

RELATIVISTIČKA KINEMATIKA
RASPADA, RASSEJANJA I REAKCIJA

DIPLOMSKI RAD

NOVI SAD, 13. 01. 1977.
HORVATIĆ MARIJA

ZAHVALJUJEM SE PROFESORU DR. MILANU
NIKOLIĆU NA POMOći PRILIKOM IZBORA
TEME I SAVETIMA KOJE MI JE DAVAо
PRILIKOM IZRADE DIPLOMSKOG RADA.

S A D R Ţ A J

PRVI DEO

I. TEORIJA RELATIVNOSTI	str.
1. Princip relativnosti	2
2. Lorenceove transformacije	4
3. Geometrijska interpretacija Lorenceovih transformacija	9
4. Klasifikacija Lorenceovih transformacija	11
5. Invarijantnost četvore vektora i održanje energije - momenta	13
6. Relativistička masa, moment i energija	15

DRUGI DEO

II KINEMATIKA RASEJANJA

1. Karakteristike sistema centra masa	17
2. Nерelativistički elastični sudar čestice se mirujućom metom	17
3. Relativistički elastični sudar čestice sa mirujućom metom	27
4. Poprečni presek, definicija i transformacija	32
5. S - matrica i njena fizička interpretacija	36
6. Unitarnost S - matrice	38
7. Grafički prikaz rasejanja	38

TREĆI DEO

III KINEMATIKA RASPADA I REAKCIJA

1. Osnovne relacije	40
2. Reakcije dva tела	41
3. Relacije za prag energije	45
4. Distribucija dva tела	46

5. Raspadi tri ili više tela	47
6. Dalicovi dijagrami	48
LITERATURA	58

1. U V O D

Diplomski rad je podeljen u tri poglavlja: teoriju relativnosti, kinematiku rasejanja i kinematiku raspada i reakcija.

U prvom poglavlju diplomskog rada su dati osnovni principi relativnosti, Lorencove transformacije i zakon održanja energije-momenta koji predstavljaju osnovne relativističke kinematike.

U drugom delu diplomskog rada pod nazivom kinematika rasejanja date su osnovne kinematičke veličine rasejanja i transformacija istih iz sistema centra mase u laboratorijski sistem i obratno, za slučaj relativističkog i nerekativističkog elastičnog sudara čestice sa mirujućom metom. Zatim su date definicija i osobine poprečnog preseka i S-matrice. Nakraju ovog dela diplomskog rada dat je grafički prikaz rasejanja.

U trećem delu diplomskog rada koji nosi naziv kinematika raspada i reakcije diskutovani su slučajevi reakcija i distribucija dva tela, date su relacije za prag energije, raspadi tri ili više tela i na kraju su dati Balicovi dijagrami, kako za procese raspada koji su diskutovani u ovom delu diplomskog rada tako i za procese rasejanja koji su diskutovani u drugom delu diplomskog rada.



I.T E O R I J A R E L A T I V N O S T I

I.1. PRINCIJ RELATIVNOSTI

Fizičari su počev od Hajgensa smatrali da između vidljivih tела postoji nevidljivi mehanički fluid koji su nazivali eter. Deformacije i oscilacije ovoga fluida smatrano su uzrok za sve fizичке fenomene koje obuhvatamo pod različitim imenima, kao gravitacija, svetlost, električne i magnetne sile. Idealni fluid ne suprotstavlja kretanju tela nikakav otpor pa za njega važi Galilejeov princip ustreznosti. Ovo svojstvo idealnog fluida morao bi imati i eter. Na druge strane svetlost je transferalno talasno kretanje, a transferalni talasi su mogući samo u čvrstim telima. eter bi prema tome morao imati i elastična svojstva čvrstih tela što je teško spojivo sa pretpostavkom razredjene materije. Teorija elastičnog etera koju su sa velikim naporom razvili najveći fizičari i matematičari XIX veka, neilazila je na nepresmetive teškoće. Jedna od glavnih teškoća bila je u tome što elastično sredstvo osciluje i longitudinalno dok se kod svetlosti takve oscilacije ne opažaju. Treba napomenuti da su sami ovih teškoća koje su bile nerešive u to vreme sa datim znanjem, postojala i dva shvatanja o tome što eter predstavlja. Dok je mehanička teorija smatrala eter elastičnim sredstvom dotle je Lorenc u njemu video nosioca električnih i magnetskih polja. Međutim bez obzira kakvu prirodu pripisao eteru jednu mehaničku osobinu činilo se mora imati a to je određeno stanje kretanja. Smatralo se da eter miruje, tako da svra kretanja tела možemo stavljati u odnos prema ovom mirnom sistemu. Svetlost u eteru ima konstantnu brzinu od trista hiljada kilometara u sekundi. Međutim po tadašnjem shvatanju slaganja brzina, posmatrači koji se sa različitim brzinama kreću prema eteru, morali bi meriti različite brzine svetlosti posto posmatrana brzina nekog kretanja zavisi uvek od sopstvene brzine posmatrača. Da bi pokazao ovo shvatanje, Hajkelson je 1881. god. izveo precizne eksperimente da bi utvrdio kretanje zemlje kroz

eter. Brzina svetlosti morala bi biti različita ako je merimo u smjeru kretanja zemlje kros eter i suprotnom smjeru. Međutim rezultati merenja su iznesadili fizičare. Svetlost je imala uvek istu brzinu bez obzira u kojem smjeru je Hajkelson merio. Prema tome iz eksperimenta se može izvući zaključak da je brzina svetlosti nezavisna od vlastitih brzina posmatrača. Neizbežna je konsekvenca da je brzina svetlosti u svim Galilejevim sistemima ista. Naravno, nije očigledno da se isti elektromagnetski talas mirnom i pokretnom posmatraču čini jednak brzinom. Ali svetlost nije mehanička pojava i nije dopušteno preneti na nju znanja koja posedujemo o kretanju mehaničkih tела. Možemo se kretati koliko god jednako brzo za svetlosću, ona će uvek odinjeti od nas jednak brzo. Optanak prirodnih konstanti stavlja našim svakidašnjim pojmovima izvesna ograničenja. Konstantnost brzine ne dopušta, da principijelno prilikom merenja predpostavimo brzine veće od brzine svetlosti. Svetlosti pripada osobina koju je klasična mehanika pripisala beskonačno velikoj brzini i to izuzetno tuničenje brzine svetlosti povlači za sebe duboke promene u shvatanju prostora i vremena.

Poste su Hajkelsonovi eksperimenti pokazali da sabiranje brzina sa brzinom posmatranog sistema ne vredi za svetlost ne mogu vredeti Galilejeve transformacije koje upravo predstavljaju vektorsko sabiranje brzina dva sistema koji se usajanno kredu sa konstantnom brzinom. Da bi došli u sklad sa eksperimentom, moramo po Lorenzu i Ajnštajnu između dva Galilejeva sistema uvesti takve transformacije da brzina svetlosti u obe sistema ostane konstantna. Osnovna predpostavka koja je sudišana u Galilejevim transformacijama je apsolutna istovremenost događaja, odnosno vreme u obe sisteme je isto. Baš na toj predpostavci Ajnštajn je izvršio odlučnu kritiku. Ako se pojde od empirički potvrđenog principa o konstantnosti brzine svetla tada se po Ajnštajnu mora odbaciti shvatanje o apsolutnoj istovremenosti.

1.2. LORENCOVE TRANSFORMACIJE

Lorencove transformacije povezuju fizičke veličine u dva koordinatna sistema (S i S') koja se kreću jedan u odnosu na drugi uniformnom relativnom brzinom. Ukoliko se sistem S' kreće relativnom uniformnom brzinom v duž x -ose sistema S , Lorencove transformacije za početne uslove:

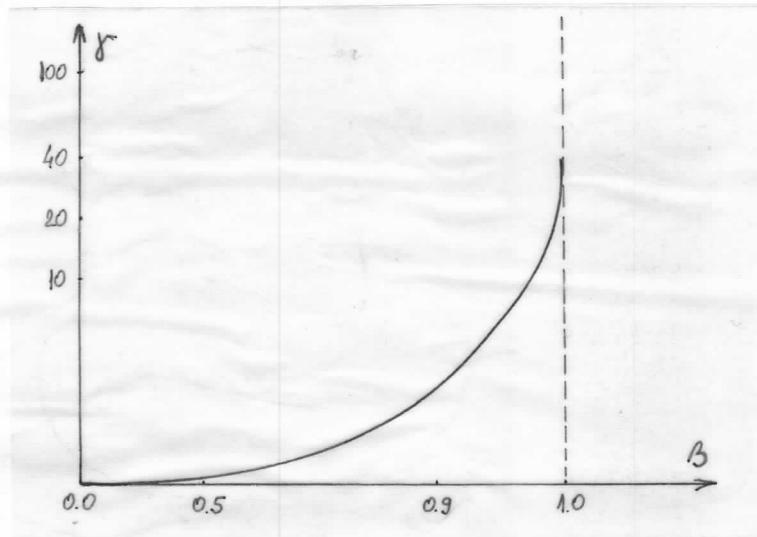
$$x' = y' = z' = t' = 0 \quad \text{za} \quad x = y = z = t = 0 \quad (1)$$

imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{gde je } \beta = \frac{v}{c} \leq 1 \text{ i } \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \geq 1 \quad (3)$$

Veoma instruktivno je pokazati grafičku zavisnost između β i γ kao što je to uradjeno na log-log dijagramu prikazanom na slici 1.



SLIKA 1

U nerelativističkoj aproksimaciji brzina se $v \ll c$, odnosno kada $\beta \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 1$ dobijamo prestige izraze za Lorencove transformacije:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned} \quad (4)$$

Izrazi (4) u stvari predstavljaju Galilejeve transformacije što znači da su one prva aproksimacija Lorenceovih transformacija, odnosno da je klasična mehanika prva aproksimacija relativističke mehanike.

Neposredne posledice Lorenceovih transformacija su kontrakcija dužine i dilatacija vremena, u kojima se ogleda značaj i smisao relativizma. Pomoću Lorenceovih transformacija se mogu odrediti promene dužine i vremena u dva posmatrana sistema, kao:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - B c \Delta t) \approx \gamma \Delta x \quad (5)$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t + \frac{B}{c} \Delta x') \approx \gamma \Delta t \quad (6)$$

Pošto je $\gamma \geq 1$ iz relacije (5) sledi:

$$\Delta x' \geq \Delta x \quad (7)$$

odnosno za posmatrača u sistemu S dužina Δx je umanjena za faktor γ , a ova pojava se naziva kontrakcija dužine i javlja se samo u pravcu kretanja sistema S'.

Iz relacije (6) s obzirom da je $\gamma \geq 1$ sledi:

$$\Delta t \geq \Delta t' \quad (8)$$

Ova relacija izražava dilataciju vremena, odnosno posmatraču u sistemu S vremenski interval Δt izgleda proširen za faktor γ .

Zbog dilatacije vremena u relativističkoj mehanici je uvedeno sopstveno vreme t_0 , koje je definisano kao vreme u sistemu koji se kreće zajedno sa telom. Sopstveno vreme je invarijantno u odnosu na Lorenceove transformacije i ima istu ulogu u relativističkoj mehanici kao i vreme u klasičnoj mehanici. Na osnovu Lorenceovih transformacija, može se dati veza izmedju sopstvenog vremena u na kom drugom inercijalnom sistemu.

