\int \delta(p^2 + m^2)\, \theta(E)\, d^4p = \int \frac{d^3p}{2E}$$

Integracija sa leve strane je invarijantna zato što je svaki faktor unutar intervala δ funkcije, a argument

$$(E) = \begin{cases} 1 & \text{za } E > 0 \\ 0 & \text{za } E < 0 \end{cases}$$

$$d^4p\ (\equiv)\ d^3p\, dE$$

$$B = \int dE\, \delta(p^2 + m^2)\, \theta(E)$$

pa na osnovu integraljenja δ funkcije dobija se

$$\delta(p^2 + m^2) = \delta(p^2 + m^2 - E^2) = \frac{1}{2E_p}\left[\delta(E-E_p) + \delta(E + E_p)\right]$$

$$I = \frac{1}{2E_p}\int \delta(E - E_p)\, dE = \frac{1}{2E_p}$$

ili bez integraljenja na osnovu primera

$$d^4p\, \delta(p^2 - m^2)\, \theta(E) = d^3p\, dE\, \delta(E^2 - p^2 - m^2)\, \theta(E)$$

$$= d^3p\, dE\, \frac{\delta(E - \sqrt{p^2 - m^2})}{2E}$$

$$= \frac{d^3p}{2E}$$

Pa je efikasni presek dat izrazom

$$d\sigma = \frac{\varphi(p_1', p_2', p_1, p_2, p_3)}{\rho_1 \rho_2\, FVT} \sum_{i=1}^{3} \frac{d^3p_i}{2E_i} \qquad (2.7)$$

Funkcija φ je invarijantna. Jednačina (2.7) uvrsti se u $P = \sigma/A$ i dobija se invarijantnu verovatnoću prelaza.

3. I N V A R I J A N T N I   F A Z N I   P R O S T O R

3.1. Opšta formula

U predhodnoj glavi je dat izraz za neinvarijantni i invarijantni efikasni presek. Pokazano je da se d^3p u neinvarijantnoj formi zameni sa $d^3p/2E$ i postaje invarijantan, (efikasni presek i verovatnoća prelaza su povezani) pa se može pisati

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M'|^2 \rho_n(E) \qquad (3.1)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \int |M'|^2 \prod_{i=1}^{n} d^3p_i \; \delta^3\Big(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i - \vec{p} \Big) \delta^3\Big(\sum_{i=1}^{n} Ei - E \Big)$$

$d^3p \longrightarrow (d^3p_i/2E_i)$ i uz Fermijevu amplitudu M'' = const.

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M''|^2 \int \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3p_i}{2E_i} \; \delta^3\Big(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i - \vec{p} \Big) \delta\Big(\sum_{i=1}^{n} E_i - E \Big)$$

da se to izrazi u obliku jednačine (1.3b)

$$R_n(E) = \int \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3p_i}{2E_i} \; \delta^3\Big(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i - \vec{p} \Big) \delta\Big(\sum_{i=1}^{n} E_i - E \Big) \qquad (3.2)$$

koji je Lorenc invarijantan.

Faktor $2E_i$ je početak normalizacije za talasnu funkciju. Unoseći normalizaciju u (3.1) može se pisati

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M'|^2 \rho(E)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} |M'|^2 \Big(\prod_{i=1}^{n} 2E_i \Big) \Big(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2E_i} \Big) \rho(E)$$

$$W = |M''|^2 . R(E) . \text{const.}$$

znači

$$R(E) = \rho(E) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2E_i}$$

$$|M''|^2 = |M'|^2 \prod_{i=1}^{n} 2E_i$$

$$\text{const.} = \frac{2\pi}{\hbar}$$

Formula invarijantnog faznog prostora $R_n(E)$ može biti data u nekoliko simetričnih formi. Preko uopštenog kvadri vektora

$$q_i = (\vec{p}_i, E_i)$$

$$= (p_{ix}, p_{iy}, p_{iz}, E_i)$$

i

$$q_i^2 = E_i^2 - p_i^2$$

Integraljenjem preko δ funkcije, dobija se

$$\int d^4q\, \delta(q^2 - m^2) = \begin{cases} \int d^3p\, dE\, \delta(E^2 - (p^2 + m^2)) & \text{za } E > 0 \\ \int \dfrac{d^3p}{2E} & \text{za } E^2 = p^2 + m^2 \end{cases}$$

Svaka realna čestica mora zadovoljiti uslov $E^2 = p^2 + m^2$ (ne važi za virtualne) i zato svakoj pojedinačnoj odgovara jedna δ funkcija, pored one za ceo sistem.

Negativne korene treba eliminisati (od $p^2 + m^2$) i to integracijom preko E, E_i je ograničeno pozitivnim vrednostima.

Uopšte se piše

$$Q = (\vec{P}, E)$$

$$\delta^4\left(\sum_{i=1}^{n} q_i - Q\right) = \delta^3\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i - \vec{p}\right) \delta\left(\sum_{i=1}^{n} E_i - E\right)$$

Unošenjem ovog izraza u (3.2) dobija se

$$R_n(E) = \int \prod_{i=1}^{n} [d^4q_i\, \delta(q_i^2 - m_i^2)]\; \delta^4(\sum_{i=1}^{n} q_i - Q) \qquad (3.3)$$

Jednačina (3.3) se obično u literaturi označava kao LORENC INVARIJANTAN FAZNI PROSTOR.

Invarijantni izraz (3.3) daje ukupnu razpoloživu zapreminu za n čestica datih masa i ukupne energije E u impulsnom prostoru. Jasno je da ta zapremina R_n za datu energiju je broj. Poznavanje tog broja je potrebno za procenu efikasnih preseka i relativnoga prinosa.

3.2. Invarijantni fazni prostor za dve čestice

U odeljku (2.3.a) posmatrane su dve čestice u konačnom stanju za slučaj neinvarijantnog faznog prostora. Sada će se razmatrati za invarijantni fazni prostor.

