

Univerzitet u Novom Sadu
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Diplomski rad

KINEMATIČKA INTERAKCIJA EKSITONA I
DOPUNSKI NIVOI

Radaković M Milovan

Novi Sad 1977

Zahvaljujem se na velikoj pomoći, profesoru dr Bratislavu
Tošiću koju mi je pružio pri izradi ovog diplomskog rada

Uvod

Cilj ovog diplomskog rada je da ispita mogućnost pojave dopunskih optičkih pobuđenja u sistemu Frenkelovih eksitona pri čemu bi ova dopunska pobuđenja bila rezultat kinematičke interakcije eksitona. Ovakvu mogućnost je predviđaj za spinske talase Dajson pa je logično očekivati da do istog efekta dođe i u sistemu Frenkelovih eksitona. U tom cilju u radu će biti korišćen metod dvovremenskih funkcija Grina koji se obično koristi u ovakvim slučajevima. Dekuplovanje viših funkcija Grina u bozonskoj reprezentaciji biće vršeno na račun Vikove teoreme, pri čemu će se sparivanje vršiti po istim i po različitim trenutcima vremena.



I G L a v a

Teorija eksitona

f 1. Eksitoni Frenkel - Van - Mota

Pri optičkom pobudivanju kristala, javljaju se pobuđena stanja molekula (atoma) u čvorovima kristalne rešetke. Prve teorije ovih pobuđenja dali su Frenkel i Pojersl za molekularne kristale a Vanje - Mot za polu provodnike. Ovakva pobuđenja se nazivaju eksiton. Eksiton koji se javlja u molekularnim kristalima se nazivaju: Frenkelovi eksiton, a pobuđenja koja se javlja u poluprovodnicima se nazivaju: eksiton tipa Vanje - Mota. Pomenuti tipovi eksitona se razlikuju po svojim dimenzijama to jest po veličini radijusa, ukoliko se pobuđeni molekuli u kristalu shvate kao čestice sfernog oblika. Energija pobudivanja oba tipa eksitona je istog reda veličine i ona iznosi 3-5 eV. Veličina radijusa Frenkelovih eksitonova iznosi nekoliko angstrema dok radijusi eksitonata tipa Vanje - Mota mogu imati vrednosti i do nekoliko mikrona.

Eksiton tipa Vanje - Mota nastaju na taj način što spoyašnje elektro-magnetsko zračenje daje elektronu iz popunjene elektronske zone dovoljnu energiju da on može da pređe u provodnu zonu. U tom slučaju nam u popunjenoj zoni ostaje šupljina koja se ponaša kao pozitivno nanelektrisanje. Sada se između elektrona iz provodne zone i šupljine iz popunjene uspostavlja privlačno kulanova sila. U koliko je ova sila jaka tada u provodniku ne teče struja i taj novonastali sistem šupljina-elektron se ponaša kao neutralna celina. Ta neutralna celina se pomera kroz poluprovodnike slično nekom talasu.

i taj talas se naziva eksiton tipa Vanje-Moto. U slučaju slabe kulanove sile dolazi do raspada ovoga sistema šupljina-elektron i tada obe čestice postaju nezavisne i u tom slučaju se javlja mogućnost provođenja električne struje, i to u provodnoj zoni struje elektrona a u popunjenoj struja šupljina.

Ovaj kompleks elektron-šupljina se takođe stvara i kod molekularnih kristala, ali taj sistem se ne pomera u kristalu već on ostaje vezan za sam molekul. Takvi tipovi eksitona se nazivaju Frenkelovi eksitoni a kako se ne pomeraju van dimenzija molekula, oni zbog toga su malog radiusa. Pri pobuđenju jednog molekula u kristalu on svojom novostvorenom energijom deluje na ostale molekule u kristalu i to izaziva promenu matričnih elemenata interakcije, i eksitacija prelazi na sledeći molekul i posle izvesnog vremena se prenese na čitav kristal pri čemu se taj prenos može posmatrati kao talas koji se naziva Frenkelov eksiton.

Kako Frenkelovi eksitoni nastaju u molekularnim kristalima, a kod njih su izraženi dipoli, tada se između tih dipola uspostavlja interakcija dipol-dipolnog tipa. Potencijal te interakcije između dipola ima oblik:

$$V_{\vec{n}\vec{m}} = \frac{e^2 \vec{r}_n \vec{r}_m}{|\vec{n} - \vec{m}|^3} - 3e^2 \frac{[\vec{r}_n \cdot (\vec{n} - \vec{m})][\vec{r}_m \cdot (\vec{n} - \vec{m})]}{|\vec{n} - \vec{m}|^5} \quad \dots \dots \quad (I.1.1)$$

gde je e - naelektrisanje elektrona, \vec{n} , \vec{m} - vektori kristalne rešetke a \vec{r}_n , \vec{r}_m skup unutrašnjih koordinata dipola molekula na mestu \vec{n} , \vec{m} u kristalnoj rešetki. Izraz za potencijal dipol-dipolne interakcije se sastoji iz dva člana

koji opodaju sa trećim stepenom rastojanja. Prvi deo izraza (I.1) naziva se analitički deo dipol-dipolne interakcije i zavisi od intenziteta rastojanja izmedu molekula. Drugi deo se naziva neanalitički i pored toga što zavisi od intenziteta rastojanja izmedu molekula, zavisi od uglova koji zaklapaju \vec{r}_n , \vec{r}_m vektori dipola sa rastojanjem \vec{n}, \vec{m} . Često se drugi deo izostavlja i eksiton dobijeni u takvoj aproksimaciji se nazivaju mehanički eksiton.

Pri interakciji svetlosti i molekula mogu se javiti dva efekta: u zavisnosti od energije svetlosti ona može interagovati sa elektronom i sa molekulom kristalne rešetke. U prvom slučaju nastaju eksiton Frenkela, a u drugom slučaju se efekt sastoji u promeni unutrašnjih molekulskih vibracija i one se događaju u slučaju da je pobudivačka svetlost infracrvena. U tom slučaju nastaju kolektivne eksitacije koji se takođe nazivaju eksiton Frenkela a češće vibroni. Mi će mo doye proučavat najviše Frenkelove eksitone.

§ 2. Harmonijski spektar Frenkelovih eksitona

Hamiltonijan molekularnog kristala će mo posmatrati kao hamiltonijan sa dvočestičnim fermionskim interakcijama koji u reprezentaciji druge kvantizacije ima oblik:

$$H = \sum_{\vec{n}f} E_{\vec{n}f} \hat{a}_{\vec{n}f}^{\dagger} a_{\vec{n}f} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} V_{\vec{n}\vec{m}}(f_1 f_2; f_3 f_4) \cdot (\hat{a}_{\vec{n}f_1}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{n}f_2}^{\dagger} a_{\vec{m}f_3} a_{\vec{m}f_4})$$

(I 2.1)

gde su $\vec{n} \vec{m}$ čorovi rešetke, f, f_1, f_2, f_3, f_4 su skupovi kvantnih brojeva koji karakterišu stanje elektrona, $E_{\vec{n}f}$ su energije elektrona u stanju f , a $V_{\vec{n}\vec{m}}(f_1 f_2 f_3 f_4)$ matrični elementi operatora dipol-dipolne interakcije po svojstvenim stanjima elektrona u izolovanom molekulu. Operator $\hat{a}_{\vec{n}f}^{\dagger}$ i $a_{\vec{n}f}$ kreiraju odnosno uništavaju elektron u čvoru \vec{n} u stanju f .