Lorenceove transformacije pokazuju da su prostorne koordinate i vreme uzajamno povezani i čine nerazdvojivu celinu, odnosno vreme u jednom sistemu ne zavisi samo od vremena u drugom sistemu već i od položaja i brzina samoga sistema. Upravo zbog te nerazdvojivosti vremena od prostora sada je osnovni pojam dogadjaj koji je određen skupom (x, y, z, t) . Da bi smo izbegli asimetri-

ju izmedju koordinata i vremena, odnosno da bi imali istu fizičku dimenziju, uvedemo umesto t kao koordinatu ct . Ukoliko sada posmatramo širenje svetlosnog signala koji se u času $t = 0$ nalazio u koordinantnom početku, onda će nakon vremena t on obrazovati sfenu radijusa ct . Jednačina te sfere je:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (9)$$

Širenje tega signala svetlosti možemo posmatrati i u sistemu S' koji se kreće prema prvom sistemu konstantnom brzinom. Ako se ishodišta ova sistema u početnom trenutku poklapaju, tada za sferični talas u sistemu S' vredi slična jednačina:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c'^2 t'^2 = 0 \quad (10)$$

Poslednja relacija preizlazi iz prethodne ako x, y, z i t transformišemo pomoću Lorenzovih transformacija. Prema tome relacija (9) predstavlja izraz koji ostaje nepromenjen u svim Lorenzovim sistemima, pa se zbog toga naziva osnovnim invarijantom, S .

$$S^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (11)$$

Osnovnu invarijantu za infinitesimalne bliske događaje možemo napisati u obliku:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + d(ct)^2 \quad (12)$$

gdje je i imaginarni jedinica. Izraz (12) možemo shvatiti kao metriku Euklidovog prostora sa koordinatama x, y, z i ict . Zbog toga uvođimo četverodimenzionalni prostor u kome se tačka definisce kao skup

$$x_\mu = (x, y, z, ict) \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \quad (13)$$

a metriku obrazcem

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \quad (14)$$

Prostor u kome svaka tačka odgovara jednom događaju predstavlja kompleksan Euklidov prostor koji se naziva svet Minkovskog. Time je postigнутa ravноправност prostornih koordinate i vremena ali po cenu napuštanja realnosti prostora. Kretanje čestice u običnom prostoru i vremenu prikazuje se krivom u četverodimenzionom prostoru. Kinematika običnog prostora se po-

javljuje kao statika četvorodimenzionog. Ako se dve krive sekut u četvorodimenzionom prostoru tada to znači da su se dve čestice srele u određenoj tački prostora i u određenom trenutku vremena.

Relacija (12) se može napisati u obliku

$$ds^2 = \sum_{M=1}^4 dx_M^2 \quad (15)$$

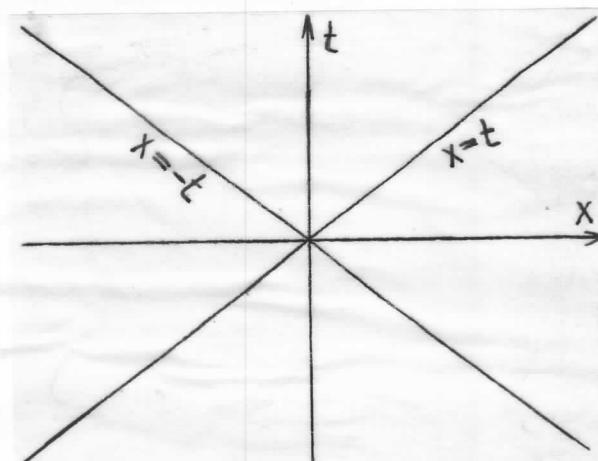
ili ukoliko razdvajimo prostorne koordinate od vremenske

$$ds^2 = \sum_{M=1}^3 dx_M^2 - c^2 dt^2 \quad (16)$$

gde je $\sum_{M=1}^3 dx_M^2$ prostorno rastojanje između dve prostorne tačke (dogadjaja) u fizičkom prostoru u kojem se pojavljuju dva dogadjaja, dok je dt razlika u vremenu pojavljivanja tih dogadjaja.

Ako je invarijanta ds^2 manja od nule, jednaka nuli ili veća od nule, govori se o intervalu vremenskog, nula intervalu ili intervalu prostornog tipa, respektivno.

Izjednačavanjem relacije (16) sa nulom, dobija se izraz koji grafiki predstavljen u (x, t) dijagramu predstavlja jednu kupu koja se naziva svetlosnom kupom.

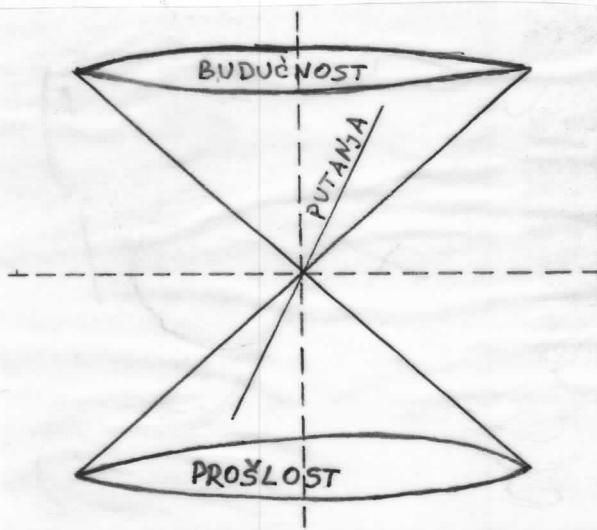


SLIKA 2.

Ako tačka leži na svetlosnoj kapi onda je ona spojena svetlosnim signalom sa koordinantnim početkom. Ako je interval dx_1 vremenskog tipa, tačka leži unutar svetlosne kape, a ako je dx_1 prostornog tipa tada tačka leži izvan svetlosne kape.

Zamislite da neka čestica prolazi kroz ishodište koordinatnog sistema

(x, t) . Čestica se tako kreće da njene staze leži unutar svetlosne kape. Ako čestica dostigne brzinu svetlosti, kreće se po oktađu kape. Poto je brzina čestice uvek manja od brzine svetlosti, ona ostaje u kapi, a nagib njene putanje prema vremenskoj osi je uvek manji od nagiba oktađe. Ako potrešimo da je bila čestica pre vremena $t = 0$, nadidemo je u donjoj kapi koju dobijamo ogledalskom simetrijom, tj. prelazom t u $-ct$. Prema tome, donja kupa predstavlja apsolutnu prošlost, a gornja kupa apsolutnu budućnost.



SLIKA 3

Čestica može doći u ishodište iz bilo koje tačke unutar donje kape, a iz ishodišta može stići u bilo koje tačke unutar gornje kape. One što leži izvan obe kape ostaje nedokućivo za nas. S obzirom na ishodište, mogu se naučino povezati sasvoje tačke unutar obe kape.

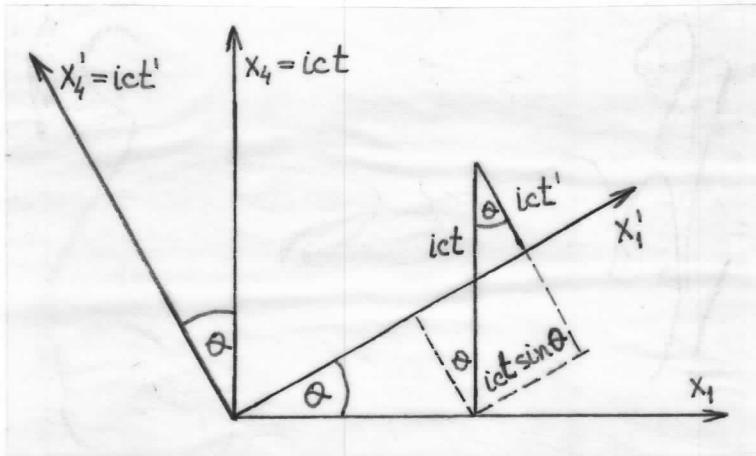
I.3. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA LORENCOVIH TRANSFORMACIJA

U običnom trodimenzionom prostoru izraz $x^2 + y^2 + z^2$ koji daje kvadrat duljine je invarijantan prema rotaciji koordinatnog sistema. Analogno tome, možemo uvesti $x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2$ kao kvadrat duljine četverodimenzionog vektera. Odatle je Minkovski zaključio da Lorenceove transformacije predstavljaju rotaciju u četverodimenzionom prostoru. Lorenceove transformacije u novim koordinatama (x_1, x_2, x_3, x_4) možemo napisati u sledećem obliku

$$x'_1 = \gamma x_1 + i\beta\gamma(ict) \quad (17)$$

$$x'_4 = -i\beta\gamma x_1 + \gamma(ict) \quad (18)$$

Po Minkovskom ove izraze možemo interpretirati kao rotaciju koordinatnog sistema kao što je dato na slici



SLIKA 4.

$$x'_1 = \cancel{\gamma x_1}, \quad x_1 \cos \theta + x_4 \sin \theta \quad (19)$$

$$x'_4 = -x_1 \sin \theta + x_4 \cos \theta \quad (20)$$

Poredjenjem izraza (19) i (20) sa izrazima (17) i (18) dobijamo relacije koje dovode u vezu ugao rotacije θ sa veličinama β i γ .

$$\cos \theta = \gamma \quad \sin \theta = i\beta\gamma \quad \tan \theta = i\beta \quad (21)$$

Tvrđenje da Lorencovih transformacija odgovara rotacija koordinatnog sistema je čisto formalno matematičko tumačenje Lorencovih transformacija. Ali ono nam omogućuje da sav poznati račun sa vektorima u trodimenzionom prostoru preneseno na teoriju relativnosti, samo što tu uzimamo vektore

sa četiri komponente.

Vratimo se sada izrazu () kojim je definisan kvadrivektor položaja.
Prelaskom na nove koordinate

$$\begin{aligned} x &= x_1 & y &= x_2 \\ z &= x_3 & \text{ict} &= x_4 \end{aligned} \quad (22)$$

Lorencoove transformacije možemo napisati u sledećem višesimetričnom obliku

$$\begin{aligned} x'_1 &= \sqrt{2}x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + i\sqrt{2}x_4 \\ x'_2 &= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ x'_3 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ x'_4 &= -i\sqrt{2}x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \sqrt{2}x_4 \end{aligned} \quad (23)$$

Premda tome, matricu transformacije pišemo u obliku

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & i\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Vidi se da koeficijenti Lorencoovih transformacija zadovoljavaju nužne uslove ortogonalnih transformacija.

$$\sum_{j=1}^4 l_{ij} l_{kj} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (25)$$

Lorencoove transformacije tada možemo pisati u obliku

$$x'_M = \sum_{v=1}^4 L_{Mv} x_v \quad (26)$$

odnosno inverzne Lorencoove transformacije u obliku

$$x_M = \sum_{v=1}^4 L_{vM} x'_v \quad (27)$$

Do sada je diskutovan specijalan slučaj kada je translacija imala smjer x-ose. U opštem slučaju može se uzeti bilo koji smjer translacije. Koeficijenti Lorencoove transformacije će tada biti drugačiji, ali će transformacija opet biti ortogonalna pa je isto možemo tumačiti kao rotaciju četverodimenzionog sistema.

I.4. KLASIFIKACIJA LORENCOVIH TRANSFORMACIJA

Transformaciona matrica α ima određene osobine na osnovu kojih se vrši klasifikacija Lorencovih transformacija. Na osnovu relacije (25) pokazuje se osobina transformacione matrice

$$\det \alpha = \pm 1. \quad (28)$$

Neka je tranponovana matrica α^T definisana tako da su joj elementi

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}^T \quad (29)$$

tada jednačina (25) postaje

$$\alpha_{ji}^T \alpha_{kj} = \delta_{ik} \quad (30)$$

Ovo je pravilo za množenje dve matrice i jasno da je $\det = 1$. Ako simbolom $\hat{1}$ označimo jedinčnu matricu imamo da je

$$\alpha^T \cdot \alpha = \hat{1} \quad (31)$$

$$\det(\alpha^T \cdot \alpha) = \det \alpha^T \det \alpha = +1 \quad (32)$$

Vrednost determinante se ne menja zamenom vrednosti kolona pa je

$$\det \alpha^T = \det \alpha \quad (33)$$

t.j.

$$|\det \alpha|^2 = 1 \quad \text{odnosno} \quad \det \alpha = \pm 1 \quad (34)$$

Transformaciona matrica rotacijske data izrazom (24) ispunjava uslov $\det \alpha = 1$.

Dalje, refleksija prostornih koordinata

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

i refleksija vremenske koordinate

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Zadovoljavaju uslov $\det \mathcal{L} = -1$

Na osnovu ovih osobina možemo da izvršimo klasifikaciju Lorencovih transformacija kao što je dato u sledećoj tabeli

KLASA	1	2	3	4
det	1	-1	-1	1
\mathcal{L}_{44}	> 0	> 0	< 0	< 0

gde su:

KLASA 1 - prave Lorencove transformacije (ogreničena Lorencova grupa)

KLASA 2 - prostorna inverzija

KLASA 3 - inverzija vremena

KLASA 4 - prostorno-vremenska inverzija.

