

D-128



INTERFERENTNA POBUDJENJA U SISTEMU  
FRENKELOVIH EKSITONA

- Diplomski rad -

BLAGOJEVIĆ PREDRAG  
apsolvent PMF - Novi Sad

## Z A H V A L N I C A

Zahvaljujem se mentoru ovog rada Dr.Bratislavu Tosicu, vanrednom profesoru Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Takođe bi htio da istaknem pomoć koju mi je prilikom izrade ovog rada pružila Mr.Gordana Knezević, asistent Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu. Njeni saveti doprineli su brzoj izradi rada i razjasnjavanju mogućnosti njegove primene.

## S A D R Ž A J

Strana

### U V O D

I -	STRUJA VEROVATNOĆE I NJENA SREDNJA VREDNOST NA KONAČNOJ TEMPERATURI . . . . .	1
1.-	Dvovremenske temperaturske Grinove funkcije	1
2.-	Struja verovatnoće i jednačina kontinuiteta	7
3.-	Struja verovatnoće i jednačina kontinuiteta za bozone . . . . .	10
4.-	Struja verovatnoće i jednačina kontinuiteta za fermione . . . . .	18
II -	GRINOVA FUNKCIJA TIPO STRUJA-STRUJA . . .	23
1.	Grinova funkcija za bozonska pobudjenja . .	23
2.	Polovi funkcije na visokim temperaturama i mogućnost pojave interferentnih pobudje- nja . . . . .	29
3.	Osobine interferentnih pobudjenja . . . .	35
4.	Mogućnosti primene rezultata . . . . .	41

### Z A K L J U Č A K

### L I T E R A T U R A

## U V O D

Cilj ovog diplomskog rada je da se tehnikom dvovremenskih temperaturskih funkcija Greena ispitaju struje elementarnih pobudjenja u kristalima na konačnim temperaturama. Istraživanja obuhvataju statistički ekvivalent kvantomehaničke jednačine kontinuiteta, uslove kada dolazi do narušavanja jednačine kontinuiteta i efekte koji mogu da nastanu usled narušavanja. Pošto postoje razlozi za verovanje da u bioorganizmima narušenje jednačine kontinuiteta i vezane sa tim transformacije energije mogu da igraju važnu ulogu, naš krajni cilj je da izvedenim analizama doprinesemo rasvetljavanje ovog problema.

## I. STRUJA VEROVATNOCE I NJENA SREDNJA VREDNOST NA KONAČNOJ TEMPERATURI

### 1. Dvovremenske temperaturske Green-ove funkcije

Pošto je cilj ovog diplomskog rada da se ispita da li interakcija dve struje elementarnih pobudjenja može da dovede do stvaranja novih kvazičestica. Ovde ćemo izložiti metod koji nam na ovo pitanje može najlakše dati odgovor, a to je metod dvovremenskih temperaturskih funkcija Green-a. Ovaj metod predložili su i razvili Čelen, Bogoliubov, Tjablikov, Tahir-Keli i Zubarev.

Jednočestična dvovremenska temperatura funkcija Green-a za operatore definiše se kao:

$$\hat{A}(\vec{r}, t) \text{ i } \hat{B}(\vec{r}', t')$$

$$\langle\langle \hat{A}(\vec{r}, t) | \hat{B}(\vec{r}', t') \rangle\rangle = \theta(t-t') \langle [\hat{A}(\vec{r}, t), \hat{B}(\vec{r}', t')] \rangle \quad (\text{I.1.1})$$

Od dve uglaste zagrade na levoj strani jednačine (I.1.1) prva označava uredjivanje operatora po vremenu, a druga statističku srednju vrednost vremenski uredjenih operatora na datoј temperaturi. Uglasta zagrada na desnoj strani označava statističku srednju vrednost, a srednja zagrada označava komutator. Funkcija  $\theta(t-t')$  je Hevisajdova step funkcija koja se definiše kao:

$$\theta(t-t') = \begin{cases} 1 & \text{za } t > t' \\ 0 & \text{za } t < t' \end{cases} \quad (\text{I.1.2})$$

Za ovu funkciju karakteristično je da je njen izvod po bilo kom od vremena ( $t$  ili  $t'$ ) uvek ravan delta funkciji, jer izvodi za  $t > t'$  i  $t < t'$  kao i izvodi konstante ravnii su nuli, aju tački  $t=t'$  funkcija ima prekid, pa joj je izvod beskonačan.



Smatraćemo da je sredina koju posmatramo prostorno homogena, a tada Green-ova funkcija kao fizička karakteristika sistema zavisi od razlike  $\vec{r}-\vec{r}'$ , a ne od  $\vec{r}$  i  $\vec{r}'$  pojedinačno. Takođe ćemo smatrati da na sistem ne deluju spoljašnja polja koja zavise od vremena. U tom slučaju Green-ova funkcija zavisi od razlike vremena  $t-t'$ , a ne od  $t$  i  $t'$  pojedinačno. Pretpostavljena homogenost prostora znači da u sistemu mora važiti zakon održanju impulsa, a odsustvo spoljašnjih polja zavisnih od vremena, znači da u sistemu mora važiti zakon o održanju energije.

Ako jednačinu (I.1.1) diferenciramo po vremenu  $t$  dobijemo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle\langle \hat{A}(\vec{r}, t) | \hat{B}(\vec{r}', t') \rangle\rangle &= \delta(t-t') \langle [\hat{A}(\vec{r}, t), \hat{B}(\vec{r}', t')] \rangle + \\ &+ \langle\langle \frac{d\hat{A}(\vec{r}, t)}{dt} | \hat{B}(\vec{r}', t') \rangle\rangle \theta(t-t') . \end{aligned} \quad (\text{I.1.3})$$

Na osnovu Heisenberg-ovih jednačina kretanja možemo pisaći:

$$i \frac{d}{dt} \hat{A}(\vec{r}, t) = [\hat{A}(\vec{r}, t), \hat{H}] \quad (\text{I.1.4})$$

gde je  $\hat{H}$  - hamiltonijan sistema. Zamenom (I.1.4) u (I.1.3) dobijamo:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \langle\langle \hat{A}(\vec{r}, t) | \hat{B}(\vec{r}', t') \rangle\rangle &= i \delta(t-t') \langle [\hat{A}(\vec{r}, t), \hat{B}(\vec{r}', t')] \rangle + \\ &+ \langle\langle [\hat{A}, \hat{H}]_{\vec{r}, t} | \hat{B}(\vec{r}', t') \rangle\rangle . \end{aligned} \quad (\text{I.1.5})$$

Zbog prisustva delta funkcije srednja vrednost komutatora na desnoj strani jednačine (I.1.3) ne zavisi od  $t$  i  $t'$  već

samo od razlike  $t-t'$ . Delta funkcija je različita od nule samo kad je  $t-t'=0$ , pa prema tome  $\langle [\hat{A}(\vec{r}, t), \hat{B}(\vec{r}', t')] \rangle$  uopšte ne zavisi od vremena, već samo od razlike koordinata  $\vec{r}-\vec{r}'$ . Drugi član u jednačini (I.1.3) posle zamene (I.1.4) na osnovu definicije (I.1.1) predstavlja neku novu Greenovu funkciju.

U jednačini (I.1.5) izvršićemo Fourier-transformaciju prostor-impuls:

$$\langle\langle \hat{A}(\vec{r}, t) | \hat{B}(\vec{r}', t') \rangle\rangle = \int d^3 p \langle\langle \hat{A}(t) | \hat{B}(t') \rangle\rangle_{\vec{p}} e^{i\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}')} \quad (I.1.5)$$

$$\langle\langle [\hat{A}, \hat{H}]_{\vec{r}, t} | B(\vec{r}', t') \rangle\rangle = \int d^3 p \langle\langle [\hat{A}, \hat{H}]_t | \hat{B}(t') \rangle\rangle_{\vec{p}} e^{i\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}')} \quad (I.1.6)$$

$$K(\vec{r}-\vec{r}') = \int d^3 p K_{\vec{p}} e^{i\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}')} ; \quad K(\vec{r}-\vec{r}') = \langle [\hat{A}(\vec{r}, t), \hat{B}(\vec{r}', t)] \rangle$$

Zamenom (I.1.6) u (I.1.5), posle inverzne Fourier transformacije dobijamo:

$$i \frac{d}{dt} \langle\langle \hat{A}(t) | \hat{B}(t') \rangle\rangle_{\vec{K}} = i \delta(t-t') K_{\vec{K}} + \langle\langle [\hat{A}, \hat{H}]_t | \hat{B}(t') \rangle\rangle_{\vec{K}} \quad (I.1.7)$$

Sada se izvrše Fourier transformacije vreme-energija:

$$\begin{aligned} \langle\langle \hat{A}(t) | \hat{B}(t') \rangle\rangle_{\vec{K}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \langle\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle\rangle_{\vec{K}, \omega} e^{-i\omega(t-t')} \\ i \frac{d}{dt} \langle\langle \hat{A}(t) | \hat{B}(t') \rangle\rangle_{\vec{K}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega \langle\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle\rangle_{\vec{K}, \omega} e^{-i\omega(t-t')} \end{aligned} \quad (I.1.8)$$

$$\langle\langle [\hat{A}, \hat{H}]_t | \hat{B}(t') \rangle\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \langle\langle [\hat{A}, \hat{H}] | \hat{B} \rangle\rangle_{\vec{K}, \omega} e^{-i\omega(t-t')}$$

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')}$$

Posle zamene (I.1.8) u (I.1.7) i inverzne Fourier - transformacije dobijamo:

$$E \langle\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle\rangle_{\vec{k}, E} = \frac{i}{2\pi} K_{\vec{k}} + \langle\langle [\hat{A}, \hat{H}] | \hat{B} \rangle\rangle_{\vec{k}, E} \quad (I.1.9)$$

Kao što vidimo tražena funkcija  $\langle\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle\rangle_{\vec{k}, E}$  izražava se preko nove Green-ove funkcije

-  $\langle\langle [\hat{A}, \hat{H}] | \hat{B} \rangle\rangle_{\vec{k}, E}$  koja je u opštem slučaju složenija od tražene funkcije. Zbog toga se nad funkcijom  $\langle\langle [\hat{A}, \hat{H}] | \hat{B} \rangle\rangle_{\vec{k}, E}$  vrši takozvana procedura dekuplovanja, koja se sastoji u tome da se ta funkcija izrazi kao proizvod neke funkcije od  $\vec{k}$  i ponekad temperature i funkcije  $\langle\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle\rangle_{\vec{k}, E}$ . Za ovaj proces dekuplovanja ne postoji opšti recept već se on rešava od slučaja do slučaja.

Uopšteno, možemo uzeti:

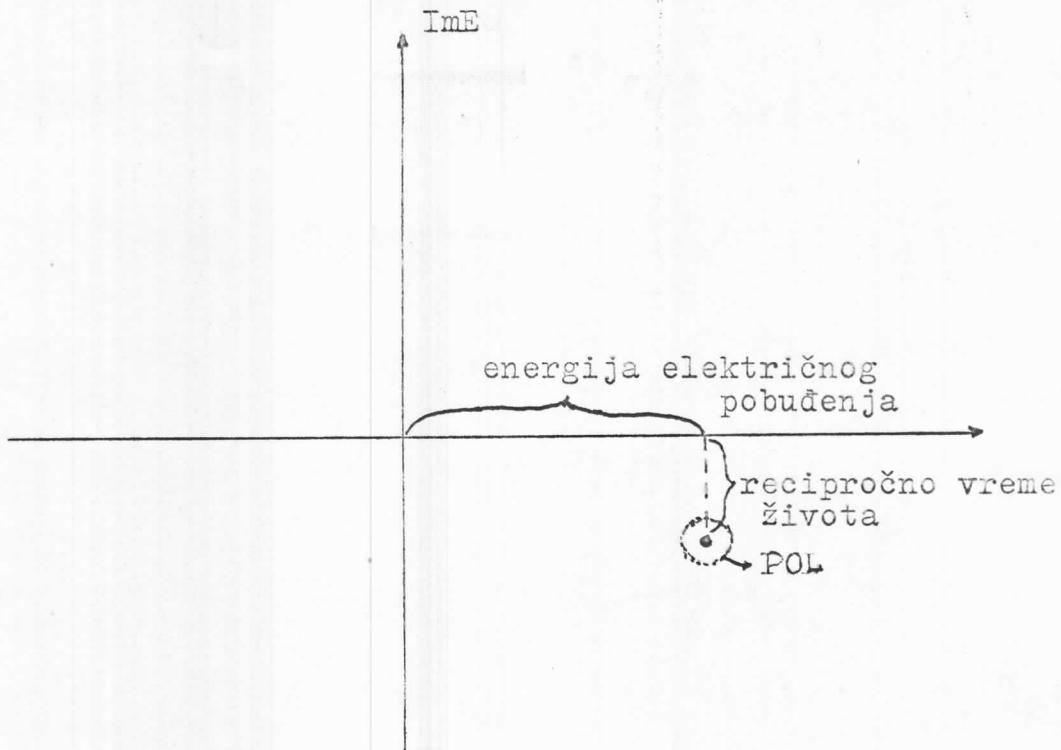
$$\langle\langle [\hat{A}, \hat{H}] | \hat{B} \rangle\rangle_{\vec{k}, E} = f(\vec{k}, \theta) \langle\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle\rangle_{\vec{k}, E} \quad (I.1.10)$$

gde je  $\theta = k_B T$  ( $k_B = 1,381 \cdot 10^{-16}$  erg.  $^{\circ}\text{K}$  - Boltzmanova konstanta) temperatura u energetskim jedinicama. Za dekuplovanje (I.1.10) jednačina (I.1.9) može da se napiše u obliku:

$$\langle\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle\rangle_{\vec{k}, E} = \frac{i}{2\pi} K_{\vec{k}} \frac{1}{E - f(\vec{k}, \theta)} \quad (I.1.11)$$

Ako imenilac u izrazu (I.1.11) izjednačimo sa nulom dobijamo polove Green-ove funkcije  $\langle\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle\rangle_{\vec{k}, E}$  u ravni  $E$ . Ovi polovi obično se nalaze u četvrtom kvadrantu  $E$ -ravni. Apscisa pola predstavlja energiju elementarnih pobudjenja, dok ordinata pola predstavlja recipročno vreme života elementarnih pobudjenja.