Svojstveni problem molekula možemo napisati:

$$H_{\vec{n}} \hat{\psi}_{\vec{n}}^{\dagger} = E_{\vec{n}} \hat{\psi}_{\vec{n}}^{\dagger} \quad (I 2.2)$$

gde smo sa $H_{\vec{n}}$ označili hamiltonijan molekula na mestu \vec{n} . $E_{\vec{n}}$ predstavlja sopstvene vrednosti energije molekula a $\hat{\psi}_{\vec{n}}^{\dagger}$ svojstvene funkcije molekula. Matrični elementi interakcije imaju oblik:

$$V_{\vec{n}\vec{m}}(f_1 f_2; f_3 f_4) = \int \hat{\psi}_{\vec{n}f_1}^{\dagger} \hat{\psi}_{\vec{n}f_2}^{\dagger} V_{\vec{n}\vec{m}} \hat{\psi}_{\vec{m}f_3} \hat{\psi}_{\vec{m}f_4} d\vec{v}_n d\vec{v}_m \quad (I 2.3)$$

gde je $d\vec{v}_n$ i $d\vec{v}_m$ predstavljaju elemente zapremine prostora kristala koji zauzimaju ta dva molekula.

Ako na molekulski kristal delujemo monohromatskim.

zraćenjem tada se u pobuđenom molekulu elektron može naci u dva energetska stanja, pobuđenom i osnovnom koje ćemo obeležiti respektivno sa „f“ i „o“. Tako posmatranje procesa pobuđivanja se naziva Šema sa dva nivoa. Ova Šema je takođe opravdana oko se ostali energetski nivoi jako mnogo razlikuju od nivoa f.

Hamiltonijon koji smo napred dobili nije zgodan za razmatranje jer eksiton nije pobuđen elektron već on u stvari predstavlja kvant pobuđenja molekula kristala. zbog svega toga se umesto Fermi operatora uvide Pauli operatori

$$\hat{P}_n^{\dagger} = \hat{a}_n^{\dagger} a_n \quad P_n^{\dagger} = a_n^{\dagger} a_n \quad (I 2.4)$$

Fizički smisao Pauli operatora je sledeći: \hat{P}_n^{\dagger} opisuje proces u kome je nestao jedan elektron u osnovnom stanju, a radio se u pobuđenom f. Prema tome to može značiti da operator \hat{P}_n^{\dagger} stvara kvant pobuđenja čija je energija $E_{nf} - E_n$. Operator P_n^{\dagger} opisuje proces u kom nestaje elektron u pobuđenom stanju f a stvara se u osnovnom stanju o. Zbog toga se ovaj operator naziva: operator anihilacije i on uništava kvant pobuđenja sa energijom $E_{nf} - E_n$.

Napomenuli smo ranije da ćemo posmatrati Šemu sa dva nivoa, tada zbog Paulijevog principa za svaki čvor rešetke kompletan Fermionski prostor ima oblik:

$$|10_0 0f\rangle > |10_1 1f\rangle \quad (\text{I 2.5})$$

$$|10_1 0f\rangle > |10_0 1f\rangle \quad (\text{I 2.6})$$

I uzimajući u obzir definiciju Pauli operatora vidimo da u (I 2.5) su Pauli operatori ravnici u tom podprostoru. U podprostoru (I 2.6) su oni različiti od nule i ako deluju pauli operatori na funkciju stanja iz tog podprostora uvek ćemo dobiti ponovo funkciju iz tog podprostora. Takođe u tom podprostoru važe relacije.

$$\hat{a}_{\vec{n}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{n}} + \hat{a}_{\vec{n}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{n}} = 1 \quad (\text{I 2.7})$$

Ako se uzme u obzir jednačina (I 2.4) prelaska Fermi operatora na Pauli operatore i kombinovanjem (I 2.7) dobijamo komutacione relacije za Pauli operatore

$$[P_{\vec{n}}, P_{\vec{m}}^{\dagger}] = (1 - 2 P_{\vec{n}}^{\dagger} P_{\vec{m}}) \delta_{\vec{n}\vec{m}}$$

$$[P_{\vec{n}}, P_{\vec{m}}] = [P_{\vec{n}}^{\dagger}, P_{\vec{m}}^{\dagger}] = 0 \quad m \neq n$$

$$P_{\vec{n}}^2 = P_{\vec{n}}^{\dagger 2} = 0 \quad (\text{I 2.8})$$

$$P_{\vec{n}}^{\dagger} P_{\vec{n}} = \hat{a}_{\vec{n}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{n}} = 0 \text{ ili } 1$$

Operatori $P_{\vec{n}}^{\dagger}$, $P_{\vec{n}}$ nemaju Fermionske komutacione relacije a ni bozonske i sa statističke tačke gledišta predstavljaju sredinu između fermi i boze operatora i nazivaju se pauli operatori.

Pri posmatranju ćeme sa dva nivoa, indeksi $f-f_1, f_2, f_3, f_4$ mogu imati samo dve vrednosti ($0, f$), koristeći definiciju Pauli operatora i komutacione relacije (I 2.8)

dobijamo hamiltonijan sistema u paulinskoj reprezentaciji ion imo sledeći oblik:

$$H = H_0 + \Delta \sum_{\vec{n}} P_{\vec{n}}^+ P_{\vec{n}} + \sum_{\vec{n} \vec{m}} \alpha' \vec{n} \vec{m} P_{\vec{n}}^+ P_{\vec{m}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n} \vec{m}} \gamma \vec{n} \vec{m} (P_{\vec{n}}^+ P_{\vec{m}}^+ + P_{\vec{m}} P_{\vec{n}}) + \\ + \sum_{\vec{n} \vec{m}} \beta \vec{n} \vec{m} P_{\vec{n}}^+ P_{\vec{m}}^+ P_{\vec{m}} P_{\vec{n}}$$

(I 2.9)

gde su:

$$H_0 = N [E_0 + \frac{1}{2} V_0 (00; 00)]$$

$$\Delta = E_{\vec{n}f} - E_{\vec{n}0} - V_0 (00; 00) + \frac{1}{2} V_0 (f0; of) + \frac{1}{2} V_0 (of; fo)$$

$$2\alpha' \vec{n} \vec{m} = V_{\vec{n} \vec{m}} (ff; 00) + V_{\vec{n} \vec{m}} (00; ff)$$

$$\gamma \vec{n} \vec{m} = V_{\vec{n} \vec{m}} (ff; 00) = V_{\vec{n} \vec{m}} (00; ff)$$

$$2\beta \vec{n} \vec{m} = V_{\vec{n} \vec{m}} (ff; ff) + V_{\vec{n} \vec{m}} (00; 00) - V_{\vec{n} \vec{m}} (f0; of) - V_{\vec{n} \vec{m}} (of; fo)$$

$$V_0 (f_1, f_2, f_3, f_4) = \sum_n V_{\vec{n} \vec{m}} (f_1, f_2, f_3, f_4)$$

Ovde je predpostavljeno da se kristal sastoji iz istog tipa molekula pa se i energija $E_{\vec{n}f}$, $E_{\vec{n}0}$ ne razlikuju za razlike čvorove kristalnih rešetki. Takođe je predpostavljeno da kristal ima centar inverzije i da se on poklapa sa centrom inverzije izdovlanog molekula i zbog toga su matrični elementi tipa:

$$V_{\vec{n} \vec{m}} (f0; 00) \quad V_{\vec{n} \vec{m}} (of; 00)$$

$$V_{\vec{n} \vec{m}} (00; of) \quad V_{\vec{n} \vec{m}} (ff; f0)$$

$$V_{\vec{n} \vec{m}} (ff; of) \quad V_{\vec{n} \vec{m}} (f0; ff)$$

$$V_{\vec{n} \vec{m}} (of; ff) \quad V_{\vec{n} \vec{m}} (00; fo) = 0$$

Pri prelasku sa fermi operatora na pauli operatore veliki deo fermionskih interakcija je uključen u kvadratni član paulinskih operatora, to znači da smo u tom slučaju uključili interakciju čestica u hamiltonijan gasa kvazi-čestica. Autor ove ideje Bogolyubov i njegova fizička stvarnost je zamena sistema jako interagujucih čestica sistemom slabo interagujucih kvazi-čestica.