Prave Lorencove transformacije se odnose na stanja koja se postižu integracijom serije infinitezimalnih transformacija (na pr. - rotacija). One se dele na homogene (čista rotacija) i nehomogene (rotacija i translacija). Klase 2,3 i 4 su diskontinualne i ne mogu se postići sumom infinitezimalnih transformacija. Kod klase 1 i 2 ne postoji inverzija vremena i one su ortohrone. Na osnovu ortohronih Lorencovih transformacija može se izvršiti klasifikacija fizičkih veličina. Neka su S^1 i S^2 vrednosti neke fizičke veličine u dva koordinantna sistema, tada možemo pisati

$$S^2 = L S^1 \quad (37)$$

gde je L funkcija matrica $\mathcal{L}_{\mu\nu}$. Klasifikacija fizičke veličine S^1 se vrši na osnovu ponašanja L:

- a) Skalari $S' = S$, $L = 1$ (jedinična matrica)
- b) Pseudoskalari $P' = LP$, $L = \det \mathcal{L}_{\mu\nu}$, gde je $\det \mathcal{L}_{\mu\nu} = +1$ za prave Lorencove transformacije, a $\det \mathcal{L}_{\mu\nu} = -1$ za inverziju prostornih koordinata.
- c) Vektori $V' = \mathcal{L}_{\mu\nu} V$, $L = \mathcal{L}_{\mu\nu}$
- d) Pseudo (aksijalni) vektori $A'_\mu = L A_\mu$, $L = \det \mathcal{L}_{\mu\nu}$ pa prostorna komponenta aksijalnog vektora menja znak pri refleksiji koordinata
- e) Tenzori $T'_{\mu_1 \nu_1 \dots} = \mathcal{L}_{\mu_1 \nu_1} \mathcal{L}_{\nu_2 \sigma_2} \mathcal{L}_{\sigma_3 \tau_3} \dots T_{\tau_3 \nu_3}$
- f) Pseudotenzori, transformaciona matrica je ista kao i za tenzore pomnožena sa $\det \mathcal{L}$.

I.5. INVARIJANTNOST ĆETVOROVJEKTORA I ODRŽANJE
ENERGIJE - MOMENTA

7 Pogledajmo četiri fizičke veličine K_1, K_2, K_3, K_4 i transformišimo ih kao komponente vektora K koristeći se izrazom (26)

$$K_{\mu}^1 = \sum_{\nu} \delta_{\mu\nu} K_{\nu} \quad (38)$$

Inverzna transformacija $\mathcal{L}^{-1} K^1 = K$ daje

$$K_{\nu} = \sum_{\mu} \delta_{\mu\nu}^{-1} K_{\mu}^1 \quad (39)$$

odnosno

$$K_{\nu} = \sum_{\mu} \delta_{\mu\nu}^{-1} \sum_{\lambda} \delta_{\lambda\mu} K_{\lambda} = \sum_{\mu} \delta_{\nu\mu} K_{\mu} \quad (40)$$

Početni vektor udržava svoj modul od jedne do druge koordinate sistema, nismo pisali

$$K' K' = \sum_i K_i' K_i' = \sum_i \sum_{\mu, \nu} X_{\mu} \tilde{\delta}_{\mu i} \tilde{\delta}_{i\nu} X_{\nu} = \sum_{\mu, \nu} X_{\mu} X_{\nu} \sum_i \tilde{\delta}_{\mu i} \tilde{\delta}_{i\nu} \quad (41)$$

$$K' K' = \sum_{\mu, \nu} X_{\mu} X_{\nu} \delta_{\mu\nu} \quad (42)$$

Ovde vidimo dobro svojstvo ortogonalnih transformacija koje je već ranije bilo dat:

$$\sum_i \tilde{\delta}_{ij} \tilde{\delta}_{ik} = \delta_{jk} \quad \text{ILI} \quad \sum_i \tilde{\delta}_{ji} \tilde{\delta}_{ki} = \delta_{jk} \quad \cancel{\delta_{jk}}$$

Vratimo se energiji i momentu čestica forme četvorovektora K , uvedi imaginarnu jedinicu $i = (-1)^{1/2}$

$$K = (E, i c p_x, i c p_y, i c p_z) \quad (43)$$

Ovaj izraz je invarijantan

$$K \cdot K = E^2 - c^2 p_x^2 - c^2 p_y^2 - c^2 p_z^2 = E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (44)$$

Od sada ćemo uzimati za brzinu svetlosti u vakuumu da je $c = 1$, pri čemu moment i masu izrađavamo u energijskim jedinicama. Iz relacije (42) za dva različita četvorovektora K_1^1 i K_2^1 dobijamo:

$$K_1^1 K_2^1 = K_1 K_2 \quad (45)$$

Ova relacija je praktičan rezultat koji izražava invarijantnost četvorovektora.

Koristeći četvorovektorskiju notaciju mogu se izraziti održanje energije i momenta pri interakciji čestica. Zakon održanja energije-momenta tvrdi

da je suma inicijalnih četvorovektora jednak sumi finalnih četvorovektora

$$\sum K_i = \sum K_f \quad (46)$$

sto znači

$$\sum E_i = \sum E_f, \sum P_{xi} = \sum P_{xf}, \sum P_{yi} = \sum P_{yf}, \sum P_{zi} = \sum P_{zf} \quad (47)$$

Ovaj zakon konzervacije i Lorencove transformacije fizičkih veličina predstavljaju osnove relativističke kinematike.

U izušavanju interakcije čestica neophodno je definisati pored laboratorijskog sistema i sistem centra mase (c.m. sistem).

Sistem centra mase više čestica se definise kao sistem u kom je zbir svih inicijalnih momenata (u laboratorijskom sistemu) jednak nuli.

$$\sum P_{xi} = \sum P_{yi} = \sum P_{zi} = 0 \quad (48)$$

I.6. RELATIVISTIČKA MASA, MOMENT I ENERGIJA

Laboratorijska masa čestice m_0 , predstavlja masu čestice u miru. Ako se čestica kreće linearno sa konstantnom relativnom brzinom u odnosu na mružudi sistem S u kojem je brojač nepomičan, tada je masa koju brojač meri uvećana za faktor γ . Takva masa se naziva relativistička masa, m i ona je povezana sa masom u miru m_0 izrazom

$$m = \gamma m_0 \quad (49)$$

Po analogiji sa pojmom brzine u klasičnoj mehanici, kvadrivektor brzine se definiše obrascem

$$V_M = \frac{dx_M}{dt_0} \quad (50)$$

gde je X_M kvadrivektor položaja koji je dat relacijom (13), a t_0 je sopstveno vreme koje je dato relacijom (\Rightarrow) . $dt = \gamma dt_0$ (51)

Na osnovu izraza (50) možemo naći komponenete kvadrivektora brzine

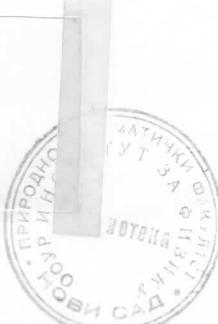
$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{dx_1}{dt_0} = \frac{dx_1}{dt} \frac{dt}{dt_0} = \gamma v_x \\ V_2 &= \frac{dx_2}{dt_0} = \frac{dx_2}{dt} \frac{dt}{dt_0} = \gamma v_y \\ V_3 &= \frac{dx_3}{dt_0} = \frac{dx_3}{dt} \frac{dt}{dt_0} = \gamma v_z \\ V_4 &= \frac{dx_4}{dt_0} = \frac{d(lit)}{dt_0} = l \frac{dt}{dt_0} = i \gamma \end{aligned} \quad (52)$$

Prema tome se kvadrivektor brzine možemo eksplisitno pisati

$$V = (V_1, V_2, V_3, V_4) = \gamma (v_x, v_y, v_z, i) \quad (53)$$

U traženju zakona fizike moramo se pridržavati kovarijantne formule fizičkih zakona na bazi dva osnovna postulata koji nisu dovoljni pa uvedimo dopunski postulat u vidu zahteva da dinamika fizičke veličine u svim inercijalnim sistemima moraju biti povezane istim relacijama kao u klasičnoj mehanici. Prema tome po analogiji sa impulsem u klasičnoj mehanici imamo kvadrivektor impulsa u relativističkoj mehanici koji je dat izrazom

$$P_M = m_0 V_M \quad (54)$$



Rjegove komponente su

$$P_k = \gamma m_0 v_k \quad k=1,2,3 \quad P_4 = i \gamma m_0 \quad (55)$$

odnosno

$$\vec{P} = (P_1, P_2, P_3, P_4) = \gamma (m_0 v_x, m_0 v_y, m_0 v_z, i m_0) \quad (56)$$

Komponentu P_4 kvadrivektora \vec{P} korespondiraju vremenske komponenti

$$P_t = \frac{P_4}{i} = \gamma m_0 \quad (57)$$

Znajući vremensku komponentu impulsa možemo odrediti totalnu energiju čestice koja se kreće

$$E_{tot} = P_t = \gamma m_0 = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} v^2 + \dots \right) \quad (58)$$

odnosno

$$E_{tot.} = m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad (59)$$

Ukoliko prvi sabirak na desnoj strani uzmemmo kao energiju čestice u miru ($E_0 = m_0$) i nazovemo je energijom mirovanja E_0 koja je data relacijom u sistemu $c = 1$

$$E_0 = m_0 \quad (60)$$

Ako drugi sabirak korespondiramo kinetičkoj energiji, E_{kin} tada viši članovi razvoja daju veću tačnost relativističke korekcije kinetičke energije tako da je

$$E_{tot.} = E_0 + E_{kin.} = \gamma m_0 = \gamma E_0 \quad (61)$$

gdje je

$$E_{kin.} = E_{tot.} - E_0 = (\gamma - 1) E_0 \quad (62)$$

Uvrštavanjem relacije (61) u relaciju (58) dobijamo izraz

$$P_4 = i E_{tot.} \quad (63)$$

odnosno tada kvadrivektor impulsa možemo napisati

$$\vec{P} = (P_x, P_y, P_z, i P_t) = (m v_x, m v_y, m v_z, i E_{tot.}) \quad (64)$$

Lorentzove transformacije za komponente impulsa su

$$P'_x = \gamma (P_x - \beta E_{tot.})$$

$$P'_y = P_y \quad (65)$$

$$P'_z = P_z$$

$$E'_{tot.} = \gamma (E_{tot.} - \beta P_x)$$

II KINEMATIKA RASSEJANJA

II 1. KARAKTERISTIKE SISTEMA CENTRA MASA

Sistem centra masa (cm) je uveden kao sistem u kome je zbir svih komponenata inicijalnih momenata jednak nuli u laboratorijskom sistemu.

$$\sum P_{xi} = \sum P_{yi} = \sum P_{zi} = 0$$

Uvođenjem ovog inercijalnog sistema, problem sudara dva tела se svedi na problem jednog tела sa mnogo manje matematičkih komplikacija. Nasa toga tela je data izrazom

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.1)$$

i naziva se redukovanim masom. Specifične redukovane mase koje će biti korisćene u razmatranju su date

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad \mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.2)$$

a odnos mase

$$\kappa = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (2.3)$$

Na osnovu izraza (2.2) sledi

$$\mu_1 = 1 - \mu_2 \quad \mu_2 = 1 - \mu_1 \quad \mu_1 \mu_2^2 = \mu_1 \mu_2 \quad \mu_2 \mu_1^2 = \mu_1 \mu_2 \quad (2.4)$$

Osnovni zadatak u ovom drugom delu rada će biti našešenje osnovnih kinematičkih veličina rasjemanja u jednom sistemu (cm ili laboratorijskom) i transformacija istih u odgovarajuće veličine drugog sistema primenom Lorenzovih transformacija.