(E)



Pored toga što nam pol Green-ove funkcije daje energiju i vreme života elementarnih ekscitacija mi, poznajući Green-ovu funkciju, možemo naći i statističku srednju vrednost proizvoda operatora od kojih je Green-ova funkcija konstruisana.

Na osnovu spektralne teoreme [1] možemo pisati za (I.1.11) :

$$\langle \hat{B} \hat{A} \rangle = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dE \operatorname{Re} \langle \hat{A} | \hat{B} \rangle \frac{e^{\frac{E}{\theta}} - 1}{K_E} . \quad (\text{I.1.12})$$

Pod znakom integrala svaka forma  $\frac{1}{x-x_0}$  se mora pisati

$$\text{u obliku } \frac{1}{x-x_0} \underset{\delta \rightarrow +0}{\rightarrow} \frac{1}{x-x_0 + i\delta} = P \frac{1}{x-x_0} - i\pi \delta(x-x_0)$$

gde  $P$  označava glavnu vrednost integrala. Znači, na osnovu (I.1.11) je:

$$\langle\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle\rangle_{\vec{k}, \omega} = \frac{i}{2\pi} K_{\vec{k}} \frac{1}{E - f(\vec{k}, \theta) + i\delta} = \frac{i}{2\pi} K_{\vec{k}}^P \frac{1}{E - f(\vec{k}, \theta)} - \\ - i\pi\delta [E - f(\vec{k}, \theta)]. \quad (\text{I.1.13})$$

Odavde:

$$\text{Re} \langle\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle\rangle_{\vec{k}, E} = \frac{1}{2} K_{\vec{k}} \delta [E - f(\vec{k}, \theta)] \quad (\text{I.1.14})$$

pa posle zamene u (I.1.12) dobijamo konačno:

$$\langle \hat{B} \hat{A} \rangle = \frac{K_{\vec{k}}}{e \frac{f(\vec{k}, \theta)}{\theta} - 1}. \quad (\text{I.1.15})$$

Rezultat (I.1.15) dobijen je za takozvanu komutatorsku funkciju Green-a koju je zgodno koristiti ako analiziramo sistem Boze čestica. Za komutatorsku funkciju u formuli (I.1.1) na desnoj strani stoji komutator operatora  $\hat{A}$  i  $\hat{B}$ . Ukoliko posmatramo sistem Fermi čestica onda je zgodnije da ispitujemo antikomutatorsku Green-ovu funkciju, koja se dobija tako što se u jednačini (I.1.1) umesto komutatora oper.  $\hat{A}$  i  $\hat{B}$  stavi njihov antikomutator pr.

$$\langle [\hat{A}(\vec{r}, t), \hat{B}(\vec{r}', t')] \rangle \rightarrow \langle \{\hat{A}(\vec{r}, t), \hat{B}(\vec{r}', t')\} \rangle = \\ = \langle \hat{A}(\vec{r}, t) \hat{B}(\vec{r}', t') + \hat{B}(\vec{r}', t') \hat{A}(\vec{r}, t) \rangle. \quad (\text{I.1.16})$$

Tada, na osnovu spektralne teoreme  $(e \frac{E}{\theta} - 1)^{-1} \rightarrow (e \frac{E}{\theta} + 1)^{-1}$  i srednja vrednost se dobija po formuli:

$$\langle \hat{B} \hat{A} \rangle = \frac{A_{\vec{k}}}{e^{\frac{f(\vec{k}, \theta)}{\theta}} + 1} \quad (\text{I.1.17})$$

gde je

$$A(\vec{r} - \vec{r}') = \langle \{\hat{A}(\vec{r}, t), \hat{B}(\vec{r}', t)\} \rangle; \quad A(\vec{r} - \vec{r}') = \int d^3 \vec{p} A(\vec{p}) e^{i \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \quad (\text{I.1.18})$$

$$A_{\vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{p} A(\vec{p}) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{p}} \\ \vec{p} = \vec{r} - \vec{r}'.$$

Ovo bi u kratkim crtama bila teorija dvovremenskih temperaturskih funkcija Green-a i ovu teoriju ćemo u daljem izlaganju često koristiti.

## 2. Struja verovatnoće i jednačina kontinuiteta

Analogno slučaju klasične teorije fluida i klasične elektrodinamike u okvirima nerelativističke kvantne mehanike može se formulisati jednačina kontinuiteta koja de-fakto predstavlja zakon o održanju broja kvantnih objekata. Kvantno mehanička jednačina kontinuiteta dobija se na bazi dinamičkog zakona kvantne mehanike tj. na bazi Šredingerove j-ne. Ovde ćemo razmotriti slučaj jedne čestice sa masom  $m$  koja se kreće u potencijalu, koju u opštem slučaju može da zavisi od vremena.

Schrödinger-ova jednačina glasi:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + \hat{V}(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I.2.1})$$

Potencijalna energija  $\hat{V}(\vec{r}, t)$  je multiplikativni operator.

Ako jednačinu (I.2.1) konjugujemo, dobićemo:

$$- i\hbar \frac{\partial^* \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{r}} \Psi(\vec{r}, t) + \hat{V}(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) \quad (I.2.2)$$

Jednačinu (I.2.1) pomnožićemo sa  $\Psi^*(\vec{r}, t)$ , a jednačinu (I.2.2) sa  $\Psi(\vec{r}, t)$  pa ćemo (I.2.2) oduzeti od (I.2.1). Rezultat je:

$$i\hbar \left[ \Psi^*(\vec{r}, t) \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \Psi(\vec{r}, t) \frac{\partial^* \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] = - \frac{\hbar^2}{2m} [\Psi^*(\vec{r}, t) \Delta_{\vec{r}} \Psi(\vec{r}, t) - \Psi(\vec{r}, t) \Delta_{\vec{r}}^* \Psi(\vec{r}, t)] . \quad (I.2.3)$$

Pošto je

$$\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial^* \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi)$$

i:

$$\Psi^* \Delta \Psi - \Psi \Delta \Psi^* = \nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = \operatorname{div} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)$$

jednačinu (I.2.3) možemo pisati u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad (I.2.4)$$

gde je:

$$\rho(\vec{r}, t) = \Psi^*(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) \quad (I.2.5)$$

i

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} [\Psi^*(\vec{r}, t) \nabla_{\vec{r}} \Psi(\vec{r}, t) - \Psi(\vec{r}, t) \nabla_{\vec{r}}^* \Psi^*(\vec{r}, t)] \quad (I.2.6)$$

Jednačina (I.2.4) predstavlja kvantnomehaničku jednačinu kontinuiteta. Veličina  $\rho(\vec{r}, t)$  predstavlja gustinu verovatnoće da kvantni objekt nadjemo na mestu  $\vec{r}$  u trenutku vremena  $t$  dok vektor  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  predstavlja struju verovatnoće tj.

grubo govoreći verovatnoću da nam kvantni objekt "pobegne", iz uočenog elementarne zapremine. Na osnovu same jednačine (I.2.4) očigledno je da ona matematički formuliše činjenicu da posmatrani kvantni objekt stalno postoji, ali da može da menja svoj položaj i u prostoru i vremenu.

Treba uočiti da za stacionarna stanja, kada  $\hat{V}(\vec{r}, t)$  ne zavisi od vremena tj.

$$\hat{V}(\vec{r}, t) \rightarrow \hat{V}(\vec{r}) ; \frac{\partial \hat{V}}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.2.7})$$

talasna funkcija ima oblik

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad (\text{I.2.8})$$

tj.

$$\rho(\vec{r}, t) = |\phi(\vec{r})|^2 ; \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.2.9})$$

i jednačina kontinuiteta se svodi na

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}) = 0 \quad (\text{I.2.10})$$

što znači da su za stacionarna stanja linije struje verovatnoće zatvorene.

Kao što vidimo za slučaj jedne čestice mora da važi jednačina kontinuiteta. To isto važi i za skup čestica ako se njihov broj u sistemu ne menja. Ako posmatramo kvazičestice (elementarna pobudjenja) onda pod izvesnim uslovima ukupan broj kvazičestica u sistemu može da bude konstantan, ali češće nije. Ako ukupan broj kvazičestica u sistemu nije konstantan već one nestaju ili se radjaju nove, onda jednačina kontinuiteta za ovakve sisteme očigledno može da se

naruši, jer kao što smo rekli ona predstavlja matematičku formulaciju konzervacije broja čestica u sistemu.

3. Struja verovatnoće i jednačina kontinuiteta za bozone

Po analogiji sa definicijom gustine struje u koordinatnoj reprezentaciji

$$\vec{j}^S(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left[ \overset{*}{\psi}(\vec{r}, t) \nabla_{\vec{r}} \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t) \nabla_{\vec{r}} \overset{*}{\psi}(\vec{r}, t) \right] \quad (I.3.1)$$

za sistem Boze čestica sa hamiltonijanom

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}}^- \quad (I.3.2)$$

uvešćemo operator gustine struje:

$$\vec{j}(\vec{a}, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left[ B_{\vec{a}}^+(t) \nabla_{\vec{a}} B_{\vec{a}}^-(t) - B_{\vec{a}}^-(t) \nabla_{\vec{a}} B_{\vec{a}}^+(t) \right] \quad (I.3.3)$$

gde je  $\vec{a}$  diskretni vektor kristalne rešetke.

Pošto operatori  $B$  i  $\nabla B^+$ , odnosno  $B^+$  i  $\nabla B$  ne komutiraju, neophodno je simetrizovati izraz (I.3.3) sumirajući ga po svim permutacijama operatora i deleći brojem permutacija, tj.

$$\begin{aligned} \vec{j}^S(\vec{a}, t) &= \frac{\hbar}{8mi} \{ [B_{\vec{a}}^+(t)] [\nabla_{\vec{a}} B_{\vec{a}}^-(t)] - [B_{\vec{a}}^-(t)] [\nabla_{\vec{a}} B_{\vec{a}}^+(t)] + \\ &+ [B_{\vec{a}}^+(t)] [\nabla_{\vec{a}} B_{\vec{a}}^-(t)] - [\nabla_{\vec{a}} B_{\vec{a}}^+(t)] [B_{\vec{a}}^-(t)] + \\ &+ [\nabla_{\vec{a}} B_{\vec{a}}^-(t)] [B_{\vec{a}}^+(t)] - [B_{\vec{a}}^-(t)] [\nabla_{\vec{a}} B_{\vec{a}}^+(t)] + \\ &+ [\nabla_{\vec{a}} B_{\vec{a}}^-(t)] [B_{\vec{a}}^+(t)] - [\nabla_{\vec{a}} B_{\vec{a}}^+(t)] [B_{\vec{a}}^-(t)] \} . \end{aligned} \quad (I.3.4)$$

Da bismo ispitali osobine operatora (I.3.4) posmatraćemo Green-ovu funkciju.

$$\begin{aligned}
 G_{\vec{a}-\vec{b}}(t-t') &= \frac{\hbar}{2mi} \{ \langle\langle B_{\vec{b}}^+(t') | \nabla_{\vec{a}} B_{\vec{a}}(t) \rangle\rangle - \langle\langle B_{\vec{a}}^+(t) | \nabla_{\vec{b}} B_{\vec{b}}^+(t') \rangle\rangle + \\
 &+ \langle\langle B_{\vec{b}}^+(t') | \nabla_{\vec{a}} B_{\vec{a}}(t) \rangle\rangle - \langle\langle \nabla_{\vec{b}} B_{\vec{b}}^+(t') | B_{\vec{a}}(t) \rangle\rangle + \\
 &+ \langle\langle \nabla_{\vec{a}} B_{\vec{a}}(t) | B_{\vec{b}}^+(t') \rangle\rangle - \langle\langle B_{\vec{a}}^+(t) | \nabla_{\vec{b}} B_{\vec{b}}^+(t') \rangle\rangle + \\
 &+ \langle\langle \nabla_{\vec{a}} B_{\vec{a}}(t) | B_{\vec{b}}^+(t') \rangle\rangle - \langle\langle \nabla_{\vec{b}} B_{\vec{b}}^+(t') | B_{\vec{a}}(t) \rangle\rangle \}. \quad (\text{I.3.5})
 \end{aligned}$$