Posmatraju se dve čestice sa odredjenim masama m_1 i m_2, količinama kretanja p_1 i p_2 u sistemu centra mase. Ako u jednačinu (3.3) zamenite poznati obrazac: n = 2, p_1, p_2, m_1 i m_2 dobija se

$$R_2 = \int d^4q_1\, d^4q_2\, \delta(q_1^2 - m_1^2)\; \delta(q_2^2 - m_2^2)\; \delta^4(q_1 + q_2 - Q) \qquad (3.4)$$

zna se da je $q_1^2 = E_i^2 - p_i^2$ i $q_i = q_i(\vec{p}_i, E_i)$ kao i $d^4q = d^3p\, dE$ pa jednačina (3.4) glasi

$$R_2 = \int d^3p_1\, d^3p_2\, dE_1\, dE_2\; \delta[E_1^2 - (m_1^2 + p_1^2)]\; \delta[E_2^2 - (m_2^2 + p_2^2)]$$
$$\times\; \delta^3(p_1 + p_2)\; \delta(E_1 + E_2 - E)$$

Upotrebom pravila integraljenja za funkciju dobija se

$$R_2 = \int \frac{d^3p_1}{2E_1}\, \frac{d^3p_2}{2E_2}\; \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\; \delta(E_1 + E_2 - E)$$

Integraljenje po p_2 daje

$$R_2 = \int \frac{1}{4E_1E_2(p_1)} d^3p_1 \, \delta(\, E_1 + E_2(\vec{p}_1) - E \,)$$

$$d^3p_1 = p_1 \, dp_1 \, d\Omega_1$$

dobija se

$$R_2 = \int \frac{1}{4E_1E_2(p_1)} d\Omega_1 \, p_1^2 \, dp_1 \, \delta(\, E_1 + E_2(\vec{p}_1) - E \,)$$

Sredjivanjem $\int d\Omega$ daje faktor 4π i jednačina glasi

$$R_2 = \frac{\pi \, p_1^2}{E_1 \, E_2} \; \frac{1}{\frac{p_1}{E_1} + \frac{p_1}{E_2}} = \frac{\pi \, p_1}{E} \qquad (3.4a)$$

odnosno

$$R_2 = \frac{\pi}{E} \; \frac{\{[E^2 - (\, m_2 - m_1 \,)^2]\,[E^2 - (\, m_2 + m_1 \,)^2]\}^{1/2}}{2E} \qquad (3.3a)$$

Ovo je invarijantni fazni prostor za dve čestice.

Uporedjivanjem izraza (2.4a) za neinvarijantni fazni prostor dve čestice i izraza (3.3a) za invarijantni fazni prostor dve čestice dobija se

$$R_2 = \rho_2 \, \frac{1}{2E_1} \, \frac{1}{2E_2}$$

3.3. Rekurentna formula

Izraz za Lorentz invarijantan fazni prostor n čestica sa početnim stanjem kvadri vektora $Q = (\vec{p}, E)$ je poznat i glasi

$$R_n(\vec{P}, E) = \int \prod_{i=1}^{n} \left[d^4q_i \, \delta(q_i^2 - m_i^2) \right] \, \delta^4\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i - Q \Big)$$

U centru mase za n čestica piše se (poredeći sa izrazom za fazni prostor dva tela).

$$R_n(0,E) = \int \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3p_i}{2E_i} \delta^3 (\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i) \quad \delta (\sum_{i=1}^{n} E_i - E) \qquad (3.5)$$

$$= \int \frac{d^3p_n}{2E_n} \int \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3p_i}{2E_i} \delta^3 \left[\sum_{i=1}^{n-1} \vec{p}_i - (- \vec{P}_n) \right]$$

$$\times \delta \left[\sum_{i=1}^{n-1} E_i - (E - E_n) \right]$$

U jednačini (3.5) poslednji integral je integral faznog prostora n-1 čestice sa ukupnom količinom kretanja ($-\vec{p}_n$) i ukupnom energijom ($E - E_n$). Pa se dobija

$$R_n(0,E) = \int \frac{d^3p_n}{2E_n} R_{n-1} \left[(-\vec{p}_n), (E - E_n) \right]$$

Oznaka i izraz R_n je invarijantan, R_{n-1} ne mora biti.

$$R_{n-1} \left[(-\vec{p}_n), (E-E_n) \right] =$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3p_i}{2E_i} \quad \delta^3 \left[\sum_{i=1}^{n-1} \vec{p}_i - (-\vec{p}_n) \right] \delta \left[\sum_{i=1}^{n-1} E_i - (E - E_n) \right]$$

R_{n-1} predstavlja integral faznog prostora sistema sa n - 1čestica čija je količina kretanja nula ($\vec{P} = 0$) i gde se ukupna energija daje kao

$$\varepsilon = \sqrt{(E - E_n)^2 - (-\vec{p}_n)^2} \qquad (5.)$$

pa izraz R_{n-1} dobija oblik

$$R_{n-1} \left[(-\vec{p}_n), (E - E_n) \right] \equiv R_{n-1} (0, \varepsilon)$$

Rekurentna formula izmedju n i n-1 čestice Lorenc invarijantnog faznog prostora izgleda ovako

$$R_n(0,E) = \int \frac{d^3p_n}{2E_n} \quad R_{n-1}(0,\varepsilon) \qquad (3.7)$$

Ona se koristi za dobijanje izraza faznog prostora za tri čestice

3.4. Invarijantni fazni prostor za tri čestice

Do sada je izračunat fazni prostor dva tela. Za fazni prostor tri čestice (tela) koristi se rekurentna formula.

Posmatraju se čestice, odredjena je masa i količina kretanja za sve tri m_1, m_2, m_3, i p_1, p_2, p_3 respektivno, u centru mase. Jednačina (3. 7) data u novim podacima izgleda ovako

$n \neq 3$

$$R_3(0,E) = \int \frac{d^3p_3}{2E_3} \quad R_2(0,\varepsilon) \qquad (3.8)$$

gde se iz jednačine (3.6) odredi ε^2

$$\varepsilon^2 \equiv (E - E_3)^2 - p_3^2$$

R_2 je odredjeno jednačinom (3.4a) . Može se napisati

$$R_2 = \frac{\pi p'}{E'}$$

pa izraz (3.8) ima oblik

$$R_3(0,E) = \int \frac{d^3p_3}{2E_3} \quad \left(\frac{\pi p'}{E'} \right) \qquad (3.9)$$

gde je p' momenat svake čestice u sistemu dve čestice sa energijom E' u njihovom centru mase. Piše se

$$E' = E_1' + E_2' = \sqrt{m_1^2 + p'^2} + \sqrt{m_2^2 + p'^2}$$

odavde je očito da $\varepsilon = E$, dato rešenje za p'je

$$p' = \frac{\left\{\left[\varepsilon^2 - (m_1 + m_2)^2\right]\left[\varepsilon^2 - (m_1 - m_2)^2\right]\right\}^{1/2}}{2E}$$

Zamenom vrednosti u jednačinu (3.9) dobila se

$$R_3(0,E) = \int \frac{4\pi p_3^2}{2E_3} \pi \left\{\left[E^2 + m_3^2 - 2EE_3 - (m_1 - m_2)^2\right]\right.$$

$$\left. \times \left[E^2 + m_3^2 - (m_1 + m_2)^2 - 2EE_3\right]\right\}^{1/2} \frac{1}{2(E^2 + m_3^2 - 2EE_3)} \tag{3.10}$$

Integral će biti uzet izmedju p_3(min) i p_3(max), minimalne i maksimalne vrednosti p_3. Ako je p_3(min) čestice 1 i 2 emitovane su antiparalelno sa istom količinom kretanja, maksimalni moment treće čestice biće dobijen ako se druge dve emitiju paralelno i istom brzinom, dobija se

$$E = \sqrt{m_3^2 + p_3^2(\max)} + \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + p_3^2(\max)}$$

Jednačina se reši po p_3 i dobije

$$p_3(\max) = \frac{\left\{\left[E^2 - (m_1 + m_2 - m_3)^2\right]\left[E^2 - (m_1 + m_2 + m_3)^2\right]\right\}^{1/2}}{2E} \tag{3.11}$$

U opštem slučaju gde tri čestice imaju različite mase $(m_1, m_2 m_3)$ jednačina (3.10) je eliptički integral.