III 2. NRERLATIVISTIČKI ELASTIČNI SUDAR ČESTICE SA MINUJUĆIM CILJEM

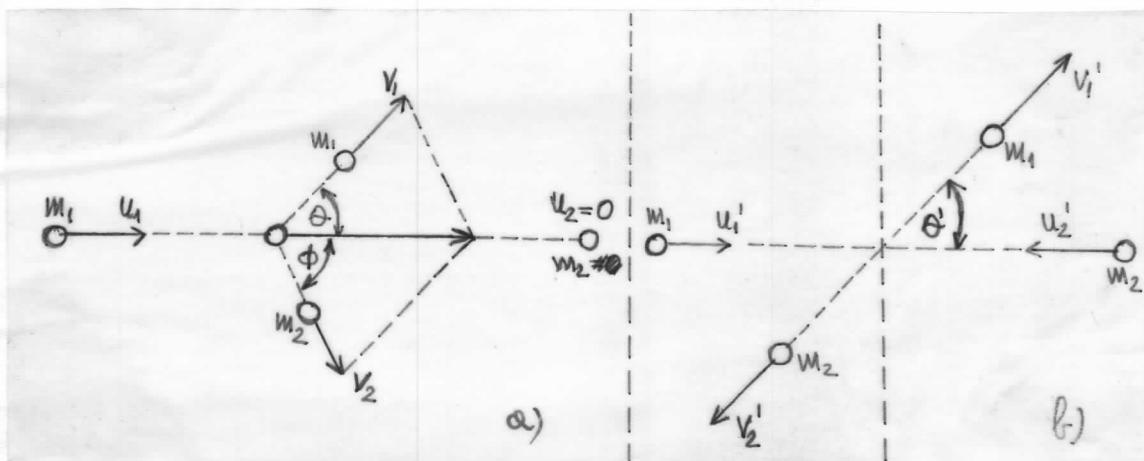
U opštem slučaju, rasjemanje nastaje sudarom dve čestice, 1 i 2 koje se nazivaju inicijalnim (početnim). U zavisnosti od odnosa mase čestica, m_1 i m_2 , od vrste sudara i od brzine inicijalnih čestica, postoji više

tipova rasejanja:

a) nerelativističko i relativističko

b) elastično i neelastično

Na ovom mestu će biti razmatran slučaj rasejanja čestice 1 koja se naziva projektilom na mirujućoj čestici 2 koju ćemo nazivati ciljem (metom). U nerelativističkom elastičnom sudaru čestica 1 se kreće brzinom u_1 koja je mnogo manja od brzine svetlosti, dok za kinetičku energiju u tom slučaju važi zakon konzervacije (održanja). U laboratorijskom sistemu ovaj problem je predstavljen na slici 5.a:



SLIKA 5

gde su uglovi θ i ϕ , uglovi rasejanja i usmaka, respektivno, za slučaj kada je $m_1 \ll m_2$. Isti problem u sistemu centra mase dat je na slici 5.b, gde je θ' ugao rasejanja u sistemu centra mase.

U zavisnosti od međusobnih veličina maza tela koja interaguju, maksimum ugla rasejanja različit je i dat je u sledećoj tablici:

Redni broj	Odnos veličina maza	θ_{\max}
1	$m_1 \ll m_2$	π
2	$m_1 = m_2$	$\pi/2$
3	$m_1 > m_2$	$\arcsin\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$

II.2.1 RELACIJE BRZINA

Brzina centra mase u sistemu centra mase je definisana kao:

$$v'_{cm} = 0 \quad (2.5)$$

pa su tada brzine inicijalnih čestica u sistemu centra mase izražene preko

odgovarajućih brzina laboratorijskog sistema relacijama

$$U_1' = U_1 - V_{CM} = (1 - \mu_1) U_1 = \mu_2 U_1 \quad (2.6)$$

$$U_2' = -V_{CM} = -\mu_1 U_1 \quad (2.7)$$

Primenom zakona konzervacije momenta može se izraziti brzina centra mase u laboratorijskom sistemu, v_{CM} (u odnosu na mirujući cilj s_2)

$$V_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} U_1 = \mu_1 U_1 \quad (2.8)$$

Poste za konetičku energiju važi zakon konzervacije energije u nerelativističkim elastičnim processima, čestice posle interakcije odstupaju od centra sudara u nekom novom pravcu ali sa istim brzinama, pinošno:

$$U_1' = v_1' = \mu_2 U_1 \quad U_2' = v_2' = \mu_1 U_1 \quad (2.9)$$

III.2.2 RELACIJE KINETIČKE ENERGIJE

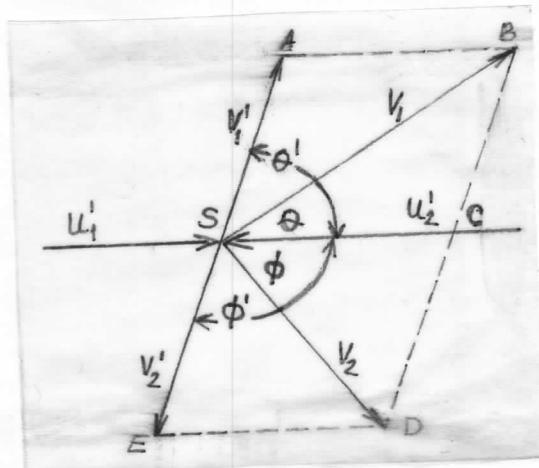
Relacije kinetičke energije su date u tabeli

Stanje	Cestica	Kinet. energ. u lab. sistemu	Kinet. energ. u sistemu cm
Početno	1	$\frac{1}{2} m_1 U_1^2$	$\frac{1}{2} m_1 U_1'^2 = \frac{1}{2} \mu_2 U_1^2$
	2	0	$\frac{1}{2} m_2 U_2'^2 = \frac{1}{2} \mu_1 U_1^2$
Krajnje	1	$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2$	$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} \mu_2 U_1^2$
	2	$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2$	$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} \mu_1 U_1^2$

$$C.M. \quad \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{CM}^2 = \frac{1}{2} \mu_1 \mu_2 U_1^2$$

III.2.3 RELACIJE UGOLOVA

Na vektorskom dijagramu datom na slici predstavljene su brzine u laboratorijskom i cm sistemu kao i uglovi rasejanja i uzanaka u oba sistema.



SLIKA 6.

Na osnovu relacije (2.9) sledi:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{BE}$$

pa je

$$\angle EBD = \angle BDE = \angle DBC = \phi = \frac{1}{2}\theta' \quad (2.10)$$

odnosno

$$\angle ABC = \theta' = \pi - 2\phi \quad (2.11)$$

Tako da je

$$\phi = \frac{1}{2}(\pi - \theta') \quad (2.12)$$

Iz trouglova BSC i SAB se dobija

$$\frac{v_1'}{\sin \theta} = \frac{v_2'}{\sin(\theta' - \theta)} \quad (2.13)$$

$$\sin(\theta' - \theta) = \frac{m_1}{m_2} \sin \theta = k \sin \theta \quad (2.14)$$

odnosno

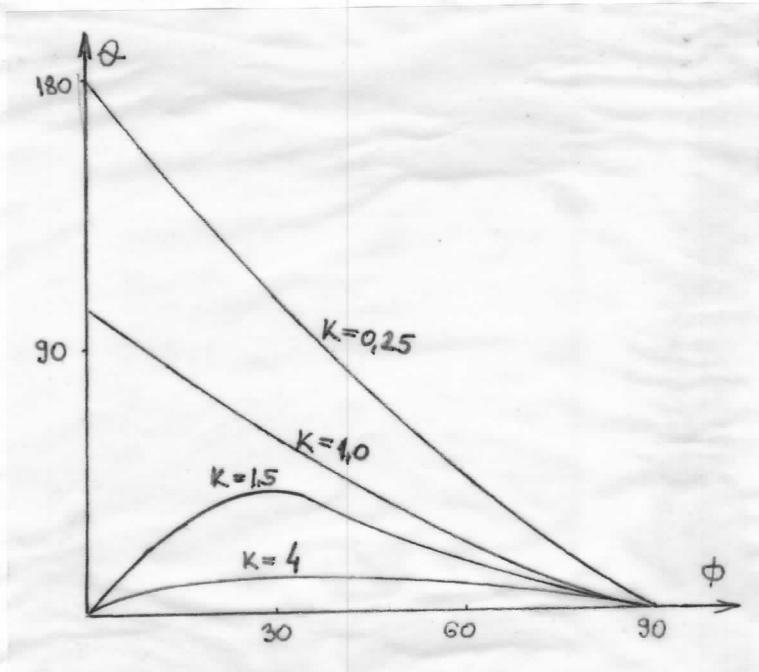
$$\tan \theta = \frac{v_1' \sin \theta}{v_2' + v_1' \cos \theta} = \frac{v_1' \sin \theta'}{m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos \theta} \quad (2.15.a)$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta'}{k - \cos 2\phi} \quad (2.15.b)$$

Ako se ugađa θ' iz relacije (2.11) zameni u relaciju (2.15) dobija se izraz koji povezuje ugao rasejanja θ sa usmernim ugлом u laboratorijskom sistemu.

$$\tan \theta = \frac{\sin 2\phi}{k - \cos 2\phi} \quad (2.16)$$

Na donjoj slici je data zavisnost ugla rasejanja θ od usmernog ugla ϕ za određene vrednosti mass



SLIKA 7.

III.2.4 RELACIJE BRZINA, ENERGIJA I UGOLOVA U
LABORATORIJSKOM SISTEMU

Primenom zakona konzervacije momenta sa vektorskog dijagrama duž pravca brzine v_2 se dobija

$$m_1 v_i \sin(\theta + \phi) = m_1 v_f \sin \phi \quad (2.17)$$

odnosno, odnos brzina čestice posle i pre sudara je

$$\frac{v_f}{v_i} = \frac{\sin \phi}{\sin(\theta + \phi)} \quad (2.18)$$

Iz relacije (2.18) može se naći odnos krajnje i početne kinetičke energije čestice 1.

$$\frac{(E_1)_f}{(E_1)_i} = \frac{\sin^2 \phi}{\sin^2(\theta + \phi)} \quad (2.19)$$

Primenom zakona konzervacije momenta duž pravca \overline{SC} dobija se relacija

$$m_1 u_i = m_1 v_i \cos \theta + m_2 v_2 \cos \phi \quad (2.20)$$

odnosno

$$\frac{v_2}{u_i} = \frac{m_1}{m_2} \frac{1}{\cos \phi} \left(1 - \frac{u_i}{v_i} \cos \phi \right) \quad (2.21)$$

Zasenom izraza (2.18) u (2.21) se dobija

$$\frac{v_2}{u_i} = \frac{k \sin \theta}{\sin(\theta + \phi)} \quad (2.22)$$

a iz te relacije se može naći odnos kinetičke energije krajnjeg stanja čestice 2 i početnog stanja čestice 1

$$\frac{(E_2)_f}{(E_1)_i} = \frac{k^2 \sin^2 \theta}{\sin^2(\theta + \phi)} \quad (2.23)$$

Pošto je iz relacije (2.9), $m_2 u'_2 = v_2$ odnosno $\overline{SC} = \overline{SD}$ sledi

$$v_2 = 2(\overline{SC}) \cos \phi = 2u'_2 \cos \phi = 2m_1 u_i \cos \phi \quad (2.24)$$

odnosno

$$\frac{v_2}{u_i} = 2m_1 \cos \phi \quad (2.25)$$

Pa se relacija (2.23) može napisati u obliku

$$\frac{(E_2)_f}{(E_1)_i} = 4m_1 m_2 \cos^2 \phi \quad (2.26)$$

Maksimum kinetičke energije koja može biti prenesena na telo-metu se može dobiti iz relacije (2.26) stavljajući za ugao uzmaka $\phi = 0$.