Ovde ćemo izvršiti Fourier transformacije prostor-impuls:

$$\begin{aligned}
 G_{\vec{a}-\vec{b}}(t-t') &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{p}} G_{\vec{p}}(t-t') e^{i\vec{p}(\vec{a}-\vec{b})} \\
 B_{\vec{a}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{p}} B_{\vec{p}}(t) e^{i\vec{p}\vec{a}} \\
 B_{\vec{b}}^+(t') &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{p}} B_{\vec{p}}^+(t') e^{-i\vec{p}\vec{b}}. \quad (\text{I.3.6})
 \end{aligned}$$

Pošto je sredina homogena tj. važi zakon o održanju impulsa sledi:

$$\langle\langle B_{\vec{p}}(t) | B_{\vec{p}'}^+(t') \rangle\rangle = \langle\langle B_{\vec{p}}(t) | B_{\vec{p}}^+(t') \rangle\rangle \delta_{\vec{p},-\vec{p}'} \quad (\text{I.3.7})$$

pa se u jednačini (I.3.5) uz korišćene relacije:

$$\nabla_{\vec{r}} f(\vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{r}} = i\vec{p} f(\vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{r}} \quad (\text{I.3.8})$$

posle inverzne Fourier transformacije svodi na:

$$G_{\vec{k}}(t-t') = \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \{ \langle\langle B_{\vec{k}}(t) | B_{\vec{k}}^+(t') \rangle\rangle + \langle\langle B_{\vec{k}}^+(t') | B_{\vec{k}}(t) \rangle\rangle \}$$

(I.3.9)

Sada izvršimo Fourier transformacije vreme - energija

$$G_{\vec{k}}(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega G_{\vec{k}}(\omega) e^{-i\omega(t-t')}$$

$$\langle\langle B_{\vec{k}}(t) | B_{\vec{k}}^+(t') \rangle\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \langle\langle B_{\vec{k}} | B_{\vec{k}}^+ \rangle\rangle_{\omega} e^{-i\omega(t-t')}$$

$$\langle\langle B_{\vec{k}}^+(t') | B_{\vec{k}}(t) \rangle\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \langle\langle B_{\vec{k}}^+ | B_{\vec{k}} \rangle\rangle_{\omega} e^{-i\omega(t-t')} \quad (I.3.10)$$

iskoristimo relaciju

$$\langle\langle B_{\vec{k}}^+ | B_{\vec{k}} \rangle\rangle_{\omega} = \langle\langle B_{\vec{k}}^+ | B_{\vec{k}} \rangle\rangle_{-\omega} \quad (I.3.11)$$

i dobijamo, posle inverzne Fourier transformacije

$$G_{\vec{k}}(E) = \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \{ \langle\langle B_{\vec{k}} | B_{\vec{k}}^+ \rangle\rangle_E + \langle\langle B_{\vec{k}}^+ | B_{\vec{k}} \rangle\rangle_{-E} \} \quad (I.3.12)$$

na osnovu opšte formule

$$E \langle\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle\rangle_E = \frac{iK}{2\pi} + \langle\langle [\hat{A}, \hat{H}] | \hat{B} \rangle\rangle_E \quad (I.3.13)$$

i činjenice da je:

$$[\hat{B}_{\vec{k}}, \hat{H}] = \sum_p E_p \hat{B}_{\vec{k}} [B_{\vec{k}}, B_p^+ B_p^-] = \sum_p E_p B_{\vec{k}} \delta_{\vec{p}, \vec{k}} = E_{\vec{k}} B_{\vec{k}} \quad (I.3.14)$$

$$K_{\vec{k}} = \langle [B_{\vec{k}}, B_{\vec{k}}^+] \rangle = 1 \quad (\text{I.3.15})$$

dobijamo:

$$\langle \langle B_{\vec{k}} | B_{\vec{k}}^+ \rangle \rangle_E = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{E - E_{\vec{k}}} ; \quad \langle \langle B_{\vec{k}} | B_{\vec{k}}^+ \rangle \rangle_{-E} = - \frac{i}{2\pi} \frac{1}{E + E_{\vec{k}}} \quad (\text{I.3.16})$$

pa se (I.3.12) svodi na

$$G_{\vec{k}}(E) = \frac{i}{2\pi} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \left\{ \frac{1}{E - E_{\vec{k}}} - \frac{1}{E + E_{\vec{k}}} \right\} . \quad (\text{I.3.17})$$

Koristeći teoremu o spektralnoj intezivnosti i imajući u vidu formule (I.3.4) i (I.3.5) možemo pisati:

$$\hat{\langle j_{\vec{k}}^S \rangle} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dE R_e G_{\vec{k}}(E) \left( e^{\frac{E}{\Theta}} - 1 \right)^{-1} . \quad (\text{I.3.18})$$

Pod znakom integrala se mora uzeti

$$G_{\vec{k}}(E) = \frac{i}{2\pi} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \left\{ \frac{1}{E - E_{\vec{k}} + i\delta} - \frac{1}{E + E_{\vec{k}} + i\delta} \right\} = \frac{i}{2\pi} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \left\{ P \frac{1}{E - E_{\vec{k}}} - P \frac{1}{E + E_{\vec{k}}} - i\pi \delta(E - E_{\vec{k}}) + i\pi \delta(E + E_{\vec{k}}) \right\}$$

pa je:

$$R_e G_{\vec{k}}(E) = \frac{\hbar \vec{k}}{4m} |\delta(E - E_{\vec{k}}) - \delta(E + E_{\vec{k}})| . \quad (\text{I.3.19})$$

Zamenjujući (I.3.19) u (I.3.18), za srednju vrednost operatori gustine struje na dатој temperaturi  $\theta$  nalazimo:

$$\langle \hat{j}_K^S \rangle = \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \cotg h \frac{E_K}{2\theta}. \quad (I.3.20)$$

Sada možemo potražiti na analogan način srednju vrednost operatora gustine verovatnoće. U koordinatnoj reprezentaciji gustina verovatnoće je data sa

$$\rho(\vec{r}, t) = \Psi^*(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) \quad (I.3.21)$$

u reprezentaciji druge kvantizacije posmatraćemo simetrizovani operator

$$\hat{\rho}^S(\vec{a}, t) = B_{\vec{a}}(t) B_{\vec{a}}^+(t) + B_{\vec{a}}^+(t) B_{\vec{a}}(t) \quad (I.3.22)$$

i da bismo ispitali njegove osobine, analiziraćemo Green-ovu funkciju:

$$D_{\vec{a}-\vec{b}}(t-t') = \langle\langle B_{\vec{a}}(t) | B_{\vec{b}}^+(t') \rangle\rangle + \langle\langle B_{\vec{b}}^+(t') | B_{\vec{a}}(t) \rangle\rangle \quad (I.3.23)$$

Dalja procedura je potpuno ista kao i prilikom izračunavanja Green-ove funkcije  $G_{\vec{a}-\vec{b}}(t-t')$ , tj. vrše se Fourier transformacije prostor-impuls i vreme-energija i (I.3.23) prelazi u:

$$D_{\vec{K}}(E) = \langle\langle B_{\vec{K}} | B_{\vec{K}}^+ \rangle\rangle_E + \langle\langle B_{\vec{K}} | B_{\vec{K}}^+ \rangle\rangle_{-E} \text{ ili, na osnovu (I.3.16)}$$

$$D_{\vec{K}}(E) = \frac{i}{2\pi} \left\{ \frac{1}{E - E_{\vec{K}}} - \frac{1}{E + E_{\vec{K}}} \right\} \quad (I.3.24)$$

Srednja vrednost operatora gustine data je na osnovu spektralne teoreme sa:

$$\langle \hat{\rho}_{\vec{K}}^S \rangle = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dE R e D_{\vec{K}}(E) \left( e^{\frac{E}{\theta}} - 1 \right)^{-1} \quad (I.3.25)$$

što se istom procedurom kao i u slučaju srednje vrednosti operatora strujne gustine svodi na:

$$\langle \hat{\rho}_{\vec{k}}^S \rangle = \cotg \operatorname{hyp} \frac{E_{\vec{k}}}{2\theta} \quad (\text{I.3.26})$$

Na osnovu rezultata (I.3.20) i (I.3.26) možemo razmatrati uslove pod kojima važi jednačina kontinuiteta za srednje vrednosti operatora  $\hat{j}_{\vec{k}}^S$  i  $\hat{\rho}_{\vec{k}}^S$  u koordinatnoj reprezentaciji jednačina kontinuiteta glasi:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0. \quad (\text{I.3.27})$$

Ako izvršimo Fourier transformacije veličina  $\rho$  i  $\vec{j}$ , tj.

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d^3 \vec{p} \rho(\vec{p}, \omega) e^{i \vec{p} \cdot \vec{r} - i \omega t} \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d^3 \vec{p} j(\vec{p}, \omega) e^{i \vec{p} \cdot \vec{r} - i \omega t} \end{aligned} \quad (\text{I.3.28})$$

onda je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t} &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d^3 \vec{p} \omega \rho(\vec{p}, \omega) e^{i \vec{p} \cdot \vec{r} - i \omega t} \\ \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d^3 \vec{p} \vec{p} \cdot \vec{j}(\vec{p}, \omega) e^{i \vec{p} \cdot \vec{r} - i \omega t} \end{aligned} \quad (\text{I.3.29})$$

pa posle zamene (I.3.29) u (I.3.27) dobijamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d^3 \vec{p} \omega \rho(\vec{p}, \omega) e^{i \vec{p} \cdot \vec{r} - i \omega t} - \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d^3 \vec{p} \vec{p} \cdot \vec{j}(\vec{p}, \omega) e^{i \vec{p} \cdot \vec{r} - i \omega t}$$



-  $i\vec{k}\vec{r} + iEt$

Jednačinu (I.3.30) pomnožićemo sa  $e^{\int d\vec{r}(\vec{p}-\vec{k})}$  i integraliti po  $\vec{r}$  i t tj.

$$\int d\omega d^3\vec{p}_\omega \rho(\vec{p}, \omega) \int d^3\vec{r} e^{i\vec{r}(\vec{p}-\vec{k})} dt e^{-it(E-\omega)} - \\ - \int d\omega d^3\vec{p} \vec{j}(\vec{p}, \omega) \int d^3\vec{r} e^{i\vec{r}(\vec{p}-\vec{k})} dt e^{-it(E-\omega)} = 0 .$$

Pošto je  $\int d^3\vec{r} e^{i\vec{r}(\vec{p}-\vec{k})} = (2\pi)^3 \delta(\vec{p}-\vec{k})$  i  $\int dt e^{-it(E-\omega)} = 2\pi \delta(E-\omega)$  mi konačno dobijamo jednačinu kontinuiteta u promenljivim impuls-energija

$$E_\rho(\vec{k}, E) - \vec{k}\vec{j}(\vec{k}, E) = 0 . \quad (\text{I.3.31})$$

Ako želimo da nadjemo ekvivalent jednačina (I.3.31) za srednje vrednosti operatora gustine struje verovatnoće i gustine verovatnoće za bozonske čestice (ili kvazičestice), onda, očigledno, moramo izvršiti prelaze:

$$\rho(\vec{k}, E) \rightarrow \langle \hat{\rho}_{\vec{k}}^S(E_{\vec{k}}) \rangle = \cot g h \frac{E_{\vec{k}}}{2\theta} \\ \vec{j}(\vec{k}, E) \rightarrow \langle \hat{\vec{j}}_{\vec{k}}^S(E_{\vec{k}}) \rangle = \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \cot g h \frac{E_{\vec{k}}}{2\theta} \quad (\text{I.3.32})$$

$$E \rightarrow E_{\vec{k}}$$

tako da se statistički ekvivalent jednačine kontinuiteta, posle skraćivanja funkcije  $c \cot g h \frac{E_{\vec{k}}}{2\theta}$ , svodi na:

$$E_{\vec{k}} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = 0 \quad (\text{I.3.33})$$

Na osnovu dobijene relacije zaključujemo da je jednačina kontinuiteta zadovoljena samo ako je energija bozonskih mikroobjekata

$$E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

tj. ona važi samo za slobodne bozone.

Srednju gustinu struje na jedan čvor rešetke dobijamo na osnovu formule

$$\langle \hat{j}_k^S \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \langle \hat{j}_{\vec{k}}^S \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \cotg h \frac{E_{\vec{k}}}{2\theta} \quad (\text{I.3.34})$$

ukupnu struju verovatnoće kao

$$\vec{J} = N \langle \hat{j}^S \rangle \quad (\text{I.3.35})$$

gde je N broj atoma u kristalu. Na osnovu formule (I.3.34) vidi se da je u izotropnoj sredini, kada  $E_{\vec{k}}$  ne zavisi od pravca prostiranja bozonskih talasa ukupna struja verovatnoće u kristalu ravna nuli, jer u formuli (I.3.34) imamo sumiranje neparne funkcije u simetričnim granicama.