§ 3. Pauli operatori izraženi preko boze operatora

Pri izražavanju pauli operatora preko boze operatora čine se nekontrolisane greške jer pauli operatori mogu da imaju samo dve vrednosti 0 ili 1, dok boze operatori mogu imati bilo koje celobrojne vrednosti 0, 1, 2, 3, ... Zbog toga možemo reći da je ta zamena približna a greška će biti utoliko manja ukoliko je broj bozona bliži jedinici. Tokođe se može reći da pri tome prelazu da bilo kom broju bozona broj pauliona mora biti 0 ili 1. Some formule za taj prelaz su izražene jednačinama:

$$P_n = \left(\sum_{v=0}^{\infty} a_v B_n^\dagger B_n \right)^{\frac{1}{2}} B_n \quad P_n^\dagger = B_n^\dagger \left(\sum_{v=0}^{\infty} a_v B_n^\dagger B_n \right)^{\frac{1}{2}} \quad (I 3.1)$$

gde je a_v - stvarni koeficijent o B_n^\dagger, B_n boze operatori. Kako operatori paulija moraju zadovoljavati komutacione relacije:

$$P_n P_n^\dagger + P_n^\dagger P_n = 1 \quad (I 3.2)$$

! ako se to iskoristi u formuli (I 3.1) uzimajući da je

$$B_n^{v+1} B_n^v = (\hat{N}_n - v) B_n^\dagger B_n^v \quad \hat{N}_n = B_n^\dagger B_n$$

tada jednačina (I 3.1) ima oblik

$$P_n P_n^\dagger + P_n^\dagger P_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_v [2 B_n^{v+1} B_n^v + (v+1) B_n^\dagger B_n^v] = 1$$

Iz te jednačine se dobija da je koeficijent a_v

$$a_v = \frac{-2}{v+1} a_{v-1} \quad i \quad a_0 = 1$$

$$a_v = \frac{(-2)^v}{(1+v)!} \quad (I\ 3.3.)$$

ako se sada vrednost koeficenta a_v zameni u (I 3.1) dobicemo sledeće jednačine

$$P_n = \left[\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-2)^v}{(1+v)!} B_n^{+v} B_n^v \right]^{\frac{1}{2}} B_n \quad (I\ 3.4)$$

$$P_n^+ = B_n^+ \left[\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-2)^v}{(1+v)!} B_n^{+v} B_n^v \right]^{\frac{1}{2}}$$

operator broja paulina se može izraziti na sledeći način

$$\hat{L}_n = P_n^+ P_n = \hat{N}_n + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-2)^v}{(1+v)!} \hat{N}_n (\hat{N}_n - 1) \dots (\hat{N}_n - v) \quad (I\ 3.5)$$

gde stanja sa bilo kojim parnim brojem bozona odgovara $\hat{L}_n = 0$
a sa neparnim brojem bozona $\hat{L}_n = 1$. Iz formule (I 3.4) sledi
da je

$$P_n^2 = P_n^{+2} = 0 \quad i \text{ nakon zamene}$$

$$P_n^2 = \left(\sum_{v=0}^{\infty} a_v B_n^{+v} B_n^v \right)^{\frac{1}{2}} B_n \left(\sum_{v=0}^{\infty} a_v B_n^{+v} B_n^v \right)^{\frac{1}{2}} B_n = 0$$

Takođe se slično dobija da je $P_n^2 = 0$ ako operator

$\left(\sum_{v=0}^{\infty} a_v B_n^{+v} B_n^v \right)^{\frac{1}{2}}$ deluje na stanje sa nepoznatim brojem

bozona dobitemo kao rezultat nulu.

Ako u jednačinu (I 3.3) uzmemos samo član sa $v=0$ dobijamo da je:

$$P_n = B_n \quad \hat{L}_n = \hat{N}_n$$

za $v=1$

$$P_n = \sqrt{1 - \hat{N}_n} \quad B_n \quad P_n^\dagger = B_n^\dagger \sqrt{1 - \hat{N}_n}$$

a to je poznata relacija Holstejn- Primakova. Ako se iskoriste komutacione relacije za pauli operatore tada imamo:

$$P_n P_n^\dagger + P_n^\dagger P_n = 1 - \hat{N}_n (\hat{N}_n - 1) \quad (I 3.6)$$

Desna strana jednačine (I 3.6) će biti jednaka jedinici samo ako je broj bozona ili nula ili jedan. Zato ako se u kristalu javja više pobudenih stanja javljaju se i greške.

U sumi (I 3.4) članovi reda $v \geq 1$ se mogu smatrati kao operatori čija je vrednost mala i čija vrednost sa povećanjem v opada. Zbog toga se i kvadratna suma može predstaviti ovim redom

$$\sum b_n B_n^\dagger B_n$$

Za određivanje koeficijenta b_v treba biti zadovoljena jednačina

$$\sum_{v=0}^{\infty} [a_v N_n (N_n - 1) \cdots (N_n - v + 1)]^{\frac{1}{2}} = \sum_{v=0}^{\infty} b_v N_n (N_n - 1) \cdots (N_n - v + 1)$$



Ako u tu jednačinu stavimo da je $N_n=0$, koristeći (I 3.3) dobijamo:

$$b_0=1 \quad N_n=1 \quad b_1=-1 \quad N_n=2 \quad b_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

ako poznajemo koeficijente b_v tada relaciju (I 3.1.) možemo napisati u sledećem obliku

$$P_n = \left[\sum_{v=0}^{\infty} b_v B_n^{+v} B_n^v \right]^{\frac{1}{2}} B_n \quad P_n^+ = B_n^+ \left[\sum_{v=0}^{\infty} b_v B_n^{+v} B_n^v \right]^{\frac{1}{2}} \quad (I 3.7)$$

ako u jednačini (I 3.7) ograničimo sumu sa $v=0, v=1$ dobijemo

$$P_n = (1 - \hat{N}_n) \cdot B_n \quad \tilde{P}_n = B_n^+ (1 - \hat{N}_n)$$

što se razlikuje od relacije Holštajn - Primakova

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2} \hat{N}_n\right) B_n \quad \tilde{P}_n = B_n^+ \left(1 - \frac{1}{2} \hat{N}_n\right)$$

pri zameni pauli operatora sa boze operatorima u hamiltonianu će se javiti greške.

§ 4. Kinematička i dinamička interakcija eksitona

U dnjem razmatranju ćemo koristiti hamiltonijan eksitonskog sistema u obliku:

$$H = \sum \Delta P_n^\dagger P_n + \sum_{nm} \alpha_{nm} P_n^\dagger P_m + \sum_{nm} \beta_{nm} P_n^\dagger P_n P_m^\dagger P_m \quad (I 4 1)$$

U ovom hamiltonijanu ako se pauli operatori zamene operatorima boze javić će se greške kako smo već ranije rekli. Pri toj zameni takođe možemo govoriti o kinematičkom i dinamičkom dejstvu eksitona. Tada kvadratni deo hamiltonijana sadrži kvadratni deo po boze operatorima, i još članove koji su četvrtog, šestog, osmog i viših redova po boze operatora. Svi članovi četvrtog, šestog, osmog i viših redova čine hamiltonijan kinematičke interakcije i on se pojavljuje stoga jer se komutacione relacije za pauli operatore i boze operatore razlikuju. Ako u hamiltonijanu koji sadrži proizvod četiri pauli operatora zamenimo pauli operatore boze operatorima ima dobijamo jedan član četvrtog reda po boze operatorima i član šestog, osmog i viših redova po boze operatorima. Članovi četvrtog reda po boze operatorima je hamiltonijan dinamičke interakcije a ostali članovi šestog osmog i viših redova su članovi dinamičko-kinematičke interakcije. Mi ćemo to ovde detaljno izložiti sa tačnošću do članova šestog reda.