$$E_{max} = 4m_1 m_2 (E_1)_i \quad (2.27)$$

Na osnovu relacija (2.26) i (2.27) može se dobiti kinetička energija čestice 2 posle sudara

$$(E_2)_f = E_{\max} \cos^2 \phi \quad (2.28)$$

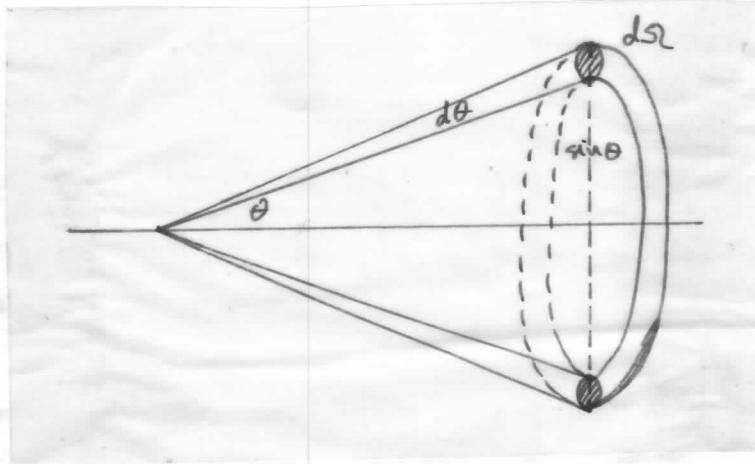
III.2.5 RELACIJE PROSTORNIH UGOLOVA

Kao što je dato na slici 8, elemenat prostornog ugla $d\Omega_L$ u laboratorijskom sistemu između površina konusa sa uglovima θ i $\theta + d\theta$ respektivno dat je izrazom

$$d\Omega_L = 2\pi \sin \theta \, d\theta \quad (2.29)$$

U sistemu centra mase odgovarajući elemenat prostornog ugla dat je kao

$$d\Omega' = 2\pi \sin \theta' \, d\theta' \quad (2.30)$$



SLIKA 8

Veza između elemenata prostornog ugla u laboratorijskom i u sistemu centra mase može se dobiti koristeći se izrazima (2.15. a), (2.29) i (2.30)

$$d\Omega_L = \frac{1 + K \cos \theta'}{(1 + 2K \cos \theta' + K^2)^{3/2}} d\Omega' \quad (2.31)$$

III.2.6 RELACIJE INTENZITETA

Shodno dosadašnjem obeležavanju uglova intenzitet čestica u laboratorijskom sistemu u zavisnosti od ugla rasjemanja, ob sledećem sa $I(\theta)$ dok ćemo odgovarajuće intenzitete u sistemu centra mase obeležiti sa $I(\theta)$. Problem se pojednostavljuje predpostavkom da je distribucija sistema centra mase

izotropna, odnosno da je $I(\theta) = \text{const.}$ Tada možemo pisati

$$I(\theta) d\Omega = I(\theta') d\Omega' \quad (2.32)$$

odnosno

$$\frac{I(\theta)}{I(\theta')} = \frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{2\pi \sin \theta' d\theta'}{2\pi \sin \theta d\theta} = \frac{d(\cos \theta')}{d(\cos \theta)} \quad (2.33)$$

Kako iz relacije (2.15.a) sledi

$$\cos \theta' = -K \sin^2 \theta \pm (1 - K^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \cos \theta \quad (2.34)$$

To zamenom (2.34) u (2.33) dobijamo

$$\frac{d(\cos \theta')}{d(\cos \theta)} = 2K \cos \theta \mp \frac{1 - K^2 + 2K^2 \cos^2 \theta}{(1 - K^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \quad (2.35)$$

Pošto je intenzitet veličina koja ne može biti negativna, to ni odnos intenziteta ne može biti negativan, pa oibacujudi rešenje sa negativnim znakom, dobijamo za odnos intenziteta izraz

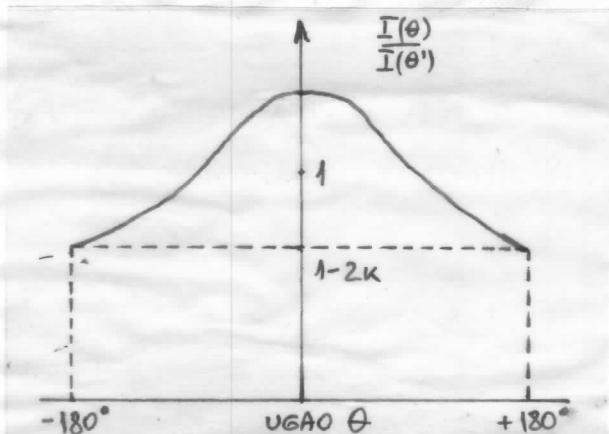
$$\frac{I(\theta)}{I(\theta')} = \frac{[(1 - K^2 \sin^2 \theta)^{1/2} + K \cos \theta]^2}{(1 - K^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \quad (2.36)$$

U zavisnosti od odnosa masu, k, postoje tri specijalna slučaja

a) za $k \ll 1$, imamo rasejanje luke čestice na teškom cilju. U tom slučaju intenzitet je dat relacijom

$$I(\theta) \approx (1 + K \cos \theta) I(\theta') \quad (2.37)$$

Odnos intenziteta za ovaj slučaj u zavisnosti od ugla θ dat je na sl. 9



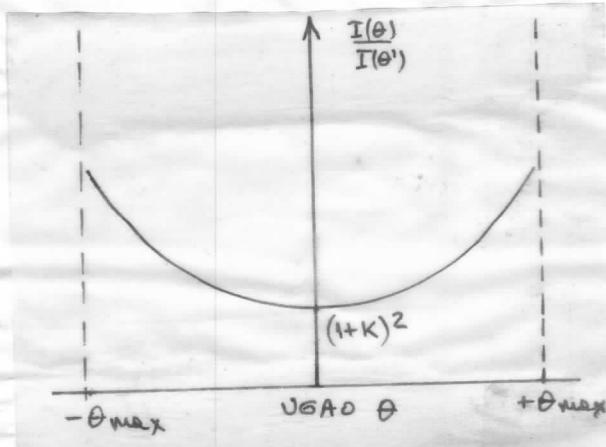
SLIKA 9.

b) $k \gg 1$, rasejanje teške čestice na laku cilju. Maksimum ugla rasejanja je tada dat relacijom

$$\sin \theta_{\max} \approx \theta_{\max} = \frac{1}{K} \quad (2.38)$$

$$\bar{I}(\theta) = \left\{ 2K + \frac{1+K^2}{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\theta_{\max}} \right)^2 \right]^{1/2}} \right\} I(\theta') \quad (2.39)$$

U ovom slučaju zavisnost intenziteta od ugla rasejanja je data na slici 10

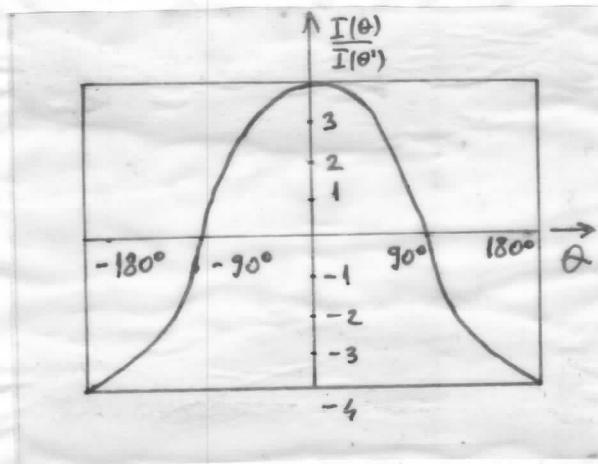


SLIKA 10

c) za $k = 1$, sudar čestica istih maza, pri čemu je intenzitet dat reacijom

$$\bar{I}(\theta) = \zeta \cos \theta \bar{I}(\theta') \quad (2.40)$$

U ovom slučaju odnosi intenziteta u zavisnosti od ugla θ dat je na sl. 11



SLIKA 11

Na kraju ovog poglavlja o nerelativističkoj kinematici elastičnog rasejanja pokudemo da damo sistematizaciju označke veličina i nerelativističkih izraza za elastično rasejanje koji su dobijeni u ovom delu. U tabeli 1 data je pregledna notacija veličina koje opisuju elastično rasejanje čestice na mirujućoj meti.

TABELA 1

LABORATORIJSKI

VELIČINA

Inicijalna brzina
tela 1

SISTEM

 v_1

C.M. SISTEM

 v_1' Inicijalna brzina
tela 2 $v_2 = 0$ v_2' Finalna brzina
tela 1 v_1 $|v_1'| = |v_1|$ Finalna brzina
tela 2 v_2 $|v_2'| = |v_2|$ Brzina sistema
centra mase $v_{CM} = |v_2'|$ $v_{CM}' = 0$ Inicijalna kinet.
energija tela 1 $(E_1)_i$ $(E_1')_i$ Inicijalna kinet.
energija tela 2 $(E_2)_i = 0$ $(E_2')_i$ Finalna kinetička
energija tela 1 $(E_1)_f$ $(E_1')_f$ Finalna kinetička
energija tela 2 $(E_2)_f$ $(E_2')_f$ Ugao rasejanja
tela 1 θ θ' Ugao uzimaka
tela 2 ϕ ϕ' Specifična redukovana
masa tela 1

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Specifična redukovana
masa tela 2

$$\mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Reducovana masa

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Odnos masa

$$k = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

TABELA 2

NERELATIVISTIČKE FORMULE ELASTIČNOG RASEJANJA

VELIĆINA	FORMULA
Odnos kinet. energija u lab. i cm sistemu za telo 1	$\frac{(E_1')_i}{(E_1)_i} = \frac{(E_1')_f}{(E_2)_f} - M_2^2$
Odnos kinet. energija uzmaknute čestice u cm sistemu i upadne čestice u lab. sistemu	$\frac{(E_2')_f}{(E_1)_i} = M_1 M_2$
Odnos finalne i inicijalne kinet. energije čestice 1 u lab. sistemu	$\frac{(E_1)_f}{(E_1)_i} = 1 - M_1 M_2 (1 - \cos \theta') =$ $= M_2^2 [\cos \theta \pm (\frac{1}{M_2} - \sin^2 \theta)^{1/2}]^2$
Odnos finalne kinet. energ. tela 2 i inicijalne kinet. energ. tела 1 u lab. sistemu	$\frac{(E_2)_f}{(E_1)_i} = 1 - \frac{(E_1)_f}{(E_1)_i} = 4 M_1 M_2 \cos^2 \phi$
Ugao uzmaka u lab. sistemu	$\phi = \frac{1}{2} \phi' - \frac{1}{2} (\pi - \theta') ; \phi \leq \frac{\pi}{2}$
Ugao rasejanja u lab. sistemu	$\sin \phi = \left[K \frac{(E_1)_f}{(E_1)_i} \right]^{1/2} \sin \theta$
Ugao uzmaka u cm sistemu	$\tan \theta = \frac{\sin \theta'}{K + \cos \theta'} = \frac{\sin 2\phi}{K - \cos 2\phi}$
Odnosi intenziteta ili prostornih uglova za rasejanu česticu	$\phi' = 2\phi = \pi - \theta'$ $\frac{I(\theta')}{I(\theta)} = \frac{dS_2}{dS_1} = \frac{\sin \theta d\theta}{\sin \theta' d\theta'} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta'} \cos(\theta' - \theta) =$ $= M_1 M_2 \frac{(E_1)_i}{(E_1)_f} \left(\frac{1}{M_2^2} - \sin^2 \theta \right)^{1/2}$
Odnos intenziteta za uzmak- nutu česticu	$\frac{I(\phi')}{I(\phi)} = \frac{\sin \phi d\phi}{\sin \phi' d\phi'} = \frac{1}{4 \cos \phi}$

II.3 RELATIVISTIČKI ELASTIČNI SUDAR ČESTICE SA MIRUJUĆIM METOM

Ovaj problem ćemo rešavati u četverovektorskoj notaciji. U toj formi pisanja za početni moment imamo sledeće relacije

$$\begin{aligned} \text{za česticu 1 u lab. sistemu} \quad p_1 &= (p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, iE_{\text{tot}}^{(1)}) \\ \text{za česticu 1 u cm sistemu} \quad p_1' &= (p_{1x}', p_{1y}', p_{1z}', iE_{\text{tot}}'^{(1)}) \\ \text{za česticu 2 u lab. sistemu} \quad p_2 &= (0, 0, 0, E_0^{(2)}) \\ \text{za česticu 2 u cm sistemu} \quad p_2' &= (p_{2x}', p_{2y}', p_{2z}', iE_{\text{tot}}'^{(2)}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ako su p_1' označimo finalni moment čestice 1 u cm sistemu, a su p_2' finalni moment čestice 2 u cm sistemu, sa p_0 apsolutnu veličinu momenta, tada možemo pisati komponente momenta čestice 1 (u x-y ravni)

$$p_{1x}' = +p_0 \cos \theta' \quad p_{1y}' = p_0 \sin \theta' \quad p_{1z}' = 0 \quad (2.42)$$