Rezultati ovog paragrafa mogu se rezimirati na sledeći način:

- a) Srednja strujna gustina bozonskih pobudjenja zavisi od temperature i sa porastom temperature raste. Na absolutnoj nuli ( $\theta=0$ ) srednja gustina struje postaje  $\langle \hat{j}_k^S \rangle = \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$  tj. ravna je polovini brzine Boze čestica.
- b) Statistička srednja vrednost jednačine kontinuiteta zadovoljena je samo ako posmatrani Boze mikroobjekti izmedju sebe ne interaguju, drugim rečima ako se radi o idealnom bozonskom gasu. Ovaj rezultat na prvi pogled izgleda paradoksalan, ali je potpuno razumljiv. Ako čestice izmedju sebe interaguju, onda vreme njihovog života postaje konačno, tj. one posle izvesnog vremena nestaju, pa jednačina kontinuiteta, koja odražava očuvanje broja čestica mora da se наруши.

c) Treba ipak uočiti da se jednačina kontinuiteta narušava i u slučaju kada Boze čestice medju-sobno interaguju, ali kada pored kinetičke energije u svom spektru imaju energetski procep, tj.

ako im energija ima oblik  $E_{\vec{k}} = \Delta + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ , gde je  $\Delta$ -energija potrebna da se stvori bozonsko pobudjenje u sistemu. I ovaj rezultat nije teško objasniti: ako radi pobudjivanja sistema u njega mora da se uvede kvant energije čija je veličina  $\Delta$ , pa onda, pošto se kvant energije može tretirati kao kvazičestica, broj bozona u sistemu opet nije održan, već je veći za "ubačeni" kvant energije. To se lako vidi, jer ako u izrazu (I.3.33)

stavimo  $E_{\vec{k}} = \Delta + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  jednačina kontinuiteta se narušava tačno za veličinu  $\Delta$ .

Ovaj slučaj, energetskih bozonskih pobudjenja sa različitim od nule energetskim procepom, kada se narušava jednačina kontinuiteta biće kasnije detaljno analiziran, jer narušenje jednačine kontinuiteta znači mogućnost stvaranja dopunskih pobudjenja u sistemu u odnosu na već postojeća.

#### 4. Struja verovatnoće i jednačine kontinuiteta za fermione

Analogno onome što je uradjeno u prethodnom paragrafu operator gustine struje za fermionske mikro-objekte definisaćemo kao:

$$\begin{aligned}\hat{j}(\vec{a}, t) &= \frac{\hbar}{8mi} \{ [F_a^\dagger(t)] [\nabla_a^\rightarrow F_a^\rightarrow(t)] - [F_a^\rightarrow(t)] [\nabla_a^\rightarrow F_a^\dagger(t)] + \\ &+ [F_a^\dagger(t)] [\nabla_a^\rightarrow F_a^\rightarrow(t)] - [\nabla_a^\rightarrow F_a^\dagger(t)] [F_a^\rightarrow(t)] + \\ &+ [\nabla_a^\rightarrow F_a^\rightarrow(t)] [F_a^\dagger(t)] - [F_a^\dagger(t)] [\nabla_a^\rightarrow F_a^\dagger(t)] +\end{aligned}$$

$$+ [\nabla_{\vec{a}} \vec{F}_{\vec{a}}(t)] [\vec{F}_{\vec{a}}^+(t)] - [\nabla_{\vec{a}} \vec{F}_{\vec{a}}^+(t)] [\vec{F}_{\vec{a}}(t)] . \quad (\text{I.4.1})$$

Analizu operatora  $\hat{j}(\vec{a}, t)$  izvršićemo pomoću Green-ove funkcije:

$$\begin{aligned} \phi_{\vec{a}-\vec{b}}(\vec{a}-\vec{b}, t-t') &= \frac{\hbar}{8mi} \{ \langle\langle \vec{F}_{\vec{b}}^+(t') | \nabla_{\vec{a}} \vec{F}_{\vec{a}}(t) \rangle\rangle - \langle\langle \vec{F}_{\vec{a}}(t) | \nabla_{\vec{b}} \vec{F}_{\vec{b}}^+(t') \rangle\rangle + \\ &+ \langle\langle \vec{F}_{\vec{b}}^+(t') | \nabla_{\vec{a}} \vec{F}_{\vec{a}}(t) \rangle\rangle - \langle\langle \nabla_{\vec{b}} \vec{F}_{\vec{b}}^+(t') | \vec{F}_{\vec{a}}(t) \rangle\rangle + \\ &+ \langle\langle \nabla_{\vec{a}} \vec{F}_{\vec{a}}(t) | \vec{F}_{\vec{b}}^+(t') \rangle\rangle - \langle\langle \vec{F}_{\vec{a}}(t) | \nabla_{\vec{b}} \vec{F}_{\vec{b}}^+(t') \rangle\rangle + \\ &+ \langle\langle \nabla_{\vec{a}} \vec{F}_{\vec{a}}(t) | \vec{F}_{\vec{b}}^+(t') \rangle\rangle - \langle\langle \nabla_{\vec{b}} \vec{F}_{\vec{b}}^+(t') | \vec{F}_{\vec{a}}(t) \rangle\rangle \} . \end{aligned} \quad (\text{I.4.2})$$

Posle Fourier transformacije prostor-impuls i vreme-energija

$$\begin{aligned} \phi_{\vec{a}-\vec{b}}(\vec{a}-\vec{b}, t-t') &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \Phi_{\vec{k}}(\vec{a}-\vec{b}, t-t') e^{i\vec{k}(\vec{a}-\vec{b})-iE(t-t')} \\ \langle\langle \vec{F}_{\vec{a}}(t) | \vec{F}_{\vec{b}}^+(t') \rangle\rangle &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \langle\langle \vec{F}_{\vec{k}} | \vec{F}_{\vec{k}}^+ \rangle\rangle_E e^{i\vec{k}(\vec{a}-\vec{b})-iE(t-t')} \\ \langle\langle \vec{F}_{\vec{b}}^+(t') | \vec{F}_{\vec{a}}(t) \rangle\rangle &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \langle\langle \vec{F}_{\vec{k}}^+ | \vec{F}_{\vec{k}} \rangle\rangle_E e^{i\vec{k}(\vec{a}-\vec{b})-iE(t-t')} \end{aligned} \quad (\text{I.4.3})$$

jednačinu (I.4.2) svodimo na oblik

$$\Phi_{\vec{k}}(E) = \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \{ \langle\langle \vec{F}_{\vec{k}} | \vec{F}_{\vec{k}}^+ \rangle\rangle_E + \langle\langle \vec{F}_{\vec{k}}^+ | \vec{F}_{\vec{k}} \rangle\rangle_E \} \quad (\text{I.4.4})$$

Pretpostavimo da hamiltonijan sistema fermionskih mikro-objekta ima oblik

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} \vec{F}_{\vec{k}}^+ \vec{F}_{\vec{k}} . \quad (\text{I.4.5})$$

Pošto se radi o fermionima, pogodnije je izračunati antikomutatorsku funkciju Green-a:

$$E \langle\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle\rangle_E = \frac{iA}{2\pi} + \langle\langle [\hat{A}, H] \hat{B} \rangle\rangle_E . \quad (I.4.6)$$

Tada se na osnovu formule (I.4.6) i činjenice da je

$$A = \langle\{ F_{\vec{k}}^-, F_{\vec{k}}^+ \} \rangle = \langle\{ F_{\vec{k}}^+, F_{\vec{k}}^- \} \rangle = 1 \quad (I.4.7)$$

dobija

$$\langle\langle F_{\vec{k}}^- | F_{\vec{k}}^+ \rangle\rangle_E = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{E - E_{\vec{k}}} ; \quad \langle\langle F_{\vec{k}}^+ | F_{\vec{k}}^- \rangle\rangle_E = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{E + E_{\vec{k}}} \quad (I.4.8)$$

tako da (I.4.4) možemo konačno pisati kao:

$$\phi_{\vec{k}}(E) = \frac{i}{2\pi} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \left\{ \frac{1}{E - E_{\vec{k}}} + \frac{1}{E + E_{\vec{k}}} \right\} \quad (I.4.9)$$

Na osnovu spektralne teoreme za antikomutatorsku funkciju sledi da je srednja vrednost:

$$\langle\hat{j}_{\vec{k}}^A\rangle = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dE \operatorname{Re} \phi_{\vec{k}}(E) (e^{\frac{E}{T}} + 1)^{-1} \quad (I.4.10)$$

i pošto je na osnovu (I.4.9):

$$\operatorname{Re} \phi_{\vec{k}}(E) = \frac{1}{2} \{ \delta(E - E_{\vec{k}}) + \delta(E + E_{\vec{k}}) \}$$

dobijamo da je srednja vrednost operatora gustine struje fermionskih mikro-objekta

$$\langle\hat{j}_{\vec{k}}^A\rangle = \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \quad (I.4.11)$$

Kao što vidimo srednja statistička vrednost gustine struje fermionskih mikroobjekata ne zavisi od temperature.

Ako po analogiji sa operatorom gustine verovatnoća za Boze mikroobjekte (vidi prethodni paragraf) uvedemo operator gustine verovatnoće za fermionske mikro-objekte kao:

$$\hat{\rho}_{(\vec{a}, t)}^A = F_{\vec{a}}(t) F_{\vec{a}}^+(t) + F_{\vec{a}}^+(t) F_{\vec{a}}(t) \quad (I.4.12)$$

onda je, na osnovu komutacionih relacija za Fermi operatore, očigledno:

$$\hat{\rho}_{(\vec{a}, t)}^A = 1 \quad (I.4.13)$$

pa je i njegova statistička srednja vrednost:

$$\langle \hat{\rho}_{\vec{k}}^A \rangle = 1 . \quad (I.4.14)$$

Ako u jednačini kontinuiteta (I.3.31) izvršimo zamene:

$$\hat{\rho}_{\vec{k}, E} \rightarrow \langle \hat{\rho}_{\vec{k}}^A | E_{\vec{k}} \rangle = 1$$

$$\hat{j}_{\vec{k}, E} \rightarrow \langle \hat{j}_{\vec{k}}^A | E_{\vec{k}} \rangle = \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \quad (I.4.15)$$

$$E \rightarrow E_{\vec{k}}$$

$$\text{dolazimo do uslova: } E_{\vec{k}} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = 0 . \quad (I.4.16)$$

Kao što vidimo i u sistemu fermionskih mikroobjekata statistički ekvivalent jednačine kontinuiteta važi samo za slučaj idealnog gasa fermiona, tj. ako je  $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  pa prema tome, što se ovoga tiče, rezultat se može komentarisati na isti način kao i u prethodnom paragrafu u kome se radilo o bozonskim mikroobjektima.

Ono u čemu se fermionski sistem bitno razlikuje od bozonskog je činjenica da srednja gustina fermionske struje kao i srednja gustina fermiona ne zavise od temperature. Ovaj rezultat koji na prvi pogled izgleda paradoksalan, potpuno je u skladu sa rezultatima koje daje fermi statistika [ 2,3 ]. Reč je o tome (vidi [ 2,3 ]) da eksperimentalna i teorijska istraživanja pokazuju da specifična toplota na stalnoj zapremini za fermionski gas ne zavisi od temperature, ako su temperature dovoljno niske. Pošto je srednja vrednost operatora, gustine fermiona, koja je ovde nadjena, proporcionalna (sa nazavisnom od temperature konstatom proporcionalnosti), specifičnoj toploti na stalnoj zapremini, rezultat koji smo dobili kompatibilan je sa gore pomenutim rezultatima koje daje statistička fizika. Medjutim, rezultati koje smo dobili u ovom paragrafu pokazuju da isti zaključak važi i za gustinu struje verovatnoće, jer na osnovu formule (I.4.11) ona takodje ne zavisi od temperature.

Pošto ćemo u daljim analizama ispitivati temperaturski zavisne efekte koji nastaju usled interferencije struja verovatnoće, fermionske mikro-objekte nećemo dalje analizirati, jer kao što smo videli u sistemu fermiona temperaturski efekti, bar što se tiče gustine struje nisu bitni.

Na kraju treba konstatovati da kada  $\Theta \rightarrow 0$  bozonska srednja gustina struje  $\langle \hat{J}_k^S \rangle$  postaje jednaka fermionskoj srednjoj gustini struje  $\langle \hat{J}_k^A \rangle$  i bozonska srednja gustina verovatnoće  $\langle \hat{\rho}_k^S \rangle$  postaje jednaka fermionskoj gustini verovatnoće  $\langle \hat{\rho}_k^A \rangle$ .