Ako se koriste formule (I 3.7) za prelaz pauli operatora ka boze operatorima tada je:

$$P_n = B_n - B_n^+ B_n B_n + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) B_n^+ B_n^+ B_n B_n + \dots$$

$$P_m = B_m - B_m^+ B_m B_m + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) B_m^+ B_m^+ B_m B_m + \dots$$

$$P_n^+ = B_n^+ - B_n^+ B_n^+ B_n + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) B_n^+ B_n^+ B_n B_n + \dots$$

$$P^+ P = B^+ B - B^+ B^+ BB + \frac{2}{3} B^+ B^+ B^+ BBB$$

Ako ove formule se zamene u hamiltonijan (I4.1)

$$\begin{aligned} H = & \sum_n \Delta B_n^+ B_n - \sum_n \Delta B_n^+ B_n B_n B_n + \frac{2}{3} \sum_{nm} B_n^+ B_n^+ B_n^+ B_n B_n + \\ & + \sum_{nm} \alpha_{nm} B_n^+ B_m - \sum_{nm} \alpha_{nm} B_n^+ B_m^+ B_m B_n + \sum_{nm} \alpha_{nm} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) B_n^+ B_m^+ B_m^+ B_m B_m B_m \\ & - \sum_{nm} \alpha_{nm} B_n^+ B_n^+ B_n B_m + \sum_{nm} \alpha_{nm} B_n^+ B_n^+ B_m^+ B_m B_m B_m - \sum_{nm} \alpha_{nm} \cdot \\ & \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) B_n^+ B_n^+ B_n B_m^+ B_m^+ B_m B_m B_m + \sum_{nm} \alpha_{nm} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right]^2 \cdot \\ & \cdot B_n^+ B_n^+ B_n^+ B_n B_n B_m^+ B_m^+ B_m B_m B_m + \sum_{nm} \beta_{nm} (B_n^+ B_n - B_n^+ B_n^+ B_n B_n + \frac{2}{3} B_n^+ B_n^+ B_n B_n B_n \\ & (B_m^+ B_m - B_m^+ B_m^+ B_m B_m + \frac{2}{3} B_m^+ B_m^+ B_m B_m B_m)) \end{aligned}$$

Mi ćemo zanemariti članove više od šestog reda i tada hamiltonian dobija oblik:

$$\begin{aligned} H = & \sum_n \Delta B_n^+ B_n - \sum_n \Delta B_n^+ B_n^+ B_n B_n + \frac{2}{3} \sum_n \Delta B_n^+ B_n^+ B_n^+ B_n B_n + \\ & + \sum_{nm} \alpha_{nm} B_n^+ B_m - \sum_{nm} \alpha_{nm} B_n^+ B_m^+ B_m B_m + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \sum_{nm} \alpha_{nm} \cdot \\ & \cdot B_n^+ B_m^+ B_m^+ B_m B_m - \sum_{nm} \alpha_{nm} B_n^+ B_n^+ B_m B_m + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \sum_{nm} \alpha_{nm} \cdot \\ & \cdot B_n^+ B_n^+ B_n^+ B_n B_n B_m^+ B_m^+ B_m B_m - \\ & - \sum_{nm} \beta_{nm} B_n^+ B_n B_m^+ B_m^+ B_m B_m - \sum_{nm} \beta_{nm} B_n^+ B_n^+ B_n B_n B_m^+ B_m B_m \end{aligned}$$

Prema onome što je rečeno u I § 4 možemo izdvojiti članove kinematičke i dinamičke interakcije

$$\begin{aligned}
 H_k = & \sum_n \Delta B_n^+ B_n + \sum_{nm} \Delta_{nm} B_n^+ B_m - \sum_n \Delta B_n^+ B_n^+ B_n B_n + \\
 & + \frac{2}{3} \sum \Delta B_n^+ B_n^+ B_n B_n - \sum_{nm} \Delta_{nm} B_n^+ B_m^+ B_m B_m + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \\
 & \cdot \sum_{nm} \Delta_{nm} B_n^+ B_m^+ B_m B_m B_m - \sum_{nm} \Delta_{nm} B_n^+ B_n^+ B_n B_m + \\
 & + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \sum_{nm} \Delta_{nm} B_n^+ B_n^+ B_n B_n B_m
 \end{aligned}$$

član dinamičke interakcije

$$H_4^D = \sum_{nm} B_{nm} B_n^+ B_n B_m^+ B_m$$

a članovi kinematičko-dinamičke interakcije

$$H_6 = - \sum_{nm} B_{nm} B_n^+ B_n B_m^+ B_m B_m - \sum_{nm} B_{nm} \cdot B_n^+ B_n^+ B_n B_m B_m$$

Poznavanje kako dinamičke tako i kinematičke interakcije neophodno je pri istraživanju nelinearnih optičkih efekata koji se javljaju u kristalu kao i u proučavanju kolektivnih svojstava eksitona pri niskim temperaturama.

U ovom paragrafu smo računali kinematičku interakciju eksitona pri tačnom predstavljanju pauli operatora preko boze operatora. Ovakav način može se smatrati jedino kao tačan i tako računanje je predložio Dajson. Pre njega Kronendank je predložio da se računanje kinematičke interakcije posmatra kao rezultat interakcije dva spinska talasa gde se jedan spinski talas suprostavlja prolasku drugog spinskog talasa, pa ta dva spinska talasa ne mogu biti skoncentrisana u jednom čvoru. Dajson takov stav naziva „naivnim“ i kaže da on dovodi do pogrešnih rezultata. Takođe tačno računanje kinematičke interakcije je moguće samo preko tačnog predstavljanja pauli operatora preko boze operatora.

II G L a v a

Grinova funkcija pri malim koncentracijama
eksitona i njeni polovi

§ 1. Jednačina kretanja za operator $P_{\vec{r}}$

U svom fundamentalnom radu iz teorije magnetizma Dajson je tvrdio da u oblasti niskih temperatura kada spinski tolasi velike talasne dužine čine osnovna pobuđenja u sistemu, kinematička interakcija ne igra nikakvu bitnu ulogu pri određivanju termodinamičkih karakteristika feromagnetika. U tom istom radu on tvrdi da u oblasti malih talasnih dužina kinematička interakcija može da dovede do stvaranja novih eksitacija i da ove u okolini tačke prelaza mogu da odigraju značajne uloge.

Pošto u čisto matematičkom smislu, eksitoni imaju ponašanje slično ponašanju spinskih talasa mićemo ovde ispitati da li kinematička interakcija eksitona može da dovede do pojave novih eksitacija u sistemu

Hamiltonijan eksitonskog sistema uzecemo u sledećem obliku:

$$H = \Delta \sum_{\vec{n}} P_{\vec{n}}^+ P_{\vec{n}}^- + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} \alpha_{\vec{n}\vec{m}} P_{\vec{n}}^+ P_{\vec{m}}^- + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} \beta_{\vec{n}\vec{m}} P_{\vec{n}}^+ P_{\vec{n}}^- P_{\vec{m}}^+ P_{\vec{m}}^- \quad (\text{II } 1.1)$$

Pauli operatori P^+, P^- mogu se izraziti preko boze operatora na sledeći način

$$P_{\vec{n}} = B_{\vec{n}} - B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}}^- B_{\vec{n}} \quad (\text{II } 1.2)$$

Posle furije transformacije pauli i boze operatora dobijamo u impulsnom prostoru:

$$P\vec{R} = BR - \frac{1}{2} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} B_{\vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_1}^- B_{\vec{R}}^- B_{\vec{q}_1 + \vec{q}_2}; \quad P\vec{R}^+ = BR^+ - \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} B_{R-\vec{q}_1 + \vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_1}^+ B_{\vec{q}_2}^- \quad (\text{II } 1.3)$$