4. UGAONA RASPODELA

4.1. Opšta formula

Posmatra se n čestica, one se mogu sudarati ili rasejavati, njihov položaj posle sudara ili rasejanja može se predstaviti ugaonom raspodelom.

Primenom jednačine (3.3) dobija se izraz za ugaonu raspodelu izmedju makoje dve čestice sistema od n čestica. Ugaona raspodela se dobija u centru mase tih n čestica.

Naprimer: posmatraju se čestice n i n-1, ugao θ je ugao izmedju te dve čestice, a definisan je

$$\cos\theta = \frac{\vec{p}_n \cdot \vec{p}_{n-1}}{p_n\, p_{n-1}}$$

R_n se može posmatrati kao funkcija svih količina kretanja $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$. Kada se izrazi u funkciji $\cos\theta$ izgleda ovako

$$R_n = R_n(\,0,\ E,\ \cos\theta\,)$$

a funkcija ugaone raspodele izmedju dve čestice je

$$\frac{dR_n}{d(\cos\theta)}$$

Primenom postupka za izvodjenje rekurentne formule, dobija se

$$R_n(0,E,\cos\theta) = \int \frac{d^3p_n}{2E_n}\ \frac{d^3p_{n-1}}{2E_{n-1}}\ R_{n-2}(0,\mathcal{E}_{n-2}) \qquad (4.1)$$

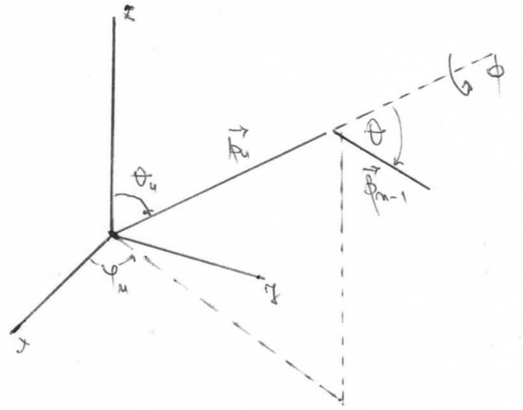
gde je

$$\varepsilon^2_{n-2} = (E - E_n - E_{n-1})^2 - (\vec{p}_n + \vec{p}_{n-1})^2$$

$$= (E^2 + m_n^2 + m^2_{n-1}) - 2(EE_n + EE_{n-1} - E_N E_{n-1} + p_n p_{n-1}\cos\theta)$$

$$= (E^2 + m_n^2 + m^2_{n-1}) - 2(EE_n + EE_{n-1} - E_n E_{n-1} + p_n p_{n-1}\cos\theta\,)$$

Pa se to predstavi u polarnim kordinatama, sa θ_n i Φ_n dobija se direktno $\vec{p}_n$. Φ i θ direktno daje $\vec{p}_{n-1}$. Sa procenom $\vec{p}_n$ (vidi sliku 1) može se pisati



Slika 1: Uglovi θ_n i φ_n daju prostornu orjentaciju n čestica. Ugao θ i Φ daje relativnu orjentaciju za čestice n i n-1.

$$d^3\vec{p}_n = p_n^2 \, dp_n \, d(\cos\theta_n) \, d\Phi_n$$

$$d^3\vec{p}_{n-1} = p_{n-1}^2 \, dp_{n-1} \, d\Omega_{n-1} = p_{n-1}^2 \, dp_{n-1} \, d(\cos\theta) \, d\Phi$$

Integraljenjem preko $d\Omega_n = \sin\theta_n \, d\theta_n \, d\Phi_n$ dobija se faktor 4π, a integraljenje preko $d\Phi$ daje 2π, tada se jednačina (4.1) piše

$$\frac{dR_n(0,E,\cos\theta)}{d(\cos\theta)} = 2\pi^2 \int \frac{p_n^2 \, p_{n-1}^2}{E_n \, E_{n-1}} \, dp_n \, dp_{n-1} \, dR_{n-2}(0,\varepsilon_{n-2}) \tag{4.2}$$

granice integrala dp_n i dp_{n-1} zavisiće od $\cos\theta$. Uopšte za sve moguće vrednosti $\cos\theta$, granica integraljenja za p_n ima ist ili veću vrednost $p_n(\min)$ i istu ili manju vrednost od $p_n(\max)$, gde je

$$p_n(\min) = 0$$

a

$$p_n(\max) = \frac{\left\{\left[E^2 - (m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1} + m_n)^2\right]\right\}^{1/2}}{2E}$$

$$\times \left[E^2 - (m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1} - m_n)^2\right]^{1/2}$$

Odgovarajuće ograničenje za p_{n-1} dobija se smenom n sa n-1 u predhodnoj jednačini. Vrednost $p_n(\max)$ predstavlja izraz, gde je svih n-1 čestica emitovano istom brzinom ali suprotnog smera u odnosu na n česticu.

Ako se integrali prvo preko dp_{n-1} traže se granice za odredjeno p_n i odredjeno $\cos\theta$. Lako je pokazati da će p_{n-1} imati maksimalnu vrednost ako je količina kretanja $(\vec{p}_n + \vec{p}_{n-1})$ zamenjena sa nekom masom M.

$$M = (m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_{n-2}) = \sum_{i=1}^{n-2} m_i$$