I ovaj rezultat je potpuno realan, jer se na absolutnoj numeričkoj Boze, Fermi i Boltmanova statistika poklapaju.

## II GRINOVA FUNKCIJA TIPO STRUJA-STRUJA

### 1. Grinova funkcija za bozonska pobudjenja

U prethodnoj glavi došli smo do rezultata da struja verovatnoće bozonskih pobudjenja zavisi od temperaturе. Ovo znači da ako u sistemu imamo dve ili više struja bozonskih pobudjenja, onda menjanjem temperature možemo uticati na interakciju ovih struja izmedju sebe. Takodje smo videli da ukoliko u spektru bozonskih pobudjenja postoji energetski procep, onda se statistička jednačina kontinuiteta narušava a to znači da u sistemu mogu da se stvore neka nova pobudjenja sa različitim osobinama od onih koje imaju polazna pobudjenja. Ukoliko se neka nova pobudjenja pojave, ona očigledno mogu da budu samo rezultat interferencije struja početnih pobudjenja. Postojanje novih interferentnih pobudjenja, kao i njihove osobine, ako se ona uopšte pojave, analiziraćemo pomoću Green-ove funkcije tipa struja-STRUJA, koju ćemo definisati na sledeći način.

$$\Gamma_{\vec{a}-\vec{b}}(t-t') = \langle \langle \vec{j}_{\vec{a}}(t) | \vec{j}_{\vec{b}}(t') \rangle \rangle \quad (\text{II 1.1})$$

Kao što je poznato, struje možemo izraziti na sledeći način:

$$\vec{j}_{\vec{a}}(t) = \frac{\hbar}{2mi} [B_{\vec{a}}^+(t) \nabla_{\vec{a}} B_{\vec{a}}^-(t) - B_{\vec{a}}^-(t) \nabla_{\vec{a}} B_{\vec{a}}^+(t)] \quad (\text{II 1.2})$$

$$\vec{j}_{\vec{b}}(t') = \frac{\hbar}{2mi} [B_{\vec{b}}^+(t') \nabla_{\vec{b}} B_{\vec{b}}^-(t') - B_{\vec{b}}^-(t') \nabla_{\vec{b}} B_{\vec{b}}^+(t')] \quad (\text{II 1.2})$$

Ovde su  $B_v^\pm$  i  $B_v$  Boze operatori kreacije i anihilacije kvazičestica. Hamiltonijan sistema kvazičestica, u harmonijskoj aproksimaciji, dat je sa:

$$H = \sum_v \epsilon_v B_v^\pm B_v \quad (\text{II 1.3})$$

gde su  $B_n^\pm$  i  $B_n^\pm$  - furije likovi operatora  $B_n^\pm$  i  $B_n^\pm$ , tj.

$$B_n^\pm = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_v B_v^\pm e^{\pm i \vec{v} \cdot \vec{n}}; \quad B_n^\pm = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_v B_v^\pm e^{-i \vec{v} \cdot \vec{n}} \quad (\text{II 1.4})$$

Ovde je N - broj atoma u kristalu. Na osnovu (II 1.1) i (II 1.2) možemo pisati:

$$\Gamma_{a-b}^\pm(t-t') = \frac{-\hbar^2}{4m^2} \left[ \langle \langle B_a^\pm(t) \nabla_a^\pm B_a^\pm(t) | B_b^\pm(t') \nabla_b^\pm B_b^\pm(t') \rangle \rangle + \right.$$

$$+ \langle \langle B_a^\pm(t) \nabla_a^\pm B_a^\pm(t) | B_b^\pm(t') \nabla_b^\pm B_b^\pm(t') \rangle \rangle -$$

$$- \langle \langle B_a^\pm(t) \nabla_a^\pm B_a^\pm(t) | B_b^\pm(t') \nabla_b^\pm B_b^\pm(t') \rangle \rangle -$$

$$- \langle \langle B_a^\pm(t) \nabla_a^\pm B_a^\pm(t) | B_b^\pm(t') \nabla_b^\pm B_b^\pm(t') \rangle \rangle \quad (\text{II 1.5}).$$

Sada ćemo izvršiti furije transformacije prostor - impuls, pri čemu je:

$$\Gamma_{\vec{a} - \vec{b}}(t-t') = \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \Gamma_{\vec{q}}(t-t') e^{i\vec{q}(\vec{a}-\vec{b})} \quad (\text{II 1.6})$$

Zavisnost od vremena nećemo naznačavati, jer je trenutno nebitna. Prilikom transformacije operatora B treba voditi računa o tome da zbog homogenosti prostora mora važiti zakon o održanju impulsa:

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{q}} \Gamma_{\vec{q}} e^{i\vec{q}(\vec{a}-\vec{b})} &= \frac{-\hbar^2}{N^4 m^2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \vec{k}_4} \left[ \langle \langle B_{\vec{k}_1}^+ B_{\vec{k}_2}^+ | B_{\vec{k}_3}^+ B_{\vec{k}_4}^+ \gg e^{i\vec{k}_1 \vec{a} - i\vec{k}_2 \vec{a} + i\vec{k}_3 \vec{b} - i\vec{k}_4 \vec{b}} \right. \\ &\quad \left. - i\vec{k}_1 \vec{a} + i\vec{k}_2 \vec{a} - i\vec{k}_3 \vec{b} + i\vec{k}_4 \vec{b} \right. \\ &\quad \left. \langle \langle B_{\vec{k}_1}^+ B_{\vec{k}_2}^+ | B_{\vec{k}_3}^+ B_{\vec{k}_4}^+ \gg e^{(-\vec{k}_2 \vec{k}_4)} - \langle \langle B_{\vec{k}_1}^+ B_{\vec{k}_2}^+ | B_{\vec{k}_3}^+ B_{\vec{k}_4}^+ \gg \right. \\ &\quad \left. e^{(\vec{k}_2 \vec{k}_4)} - \langle \langle B_{\vec{k}_1}^+ B_{\vec{k}_2}^+ | B_{\vec{k}_3}^+ B_{\vec{k}_4}^+ \gg e^{(\vec{k}_2 \vec{k}_4)} \right] \quad (\text{II 1.7}) \end{aligned}$$

gde je:  $\vec{k}_4 = \vec{k}_1 + \vec{k}_3 - \vec{k}_2$  - za prve dve Grinove funkcije

$\vec{k}_4 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3 - \vec{k}_1$  - za druge dve Grinove funkcije

Posle sredjivanja dobijamo:

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{q}} \Gamma_{\vec{q}} e^{i\vec{q}(\vec{a}-\vec{b})} &= \frac{\hbar^2}{4m^2 N} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} \left[ \langle \langle B_{\vec{k}_1}^+ B_{\vec{k}_2}^+ | B_{\vec{k}_3}^+ B_{\vec{k}_1 + \vec{k}_3 - \vec{k}_2}^+ \gg e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)(\vec{a} - \vec{b})} \right. \\ &\quad \left. + \langle \langle B_{\vec{k}_1}^+ B_{\vec{k}_2}^+ | B_{\vec{k}_3}^+ B_{\vec{k}_2 + \vec{k}_3 - \vec{k}_1}^+ \gg e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)(\vec{a} - \vec{b})} \right. \\ &\quad \left. + \langle \langle B_{\vec{k}_1}^+ B_{\vec{k}_2}^+ | B_{\vec{k}_3}^+ B_{\vec{k}_1 + \vec{k}_3 - \vec{k}_2}^+ \gg e^{i(\vec{k}_2(\vec{k}_1 + \vec{k}_3 - \vec{k}_2))} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) (\vec{a} - \vec{b}) \\
 + & \left( \langle\langle B_{\vec{k}_1}^+ B_{\vec{k}_2}^+ | B_{\vec{k}_3}^+ B_{\vec{k}_2}^+ + \vec{k}_3 - \vec{k}_4 \rangle\rangle_e \right. \\
 & \left. - i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) (\vec{a} - \vec{b}) \right. \\
 + & \left. \langle\langle B_{\vec{k}_1}^+ B_{\vec{k}_2}^+ | B_{\vec{k}_3}^+ B_{\vec{k}_2}^+ + \vec{k}_3 - \vec{k}_1 \rangle\rangle_e \right. \\
 & \left. . \vec{k}_2 (\vec{k}_2 + \vec{k}_3 - \vec{k}_1) \right) \quad (II \ 1.8)
 \end{aligned}$$

Uzimajući  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{\ell}$ , pomnožimo (II 1.8) sa  $e^{-ik\vec{\ell}}$  i sumiramo po  $\vec{\ell}$ , dobijamo:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_k = & \frac{\hbar^2}{4m^2 N} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_3} \left[ \langle\langle B_{\vec{k}_2}^+ B_{\vec{k}_2}^+ | B_{\vec{k}_3}^+ B_{\vec{k}_3}^+ + \vec{k} \rangle\rangle_{\vec{k}_2} (\vec{k}_3 + \vec{k}) + \langle\langle B_{\vec{k}_2}^+ - \vec{k} B_{\vec{k}_2}^+ | B_{\vec{k}_3}^+ B_{\vec{k}_3}^+ + \vec{k} \rangle\rangle_{\vec{k}_2} \right. \\
 & \left. (\vec{k}_3 - \vec{k}) + \langle\langle B_{\vec{k}_2}^+ + \vec{k} B_{\vec{k}_2}^+ | B_{\vec{k}_3}^+ B_{\vec{k}_3}^+ - \vec{k} \rangle\rangle_{\vec{k}_2} (\vec{k}_3 \cdot \vec{k}) + \langle\langle B_{\vec{k}_2}^+ - \vec{k} B_{\vec{k}_2}^+ | B_{\vec{k}_3}^+ B_{\vec{k}_3}^+ + \vec{k} \rangle\rangle_{\vec{k}_2} \right. \\
 & \left. (\vec{k}_3 + \vec{k}) \right] \quad (II \ 2.9)
 \end{aligned}$$

Funkcija  $\Gamma_k$  zavisi od razlike vremena  $t-t'$  i isto tako i četiri funkcije na desnoj strani jednačine (II 1.9). Izvršena Furije transformacija energija - vreme i inverzne transformacije. Posle ovoga:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_k(E) = & \frac{\hbar^2}{4m^2 N} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} \left[ \vec{q}_1 (\vec{q}_2 + \vec{k}) \langle\langle B_{\vec{q}_1 + \vec{k}}^+ B_{\vec{q}_1}^+ | B_{\vec{q}_2 + \vec{k}}^+ B_{\vec{q}_2}^+ \rangle\rangle_E E^{+\vec{q}_1} (\vec{q}_2 - \vec{k}) \right. \\
 & \left. \langle\langle B_{\vec{q}_1 + \vec{k}}^+ B_{\vec{q}_1}^+ | B_{\vec{q}_2 + \vec{k}}^+ B_{\vec{q}_2}^+ - \vec{k} \rangle\rangle_E E^{+\vec{q}_1} (\vec{q}_2 - \vec{k}) \langle\langle B_{\vec{q}_1}^+ - \vec{k} B_{\vec{q}_1}^+ | B_{\vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_2}^+ - \vec{k} \rangle\rangle_E E^{+\vec{q}_1} \right. \\
 & \left. + \vec{q}_1 (\vec{q}_2 - \vec{k}) \langle\langle B_{\vec{q}_1}^+ - \vec{k} B_{\vec{q}_1}^+ | B_{\vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_2}^+ + \vec{k} \rangle\rangle_E \right] \quad (II \ 1.10)
 \end{aligned}$$

Koristeći formula  $[\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}] = [\hat{a} [\hat{b}, \hat{c}]] + [\hat{a}, \hat{c}] \hat{b}$  možemo pisati.

$$[B_{\vec{q}_1}^+ + \vec{k} B_{\vec{q}_1}^+, B_{\vec{v}}^+ B_{\vec{v}}^+] = -B_{\vec{q}_1}^+ + \vec{k} B_{\vec{k}_2}^+ \delta_{\vec{v}\vec{q}_1}^+ + B_{\vec{q}_1}^+ + \vec{k} B_{\vec{k}_2}^+ \delta_{\vec{v}, \vec{q}_1}^+ + \vec{k}$$

$$[B_{\vec{q}_1}^+ - \vec{k} B_{\vec{q}_1}^+, B_{\vec{v}}^+ B_{\vec{v}}^+] = B_{\vec{q}_1}^+ - \vec{k} B_{\vec{q}_1}^+ \delta_{\vec{v}}, \vec{q}_1^- - B_{\vec{q}_1}^+ - \vec{k} B_{\vec{q}_1}^+ \delta_{\vec{v}}, \vec{q}_1^- - \vec{k}$$

tako da su jednačine za funkcije Grina:

$$(E + \varepsilon_{\vec{q}_1}^+ - \varepsilon_{\vec{q}_1}^- + \vec{k}) \langle \langle B_{\vec{q}_1}^+ + \vec{k} B_{\vec{q}_1}^+ | B_{\vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_2}^+ + \vec{k} \rangle \rangle_E = \frac{i}{2\pi} K_1$$

$$(E + \varepsilon_{\vec{q}_1}^+ - \varepsilon_{\vec{q}_1}^- + \vec{k}) \langle \langle B_{\vec{q}_1}^+ + \vec{k} B_{\vec{q}_1}^+ | B_{\vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_2}^+ - \vec{k} \rangle \rangle_E = \frac{i}{2\pi} K_2$$