Jednačina kretanja za operator P_f^+ glasi:

$$P_f^+ = [P_f^+, H] = \Delta P_f^+ + \frac{1}{2} \sum_m \omega_f m P_m^- - \sum_m \omega_f m P_f^+ P_m^+ P_m^- + \sum_m \beta_f m P_m^+ P_m^- P_f^+ \quad (\text{II } 1.4)$$

ovu jednačinu kretanja će moći koristiti prilikom formiranja jednačine za grinovu funkciju « $P\vec{R}(t) | P\vec{R}(0)$ ». U skladu sa opštom teorijom može se pisati:

$$i \frac{d}{dt} \langle\langle P\vec{R}(t) | P\vec{R}(0) \rangle\rangle = iG \delta(t) + \langle\langle \Omega\vec{R}(t) | P\vec{R}(0) \rangle\rangle \quad (\text{II } 1.5)$$

gde je $G = \langle 1 - 2 P_h^+ P_h^- \rangle$,

$$\Omega\vec{R} = (\Delta + \frac{1}{2} \omega_R) P\vec{R} - \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} (\omega_{R-\vec{q}_1 + \vec{q}_2} - \beta_{\vec{q}_1 - \vec{q}_2}) P_{\vec{q}_2}^+ P_{\vec{q}_1}^- P_{R-\vec{q}_1 + \vec{q}_2} \quad (\text{II } 1.6)$$

Furije lik komutatora P_f^+ sa hamiltonijanom.

Posle zamene pauli operatora sa boza operatorima i na osnovu formule (II 1.3) bozonski ekvivalent jednačine (II 1.5) ima oblik

$$\begin{aligned} & [i \frac{d}{dt} - (\Delta + \frac{1}{2} \omega_R)] \langle\langle BR(t) | BR(0) \rangle\rangle - \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} \langle\langle BR(t) | B_{R-\vec{q}_1 + \vec{q}_2}^+ \\ & \cdot B_{\vec{q}_1}(0) B_{\vec{q}_2}(0) \rangle\rangle - \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} \langle\langle B_{\vec{q}_2}^+(t) B_{\vec{q}_1}^-(t) B_{R-\vec{q}_1 + \vec{q}_2}^-(t) | B_R^+(0) \rangle\rangle + \\ & + \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2 \vec{q}_3 \vec{q}_4} \langle\langle B_{\vec{q}_2}^+(t) B_{\vec{q}_1}^-(t) B_{R-\vec{q}_1 + \vec{q}_2}^-(t) | B_{R-\vec{q}_3 + \vec{q}_4}^+(0) B_{\vec{q}_2}^-(0) \rangle\rangle = \\ & = iG\delta(t) - \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} (\omega_{R-\vec{q}_1 + \vec{q}_2} - \beta_{\vec{q}_1 - \vec{q}_2}) \{ \langle\langle B_{\vec{q}_2}^+(t) B_{\vec{q}_1}^-(t) B_{R-\vec{q}_1 + \vec{q}_2}^-(t) | B_R^+(0) \rangle\rangle \} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{N} \sum_{\vec{\chi}_3} \langle\langle B_{\vec{\chi}_2}^+(t) B_{\vec{\chi}_3}(t) B_{\vec{K}-\vec{\chi}_3+\vec{\chi}_2}(t) | B_{\vec{K}}(0) \rangle\rangle -$$

$$-\frac{1}{N} \sum_{\vec{\chi}_3 \vec{\chi}_2} \langle\langle B_{\vec{\chi}_2}^+(t) B_{\vec{\chi}_1}(t) B_{\vec{K}-\vec{\chi}_1+\vec{\chi}_2}(t) | B_{\vec{K}-\vec{\chi}_3+\vec{\chi}_4}(0) B_{\vec{\chi}_3}^+(0) B_{\vec{\chi}_4}(0) \rangle\rangle +$$

$$+ \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{\chi}_3 \vec{\chi}_4 \vec{\chi}_5} \langle\langle B_{\vec{\chi}_2}(t) B_{\vec{\chi}_5}(t) B_{\vec{K}-\vec{\chi}_5+\vec{\chi}_2}(t) | B_{\vec{K}-\vec{\chi}_3+\vec{\chi}_4}(0) B_{\vec{\chi}_3}(0) B_{\vec{\chi}_4}(0) \rangle\rangle \quad (\text{II} 1.7)$$

Dobijenu jednačinu treba rešiti i zato je potrebno da se više funkcije Grina (one koje sadrže proizvod četiri i šest operatora) izraze preko osnovne bozonske funkcije Grina $\langle\langle B_{\vec{K}}(t) | B_{\vec{K}}^+(0) \rangle\rangle$

§ 2. Dekuplovanje Grinovih funkcija

U jednačini (II 1.7) imamo srednje proizvode više bozonskih operatora. Ovo nam omogućava da prilikom dekuplovanja viših funkcija Grina koristimo Vikovu teoremu za boze **operatoro~~r~~**. Osim toga u literaturi je uobičajeno da se sparuju samo operatori koji deluju u istom trenutku vremena, mi će mo ovde sparivati i operatori koji deluju u istom trenutku vremena i operatori koji deluju u različitim trenutcima **vremena**. Drugim rečima koristicemo Vikovu teoremu ne aproksimativno već u njenoj kompletnoj formulaciji. Smatracemo koncentraciju eksitona relativno malom i prilikom procedure dekuplovanja odbacujemo sve one delove koji su proporcionalni kvadratu koncentracije eksitona.

U skladu sa ovim što je rečeno može se pisati:

$$\langle\langle P_{\vec{R}}(t) | P_{\vec{R}}^+(0) \rangle\rangle = (1 - 4C_0) \langle\langle B_{\vec{R}}(t) | B_{\vec{R}}^+(0) \rangle\rangle +$$

$$+ \frac{2}{N^2} \sum_{\vec{\lambda}, \vec{\lambda}_2} \langle\langle B_{\vec{\lambda}_2}^+(t) | B_{\vec{\lambda}_2}(0) \rangle\rangle \langle\langle B_{\vec{\lambda}_2}(t) | B_{\vec{\lambda}_2}^+(0) \rangle\rangle.$$

$$\langle\langle B_{\vec{R}-\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2}(t) | B_{\vec{R}-\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2}^+(0) \rangle\rangle \quad (\text{II } 2.1)$$

$$C_0 = \frac{1}{N} \sum_{\vec{\lambda}} \langle B_{\vec{\lambda}}^+ B_{\vec{\lambda}} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\vec{\lambda}} \frac{1}{e^{\frac{\Delta + \frac{1}{2} \omega_R}{\theta}} - 1}$$

Na sličan način se dekupljuju više funkcije Grina na desnoj strani jednačine (II 1.7) pa kao završni rezultat možemo pisati:

$$i \frac{d}{dt} \left\{ (1-4C_0) G_R(t) + \frac{2}{N^2} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} D_{\vec{q}_2}(t) G_{\vec{q}_1}(t) G_{R-\vec{q}_1+\vec{q}_2}(t) \right\} =$$

$$= i(1-2C_0)\delta(t) + G_R \left\{ (1-4C_0) G_R(t) + \frac{2}{N^2} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} D_{\vec{q}_2}(t) G_{\vec{q}_1}(t) \cdot \right.$$

$$\left. G_{R-\vec{q}_1+\vec{q}_2}(t) \right\} - M_R G_R(t) + \frac{2}{N^2} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} (\alpha R - \vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \beta \vec{q}_1 - \vec{q}_2) \cdot$$

$$D_{\vec{q}_2}(t) G_{\vec{q}_1}(t) G_{R-\vec{q}_1+\vec{q}_2}(t) \quad (\text{II.2.2.})$$

gde je

$$\langle\langle B_R(t) | B_R^*(0) \rangle\rangle = G_R(t); \quad \langle\langle B_R^*(t) | B_R^*(0) \rangle\rangle = D_R(t)$$