Rešenje za maksimalnu vrednost $\vec{p}_{n-1}$, odredjenog $\vec{p}_n$ i cos daje pozitivan koren i dobije se

$$E_n + (m_{n-1}^2 + p_{n-1}^2)^{1/2} + \left[\left(\sum_{i=1}^{n-2} m_i\right)^2 + p_n^2 + p_{n-1}^2 + 2p_n p_{n-1}\cos\theta\right]^{1/2} = E$$

odavde je

$$p_{n-1} = \frac{-\,a p_n \cos\theta + (E - E_n)\sqrt{a^2 - 4m_{n-1}^2 b}}{2b} \qquad (4.3)$$

ako su

$$a = (E - E_n)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-2} m_i\right)^2 + m_{n-1}^2 - p_n^2$$

$$b = (E - E_n)^2 - p_n^2 \cos^2\theta$$

Gornja granica p_n za odredjeno cos može u principu biti odredjen ako se zameni $\vec{p}_n$ sa $\vec{p}_{n-1}$ u (4.3) i odredi vrednost za $\vec{p}_{n-1}$ ako se zna da je

$$\frac{\partial p_n}{\partial p_{n-1}} = 0$$

4.2. Ugaona raspodela tri čestice

Posmatraju se tri čestice. Primenom jednačine (4.2) dobija se ugaona raspodela izmedju čestica 2 i 3, faznog prostora tri čestice

$$\frac{dR_3(O,E,\cos\theta)}{d(\cos\theta)} \cong \int \frac{p_2^2}{E_2}\,\frac{p_3^2}{E_3}\,dp_2\,dp_3\,R_1(o,\varepsilon)$$

gde je

$$\varepsilon^2 = [E - (E_2 + E_3)]^2 - (\vec{p}_2 + \vec{p}_3)^2$$

Prvo se nadje $R_1(o,\varepsilon)$ i ono iznosi

$$R_1(o,\varepsilon) = \int d^3p_1\,dE_1\,\delta^3(\vec{p}_1)\,\delta(E_1 - \varepsilon)\,\delta[E_1^2 - (p_1^2 + m_1^2)]$$

Integraljenjem preko $\vec{p}_1$ i E dobija se

$$R_1(o,\varepsilon) = \delta(\varepsilon^2 - m_1^2)$$

$$\frac{dR_3(O,E,\cos\theta)}{d(\cos\theta)} = \int \frac{p_2^2}{E_2}\,\frac{p_3^2}{E_3}\,dp_2\,dp_3\,\delta(\varepsilon^2 - m_1^2)$$

$$= \int \frac{p_2^2}{E_2}\,\frac{p_3^2}{E_3}\,dp_2\,dp_3\;\delta[(E - E_2 - E_3)^2 - p_2^2 - p_3^2 -$$

$$\mp 2p_2p_3\cos\theta - m_1^2]$$

$$A = \delta[(E \mp E_2 - E_3)^2 - p_2^2 - p_3^2 - 2p_2p_3\cos\theta - m_1^2]$$

Integracija po p_2 je laka zbog δ funkcije. Proračun daje p_2 za A=0

$$\frac{dR_3(O,E,\cos\theta)}{d(\cos\theta)} = \int \frac{p_2^2p_3^2}{E_3}\,dp_3\;\frac{1}{2p_2(E - E_3) + 2p_3E_2\cos\theta}$$

p_2 je dato jednačinom (4.3) u funkciji od p_3. Konačno integraljenje po p_3 ne može biti izvršena analitički za slučaj gde su sve tri čestice različitih masa i sve su različite od nule.

5. EFEKTIVNA MASA

5.1. Definicija i specijalan slučaj

Do sada je bilo reči o raspodeli količine kretanja, ugaonoj raspodeli, a o raspodeli efektivne mase sada će biti reči.

Opšta definicija efektivne mase data je $M_{i...j}$, za čestice označene i...j.

$$M_{i...j}^2 = -(q_i + \ldots\ldots + q_j)^2$$

$$= (E_i + \ldots . + E_j)^2 - (\vec{p}_i + \ldots + \vec{p}_j).(\vec{p}_i + \ldots + \vec{p}_j)$$

Invarijantne mase se koriste za utvrdjivanje rezonanci u fizici čestica tj. čestica koje se raspadaju po jakim interakcijama, u karakterističnima vremenima raspada 10^{-23} sec. rezonancija se pokorava Bre - Wigner - ovoj formuli.

Ako se odabere k čestica od mogućih n može se predstaviti efektivna masa kao ${}^{n}_{k}M^2$.

Najprostiji slučaj je uzet za početak. Posmatraju se dve čestice odredjenih masa m_1 i m_2, njihova efektivna masa je data izrazom

$$M_{12}^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2$$

Razmatranje će se vršiti u odnosu na efektivnu masu sistema čestica. Efektivna masa dve čestice u prvoj metodi proračunava se u faznom prostoru tri čestice.

Poznat je diferencijal jednačine spektra količine kretanja u sistemu centra mase, za fazni prostor tri čestice.

$$\frac{dR_3}{dp_3} = \frac{\pi^2 p_3^2}{E_3} \times \frac{\left\{\left[E^2 - 2EE_3 + m_3^2 - (m_1 + m_2)^2\right]\left[E^2 - 2EE_3 + m_3^2 - (m_1 - m_2)^2\right]\right\}^{1/2}}{E^2 - 2EE_3 + m_3^2} \tag{5.2}$$

Primenom uslova održanja energije i količine kretanja u (5.2)

$$M_{12}^2 = (E - E_3)^2 - p_3^2$$

$$= E^2 - 2EE_3 + m_3^2$$

diferenciranjem se dobija

$$M_{12}\, dM_{12} = - E\, dE_3 = - \frac{E\, p_3}{E_3}\, dp_3$$

$\vec{p}_3$ se može upotrebiti u (5.3) i eksplicitna funkcija u zavisnosti od M_{12} je

$$p_3 = \frac{\left\{\left[E^2 - (M_{12} + m_3)^2\right]\left[E^2 - (M_{12} - m_3)^2\right]\right\}^{1/2}}{2E}$$

dR_3/dM_{12} je raspodela efektivne mase za čestice 1 i 2.

$$\frac{dR_3}{dM_1} = \frac{dR_3}{dp_3}\,\frac{dp_3}{d\,M_{12}} = \frac{M_{12}\,E_3}{E\,p_3}\,\frac{dR_3}{dp_3}$$

primenom jednačina (5.2) i (5.3) dobija se

$$\frac{dR_3}{dM_{12}} = \frac{\pi^2}{2E^2 M_{12}}\left\{\left[M_{12}^2 - (m_1 + m_2)^2\right]\left[M_{12}^2 - (m_1 - m_2)^2\right]\right.$$

$$\left. \times \left[E^2 - (m_3 + M_{12})^2\right]\left[E^2 - (m_3 - M_{12})^2\right]\right\}^{1/2} \tag{5.4}$$

Diferencijal raspodele efektivne mase u faznom prostoru tri čestice. Granice za M_{12} temelje se na granicama za p_3 koje su date jednačinom (3.10) dobija se

$$M_{12}(\min) = m_1 + m_2$$

$$M_{12}(\max) = E - m_3$$

Ovo se uvrsti u (5.4) dobija se karakteristična opšta formula

$$\frac{dR_3}{dM_{12}} = (2M_{12}) \frac{\pi}{M_{12}} \frac{\{[M_{12}{}^2 - (m_1 + m_2)^2][M_{12}{}^2 - (m_1 - m_2)^2]\}^{1/2}}{2M_{12}}$$

$$\times \frac{\pi}{E} \frac{\{[E^2 - (m_3 + M_{12})^2][E^2 - (m_3 - M_{12})^2]\}^{1/2}}{2E}$$

ova formula je sastavljena iz dva različita izraza za R_2

$$\frac{dR_3}{dM_{12}} = (2M_{12}) \underbrace{R_2(0, M_{12}, m_1, m_2)}_{D} \underbrace{R_2(0, E, m_3, M_{12})}_{C}$$

D je faktor u faznom prostoru dve čestice, čestica m_1 i m_2, a ukupne energije M_{12}; C je faktor sistema mase m_3 i M_{12} sa ukupnom energijom E.