} (II 1.1)

$$(E + \varepsilon_{\vec{q}_1}^+ - \vec{k} - \varepsilon_{\vec{q}_1}^-) \langle \langle B_{\vec{q}_1}^+ - \vec{k} B_{\vec{q}_1}^+ | B_{\vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_2}^+ - \vec{k} \rangle \rangle_E = \frac{i}{2\pi} K_3$$

$$(E + \varepsilon_{\vec{q}_1}^+ - \vec{k} - \varepsilon_{\vec{q}_1}^-) \langle \langle B_{\vec{q}_1}^+ - \vec{k} B_{\vec{q}_1}^+ | B_{\vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_2}^+ + \vec{k} \rangle \rangle_E = \frac{i}{2\pi} K_4$$

Dalje je:

$$K_1 = \langle [B_{\vec{q}_1}^+ + \vec{k} B_{\vec{q}_1}^+, B_{\vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_2}^+ + \vec{k}] \rangle = - \langle B_{\vec{q}_1}^+ + \vec{k} B_{\vec{q}_2}^+ + \vec{k} \rangle \delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2}^+ +$$

$$+ \langle B_{\vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_1}^+ \rangle \delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2}^+ = - \delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2}^+ + \delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2}^+ + \langle B_{\vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_2}^+ \rangle \delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2}^- -$$

$$- \langle B_{\vec{q}_2}^+ + \vec{k} B_{\vec{q}_2}^+ + \vec{k} \rangle \delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2}^+ = \delta_{\vec{q}_2, \vec{q}_1}^+ (\langle B_{\vec{q}_1}^+ B_{\vec{q}_1}^+ \rangle - \langle B_{\vec{q}_1}^+ + \vec{k} B_{\vec{q}_1}^+ + \vec{k} \rangle) \quad (\text{II 1.12})$$

$$K_2 = \langle [B_{\vec{q}_1}^+ + \vec{k} B_{\vec{q}_1}^+, B_{\vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_2}^- - \vec{k}] \rangle = - \langle B_{\vec{q}_1}^+ + \vec{k} B_{\vec{q}_2}^+ \rangle \delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2}^+ -$$

$$+ \langle B_{\vec{q}_2}^+ - \vec{k} B_{\vec{q}_1}^+ \rangle \delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2}^+ = - \delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2}^+ - \delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2}^+ - \delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2}^+ \delta_{\vec{q}_2, \vec{q}_1}^+ -$$

$$+ \langle B_{\vec{q}_1}^+ B_{\vec{q}_1}^- \rangle \delta_{\vec{q}_2, \vec{q}_1 + \vec{k}} \quad \delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2 - \vec{k}} \quad - \langle B_{\vec{q}_1}^+ + \vec{k} B_{\vec{q}_1}^- + \vec{k} \rangle \delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2 - \vec{k}} .$$

$$\cdot \quad \delta_{\vec{q}_2, \vec{q} + \vec{k}} = \delta_{\vec{q}_2, \vec{q}_1 + \vec{k}} (\langle B_{\vec{q}_1}^+ B_{\vec{q}_1}^- \rangle - \langle B_{\vec{q}_1}^+ + \vec{k} B_{\vec{q}_1}^- + \vec{k} \rangle) \quad (\text{II 1.13})$$

$$K_3 = \langle [B_{\vec{q}_1}^+ - \vec{k} B_{\vec{q}_1}^-, B_{\vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_2}^-] \rangle = \langle B_{\vec{q}_1}^+ - \vec{k} B_{\vec{q}_2}^+ - \vec{k} \rangle \delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} -$$

$$- \langle B_{\vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_1}^- \rangle \delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} = \delta_{\vec{q}_2, \vec{q}_1} (\langle B_{\vec{q}_1}^+ - \vec{k} B_{\vec{q}_1}^- - \vec{k} \rangle - \langle B_{\vec{q}_1}^+ B_{\vec{q}_1}^- \rangle) \quad (\text{II 1.14})$$

$$K_4 = \langle [B_{\vec{q}_1}^+ - \vec{k} B_{\vec{q}_1}^-, B_{\vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_2}^+ + \vec{k}] \rangle = \langle B_{\vec{q}_1}^+ - \vec{k} B_{\vec{q}_2}^+ \rangle \delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} -$$

$$- \langle B_{\vec{q}_2}^+ + \vec{k} B_{\vec{q}_1}^- \rangle \delta_{\vec{q}_2, \vec{q}_1 - \vec{k}} = \delta_{\vec{q}_2, \vec{q}_1 - \vec{k}} (\langle B_{\vec{q}_1}^+ - \vec{k} B_{\vec{q}_1}^- - \vec{k} \rangle -$$

$$- \langle B_{\vec{q}_1}^+ B_{\vec{q}_1}^- \rangle) \quad (\text{II 1.15})$$

Uvedimo oznaku  $\bar{N}_{\nu} \equiv \langle B_{\nu}^+ B_{\nu}^- \rangle$  pa posle zamene (II 1.12) - (II 1.15) u (II 1.11)i u izrazu (II 1.10) dobijamo konačno:

$$\Gamma_K^{\vec{k}} (E) = \frac{i \hbar^2}{8 \pi m^2} \frac{1}{\sum_{\vec{q}}} \left\{ \frac{(\bar{N}_{\vec{q}} - \bar{N}_{\vec{q}} + \vec{k}) \vec{q} (2\vec{q} + \vec{k})}{E - (\epsilon_{\vec{q}+\vec{k}} - \epsilon_{\vec{q}})} + \right.$$

$$\left. + \frac{(N_{\vec{q}-\vec{k}} - N_{\vec{q}}) \vec{q} (2\vec{q} - \vec{k})}{E - (\epsilon_{\vec{q}} - \epsilon_{\vec{q}} - \vec{k})} \right\} \quad (\text{II 1.16})$$

Kao što vidimo funkcija  $\Gamma_{\vec{K}}(E)$  teži nuli kada temperatura teži nuli što znači da sa povišenjem temperaturе raste i mogućnost da se pojave nova, interferentna pobudjenja. Mogućnost egzistencija ovih pobudjenja ispitaćemo tako što ćemo u formuli (II 1.16) izvršiti sumaciju po  $\vec{q}$  i videti da li dobijeni izraz ima polove u kompleksnoj E-ravni. Takodje je jasno da rezultat bitno zavisi od toga kakav konkretan zakon disperzije  $\epsilon_{\vec{k}}$  imaju bozonska pobudjenja.

## 2. Polovi funkcije na visokim temperaturama i mogućnost pojave interferentnih pobudjenja

Kao što smo videli u prethodnom paragrafu mogućnost egzistencije interferentnih pobudjenja koja nastaju kao rezultat interakcije struja-struja, zavisi od toga kakav zakon disperzije  $\epsilon_{\vec{k}}$  imaju bozonska pobudjenja čije struje interaguju.

U kondenzovanoj materiji pojavljuju se veoma različita bozonska pobudjenja koja po zakonima disperzije možemo svrstati u tri grupe:

- 1) Bozonska pobudjenja sa linearnim zakonom disperzije  $\epsilon_{\vec{k}} = \hbar v k$  gde je  $v$ -brzina prostiranja pobudjenja a  $K$  intenzitet talasnog vektora  $\vec{K}$ . U ovu grupu spadaju fotoni, koji su kvanti elektromagnetskog polja u kondenzovanoj sredini ako je ona prozračna i akustički fononi koji predstavljaju kolektivne mehaničke osilacije sredine, ustvari zvučne talase. Za ovaj tip eksitacija može se pokazati (dokaz zbog glomaznosti nećemo navoditi) da funkcija  $\Gamma_{\vec{K}}(E)$  nema polova u E-ravni bez obzira na dimenzionalnost sredine. To znači da interakcija struja ovakvih bozonskih pobudjenja ne daje nova pobudjenja.

- 2) Bozonska pobudjenja sa kvadratnim zakonom disperzije bez energetskog procepa tj. sa energijom  $\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ . Tipičan predstavnik ovakvih bozonskih pobudjenja su spinski talasi ili magnoni koji se pojavljuju u magnetnim materijalima ako je spoljašnje magnetno polje ravno nuli. I za ovaj tip pobudjenja funkcija  $\Gamma_{\vec{k}}(E)$  nema dopunskih polova što znači da se ni u ovom slučaju ne kreiraju dopunska pobudjenja. I ovaj dokaz ćemo izostaviti, jer zahteva veoma komplikovane račune. Napominjemo samo da u ovom slučaju funkcija  $\Gamma_{\vec{k}}(E)$  ima pol  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  koji se pojavljuje kao dvostruki za razliku od istog pola koji je jednostruk za standardnu Grinovu funkciju  $\langle\langle B_{\vec{k}}^- B_{\vec{k}}^+ \rangle\rangle_E$ .
- 3) Treći mogući tip bozonskih eksitacija u kondenzovanoj materiji su eksitacije sa energetskim procepom tj. kvazičestice sa zakonom disperzije  $\epsilon_{\vec{k}} = \Delta + \frac{\hbar^2 k^3}{2m}$ . Ovakve eksitacije su Frenkelovi eksitonи u molekularnim kristalima, optički fononi koji nastaju usled translatornog pomeranja centra mase molekula u kristalima sa složenom rešetkom, zatim angуларни fononi koji nastaju usled rotiranja molekula oko nekog zadataog pravca, eksitacije u feroelektričnim materijalima, eksitacije feromagneticima sa dipolnim interakcijama itd. Kao što smo videli za eksitacije energetskim procepom narušava se statistička jednačina kontinuiteta, pa zbog toga ovde postoji najveće šanse da se kao rezultat interakcije dve struje ovih pobudjenja pojave neka nova, interferentna pobudjenja.

U daljoj analizi ograničimo se na slučaj Frenkelovih eksitona koji predstavljaju optička pobudjenja u molekularnim kristalima. Molekularni kristali su antracen, naftalin, benzol u čvrstom stanju i plemeniti gasovi u čvrst-

tom stanju. Za ovakve kristale karakteristično je da su im molekuli jako izraženi dipoli, tako da je osnovna interakcija u njima - interakcija električnih dipola.

Energija Frenkelovih eksitona može se napisati u obliku

$$\epsilon_k^+ = \Delta + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (\text{II } 2.1)$$

gde je  $\Delta$  - energija pobudjenja izolovanog molekula i iznosi 3-5 eV ili oko 40.000 Boltzmanovih konstanti i m-efektivna masa eksitona koja je reda veličine  $10^{-27}$  gr. Eksplicitni izraz za efektivnu masu eksitona je:

$$m = \frac{\hbar^2}{2 a^2 L} \quad (\text{II } 2.2)$$

gde je a-konstanta kristalne rešetke, a L-matrični element dipol-dipolne interakcije za najbliže susede. Matrični element L- može biti i pozitivan i negativan, pa zato imamo pozitivnu disperziju svetlosti u kristalu (kada je  $L > 0$  i  $m > 0$ ) i negativnu disperziju (kada je  $L < 0$  i  $m < 0$ ). Proračun pokazuje da je energija  $\frac{\hbar^2 k^2}{2 m}$

za eksitone 10-1.000 puta manja od veličine energetskog procepa  $\Delta$ .

Analizu polova Grinove funkcije  $\Gamma_k^+ (E)$  vršićemo na visokim temperaturama, jer tada, kao što smo videli, postaje veće šanse da se pojave interferentna pobudjenja. Izraz "visoke temperature" treba uslovno shvatiti i to tako što su one toliko visoke da važi

$$\left| \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right| \ll \Theta \quad (\text{II } 2.3)$$

$$\text{ali istovremeno} \quad \Delta \gg \Theta \quad (\text{II } 2.4)$$

S obzirom na napred navedene ocene redova veličine za  $\Delta$  i  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  očigledno je da su to temperature koje leže u intervalu od  $100-1.000^{\circ}\text{K}$ . Za ovakve temperature očigledno je da se za srednji broj bozona može aproksimativno izraziti kao

$$\begin{aligned} \langle \overset{+}{B_K} \overset{-}{B_K} \rangle &\equiv \bar{N}_K = \frac{1}{\frac{\Delta}{\Theta} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m\Theta}} \approx \\ &e^{-\left(\frac{\Delta}{\Theta} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m\Theta}\right)} \approx e^{-\frac{\Delta}{\Theta} \left(1 - \frac{\hbar^2 k^2}{2m\Theta}\right)} \quad (\text{II } 2.5) \end{aligned}$$

Ova aproksimacija biće korišćena prilikom analize polova Grinove funkcije  $\Gamma_k^{\pm}(E)$ . Analizu ćemo vršiti za jedno, dvo i tro-dimenzionalnu kristalnu rešetku.