Na osnovu zakona konzervacije momenta, suma finalnih momenta mora biti jednak nuli pa možemo pisati za komponente momenta čestice 2 relaciju

$$p_{2x}' = -p_{1x}' = -p_0 \cos \theta' \quad p_{2y}' = -p_{1y}' = -p_0 \sin \theta' \quad p_{2z}' = -p_{1z}' = 0 \quad (2.43)$$

II.3.1 RELACIJE BRZINA

Koristeći se izrazom za četveromoment

$$\bar{P} = (P_1, P_2, P_3, P_4) = \gamma(m_0 v_x, m_0 v_y, m_0 v_z, i m_0)$$

za moment u cm sistemu pre rasjemanja možemo pisati

$$p_i' = \gamma_i' m_i v_i = m_i \beta_i' \gamma_i' = m_i [\gamma_i'^2 - 1]^{1/2} \quad (2.44)$$

$$p_2' = m_2 [\gamma_2'^2 - 1]^{1/2} = p_1' \quad (2.45)$$

Poredi relacije (2.45) i (2.44) nalazimo

$$m_1^2 [\gamma_1'^2 - 1]^{1/2} = m_2^2 [\gamma_2'^2 - 1]^{1/2} \quad (2.46)$$

$$\text{gde su } \beta_i' = v_i' \text{ i } \gamma_i' = [\gamma_i'^2 - 1]^{1/2} \quad i=1,2$$

Oznake koje su bile već ranije date. Na ovom mestu uvodimo novu oznaku koja omogućuje lakše i preglednije pisanje

$$\gamma' = \frac{\beta_2'}{\beta_1'} \quad (2.47)$$

Ukoliko uzmem da je $v_{cm} = v_2'$ a obziren na pravac x, laboratorijskog

sistema i napišemo transformaciju za moment-energiju datu izrazom (1.65) za ovaj slučaj kao:

$$\gamma p_1 = \gamma'_2 (\gamma'_1 - \beta'_2 E'_{tot}) \quad (2.48)$$

gdje je

$$p_1 = \gamma_1 m_1 u_1 = m_1 \beta_1, \gamma_1 = m_1 \sqrt{(\gamma_1)^2 - 1}^{1/2} \quad (2.49)$$

$$E'_{tot} = \gamma_1 m_1 \quad (2.50)$$

na osnovu relacija (2.44), (2.48) i (2.49) sledi

$$\gamma'_2 \sqrt{(\gamma_1)^2 - 1}^{1/2} - \gamma_1 \sqrt{(\gamma'_2)^2 - 1}^{1/2} = \sqrt{(\gamma'_1)^2 - 1}^{1/2} \quad (2.51)$$

Zamenjujući relacije (2.51) u (2.46) dobijamo

$$\gamma'_2 \sqrt{(\gamma_1)^2 - 1}^{1/2} - \left(\frac{1}{\kappa} + \gamma_1 \right) \sqrt{(\gamma'_2)^2 - 1}^{1/2} = \sqrt{(\gamma'_1)^2 - 1}^{1/2} \quad (2.52)$$

$$\frac{\sqrt{(\gamma_2)^2 - 1}}{\left[\left(\frac{1}{\kappa} + \gamma_1 \right)^2 \right]^{1/2}} = 1 - \frac{1}{(\gamma'_2)^2} \quad (2.53)$$

$$\gamma'_2 = \frac{\frac{1}{\kappa} + \gamma_1}{\left[1 + \frac{1}{\kappa^2} + 2 \frac{\gamma_1}{\kappa} \right]^{1/2}} = \gamma_{c.m.} \quad (2.54)$$

i analogno

$$\gamma'_1 = \frac{\frac{1}{\kappa} + \gamma_2}{\left[1 + \frac{1}{\kappa^2} + 2 \kappa \gamma_2 \right]^{1/2}} \quad (2.55)$$

Izrazi (2.54) i (2.55) daju brzine u cm sistemu preko odgovarajućih brzina laboratorijskog sistema.

II.3.2 ENERGLJA U SISTEMU CENTRA MASA

U prvom delu rada definisane su energija mirovanja i totalna energija kao

$$E_0 = m_0 \quad E_{tot} = E_0 + E_{kin} = \gamma m_0 = \gamma E_0$$

Primenom relativističke transformacije energije-momenta datu izrazom (1.65) za česticu 1 dobijamo

$$E'^{(1)}_{tot} = \gamma'_2 (E'^{(1)}_{tot} - \beta'_2 p_1) = \gamma'_1 m_1 \quad (2.56)$$

Ako izraze za $E'^{(1)}_{tot}$ i p_1 iz relacija (2.49) i (2.50) zamenimo u (2.56) dobijamo

$$\gamma'_2 (\gamma_1 m_1 - \beta'_2 m_1 \beta_1 \gamma_1) = \gamma'_1 m_1$$

$$\gamma_2' \gamma_1 - [\gamma_2'^2 - 1]^{1/2} [\gamma_1^2 - 1]^{1/2} = \gamma_1' \quad (2.57)$$

Ukupna kinetička energija u sistemu cm je definisana kao

$$E_{cm}^1 = E_{min}^{(1)} + E_{min}^{(2)} \quad (2.58)$$

Koristeći se izrazom (1.61) dobijamo

$$E_{min}^{(1)} = E_{tot}^{(1)} - E_0^{(1)} = m_1 (\gamma_1' - 1)$$

$$E_{min}^{(2)} = E_{tot}^{(2)} - E_0^{(2)} = m_2 (\gamma_2' - 1)$$

pa uvrštavajući te u (2.58) sledi

$$E_{cm}^1 = m_1 \left\{ \gamma_2' \gamma_1 - [\gamma_2'^2 - 1]^{1/2} [\gamma_1^2 - 1]^{1/2} \right\} + m_2 (\gamma_2' - 1) \quad (2.59)$$

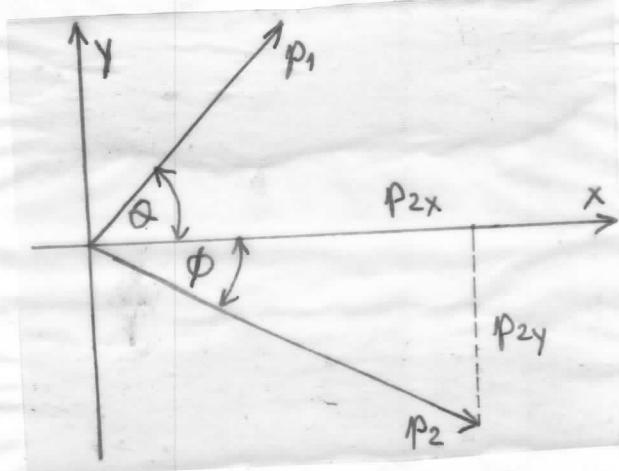
II.3.3 UGAONE RELACIJE

Za česticu 1 posle sudara inverzna transformacija energije-momenta je

$$p_{1x}' = \gamma_2' (p_{1x} + \beta_2' E_{tot}^{(1)}) = \gamma_2' (p_{1x} + \beta_2' \gamma_1 m_1) \quad (2.60)$$

za $p_{1y}' = p_{1y}$ i $p_{1z}' = p_{1z} = 0$

U laboratorijskom sistemu ovaj problem je dat na slici 12.



SLIKA 12

gdje je ϕ ugao usmaka, a θ ugao rasejanja ako je upadna čestica mnogo manje mase od mase čestice mete.

U sistemu cm komponente momenta p_1 su

$$p_{1x}' = p_1' \cos \theta' \quad (2.61)$$

$$p_{1y}' = p_1' \sin \theta' \quad (2.62)$$

Korišćenjem relacije (2.47) i zamenom relacije (2.61) u (2.60) dobijamo

$$p_{1x} = \gamma_2' p_1' (\cos \theta' + \delta') \quad (2.63)$$

Znajući komponente momenta čestice 1 u laboratorijskom sistemu možemo odrediti ugao rasejanja

$$\tan \theta = \frac{p_{1y}}{p_{1x}} = \frac{\sin \theta'}{\gamma_2' (\cos \theta' + \delta')} \quad (2.64)$$

Poredjenjem izraza (2.64) sa izrazom (2.15.a) dolazimo do zaključka koji je i očekivan, da se ugao rasejanja u laboratorijskom sistemu u zavisnosti od ugla rasejanja u sistemu cm, bitno razlikuje za relativistički i nerelativistički slučaj.

III.3.4 KINETIČKA ENERGIJA U LABORATORIJSKOM SISTEMU

Korišćenjem transformacije energije-momenta

$$E_{tot}^{(2)} = \gamma_2' (E_{tot}^{(2)} + \beta' p_2')$$

i izraza

$$(E^{(2)})_{tot} = \gamma_2' E_0^{(2)}$$

$$p_{2x}' = -m_2 \beta_2' \gamma_2' \cos \theta' \quad (2.65)$$

dobijamo izraz za kinetičku energiju rasejanja u laboratorijskom sistemu

$$(E_{min}^{(2)}) = E_{tot}^{(2)} - E_0^{(2)} = \gamma_2' (\gamma_2' - \gamma_2' \beta_2' \cos \theta') E_0^{(2)} - E_0^{(2)}$$

$$E_{min}^{(2)} = m_2 [(\gamma_2')^2 - 1] [1 - \cos \theta'] \quad (2.66)$$

ili u zavisnosti od uzmaknutog ugla ϕ

$$E_{min}^{(2)} = 2m_2 \frac{(\gamma_2')^2 - 1}{(\gamma_2')^2 \tan \phi + 1} \quad (2.67)$$

koristeći pri tome smenu

$$\cos \theta' = \frac{(\gamma_2')^2 - (\gamma_2')^2 \cos^2 \phi - \cos^2 \phi}{(\gamma_2')^2 - (\gamma_2')^2 \cos^2 \phi + \cos^2 \phi} \quad (2.68)$$

Analizirajući izraz (2.67), dolazimo do zaključka da rasejana energija dostiže maksimum za $\phi = 0$ kao i u nerelativističkoj aproksimaciji.

Kliminacijom γ_2' iz (2.67) sa (2.54) dobijamo relaciju

$$E_{\text{kin}}^{(2)} = 2m_2 \frac{\kappa^2 (\gamma_1^2 - 1) \cos^2 \phi}{(1 + \kappa \gamma_1)^2 + (1 - \gamma_1)^2 \kappa^2 \cos^2 \phi} \quad (2.69)$$

koja pomoću relacija (2.50) i (2.51) može biti napisana u obliku

$$E_{\text{kin}}^{(2)} = 2m_2 \frac{p_1^2 \cos^2 \phi}{(E_{\text{tot}}^{(1)} + m_2) - p_1^2 \cos^2 \phi} \quad (2.70)$$

Nakon sume kinetičke energije koju upadna čestica može predati meti dobije se iz relacije (2.69) stavljajući $\phi = 0$

$$(E_{\text{kin}}^{(2)})_{\max} = E_{\text{kin}}^{(1)} \frac{2\kappa(\gamma_1 + 1)}{1 + 2\kappa\gamma_1 + \kappa^2} \quad (2.71)$$

Iz relacije (2.71) vidi se da odnos $\frac{(E_{\text{kin}}^{(2)})_{\max}}{(E_{\text{kin}}^{(1)})}$ zavisi od γ_1 , u relativističkom slučaju. U nerelativističkom slučaju ovaj odnos je bio dat u zavisnosti od specifičnih redukovanih masa m_1 i m_2 . U ekstremnom relativističkom slučaju (za $\gamma \gg 1$) odnos $\frac{(E_{\text{kin}}^{(2)})_{\max}}{E_{\text{kin}}^{(1)}}$ iz izraza (2.71) teži 1, odnosno upadna čestica predaje svu energiju meti.