5.2. Opšta formula

Poznat je izraz efektivne mase sa održanjem p i E

$$ {}^n_k M^2 = (E - \sum_{i=k+1}^{n} Ei)^2 - (\vec{p} - \sum_{i=k+1}^{n} \vec{p}_i)^2 = (Q - \sum_{i=k+1}^{n} q_i)^2 \qquad (5.5)$$

izabere se prvih k čestica (1,2,....k,k+1,....n) od n

$$f(\mu^2) = \frac{dR_n}{d({}^n_k M^2)} = \frac{d}{d({}^n_k M^2)} R_n(P, E, m_1, \ldots, m_n)$$

$f(\mu^2)$ je verovatnoća efektivne mase prvih k čestica, μ vrednost mase prvih k čestica. R_n je funkcija svih masa n čestica. Ako se R_n piše po jednačini (3.3) dobija se

$$f(\mu^2) = \int \left[\prod_{i=L}^{n} d^4 q_i \, \delta(q_i^2 - m_i^2)\right] \delta^4(\sum_{i=1}^{n} q_i - Q) \, \delta({}^n_k M^2 - \mu^2) \qquad (5.6)$$

$$\mu^2 = (\sum_{i=1}^{n} q_i)^2 = {}^n_k M^2$$

Transformaciji (5.6) pomoći će ranije izvodjenje formula R_n i rekurentne formule. Poznato je

$$\int \delta^4 \left(\sum_{i=1}^{n} q_i - {}^n_k M\right) d^4\, {}^n_k M = 1$$

$$\delta^4 \left(\sum_{i=1}^{n} q_i - Q\right) = \delta^4 \left(\sum_{i=1}^{k} q_i + \sum_{i=1+k}^{n} q_i - Q\right)$$

$$= \int \delta^4 \left(\sum_{i=1}^{k} q_i - {}^n_k M\right) \delta^4 \left({}^n_k M + \sum_{i=k+1}^{n} q_i - Q\right) d^4\, {}^n_k M$$

jednačina se može pisati

$$f(\mu^2) = \int \left[\prod_{i=1}^{k} d^4 q_i\, \delta(q_i^2 - m_i^2)\right] \left[\prod_{i=k+1}^{n} d^4 q_i\, \delta(q_i^2 - m_i^2)\right.$$

$$\times \delta^4\left(\sum_{i=1}^{k} q_i - {}^n_k M\right) \delta^4\left({}^n_k M + \sum_{i=k+1}^{n} q_i - Q\right) \delta\left({}^n_k M^2 - \mu^2\right) d^4\, {}^n_k M$$

$$= \int \left\{ \left[\prod_{i=1}^{k} d^4 q_i\, \delta(q_i^2 - m_i^2)\right] \delta^4\left(\sum_{i=1}^{n} q_i - {}^n_k M\right)\right\}$$

$$\times \left\{ \left[\prod_{i=k+1}^{n} d^4 q_i\, \delta(q_i^2 - m_i^2)\right] d^4\, {}^n_k M\, \delta\left({}^n_k M^2 - \mu^2\right)\right.$$

$$\left. \times\, \delta^4\left({}^n_k M + \sum_{i=k+1}^{n} q_i - Q\right)\right\}$$

odnosno

$$f(\mu^2) = R_k(0, \mu, m_i, \ldots, m_k)\, R_{n-k+1}(0, E, m_{k+1}, \ldots, m_n\}, \mu) \tag{5.7}$$

To je opšta formula verovatnoće efektivne mase faznog prostora i tela. R_k daje verovatnoću da prvih k čestica ima ukupnu energiju μ u centru mase. R_{n-k+1} daje verovatnoču da svih n čestica ima energiju E a istovremeno prvih k čestica ima energiju μ. $f(\mu^2)$ je ustvari verovatnoća da svih n čestica ima energiju E, a istovremeno prvih k ima energiju .

5.3. Oblik raspodele efektivne mase

Može se lako pokazati da sve raspodele efektivne mase (verovatnoća nalaženja za efektivnu masu μ izmedju μ i $\mu + d\mu$) mogu biti klasifikovane u nekoliko grupa raspodele. Svaka grupa ima karakterističan oblik odredjen preko vrednosti n i k. Opšti izgled ovih raspodela efektivne mase može biti upotrebljen zaposebne proračune raspodela efektivne mase. Uporedjivanje različitih konačnih stanja može se nagovestiti ako se dobijena kriva smanji za očekivanu pozadinu faznog prostora. Opšta raspodela efektivne mase ima vrednost nula, a za dve vrednosti efektivne mase ${}_k^nM$.

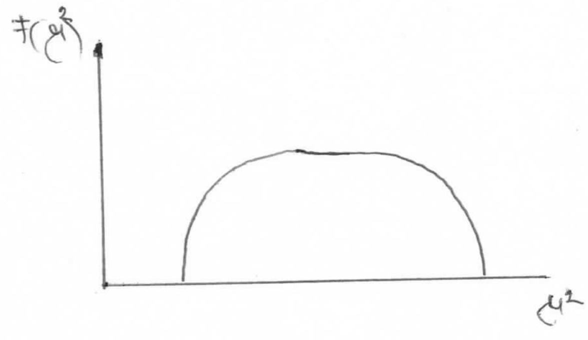
$$ {}_k^nM(\min) = m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_k $$

$$ {}_k^nM(\max) = E - (m_{k+1} + \ldots\ldots + m_n) $$

Tangenta krive n-te tačke (min imax) biće od vrednosti za odredjivanje oblika raspodele i postoji odredjena karakteristična kriva bilo da su te tačke tangente horizontalne ili vertikalne.