### a) Jednodimenzionalna rešetka

Ako u formuli (II 1.16) predjemo od sume na integral po pravilu

$$\frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{-\mu_0}^{\mu_0} dq \quad (\text{II } 2.6)$$

gde je  $\mu_0 = \frac{\pi}{a}$  - granični vektor prve Briluenove zone i iskoristimo aproksimaciju (II 2.5) za funkciju  $\Gamma_k(E)$  dobijamo sledeći izraz:

$$\Gamma_k(E) = -\frac{i}{2\pi} \frac{\hbar^2 \mu_0^2}{3m^2} \frac{e^{-\frac{\Delta}{\Theta}}}{\left(1 + \frac{3m^2 E^2}{\hbar^4 \mu_0^2 K^2}\right)} \quad (\text{II } 2.7)$$

Pošto je  $\mu_0 \sim 10^8 \text{ cm}^{-1}$  možemo uzeti  $\mu_0 \gg \frac{1}{\hbar} \sqrt{mE}$  i, korišteci približno formulu  $1 + \varepsilon \approx \frac{1}{1 - \varepsilon} + O(\varepsilon^2)$

za  $\epsilon \ll 1$ , napisati konačno:

$$\Gamma_k(E) = \frac{i}{2\pi} \frac{C_k(\theta)}{E^2 - E_k^2} \quad (\text{II } 2.8)$$

gde je:

$$C_k(\theta) = \frac{\hbar^6 \mu_0^4 K^2}{9m^4 \theta} e^{-\frac{\Delta}{\theta}} \quad (\text{II } 2.9)$$

i

$$E_k = -\frac{l}{\sqrt{3}} \frac{\hbar^2 \mu_0}{m} K \quad (\text{II } 2.10)$$

kao što vidimo u slučaju jednodimenzionalne strukture funkcija  $\Gamma_k(E)$  ima pol  $E_k$  pa prema tome dve eksitonske struje u jednodimenzionalnoj rešetci svojom interferencijom daju nova pobudjenja koja ćemo dalje zvati interferentnim pobudjenjima. Zakon disperzije interferentnih pobudjenja, koji je dat formulom (II 2.10) može se napisati u obliku

$$E_k = \hbar u k \quad (\text{II } 2.11)$$

gde je:

$$U = \frac{\hbar \mu_0}{m \sqrt{3}} \quad - \text{brzina prostiranja interferentnih pobudjenja.} \quad (\text{II } 2.12)$$

Kao što vidimo pobudjenja nastala interakcijom struja-struja imaju linearan zakon disperzije i time podsećaju na fone ili fotone. Osobine ovih pobudjenja biće detaljnije analizirane u sledećem paragrafu, a ovde ćemo ispitati funkciju  $\Gamma_k(E)$  za dvo i trodimenzionalnu rešetku.

b) Dvodimenzionalna rešetka

Ako u formuli (II 1.16) predjemo od sume na integral po pravilu:

$$\frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} = \frac{a^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int dq q^2 \quad (\text{II } 2.13)$$

i iskoristimo aproksimaciju (II 2.5), posle veoma komplikovanih računa nalazimo da je:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vec{k}}(E) = & -\frac{1}{2\pi} \frac{\hbar^2 \mu_0^2 e}{4\pi m^2 \Theta} \left\{ \frac{10\pi B^3 K}{3\mu_0^4} - \frac{10\pi A^3 K}{3\mu_0^4} - \frac{2\pi B^2}{\mu_0^4} \left( \frac{k^2}{2} + \frac{4B^2}{3} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{2\pi A^2}{\mu_0^4} \left( \frac{K^2}{2} + \frac{4A^2}{3} \right) - 1 \right\}; A = \frac{mE}{\hbar^2 k} - \frac{k}{2}; B = \frac{mE}{\hbar^2 k} + \frac{k}{2} \quad (\text{II } 2.14) \end{aligned}$$

Izraz u velikoj zagradi (II 2.14) ne može biti ravan nuli ni za kakvo E, pa prema tome u dvodimenzionalnoj rešetci  $\Gamma_{\vec{k}}(E)$  nema polova, a to znači da u ovom slučaju interferencija dve eksitonske struje ne stvara nova pobudjenja.

### c) Trodimenzionalna rešetka

Za slučaj trodimenzionalne rešetke, od sume na integral se prelazi po pravilu

$$\frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} = \frac{a^3}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi dv \sin v \int_0^\mu dq q^2 \quad (\text{II } 2.15)$$

Ako izvršimo aproksimaciju (II 2.5), onda nam se formula (II 1.6) svodi na:

$$\Gamma_{\vec{k}}(E) = -\frac{i}{2\pi} \frac{3\hbar^2 \mu_0^2 e}{5m^2 \Theta} \left\{ 1 - \frac{5k\omega}{32\mu_0} \ln \frac{\mu_0^2 - k\omega\mu_0 + \Omega^2}{\mu_0^2 + k\omega\mu_0 + \Omega^2} \right\}^{-1} \quad (\text{II } 2.16)$$

gde je:

$$\omega = \frac{2mE}{\hbar^2 k^2} \quad \text{i} \quad \Omega = (\omega^2 + 1) \frac{k^2}{4} \quad (\text{II } 2.17)$$

Uslov egzistencije interferentnih pobudjenja svodi se na

$$\frac{\mu_0^2 - k \omega \mu_0 + \Omega^2}{\mu_0^2 + k \omega \mu_0 + \Omega^2} = e^{\frac{32 \mu_0}{k \omega}} \quad (\text{II } 2.18)$$

Izraz na levoj strani jednačine (II 2.18) uvek je manji od jedinice, dok je izraz na desnoj strani uvek veći od jedinice, tako da uslov (II. 2.18) ne može biti zadovoljen ni za kakvu vrednost E. Prema tome, nije u trodimenzionalnoj rešetci mogu se stvoriti interferentna pobudjenja kao rezultat interakcije dve eksitonske struje.

Rezimirajući regulante ovog paragrafa možemo zaključiti da interferencija dve eksitonske struje može da stvori nove kvazičestice samo u jednodimenzionalnoj strukturi. Ove nove kvazičestice imaju linearan zakon disperzije i time se bitno razlikuju od eksitona čijom interakcijom postaju.

### 3. Osobine interferentnih pobudjenja

U ovom paragrafu ispitaćemo osobine interferentnih pobudjenja, koja nastaju kao rezultat interakcije eksitonskih struja. Kao što smo videli u predhodnom paragrafu interferentna pobudjenja mogu da nastanu samo u jednodimenzionalnoj strukturi. Moglo bi se pomisliti da jednodimenzionalna struktura i analiza pojave u njoj nemaju nekog specijalnog praktičnog značaja. Međutim, baš u slučaju eksitonskih pobudjenja analiza ovakvih struktura može da ima veliki praktični značaj u biofizici, i makromolekularnoj fiziči, jer makromolekuli i mnoge biološke strukture predstavljaju jednodimenzionalne lance molekula.

Da bismo ispitali osobine interferentnih pobudjenja navedimo još jednom formule (II 2.8), (II 2.9), (II 2.11) i (II 2.12) iz predhodnog paragrafa.

$$\Gamma_k(E) = \frac{1}{2\pi} \frac{C_k(\theta)}{E^2 - E_k^2} \quad (\text{II } 3.1)$$

$$C_k(\theta) = \frac{\hbar^6 \mu_0^4 k^2}{9m^4 \theta} e^{-\frac{\Delta}{\theta}} ; \quad E_k = \hbar u k; \quad u = \frac{\hbar \mu_0}{m\sqrt{3}} \quad (\text{II } 3.2)$$

S obzirom na navedene formule vidimo da karakteristike interferentnih pobudjenja ne zavise od znaka efektivne mase eksitona, jer u funkciju  $\Gamma_k(E)$  masa eksitona ulazi samo sa parnim stepenom. U izrazu za  $u$  umesto  $m$  - treba da stoji  $|m|$ , jer je ovo  $m$  dobijeno kao koren sa znakom plus iz funkcije  $E_k^2$ . Znači da i pri pozitivnoj i pri negativnoj disperziji eksitona dobijamo istu interferentnu pobudjenja.

Interferentna pobudjenja imaju linearan zakon disperzije bez energetskog procepa i time se bitno razlikuju od eksitona koji ih kreiraju, jer eksitonim imaju kvadratni zakon disperzije sa energetskim procepom.

Brzina u interferentnih pobudjenja je reda  $10^8$  sm/sek jer je granični vektor Briluenove zone  $\mu_0 \sim 10^8 \text{ sm}^{-1}$ ,  $m \sim 10^{-27}$  gr i  $\hbar \sim 10^{-27}$  erg/sek. Zbog ovakve brzine interferentna pobudjenja leže negde na sredini izmedju zvučnih i svetlosnih talasa, jer im je brzina oko 100 puta manja od brzine svetlosti i oko 100 - 1.000 puta veća od brzine zvuka.

Da bismo ispitali dalje osobine interferentnih pobudjenja uvešćemo sledeće pojmove:

- srednji kvadrat gustine struje interferentnih pobudjenja:

$$\delta_k^2 = \langle j \frac{2}{k} \rangle = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dE \operatorname{Re} \Gamma_k(E) \left( e \frac{E}{\theta} - 1 \right)^{-1} \quad (\text{II 3.3})$$

- transportnu funkciju

$$\tau(a - b) = \frac{1}{N} \sum_k \delta_k^2 e^{ik(a-b)} \quad (\text{II 3.4})$$

i srednji kvadrat struje na jedan čvor rešetke:

$$\delta^2 = \frac{1}{N} \sum_k \delta_k^2 \quad (\text{II 3.5})$$

$$\text{Očigledno je: } \delta^2 = \tau(0)$$

Prvo ćemo potražiti funkciju  $\delta_k^2$ . Na osnovu (II 3.1) i (II 3.2) možemo pisati:

$$\Gamma_k(E) = \frac{i}{2\pi} \frac{C_k(\theta)}{2E_k} \left\{ \frac{1}{E-E_k+i\delta} - \frac{1}{E+E_k+i\delta} \right\} \quad (\text{II 3.6})$$

$$\delta \rightarrow 0$$

i

$$\operatorname{Re} \Gamma_k(E) = \frac{C_k(\theta)}{4E_k} [\delta(E-E_k) - \delta(E+E_k)] \quad (\text{II 3.7})$$

pa zamenom (II 3.7) u (II 3.3) dobijamo:

$$\delta_k^2 = \frac{\sqrt{3}}{18} \frac{n^4 \mu_0^3}{m^3} \frac{e^{-\frac{\Delta}{\theta}}}{\theta} K \cotg h \frac{n^2 \mu_0 k}{2\sqrt{3m\theta}} \quad (\text{II 3.8})$$

Za visoke temperature je  $\frac{\hbar^2 \mu_0 k}{2\sqrt{3m}\theta} \ll 1$ , pa ako iskoristimo razvoj:

$$\cotgh \epsilon \approx \frac{1}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{3} \quad (\text{II 3.9})$$

$$|\epsilon| \ll 1$$

formulu (II 3.8) možemo napisati kao:

$$\delta_k^2 = \delta^2 + \zeta(\theta) K^2 \quad (\text{II 3.10})$$

gde je:

$$\delta^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{\hbar \mu_0}{m} \right)^2 e^{-\frac{\Delta}{\theta}} \quad (\text{II 3.11})$$

i poklapa se sa srednjim kvadratom gustine struje (II 3.5) i

$$\zeta(\theta) = \frac{1}{27} \left( \frac{\hbar \mu_0}{m} \right)^4 \left( \frac{\hbar}{2\theta} \right)^2 e^{-\frac{\Delta}{\theta}} \quad (\text{II 3.12})$$

Ako diferenciramo funkciju  $C_k(\theta)$  po temperaturi onda dolazimo do zaključka da Grinova funkcija  $\Gamma_k(E)$ ima maksimum na temperaturi

$$\theta = \Delta \quad (\text{II 3.13})$$

a to znači da na ovoj temperaturi interferentna imaju maksimalni intenzitet. Treba ipak naglasiti da  $\theta = \Delta$  odgovara temperaturama od oko  $40.000^\circ\text{K}$  i da na takvoj temperaturi ne postoji nikakva kristalna rešetka. To znači da praktično intenzitet interferentnih pobudjenja raste sa porastom temperature, ali nikad ne dostiže svoj maksimum.

U zavisnosti od temperature srednja kvadratna brzina struje koju definišemo kao koren iz funkcije  $\delta_k^2$

$$\bar{v} = \sqrt{\delta^2} \quad (II\ 3.14)$$

menja se od  $10 \text{ \AA u sek}$  za sobne temperature do  $10 \text{ m u sek.}$  za temperature od oko  $1000^\circ\text{K}$ . Prema tome srednja kvadratna brzina interferentnih pobudjenja izazvanih eksitonima veoma je mala i ovo je posledica veoma velikog eksitonskog energetskog procepa koji odgovara temperaturama od  $40000^\circ\text{K}$ .