II.3.5 RELACIJE PROSTORNIH UGOLOVA

Elementi prostornog ugla u relativističkom slučaju zadržavaju istu formu kao u nerelativističkom slučaju, pa slijede poznate relacije

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta \, d\theta = 2\pi d(\cos \theta)$$

$$d\Omega' = 2\pi \sin \theta' \, d\theta' = 2\pi d(\cos \theta')$$

odnosno

$$\frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{d(\cos \theta)}{d(\cos \theta')} \quad (2.72)$$

Diferencirajući izraz (2.64) i zamenjujući ga u (2.72) dobijamo

$$\frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{\gamma_2' (1 + \delta' \cos \theta')}{[\sin^2 \theta' + (\gamma_2')^2 (\cos \theta' + \delta')^2]^{3/2}} \quad (2.73)$$

III.3.6 RELACIJE INTENZITETA

Po analogiji sa odnosom intenziteta u relativističkom slučaju sledi

$$\frac{I(\theta')}{I(\theta)} = \frac{ds_2}{ds'_1} = \frac{d(\cos\theta)}{d(\cos\theta')}$$

Korišćenjem relacija (2.73) za odnos intenziteta se dobija

$$\frac{I(\theta')}{I(\theta)} = \frac{\gamma_2' (1 + \delta' \cos\theta')}{[\sin^2\theta' + (\gamma_2')^2 (\cos\theta' + \delta')^2]^{3/2}} \quad (2.74)$$

Iraz (2.74) daje zavisnost odnosa intenziteta od ugla rasejanja u sistemu cm. Odnos intenziteta je podesnije i lakše dati u zavisnosti od rasejanog ugla u laboratorijskom sistemu. Da bi našli taj odnos, prvo se mora naći $\cos\theta' = f(\theta)$.

Iz relacije (2.64) sledi

$$\cos\theta' = \frac{-(\gamma_1')^2 \delta' \sin^2\theta \pm \sqrt{[(\gamma_1')^2 (1 - \delta')^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta]^2 - 4(\gamma_1')^2 \delta' \sin^2\theta \cos^2\theta}}{(\gamma_1')^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta} \quad (2.75)$$

pa se konačno za odnos intenziteta u zavisnosti od ugla rasejanja u laboratorijskom sistemu dobija izraz

$$\frac{I(\theta')}{I(\theta)} = \frac{[(\gamma_1')^2 (1 - \delta')^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta]^{1/2} [(\gamma_1')^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta]^{1/2}}{K} \quad (2.76)$$

gde je

$$K = \left\{ \pm (\gamma_1')^4 (1 - \delta')^2 \sin^4\theta + (\pm \gamma_1'^2 \pm \gamma_1'^2 \delta'^2 - 2\gamma_1'^2 \delta'^2) \sin^2\theta \cos^2\theta + \gamma_1'^2 \delta'^2 [(\gamma_1')^2 (1 - \delta'^2) \sin^2\theta + \cos^2\theta]^{1/2} \right\}^{1/2} \cos\theta + (\mp \gamma_1'^2 \pm \gamma_1'^2 \delta'^2 - 2\gamma_1'^2 \delta'^2)^{1/2}$$

III.4 POPREČNI PRSEK, DEFINICIJA I TRANSFORMACIJA

(2.72)

Označimo zapreminu interakcije sa V i vreme merenja sa T . Razmotrimo jediničnu zapreminu unutar zapremine interakcije. Broj čestica u jediničnoj zapremini za vreme T , proporcionalan je gustini čestica S i broju čestica koje su prošle kroz površinu f u jedinici vremena T , tj. fT . Broj čestica u zapremini interakcije V jednak je broju čestica u jediničnoj zapremini po-

u množenom zapreminom V.

$$N = S \times f T \times V \quad (2.78)$$

gde je \bar{G} faktor proporcionalnosti koji zavisi od S , f , T i V . Ovaj faktor proporcionalnosti se naziva totalni (ukupni) poprečni presek. Iz relacije (2.78) sledi

$$\bar{G} = \frac{N}{S f T V} \quad (2.79)$$

odakle se vidi da je dimenzija poprečnog preseka

$$[\bar{G}] = \frac{[N]}{[S][f][T][V]} = \frac{1}{[\text{DUŽINA}]^{-3} [\text{DUŽINA}]^{-2} [\text{VREME}]^{-1} [\text{DUŽINA}]^3 [\text{VREME}]^1}$$

odnosno

$$[\bar{G}] = [\text{DUŽINA}]^2$$

To je definicija totalnog poprečnog preseka u laboratorijskom sistemu. Međutim ukupni poprečni presek za dati proces je isti u svim sistemima. Imajući poprečni presek u laboratorijskom sistemu i koristeći se Lorencevim transformacijama može se odrediti poprečni presek u sistemu cm. Izraz (2.79) za poprečni presek dat je u zavisnosti od veličina datih u laboratorijskom sistemu. Ovaj izraz može biti dat u zavisnosti od drugih veličina koje su lakše merljive. Veličina

$$l = fVT \quad (2.80)$$

predstavlja zbir duljina svih ulaznih trageva u cilju pa je zbog toga lako merljiva. Poprečni presek je tada dat izrazom

$$\bar{G} = \frac{N}{l \cdot S} \quad (2.81)$$

koji se često koristi u praksi.

Neke teorijske računice su prostije u sistemu centra masa pa je zbog toga veoma valno izraziti poprečni presek preko veličina definisanih u tome sistemu. Uzmimo da je broj posmatranih dogadjaja N skalarna veličina nezavisna od stanja kretanja posmatrača. Šta više, proizvod VT , tj. četvorodimenzijska zapremina je takođe skalar. Zbog toga je dovoljno da proizvod $f l a l S l a b$ nadjemo u zavisnosti od kovarijantnih veličina. Da bismo to pokazali podjimo

od invarijantnog izraza koji je u laboratorijskom sistemu jednak proizvodu $f_{\text{lab}} S_{\text{lab}}$:

$$S_1 S_2 F = \frac{S_1 S_{\text{lab}}}{m_1 m_2} \left[(p_1^M p_{2M})^2 - m_1^2 m_2^2 \right]^{1/2} \quad (2.82)$$

gde su S_1 i S_2 gustine čestica (t.j. broj čestica po jedinici zapremine) u stanju mirovanja, m_1 , m_2 i p_1 , p_2 su mase i četveromomenti odgovarajućih čestica koji zadovoljavaju relaciju

$$p_1^M p_{2M} = E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \quad (2.83)$$

Ako upadnu česticu označimo indeksom 1 a česticu metu indeksom 2, u laboratorijskom sistemu isamo:

$$p_{2M} = (0, 0, 0, m_2) \quad S_2 = S_{\text{lab}} \quad (2.84)$$

odnosno

$$S_1 S_2 F = \frac{S_1 S_{\text{lab}}}{m_1 m_2} \left[(E_{\text{lab}} m_2)^2 - (m_1^2 m_2^2) \right]^{1/2} = \frac{S_1 S_{\text{lab}}}{m_1} \left[E_{\text{lab}}^2 - m_1^2 \right]^{1/2}$$

$$S_1 S_2 F = \frac{S_1 f_{\text{lab}}}{m_1} S_{\text{lab}} \quad (2.85)$$

Pošto je

$$S_1 \frac{f_{\text{lab}}}{m_1} = S_1 \frac{V}{(1-v^2)^{1/2}} = f_{\text{lab}} \quad (2.82)$$

sledi

$$f_{\text{lab}} S_{\text{lab}} = S_1 S_2 F \quad (2.88)$$

pa zamenom u izraz (2.79) sledi za izraz za poprečni presek u nekom referentnom sistemu

$$\bar{\sigma} = \frac{N}{S_1 S_2 F V T} \quad (2.89)$$

U sistemu cm izraz (2.89) je oblika

$$\bar{\sigma} = \frac{N}{S_1 S_2 \frac{p(E_1 + E_2)}{m_1 m_2} V T} \quad (2.90)$$

gde su E_1 i E_2 energije čestica, p je apsolutna vrednos njihovog trodimenzionog momenta.

Definicija diferencijalnog poprečnog preseka $d\bar{\sigma}$ je analogna definiciji totalnog poprečnog preseka $\bar{\sigma}$ samo sa tom razlikom što umesto ukupnog broja

dogadjaja N (čestica) za dati proces u ovom slučaju imamo samo des tih događaja dN.

$$d\bar{\sigma} = \frac{dN}{S_1 S_2 F V T} \quad (2.91)$$

Ako ugao rasejanja čestica leži u intervalu θ i $\theta + d\theta$ onda će za malo $d\theta$ broj odgovarajućih dogadjaja biti proporcionalan sa $d\theta$, odnosno

$$dN = f(\theta) d\theta \quad (2.92)$$

pa za poprečni presek koristeći izraz (2.91) sledi

$$d\bar{\sigma} = \frac{f(\theta) d\theta}{S_1 S_2 F V T} \quad (2.93)$$

Totalni poprečni presek se nalazi integracijom

$$\bar{\sigma} = \int d\bar{\sigma} = \int \frac{f(\theta) d\theta}{S_1 S_2 F V T} \quad (2.94)$$

i predstavlja invarijantnu veličinu. Poprečni presek je funkcija od ugla θ pa je i $\frac{d\bar{\sigma}}{d\theta}$ invarijantna veličina.

Uzmimo na primer proces tipa

$$A + B = C + D + E$$

Dalje razmatranje poprečnog preseka će se odnositi na procese ovoga tipa, što ništa neće umanjiti opštost izvedenih relacija. Ograničenje na procese ovoga tipa je isključivo zbog toga da bi eksplicitno i na lakši način izrazili dobijene rezultate. Momenti pojedinih čestica A, B, C, D i E označeni su sa p_1, p_2, k_1, k_2 i k_3 respektivno u daljem tekstu.

Najopštiji diferencijalni poprečni presek za dati proces je

$$d\bar{\sigma} = \frac{f(p_1, p_2, k_1, k_2, k_3) d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3}{S_1 S_2 F V T} \quad (2.95)$$

gde je

$$dN(p_1, p_2, k_1, k_2, k_3) = f(p_1, p_2, k_1, k_2, k_3) d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 \quad (2.96)$$

broj svih dogadjaja nekog procesa u intervalu izmedju k_i i $k_i + dk_i$, ($i=1, 2, 3$), respektivno.

Proizvod $d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3$ se naziva fazno-prostorni faktor. Trodimenzioni

zapreminski elemenat u momentnom prostoru d^3k nije invarijantna veličina, odnosno ni funkcija $f(p_1, p_2, k_1, k_2, k_3)$ takođe nije invarijantna funkcija. Međutim kako je ranije naglašeno diferencijalni poprečni presek je invarijantna veličina. Da bi i desna strana relacije (2.95) bila invarijantna, moramo tu stranu podeliti nekom invarijantnom veličinom tako da celu desnu stranu bude jedna invarijantna veličina. Podelimo desnu stranu jednakosti (2.95) sa E gde je $E = (|k|^2 + m^2)^{1/2}$ invarijantna veličina tako da dobijamo invarijantnu veličinu d^3k/E .

Dokaz: veličina $d^4K \delta(k^n K_P - \mu^2) \theta(K_0)$ je invarijantna veličina koja se može napisati kao

$$\begin{aligned} d^4K \delta(k^n K_P - \mu^2) \theta(K_0) &= d^3K dE \delta(E^2 - |k|^2 - \mu^2) \theta(E) = \\ &= d^3K dE \frac{\delta(E - \sqrt{|k|^2 + \mu^2})}{2E} = \frac{d^3K}{2E} \end{aligned}$$

Poprečni presek je dat izrazom

$$d\bar{\sigma} = \frac{G(p_1, p_2, k_1, k_2, k_3)}{S_1 S_2 F V T} \frac{d^3k_1}{E_1} \frac{d^3k_2}{E_2} \frac{d^3k_3}{E_3} \quad (2.92)$$

U ovom izrazu funkcija $G(p_1, p_2, k_1, k_2, k_3)$ je invarijantna funkcija od momenata p_1, p_2, k_1, k_2, k_3 .

II.5 S - MATRICA I NJENA FIZIČKA INTERPRETACIJA

Početno stanje, tj. stanje pre rasejanja čine dva snopa čestica sa momentima p_1 i p_2 pa možemo pisati

$$|\dot{i}\rangle = |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \quad (2.93)$$

gde $|\dot{i}\rangle$ predstavlja početno stanje. Za vreme interakcije početno stanje je anihilirano i novo stanje je kreirano. Ovo novo stanje se naziva finalnim stanjem i označava se sa $|f_i\rangle$ gde indeks i označava da to stanje zavisi od inicijalnog stanja. Na teorijskim jezikom, finalno stanje se može smatrati kao rezultat delovanja operatora S na početno stanje $|\dot{i}\rangle$, tj.

$$|f_i\rangle = S|\dot{i}\rangle \quad (2.93)$$

Operator S ili S-matrica, daje nam sve potrebne informacije o procesu rasejanja. Znajući S-matricu možemo izračunati finalno stanje koje nastaje interakcijom dve čestice datog inicijalnog stanja. Sa druge strane znajući finalno stanje mogu se odrediti svi mogući rezultati eksperimenta. Tako je S-matrica najfundamentalnija veličina u teorijskom opisu fenomena rasejanja. Sav eksperimentalni i teorijski rad na ovom polju izučavanja je usmeren ka pokušaju nakašenja S-matrice koja potpuno određuje rasejanje čestica visokih energija.