$$G_R = \Delta + \frac{1}{2} \alpha R; \quad M_R = \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{q}} (\alpha R + \vec{q} - \beta_0 - \beta R - \vec{q}); \quad (\text{II.2.3})$$

$$C = 1 - 2C_0$$

Ako u jednačini (II.2.2) izvršimo Furije transformaciju vreme-energijom

$$G_R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega G_R(\omega) e^{-i\omega t};$$

$$D_R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega D_R(\omega) e^{-i\omega t} \quad (\text{II.2.4})$$

uzmemo u obzir daje

$$D_R(\omega) = G_R(-\omega) \quad (\text{II.2.5})$$

dobijamo:

$$GR(E) = \frac{i}{2\pi} \frac{1+2C_0}{E-ER+MR} - \frac{2(1+4C_0)}{E-ER+MR} \cdot \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE_1 dE_2 (E-ER-\alpha R-\vec{q}_1+\vec{q}_2 + \\ + \beta \vec{q}_1 - \vec{q}_2) G_{\vec{q}_2}(E_2) G_{\vec{q}_1}(E_1) GR_{-\vec{q}_1+\vec{q}_2}(E-E_1+E_2) \quad (\text{II } 2. 6)$$

Jednačina (II 2.6) se rešava iterativno uzimajući u nultoj aproksimaciji

$$GR^{(0)}(E) = \frac{i\tilde{\tau}}{2\pi} \frac{1}{E-\Omega_R} + \frac{\tilde{\tau}}{2} \delta(E-\Omega_R) \quad (\text{II } 2. 7)$$

gde je $\tilde{\tau} = 1+2C_0$ $\Omega_R = ER - MR$

Posle prostih ali prilično glomaznih računa uz pretpostavku da je član proporcionalan sumi $\frac{1}{N^2} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2}$ mali dobijamo konačnu formu bozonske grinove funkcije sistema:

$$GR(E) = \frac{i}{2\pi} \frac{1+2C_0}{E-\omega_R} \left\{ 1 + \frac{1}{2N^2} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \left[\delta_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} - i\tilde{\tau} P_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \delta(E-\omega_{\vec{q}_1} - \omega_{\vec{q}_2} - \omega_R - \vec{q}_1 + \vec{q}_2) \right] \right\}^{-1} \quad (\text{II } 2. 8)$$

gde su:

$$C_0 = \langle B^\dagger B \rangle_{(0)} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{R}} \frac{1}{e^{\frac{ER}{T}} - 1} ;$$

$$\omega_R = \Delta + \frac{1}{2} \alpha R ;$$

$$\omega_R = ER - MR ;$$

$$MR = \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} (\alpha_R + \alpha_{\vec{q}} - \beta_0 - \beta R_{\vec{q}}) \langle B_{\vec{q}}^+ B_{\vec{q}} \rangle_0 ;$$

$$\langle B_{\vec{q}}^+ B_{\vec{q}} \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E_R}{kT}} - 1}$$

$$f_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} = \frac{E - E_R - \alpha_R - \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \beta \vec{q}_1 - \vec{q}_2}{E - w_{\vec{q}_1} + w_{\vec{q}_2} - w_R - \vec{q}_1 + \vec{q}_2}$$

$$P_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} = E - E_R - \alpha_R - \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \beta \vec{q}_1 - \vec{q}_2$$

§ 3. Analiza polova Grinove funkcije i egzistencija dopunskih nivoa

Jednačina (II 2.8) pokazuje da Grinova funkcija $GK(E)$ ima jedan pol

$$E = wR = \Delta + \frac{1}{2} \alpha R - \frac{1}{N} \sum (\alpha R + \alpha \vec{q} - \beta_0 - \beta R \cdot \vec{q}) \langle B_{\vec{q}}^T, B_{\vec{q}} \rangle_0 \quad (\text{II 3.1})$$

Ovaj pol bi se dobilo oko bi dekuplovanje Grinovih funkcija vršili samo po istom vremenu. Iz jednačine (II 2.8) vidi se da postoje još dva dopunska uslova koji mogu da daju polove oto su:

$$1 + \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} S_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} = 0 \quad (\text{II 3.2})$$

i

$$\sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} P_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} \delta(E - w_{\vec{q}_1}^* + w_{\vec{q}_2}^* - wR \cdot \vec{q}_1 + \vec{q}_2) = 0 \quad (\text{II 3.3})$$

Uslov (II 3.3) nećemo analizirati, jer bi njegovo izračunavanje vodilo na veoma komplikovanu analizu, pa ćemo se zato u daljem ograničiti na dopunske polove koji daje uslov (II 3.2)

Posle izvesnih uprošćavajućih pretpostavki i to $wR \rightarrow ER$ korišćenjem aproksimacija najbližih suseda i korišćenjem aproksimacije efektivne mase za dopunski nivo dobijamo sledeće rezultate

a) ako su eksitonske zone veoma uske onda možemo zanemariti zavisnost od R veličine koji figurišu

u uslovu jednačine (II 3.2) i tada dobijamo za dopunski pol rešenje:

$$E_0 = \Delta + 5\alpha - 2\beta \quad (\text{II 3.4})$$

gde su α i β rezonantne interakcije za najbliže susede.

U odnosu na energiju normalnog nivoa u ovoj aproksimaciji:

$$E_0 = \Delta + 3\alpha \quad (\text{II 3.5})$$

Vidimo da dopunski nivo u zavisnosti od znaka i veličine dinamičke interakcije β može biti viši ili niži od normalnog nivoa E_0 . Ako dinamička interakcija odbojna, ($\beta > 0$) onda je dopunski nivo E_0 niži od normalnog nivoa E_0 , pa je prema tome bolje populisan, i trebalo bi da se u eksperimentima njegov uticaj jače oseća nego uticaj normalnog nivoa.

b) ako uzmemos nešto strožiju aproksimaciju od one koja je korišćena u a) onda uslov (II 3.2) ne možemo rešavati tačno u celoj oblasti talasnih vektora (ovakav račun bi zahtevao numeričku analizu). zato ćemo se sada ograničiti oblastima veoma malih i veoma velikih talasnih vektora, jer u ovim slučajevima uslov (II 3.2) se može rešiti analitički

za $k \approx 0$ dobijemo:

$$E^{(1)} = E_0 - \frac{\hbar^2 \lambda_0^2}{2m} - \frac{2(1-\xi)}{5} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \xi = \frac{\beta}{\alpha} \quad (\text{II 3.6})$$

Za $k \approx k_0$ gde je k_0 granični vektor Brilenove zone dopnski nivo se ponaša po sledećem zakonu

$$E = \Delta + g\alpha - 6\beta + \frac{\hbar^2(28\beta - 36)k_0^2}{30m} + \frac{\hbar^2(\beta - 3)k^2}{2m} \quad (\text{II } 3.7)$$

Koristeći formule (II 3.6) i (II 3.7) možemo za različite znake matričnih elemenata α i β dobiti sledeće grafike na kojima su iscrtani dopnski i normalni eksitoniski nivoi:

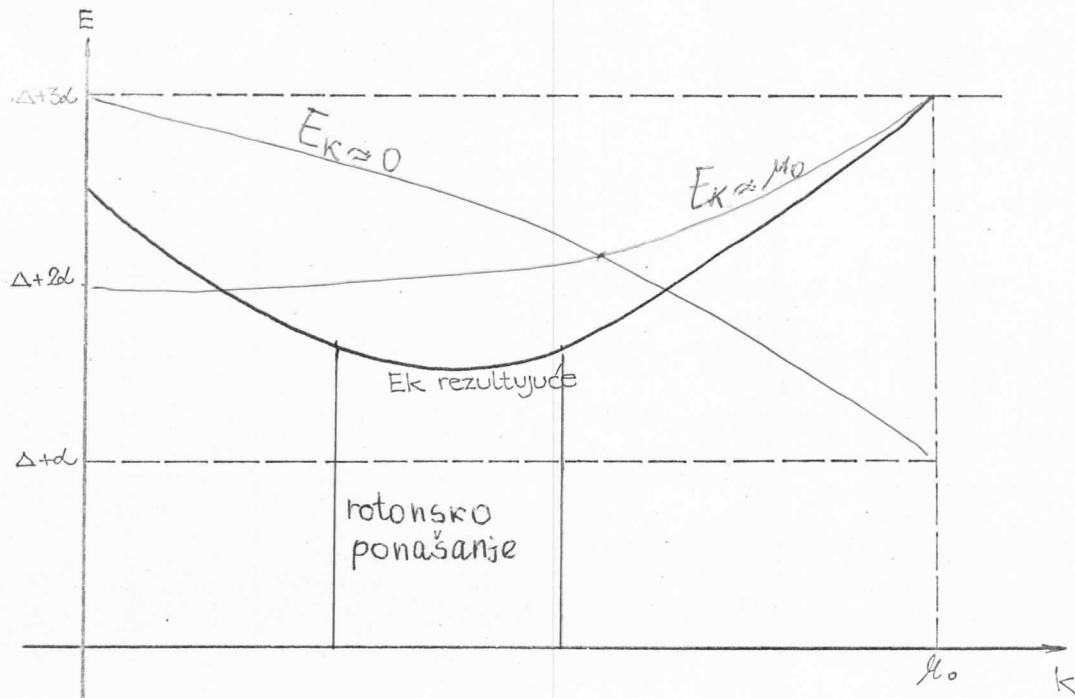
1. prvi slučaj

$$E = \Delta + 3|\alpha_0| - \frac{\hbar^2 k^2}{2|m|}; \quad k \approx 0$$

$$E = \Delta + 3|\alpha_0| - \frac{8\hbar^2 k_0^2}{30|m|} + \frac{\hbar^2 k^2}{2|m|}; \quad k \approx k_0$$

$$\alpha > 0 \quad \beta > 0$$

$$\alpha = |\alpha_0| \quad \beta = |\beta_0|$$

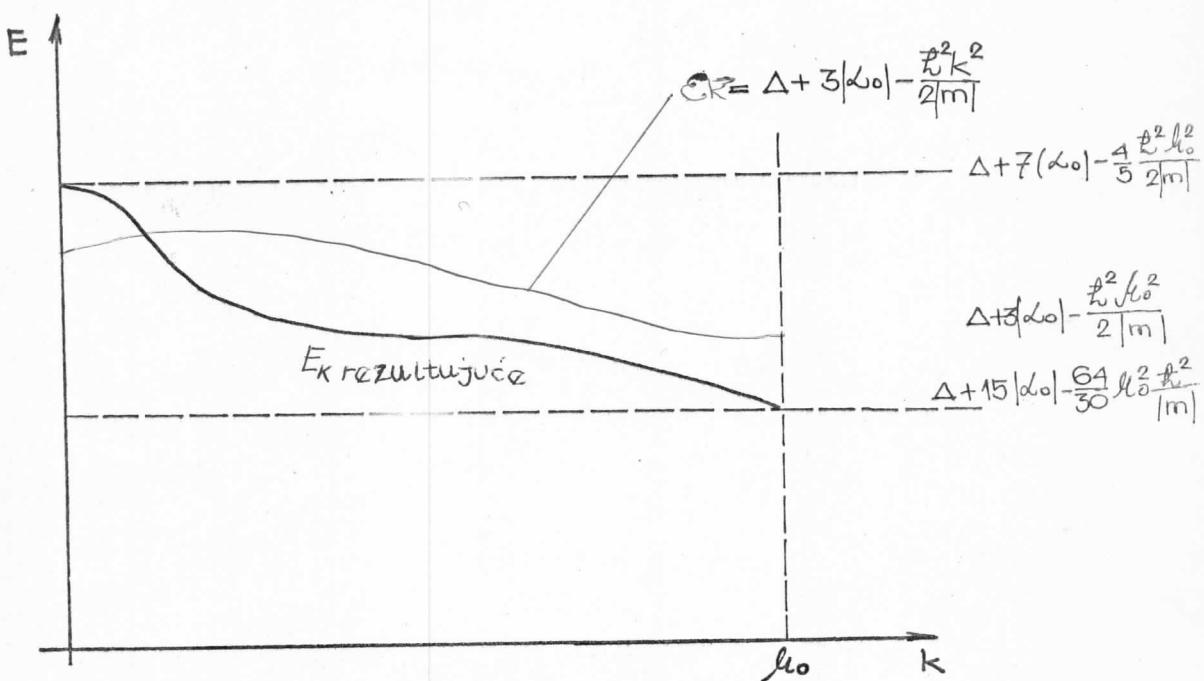


2. drugi slučaj:

$$E = \Delta + 7|\omega_0| + \frac{4}{5} \frac{\hbar^2 k_0^2}{|m|} - \frac{\hbar^2 k^2}{2|m|}; \quad k \approx 0$$

$$E = \Delta + 15|\omega_0| - \frac{\hbar^2 k_0^2}{|m|} - \frac{64}{30} - \frac{5\hbar^2 k^2}{2|m|}; \quad k \approx k_0$$

$$\omega > 0 \quad \beta < 0; \quad \omega = |\omega_0| \quad \beta = -|\beta_0|;$$

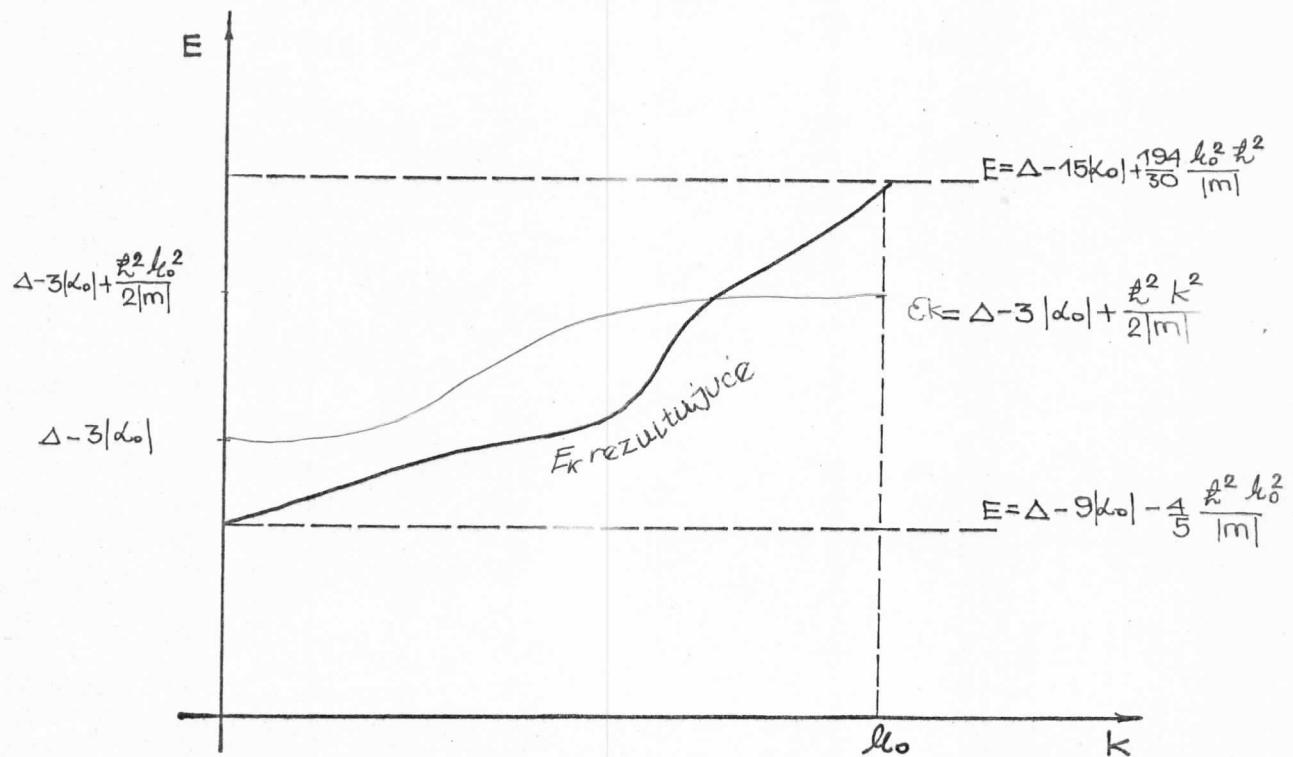


3. Treći slučaj

$$E = \Delta - 9|\alpha_0| - \frac{4}{5} \frac{\hbar^2 k_0^2}{|m|} + \frac{\hbar^2 k^2}{2|m|}; \quad k \approx 0$$