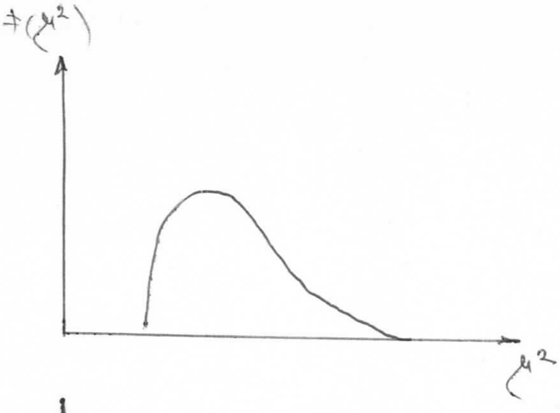
Nekoliko ilustracija raznih oblika

n=3 k=2

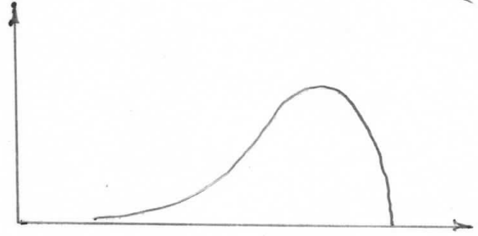


A

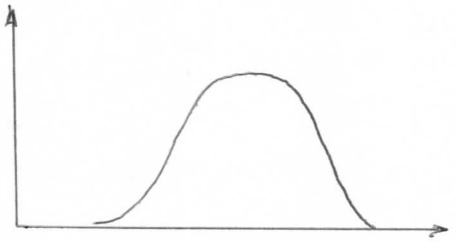
$n = 4$ $k=3$



$n \geqslant 4$ $k=n-1$



$n \geqslant 5$ $3 \leqslant k \leqslant n-2$



Odstupanje od raspodele efektivne mase date faznim prostorom ukazuje na postojanje jedne li više rezonancija koje se pokoravaju B. Wigner-ovoj formuli.

6. UTICAJ REZONANCIJE NA RASPODELU EFEKTIVNE MASE

6.1. Formulacija

Posmatra se sistem sa n čestica u konačnom stanju gde su poznate rezonancije izmedju k prvih čestica, to se obeležava ${}^{n}_{k}M = M^{*}$. Jasno je da će na proces rezonancije izmedju nekih čestica uticati raspodela efektivne mase izmedju svih parova ili grupa čestica u sistemu. Šta je raspodela efektivne mase izmedju makog broja nasumce uzetih čestica konačnog stanja? Problem se razdvaja u tri slučaja saglasno metodi proračuna.

1. Proračun efektivne mase za grupu čestica od kojih nijedna nema udela u rezonanciji. U tom slučaju se upotrebljava raniji razvoj formule za fazni prostor (n-k+1) čestica konačnog stanja, gde se javlja n čestica mase M^{*}.

$$R_{n-k+1}\ (\ 0,\ E,\ M^{*},\ m_{k+1},\ \ldots\ldots\ ,\ m_n)$$

2. Efektivna masa za grupu čestica kada sve imaju udela u rezonanciji može se izračunati pomoću formule faznog prostora za k čestica, sa totalnom energijom M^{*}

$$R_n\ (\ 0,\ M^{*},\ m_1,\ \ldots\ldots\ ,\ m_k)$$

3. Efektivna masa za grupu čestica gde spadaju i one koje imaju udela u rezonanciji i one koje nemaju. Ovaj problem se ne može rešiti preko 1. i 2. već se uvodi rekurentna formula.

Ova razmatranja će se posmatrati na slučaju dve i tri čestice.

6.2. ~~TRI~~ čestice

Izraz faznog prostora za tri čestice izgleda ovako

$$R_3 \sim \int \frac{d^3p_1}{E_1}\ \frac{d^3p_2}{E_2}\ \frac{d^3p_3}{E_3}\ \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)\ \delta(E_1 + E_2 + E_3 - E) \tag{6.2}$$

Kako se posmatraju tri čestice, prvo se može izračunati efikasna masa za čestice 1 i 2, (dR_3/dM_{12}) u tom slučaju kada su čestice 2 i 3 već u rezonanciji.

Prvo se može uzeti da amplituda rezonancije ima širinu nula i masu M^*. U tom slučaju se vrednost jednačine uvrsti u (dR_3/dM_{12}) pa integraljenjem po p_3 se dobija

$$\frac{dR_3}{dM_{12}} = \frac{d}{dM_{12}} \int \frac{d^3p_1}{E_1} \frac{d^3p_2}{E_2} \frac{1}{E_3(p_1p_2)} \delta(E1 + E_2 + E_3(p_1p_2) - E)$$

$$\times \delta(M_{23} - \overset{*}{M})$$

a integracija po uglu daje

$$\frac{dR_3}{dM_{12}} = \frac{d}{dM_{12}} \int \frac{p_1\, dp_1}{E_1} \frac{p_2\, dp_2}{E_2} \frac{1}{E_3(p_1p_2)} d(\cos\theta)\delta(E)\,\delta(M) \tag{6.2}$$

sada za p_1 i p_2 konstante postaju za održanje količine kretanja

$$p_3\, dp_3 = p_1\, p_2\, d(\cos\theta)$$

$$p_3\, dp_3 = E_3\, dE_3$$

(6.2) se može pisati

$$\frac{dR_3}{dM_{12}} = \frac{d}{dM_{12}} \int dE_1\, dE_2\, \delta(M_{23} - \overset{*}{M})$$

održanje energije i količine kretanja dobija se zavisno od

$$E_2 = E - E_1 - E_3 = E - E_1 - \frac{E^2 - M_{12}^2 + m_3^2}{2E} = \frac{E^2 + M_{12}^2 - m_3^2}{2E} - E_1 \tag{6.3}$$

ako je E_1 konstantno

$$dE_2 = \frac{M_{12}}{E} dM_{12}$$

dobija se iz (6.3)

$$M_{23} = \sqrt{E^2 + m_1^2 - 2EE_1}$$

znači

$$\frac{dR_3}{dM_{12}} = \int dE_1 \frac{M_{12}}{E} \delta\left(\sqrt{E^2 + m_1^2 - 2EE_1} - M^* \right)$$

integraljenjem po E_1 dobija se

$$\frac{dR_3}{dM_{12}} = \frac{M_{12}}{E^2} \sqrt{E^2 + m_1^2 - 2EE_1} \qquad \text{za} \quad E_1 = \frac{E^2 + m_1^2 - M^{*2}}{2E}$$