Na kraju ispitaćemo osobine transportne funkcije  $\tau(a-b)$  koja je data formulom (II 3.4). Ako u formuli (II 3.4) predjemo od sume na integral i iskoristimo približan izraz za  $\delta_k^2$  formula (II 3.11) za transportnu funkciju  $\tau(a-b)$  dobijamo da od rastojanja  $a-b=\ell$  zavisi na sledeći način:

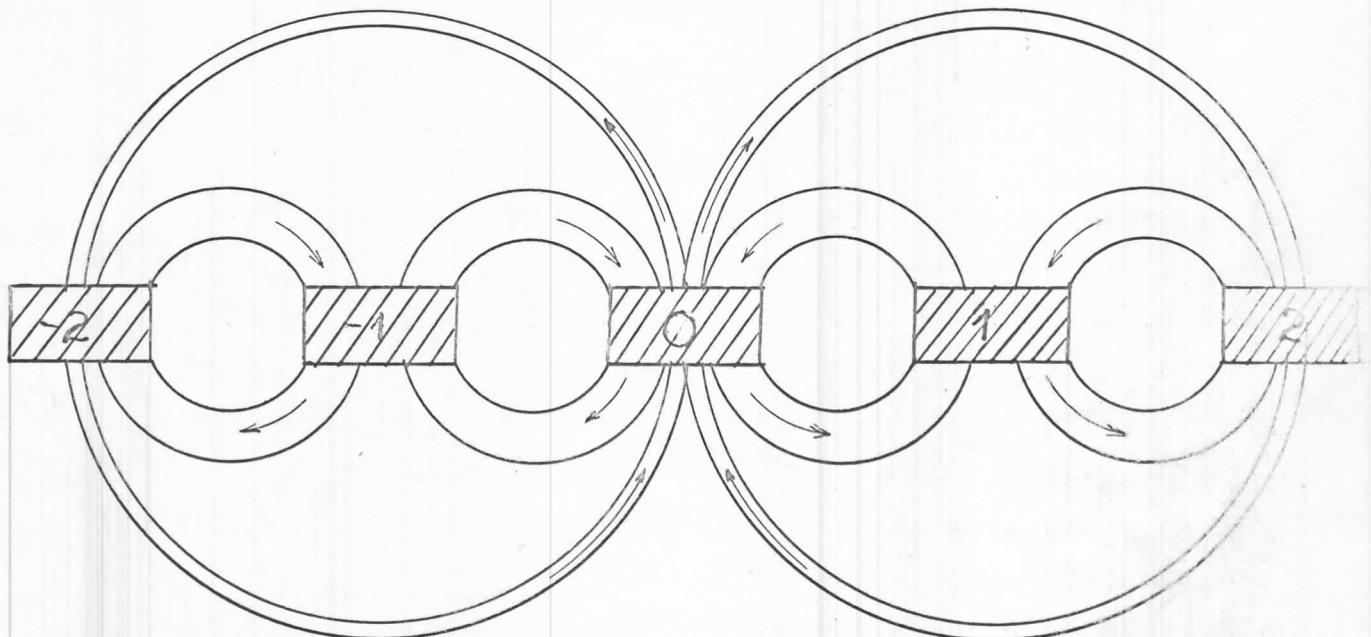
$$\tau(a-b) \equiv \tau_\ell = \left[ \delta^2 + \frac{1}{3} \mu_0^2 \zeta(\theta) \right] \delta\ell, 0 + \frac{2 \zeta(\theta)}{\ell^2} (\cos \mu_0 \ell - \frac{\sin \mu_0 \ell}{\mu_0}) \quad (II\ 3.15)$$

Pošto je  $a-b=\ell=a$ , gde je  $\ell_0$  - ceo broj i  $\mu_0$  za  $\ell \neq 0$  dobijamo deo transportne funkcije koji je odgovoran za "prebacivanje" struje sa čvora na čvor.

$$\tau_\ell (\ell \neq 0) = (-1)^{\ell_0} \frac{2 \zeta(\theta)}{\ell^2} \quad (II\ 3.16)$$

kao što vidimo transport eksitacija sa čvora na čvor obrnuto je proporcionalna kvadratu rastojanja  $\ell$  izmedju čvora. Takodje se vidi da smer transporta zavisi od toga koji su čvorovi u pitanju. Za dati čvor, recimo sa indeksom nula, broj  $\ell_0$  za njegove najbliže susede je  $\pm 1$ , pa na osnovu (II 3.16) sledi da  $\tau_\ell$  ima negativan znak. Ovo znači da se pobudjenja transportuju ka uočenom čvoru sa njegovih najbližih suseda. Za sledeće susede  $\ell_0 = \pm 2$ ,  $\tau_\ell$  ima pozitivan

znak i transport se vrši od datog čvora ka njegovim sledećim daljim susedima. Ovaj proces dosta liči na punjenje i pražnjenje rezervoara pri čemu je proces punjenja intenzivniji od procesa pražnjenja, jer on počinje sa minimalnih rastojanja kada je na osnovu formule (II 3.16) transport najveći. Naravno, zbog translacione invarijantnosti kristalnih osobina, očigledno je da ne dolazi do nagomilavanja energije na jednom čvoru. To se jasno vidi iz priložene slike na slici 2.



Slika 2. Šematski prikaz transporta interferentnih pobuđenja

Treba medjutim, naglasiti da karakteristike transporta zavise i od temperature i od strukture kristala, tako da i najmanje narušenje bilo simetrije, bilo toplotne ravnoteže (jedan deo lanca molekula se više zagreje od ostalih delova), može da dovede do nagomilavanja energije. Pošto su pro-

cesi transporta struje veoma spori (videli smo da je na sobnim temperaturama brzina reda veličine  $10^{-7}$  sm/sek) potpuno je jasno da do narušenja termodinamičke ravnoteže svakako mora doći, jer je u praksi nemoguće održati sistem u punoj topotnoj izolaciji za tako duge vremenske intervale (na osnovu veličine srednje kvadratne brzine struja interferentnih pobudjenja se transportuje na rastojanje od 1 cm za nekoliko meseci do godinu dana).

#### 4. Mogućnosti primene rezultata

Rezultati istraživanja koja su ovde izvršena pokazuju da u jednodimenzionalnim strukturama i za elementarne eksitacije sa energetskim procepm narušenje jednačine kontinuiteta dovodi do pojave novih kvazičestica, koje smo nazvali interferentna pobudjenja. Ova pobudjenja javljaju se kao rezultat interferencije dve struje i primarnih pobudjenja. Interferentna pobudjenja imaju linearan zakon disperzije, i na sobnim temperaturama, ako su eksitoni uzročnici njihovog nastajanja, njihov transport kroz kristal odvija se veoma sporo - transportuju se na 1 cm. rastojanja za vreme od oko godinu dana.

Sen-Djerđji je u svojoj knjizi "Bioenergetika" [4] naveo dosta dosta ideja i opravdanih razloga da se u te ideje veruje, o tome da eksitonski mehanizam igra veoma značajnu ulogu u procesima koji se odigravaju u biološkim sistemima, tj. u živoj materiji. On je takođe isticao da se prenos impuls, energija, informacije itd. vrši po šavovima, tj. po jednodimenzionalnim lancima.

Rezultati do kojih smo ovde došli u neku ruku mogu da posluže kao teorijsko objašnjenje za ideje Sen-Djerđdija, jer kao što smo videli eksitoni i jednodimenzionalne strukture u izvedenim računima igraju specifičnu ulogu. Jedino u ovim situacijama dolazi do pojave novih pobudjenja, što znači da se ovde vrše bitne kvalitativne promene u posmatranom

sistemu, koje bismo, govoreći jezikom biologije i filozofije, mogli nazvati dijalektičkim skokovima. Ovakvi skokovi, kao što znamo, fundamentalni su u razvoju žive materije.

Mada rezultati pokazuju da u trodimenzionalnim strukturama ne dolazi do stvaranja interferentnih pobudjenja treba istaći da je ovaj rezultat dobijen uz zanemarivanje činjenice da u molekularnim kristalima postoji jaka anizotropija i privilegovani pravci, koji se javljaju kao rezultat činjenice da dipol-dipolna interakcija ne zavisi samo od rastojanja izmedju dipola, već i od uglova koje dipoli izmedju sebe zaklapaju. Potpuno je očigledno da bi strožiji račun, u kome bi bili uzeti u obzir pomenuti privilegovani pravci (koji predstavljaju jednodimenzionalne strukture) pokazao da duž ovih pravaca takodje dolazi do stvaranja interferentnih pobudjenja.

Sama brzina transporta pokazuje da ukoliko interferentno pobudjenje uopšte igraju nekaku ulogu u biološkim procesima, onda se ta uloga odnosi isključivo na genatske poruke, rast, razvoj i deobu ćelija, jer su ovo dugotrajni procesi. Na osnovu istog kriterijuma možemo reći da interferentna pobudjenja sigurno ne mogu da budu odgovorna za nervne impulse i biološke struje, jer je brzina ovih struja i impulsa daleko veća od one koja karakteriše interferentna pobudjenja.

Treba takodje istaći da brzina transporta interferentnih pobudjenja bitno zavisi od toga koliki je energetski procep  $\Delta$  primarnih eksitacija. Za eksitone veličina  $\Delta$  je oko 40.000 Boltmanovih konstanti i ovo za sobne temperature dovodi do inzvaredno malih malih brzina transporta. Ako bi smo interferentna pobudjenja dobili kao rezultat interakcije nekih eksitacija čiji je energetski procep za oko 100 puta manji od eksitonskog, brzine transporta interferentnih pobudjenja narasle bi do  $10^6$  cm/sek, što odgovara brzinama zvučnih talasa u tečnosti. Na osnovu ovoga možemo zaključiti da

ukoliko su interferentna pobudjenja izazvana angularnim ili optičkim fononima (njihov energetski procep je oko 100 puta manji od eksitonskog), onda ona mogu da učestvuju u i bržim biološkim procesima, no što su genetski.

Na kraju treba uočiti da se izazivači interferentnih pobudjenja pojavljuju uglavnom u sistemima sa dipol-dipolnim interakcijama (eksiton, angularni fononi, dipolni magnoni), pa na osnovu ovoga može se verovati da dipoli igraju nekakvu specifičnu ulogu u biološkim procesima. I ovaj zaključak je u skladu sa hipotezama da je voda izvor života i da su u njoj nastali prvi živi organizmi, jer kao što znamo, molekuli vode su veoma izraziti električni dipoli.

Z A K L J U Č A K

Rezultati diplomskog rada mogu se remizirati na sledeći način:

- a) statistički ekvivalent jednačine kontinuiteta naorušava se za kvazičestice, koje u ovom spektru imaju energetski procep. Ovakve kvazičestice pojavljuju se uglavnom u strukturama sa dipol-dipolnim interakcijama i to su Frenkelovi eksitonii, angularni fononi i dipolni magnoni.
- b) Za sistem Frenkelovih eksitona pokazano je da oni mehanizmom interakcije struja-struja izazivaju pojavu novih kvazičestica-interferentnih pobudjenja. Ova pobudjenja imaju linearan zakon disperzije i potome su slični akustičkim fononima i fotonima.
- c) Ako su eksitonii uzročnik pojave interferentnih pobudjenja, onda je transport ovih pobudjenja kroz kristal veoma spor proces što bi značilo da interferentno pobudjenje veoma dugo kruži oko molekula na kome je nastalo dok ne preskoči na sledeći čvor.
- d) Ovako mala brzina transporta interferentnih pobudjenja uslovljava praktičnu nemogućnost toplotne izolacije sistema. S druge strane, narušenje toplotne izolacije izaziva bitna narušenja u transportu tako da postoji mogućnost nagomilavanja energije na pojediniim molekulima. Ovo nagomilavanje može da dovede do kvalitativnih transformacija samog molekula.
- e) Predpostavlja se da bi gore opisani efekti mogli da posluže pri razjašnjavanju nekih bioloških transformacija koje su, s obzirom na male brzine prenosa i transformisanja, genetskog i razvojnog charaktera.

- f) Brzina transporta interferentnih pobudjenja bitno zavisi od veličine energetskog procepa, kvazičestica koje se javljaju kao njihov izazivač. Zbog velikog energetskog procepa eksitona interferentna pobudjenja koja oni izazivaju imaju izvanredno male brzine transporta. Ako bi se kao izazivač interferentnih pobudjenja pojavili angularni ili optički fononi onda bi brzina transporta ovakvih interferentnih pobudjenja dostigla brzinu prostiranja zvuka u tečnostima.



## L I T E R A T U R A

1. S.V.Tjablikov "Metodi kvantne teorije magnetizma",  
"Nauka", Moskva (1975.) (na ruskom).
2. L.D.Landau i E.M.Lifšic "Statistička fizika",  
"Naučna knjiga", Beograd (1960.).
3. Č.Kitel "Uvod u fiziku čvrstog tela"  
GIFML, Moskva (1963.) (na ruskom).
4. A. Sent-Džopdži "Bioenergetika",  
"Nauka", Moskva (1965.) (na ruskom)