$$E = \Delta - 15|\alpha_0| + \frac{\hbar^2 k_0^2}{|m|} \frac{64}{30} + \frac{\hbar^2 k^2}{|m|} \frac{5}{2}; \quad k \approx k_0$$

$$\alpha < 0 \quad \beta > 0; \quad \alpha = -|\alpha_0| \quad \beta = |\beta_0|$$

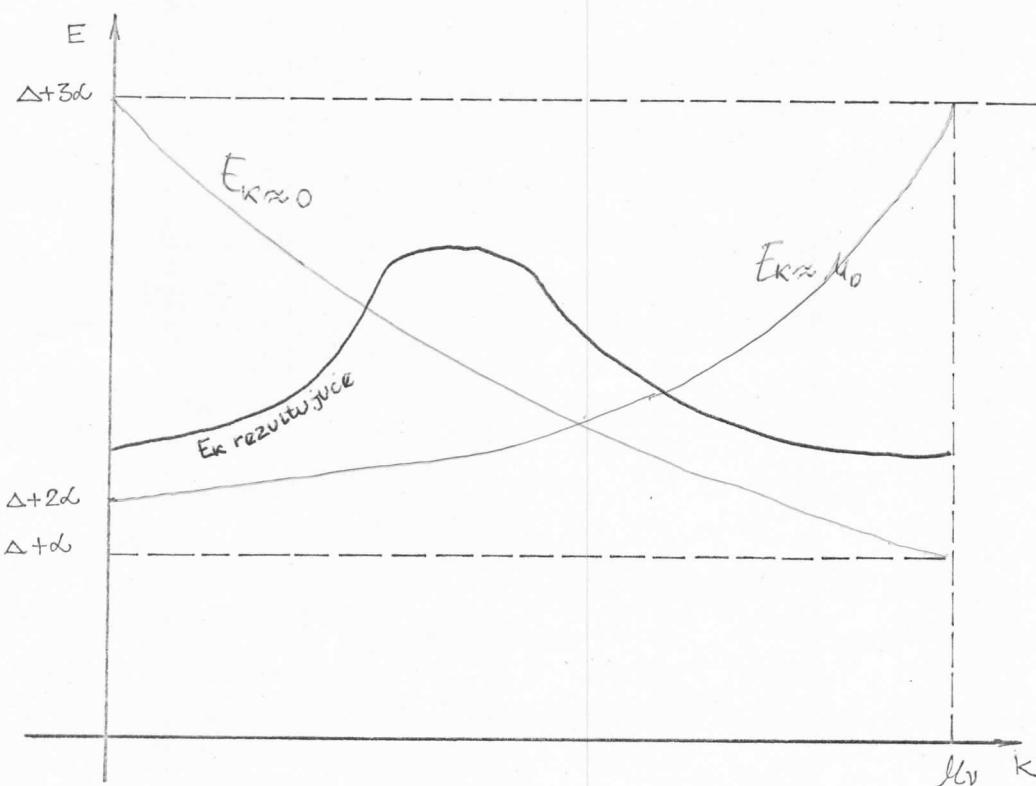


4. četvrti slučaj

$$E = \Delta - 3|\alpha_0| + \frac{\hbar^2 k^2}{2|m|}; \quad k \approx 0$$

$$E = \Delta - 3|\alpha_0| + \frac{8}{30} \frac{\hbar^2 \ell_0^2}{|m|} - \frac{\hbar^2 k^2}{2|m|} \quad k \approx \ell_0$$

$$\alpha < 0 \quad \beta < 0 \quad \alpha = -|\alpha_0| \quad \beta = |\beta_0|$$



Kao što vidimo u svim slučajevima se dopunski i normalni nivoi presecaju a to znači da što se tiče populacije u jednoj oblasti talasnih vektora dominira jedan nivo a u suprotnoj po veličini drugi nivo. Treba istaći i to da u slučaju $\alpha > 0 \beta > 0$ dopunski nivo ima u oblasti malih k tipičan rotorski minimum što je indikacija da se u ovom slučaju kinematička interakcija mogu kretati superfluidno

Z a k l y u č a k

Analiza eksitonskog sistema pokazala je da kinematička interakcija eksitona dovodi do dopunskih nivoa koji za razliku od magnetizma mogu da egzistiraju za sve vrednosti talasnog vektora iz prve Briluenove zone. Kao što je poznato u Hajzenbergovom fero-magnetiku kinematički nivoi postoje samo u blizini graničnog vektora Briluenove zone. Kinematički nivoi zavise i od dinamičke interakcije eksitona i u zavisnosti od toga kakva je dinamičko interakcija oni mogu biti više ili manje populisani od normalnih eksitonskih nivoa. Normalni i dopunski nivoi se uvek presecaju što znači da ako su u oblasti malih talasnih vektora kinematički nivoi dobro populisani a normalni slabo, onda u oblasti velikih talasnih vektora imamo obrnutu sliku, što znači da u optičkim procesima kinematički i optički nivoi mogu da menjaju svoje uloge.

Važno je istaći da u slučaju eksitona sa negativnom efektivnom masom (negativna disperzija) čija je dinamička interakcija odbjedna postoji pozitivni minimum fazne brzine pa se može očekivati da je spektar kinematičkih interakcija superfluidan. Ova činjenica mogla bi da igra važnu ulogu u objašnjenu nekih biofizičkih procesa.

L i t e r a t u r a:

1. С.В. ТЯБЛИКОВ; МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МАГНЕТИЗМА
издатель: "НАУКА" МОСКВА 1965
2. В.М. АГРАНОВИЧ, БС ТЮШИЧ ЖЭТФ, 53, 149 (1967)
3. А.А. АБРИКОСОВ, ЛП ГОРКОВ, ИЕ ДЗЯЛОШИНСКИЙ МЕТОДЫ
КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОХА В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ,
ФИЗМАГИЗ, МОСКВА 1962
4. А.С. ДЭВИДОВ; КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА изд: ФМ МОСКВА 1963
5. F.J. Dyson, Phys. Rev, 102, 1217 (1956)
6. Б.С. ТЮШИЧ, М.М. МАРУНКОВИЧ Phys Stat Sol(b) 76, K85 (1976)



Sadržaj

str.

Uvod 3

Prva glava

Eksitoni Frenkel Vani - Moto 5

Harmonijski spektar Frékelovih eksitona . . . 8

Pauli operatori izraženi preko boze oper. . . 13

Kinematicka i dinamicka interakcija eksit. . . 17

Druga glava

Jednačina kretanja za operator P_k . . . 21

Dekuplovanje Grinovih funkcija 24

Analiza polova Grinove funkcije i egzistencija dopunskih nivoa 28

Zaključak 34

Literatura 35