Treba izračunati max. i min. vrednosti za M_{12}. Prvo je rezonancija za neku energiju $E_1 = (E^2 + m_1^2 - M^2)/2E$ jednaka $M_{23} = M^*$
Vidi se da

$$M_{12}^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2\cos\theta$$

je minimum za $\cos\theta = 1$, a dobija se i vrednost E_2

$$M_{12} \frac{\partial M_{12}}{\partial E_2} = E_1 - p_1 \frac{E_2}{p_2} = 0$$

izraz

$$p_2 = \frac{m_2}{m_1} p_1$$

koji daje

$$M_{12}^2 (\min) = m_1^2 + m_2^2 + 2 \frac{m_2}{m_1} (E_1^2 - p_1^2) = (m_1 + m_2)^2 \qquad (6.4)$$

jasno za $\cos\theta = -1$ se dobija

$$M_{12}^2(\max) = m_1^2 + m_2^2 + 2 \frac{m_2}{m_1} (E_1^2 + p_1^2)$$

$$=(m_1-m_2)^2 + \frac{m_1}{m_2} \frac{(E2 + m_1^2 - M^{*2})^2}{E^2} \qquad (6.5)$$

6.3. Četir čestice

Može se naći raspodela dR_4/dM_{12} za slučaj gde postoji rezonancija $M_{23} = M^*$ i da je amplituda jednaka nuli piše se

$$\frac{dR_4}{dM_{12}} \sim \frac{d}{dM_{12}} \int \frac{d^3p_1}{E_1} \frac{d^3p_2}{E_2} \frac{d^3p_3}{E_3} \frac{d^3p_4}{E_4} \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4)$$

$$\times \delta(E_1 + E_2 + E_3 + E_4 - E)\, \delta(M_{23} - M^*)$$

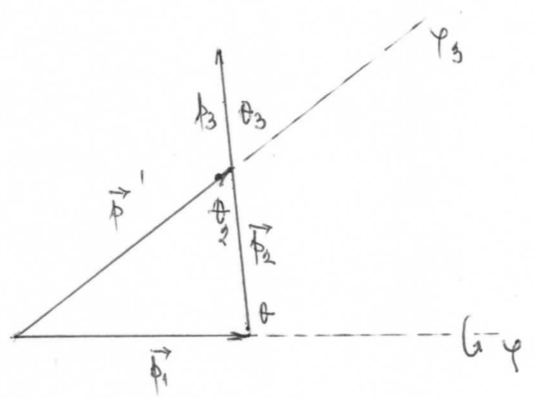
integraljenje po p_4 daje

$$\frac{dR_4}{dM_{12}} = \frac{d}{dM_{12}} \int \frac{d^3p_1}{E_1} \frac{d^3p_2}{E_2} \frac{d^3p_3}{E_3} \frac{1}{E_4} \delta[(E_1 + E_2 + E_3 + E_4(p_1p_2p_3) - E]$$

$$\times \delta(M_{23} - M^*)$$

za ravnotežnu količinu kretanja. Na grafiku 2. (slika 2)

$p' = p_1 + p_2$



uvode se polarne kordinate i ($\int d\Omega \to 4\pi$)

$$\frac{dR_4}{dM_{12}} \sim \frac{d}{dM_{12}} \int \frac{p_1^2\, dp_1}{E_1} \frac{p_2^2\, dp_2\, d(\cos\theta)}{E_2} \frac{p_3^2\, dp_3\, d(\cos\theta_3)}{E_3} \frac{d\Phi_3}{E_4(p_1p_2p_3)}$$

$$\times \delta(E_1 + E_2 + E_3 + E_4 - E)\, \delta(M_{23} - M^*) \qquad (6.6)$$

za održanje količine kretanja postoli

$$p_4^2 = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)^2 = P'^2 + p_3^2 + 2p'p_3\cos\theta$$

ako su p', p_3 i $\cos\theta$ konstante

$$p_4\, dp_4 = E_4\, dE_4 = p'p_3\, d(\cos\theta_3)$$

Supstitucija i integraljenje preko E_4 daje

$$\frac{dR_4}{dM_{12}} = \frac{d}{dM_{12}} \quad \frac{p_1^2\, dp_1}{E_1} \quad \frac{p_2^2\, dp_2}{E_2} \quad d(\cos\theta) \quad \frac{dE_3}{p'} d\Phi_3 \qquad \delta(M_{23} - M^*)$$

za $E_4 = E - E_1 - E_2 - E_3$

$$p'^2 + p_3^2 + 2p_3p'\cos\theta_3 = (E - E_1 - E_2 - E_3)^2 - m_4^2$$

ili

$$\cos\theta_3 = \frac{(E - E_1 - E_2 - E_3)^2 - m_4^2 - p'^2 - p_3^2}{2p'p_3} \tag{6.7}$$

jednačina (6.7) će se upotrebiti za rešenje granice integraljenja za E_3

$$M_{12}^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2\cos\theta$$

ako su p_1 i p_2 konstante

$$M_{12}\, dM_{12} = p_1\, p_2\, d(\cos\theta)$$

ako je $dp_1/(E_1/p_1)\, dE_1$ odnosno $dp_1 = \frac{E_1}{p_1}\, dE_1$ itd.

$$\frac{dR_4}{dM_{12}} = M_{12} \int \frac{dE_1\, dE_2\, dE_3}{p'} \qquad \frac{1}{\left| \frac{\partial(M_{23} - M)}{\partial \Phi_3} \right|} \qquad (M_{23} - M^*) = 0$$

Integraljenjem argumenta za delta funkciju dobija se M_{23}

$$M_{23}^2 = (E_2 + E_3)^2 - (\vec{p_2} + \vec{p_3})^2$$

$$= m_2^2 + m_3^2 + 2E_3E_2 \quad - 2p_2p_3\cos\theta_{23}$$

gde je θ_{23} (prostorni ugao za $\vec{p_2}$ i $\vec{p_3}$) funkcija θ_2, θ_3 i ϕ_3 u specijalnoj geometriji.

$$\cos\theta_{23} = \cos\theta_2 \cos\theta_3 + \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\phi_3$$

ϕ_3 dato je sa (6.7) a θ_2 će se pisati

$$\cos\theta_2 = \frac{\vec{p}'\vec{p}_2}{p'p_2} = \frac{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\,p_2}{p'p_2} = \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - M_{12}^2 + 2p_2^2}{2p'p_2} \qquad (6.8)$$

Ako se $\dfrac{\partial(M_{23} - M)}{\partial\phi_3}$ nadje izraz funkcije biće procenjen za ϕ_3 i daje

$$M_{23} - M = 0$$

$$\cos\phi_3 = \frac{m_2^2 + m_3^2 + 2E_2E_3 - 2p_2p_3\cos\theta_2 \cos\theta_3 - M^*}{2p_2p_3\sin\theta_2 \sin\theta_3} \qquad (6.9)$$

Pomoću θ_2 i θ_3, jednačina (6.7) i (6.8), izražena je funkcijom za E_1, E_2, E_3 i M_{12} . Dobijaju se tri integrala, a oni se mogu numerički odrediti ako se znaju granice. Za odredjeno E_1 i E_2, $E_3(max)$ i $E_3(min)$ je opisano sa $M_{23} = M^*$ za $\cos\theta_{23} = -1$ i $\cos\theta_{23} = +1$

Ograničenje funkcije (6.7) je $-1 \leq \cos\theta_3 < +1$

Granice za E_2 sa E_1 odredjeno je

$$M_{12} = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2\cos\theta \qquad \text{za} \quad \cos\theta = \pm 1$$

vrednost funkcije (6.8) je u intervalu $-1 \leq \cos\theta \leq +1$.

Granica za E opada i raste , a data je izrazom

$$E_1(\mathrm{min}) \geqslant m_1$$

$$E_1(\mathrm{max}) \leqslant \frac{\left\{\left[E^2 - (M + m_1 + m_4)^2\right]\left[E^2 - (M + m_4 - m_1)^2\right]\right\}^{1/2}}{2E}$$

D O D A T A K 1

Dirakova funkcija:

1. Dirakova δ funkcija data u obliku definicije

$$\delta(x) = 0 \qquad \text{za } x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0} \delta(x) \to \infty \qquad \text{dok} \quad \int \delta(x)\, dx = 1$$

2. Integral proizvoda kontinualne funkcije i funkcije

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0)$$

ili

$$\int_{-}^{+} f(x)\, \delta(x - a)\, dx = \begin{cases} f(a) & -\infty < a < +\infty \\ 0 & a < -\infty \quad \text{ili} \quad a > +\infty \end{cases}$$

uopšteno dato

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, \delta(x - a)\, dx = \begin{cases} f(a) & x_1 < a < x_2 \\ 0 & a < x_1 \quad \text{ili} \quad a > x_2 \end{cases}$$

3. Trodimenzionalna funkcija

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

Integraljenjem preko zapremine V dobija se

$$\int_V f(r)\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\, d\vec{r} = \begin{cases} f(r_0) & \text{ako } r_0 \in V \\ 0 & \text{ako } r_0 \notin V \end{cases}$$

4. Dirakova funkcija od funkcije

$$\delta\,[\phi(x)]$$

$$\int \delta\,[\phi(x)]\, dx = \int \delta(y)\, \frac{dy}{\phi(x)}$$

$$dx = \frac{dy}{\phi(x)}$$

$$\int \delta[\phi(x)]\, dx = \frac{1}{\phi'(x_o)} \qquad \text{ako} \quad \phi(x_o) = 0$$

$$\int g(x)\, \delta[\phi(x)]\, dx = \frac{g(x_o)}{\phi'(x_o)} \qquad \text{ako je } \phi(x_o) = 0$$

5. $\delta(x - y) = \int dz\, \delta(x - z)\, \delta(z - y)$

6. Četvorodimenzionalna δ funcija

$$\delta^4 q = \delta^3 p\, \delta E$$

D O D A T A K 2.

Pregled formula

1. Fermijevo zlatno pravilo:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M'|^2 \ F$$

2. Neinvarijantni fazni prostor:

$$\rho = \int \prod_{i=1}^{n} d^3 p_i \, \delta^3 \Big(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i - \vec{p} \Big) \delta \Big(\sum_{i=1}^{n} E_i - E \Big)$$

3. Invarijantni fqzni prostor:

$$R_n = \int \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 p_i}{2E_i} \, \delta^3 \Big(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i - \vec{p} \Big) \delta \Big(\sum_{i=1}^{n} E_i - E \Big)$$

4. Neinvarijantni fazni prostor za dve čestice:

$$\rho_2(E) = \frac{4\pi}{E} \frac{\{[E^2 - (m_2 - m_1)^2][E^2 - (m_2 + m_1)^2]\}^{1/2}}{2E} \quad \frac{E^4 - (m_2^2 - m_1^2)}{4E^2}$$

5. Invarijantni fazni prostor za dve čestice:

$$R_2(E) = \frac{\pi}{E} \frac{\{[E^2 - (m_2 - m_1)^2][E^2 - (m_1 + m_2)^2]\}^{1/2}}{2E}$$

6. Rekurentni izraz:

$$R_n(0,E) = \int \frac{d^3 p_n}{2E_n} \, R_{n-1} \left[(-p_n), (E - E_n) \right]$$

7. Invarijantni fazni prostor opšteg izgleda:

$$R_n(0,E) = \int \prod_{i=1}^{n} \left[d^4 q_i \, \delta (q_i^2 - m_i^2) \right] \delta^4 (q_i - Q)$$

=

$$R_n(0,E) = \int \prod_{i=1}^{n} [d^4 q_i \quad \delta(q_i^2 - m_i^2)] \quad \delta^4 (\sum_{i=1}^{n} q_i - Q)$$

8. Invarijantni fazni prostor za tri čestice:

$$R_3(0,E) = \int \frac{4\pi\, p_3^2}{2E_3} \qquad [E^2 + m_3^2 - 2EE_3 - (m_1 - m_2)^2]$$

$$\times \quad [E^2 + m_3^2 - 2EE_3 - (m_1 + m_2)^2] \quad \frac{1}{2\; E^2 + m_3^{\;2} - 2EE_3}$$

9. Ugaona raspodela:

$$\frac{dR_n(0,E,\cos\theta)}{d(\cos\theta)} = 2\pi \int \frac{p_n^2 p_{n-1}^2}{E_n E_{n-1}} \quad dp_n \; dp_{n-1} \; R_{n-2}(o, \mathcal{E}_{\,n-2})$$

10. Efektivna masa

$$M_{i\,\ldots\ldots\,j}^2 = - (q_i + \ldots\ldots + q_j)^2$$

$$= (E_i + \ldots\ldots + E_j)^2 - (\vec{p}_i + \ldots + \vec{p}_j)\cdot(\vec{p}_i + \ldots + \vec{p}_j)$$

11. Verovatnoća efektivne mase:

$$f(\mu^2) = R_k(0, \mu, m_1, \ldots , m_k) \quad R_{n-k+1}(o, E, m_{k+1}, \ldots , m_n, \mu)$$

B I B L I O G R A F I J A

I. Djordje Mušicki: Uvod u teorijsku fiziku II,
Izdavačko-informativni centar studenata (ICS)
Beograd, 1975. godina

2. M. Leon: Particle Phisics An Introduction : Academic Press
New York, 1973. godina

3. P. Nyborg: Phase Space, Present

4. P. Nyborg, O. Skjeggestad: Phase Space, in Kinematics Edited
by M. Nikolić, Gordon and Breach
1968. godina

5. O. Skjeggestad: Phase Space - School For Physicists
Edited by
Cern, 1964. godina