Finalno stanje $|f_i\rangle$ se može razviti u zavisnosti od stanja sa datim brojem i/ili vretenom čestica i/ili njihovim momentima. U tom slučaju finalno stanje $|f_i\rangle$ je mnogo komplikovanije nego početna stanja $|i\rangle$ za visoke energije.

Obično se finalno stanje daje kao zbir dva stanja od kojih jedno predstavlja čestice koje nisu rasejane kada prolaze kroz metu, a drugo opisuje sve moguće tipove rasejanja.

$$|f_i\rangle = |i\rangle + |\varphi_i\rangle \quad (2.100)$$

Stanje $|\varphi_i\rangle$ je proizvod delovanja operatora T na inicijalno stanje, tj.

$$|\varphi_i\rangle = T |i\rangle \quad (2.101)$$

Korišćenjem izraza (2.99), (2.100) i (2.101) dobija se izraz koji povezuje S i T-matrice (operatorе).

$$S = 1 + T \quad (2.102)$$

gde je 1 jedinični operator.

Znajući T-matricu može se odrediti broj dogadjaja sa momentom u intervalu $[\vec{p}_1, \vec{p}_1 + d\vec{p}_1]$ i $[\vec{p}_2, \vec{p}_2 + d\vec{p}_2]$ kao

$$dN = |T(\vec{p}_1, \vec{p}_2)|^2 \frac{d^3p_1}{p_{10}} \frac{d^3p_2}{p_{20}} \quad (2.103)$$

Koristeći relaciju (2.103) može se odrediti diferencijalni poprečni pressek u zavisnosti od T-matrice

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^3}{m_1} \frac{(2\pi)^3}{m_2} \frac{dN}{FVT} = \frac{(2\pi)^6 |T(\vec{p}_1, \vec{p}_2)|^2}{m_1 m_2 F V T} \frac{d^3p_1}{p_{10}} \frac{d^3p_2}{p_{20}} \quad (2.104)$$

Izraz (2. 104) ukazuje na činjenicu koja je još ranije naglašena da znači da S (odnosno T) matricu imaju sve potrebne informacije o procesu rasenja.

III.6 UNITARNOST S - MATRICE

Važna osobina S-matrice je njena unitarnost koja će biti pokazana u ovom poglavlju. Broj dogadjaja datih tipom $|n\rangle$ može biti dat u zavisnosti od S-matrice izrazom

$$|\langle n | S | i \rangle|^2 = |\langle n | f_i \rangle|^2 = \langle f_i | n \rangle \langle n | f_i \rangle \quad (2.105)$$

Uzmimo sada ukupan broj dogadjaja svih mogućih stanja $|n\rangle$. Sistem stanja $|n\rangle$ je ortogonalan i kompletan pa je ukupan zbir svih dogadjaja dat izrazom

$$\sum_n \langle f_i | n \rangle \langle n | f_i \rangle = \langle f_i | f_i \rangle \quad (2.106)$$

Sa druge strane ukupan broj svih dogadjaja će biti jednak broju svih čestica u inicijalnom stanju. Pošto je broj čestica u inicijalnom stanju jednak $\langle i | i \rangle$ s obzirom na relaciju (2.106) sledi

$$\langle f_i | f_i \rangle = \langle i | i \rangle \quad (2.107)$$

Izraz (2.107) implicira unitarnost S-matrice. Koristeći izraz (2.99) sledi

$$\langle i | S^+ S | i \rangle = \langle f_i | f_i \rangle \quad (2.108)$$

Iz relacija (2.107) i (2.108) sledi

$$\langle i | S^+ S | i \rangle = \langle i | i \rangle \quad (2.109)$$

odnosno

$$S^+ S = 1 \quad (2.110)$$

III.7 GRAFIČKI PRIKAZ RASJANJA

Koristeći inverzne Lorencove transformacije

$$E = \gamma(E' + \beta P' \cos \theta')$$

$$P_x = P_x' = P' \sin \theta' \cos \gamma$$

$$P_y = P_y' = P' \sin \theta' \sin \gamma$$

$$P_z = \gamma(P_z' + \beta E') = \gamma(P' \cos \theta' + \beta E')$$

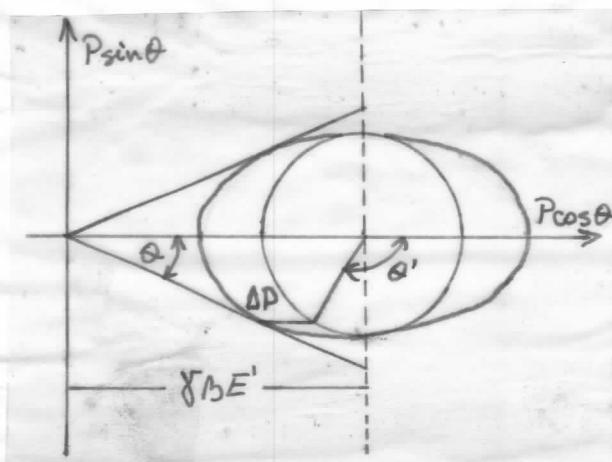
mogu se dobiti sledeće relacije

$$\cos \theta' = \frac{P \cos \theta - \gamma \Delta E'}{\gamma P'} \quad \sin \theta' = \frac{P \sin \theta}{P'} \quad (2.111)$$

Koristeći se trigonometrijskom transformacijom za zbir kvadrata kosinusa i sinusa istog ugla sledi

$$1 = \cos^2 \theta' + \sin^2 \theta' = \left(\frac{P \cos \theta - \gamma \Delta E'}{\gamma P'} \right)^2 + \left(\frac{P \sin \theta}{P'} \right)^2 \quad (2.112)$$

Relacija (2.112) predstavlja jednačinu momenta elipse koja je prikazana na sl. 13 sa većom poluosom $\gamma P'$ i manjom poluosom P' .



SLIKA 13

pri čemu horizontalna i vertikalna skala moraju biti identične. Elipsa momenta u laboratorijskom sistemu koja je data na slici u sistemu cm prelazi u krug poluprečnika P' sa centrom u $P \cos \theta = \gamma \Delta E'$.

Ovo je lep primer kontrakcije dužine koja je posledica Lorenzovih transformacija. Kada je pojava kontrakcije dužine razmatrana, naglašeno je da se ona javlja samo u pravcu kretanja što se u ovom slučaju jasno vidi na slici 13. Naime, u pravcu kretanja ($P \cos \theta$) dolazi do kontrakcije dužine (ΔP), dok u pravcu normalnom na pravac kretanja ($P \sin \theta$) ne dolazi do kontrakcije dužine.

III. KINEMATIKA RASPADA I REAKCIJA

III.1 OSNOVNE RELACIJE

Sistemi dva tела имају завршено кинематичке симетрије. Симетрија реакције и распада је очигледна у приказу распада као супар ћестице са мирујућом мрежом као што је дато у другом делу дипломског рада. Симетрија распада и реакција следи из основне кинематичке релације о конзервацији момента која описује та два процеса. Ако је систем два тела дат изразом

$$1 + 2 \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

а распад два тела као

$$0 \rightarrow 3+4 \quad (3.2)$$

онда у нотацији четворовектора основна кинематичка релација пренесена на изразе (3.1) и (3.2) даје

$$k_1 + k_2 = k_0 \quad (3.3)$$

$$k_0 = k_3 + k_4 \quad (3.4)$$

Релације (3.1) и (3.2) тврде да су ћестице 1 и 2 супарјујући дају систем ћестица 0, док су ћестице 3 и 4 резултат распада система ћестица 0.

Релације (3.1) и (3.2) се могу представити реакцијом типа

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad (3.5)$$

која ће бити предмет изучавања.

Ћестице 1 и 2 се називају улазним, а 3 и 4 излазним ћестицама. У супарјујућем супару улазне ћестице су идентичне излазним ћестицама, док код несупарјујућег супару улазне и излазне ћестице нису идентичне.

Релације (3.1) и (3.2) дају све потребне информације о распаду система ћестица. Експлицитно ово може бити написано као

$$\begin{aligned} E_0 &= E_1 + E_2 \\ \vec{P}_0 &= \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

одакле се може добити маса m_0 , односно totalna energija у свем систему

$$m_0^2 = K_0^2 = (K_1 + K_2)^2 = K_1^2 + K_2^2 + 2K_1 K_2 = m_1^2 + m_2^2 + 2K_1 K_2 \quad (3.7)$$

Totalna energija u laboratorijskom sistemu E_0 može biti data u zavisnosti od totalne energije u cm sistemu relacijom

$$m_0^2 = E_0^2 - \vec{p}_0 \cdot \vec{p}_0 \quad (3.8)$$

koja predstavlja invarijantnu veličinu. Ova invarijantna veličina se može transformisati u neki pogodniji sistem. Za neki referentni sistem P' relacija (3.7) postaje

$$M_0^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1'E_2' \cos\theta - P'_1 P'_2 \cos\theta_{12}) \quad (3.9)$$

Ako je metka prilikom sudara bila u miru, $k_2 = (m_2, 0)$, relacija (3.7) daje

$$M_0^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2 \quad (3.10)$$

Zamenom relacije (3.3) u sistem cm, sledi

$$(M_0 - K_1)^2 = M_2^2 = M_0^2 + m_1^2 - 2K_0 K_1 - m_2^2$$

U cm sistemu $k_0 = (m_0, 0)$ pa su energije čestica

$$E_1' = \frac{M_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M_0} \quad E_2' = \frac{M_0^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M_0} \quad (3.11)$$

odnosno pošto je $P' = P_1' = -P_2'$, možemo pisati izraz za P'

$$P' = \sqrt{E_1'^2 - m_1^2} = \sqrt{E_2'^2 - m_2^2} \quad (3.12)$$

odnosno zamenom E_1' i E_2' iz relacije (3.11) u (3.12) dobijamo konačan izraz za P' :

$$P' = \frac{m_0}{2} \left[1 - 2 \frac{m_1^2 + m_2^2}{M_0^2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{M_0^4} \right]^{1/2} \quad (3.13)$$

U svim relacijama se mogu indeksi 1 i 2 zameniti indeksima 3 i 4.

III.2 REAKCIJE DVA TELA

Ove reakcije se mogu prikazati kao



za raspade nestabilnih čestica $m_2 = 0$ tako da je $m_0^2 = m_1^2$, $E_0 = E_1$ i $p_0 = p_1$.

Ako su moment i energija upadne čestice respektivno p_1 i E_1 , a ugao rasjedenja ili raspada θ' (u cm sistemu) odnosno θ (u laboratorijskom sistemu),

tada je data kinematička reakcija potpuno određena. Ako je u laboratorijskom sistemu čestica 2 u miru pre sudara, tada je ukupan broj promenljivih veličina u dатој reakciji 9 jer je svaki vektor momenta opisan sa tri promenljive: veličinom momenta (intenzitetom) p , azimutalnim i polarnim uglovima θ i ϕ . Pravci θ i ϕ upadne čestice 1 i azimutalni ugao čestice 3 nisu kinematički interesantni tako da se ukupan broj promenljivih svedi na 6. Od toga broja četiri promenljive su pridružene energiji-momentu konservacije, dok su preostale dve nezavisne promenljive. Ovo je slučaj kada su sve mase čestica koje učestvuju u reakciji poznate. Mnogo interesantniji i češći slučaj je onaj kod koga neke nisu sve mase poznate.

Pri opisivanju reakcija dva tела koriste se dve promenljive, s i t (ili $\Delta^2 = -t$) koje predstavljaju invarijantne forme definisane u obliku

$$s = m_0^2 = (k_1 + k_2)^2 = (k_3 + k_4)^2 \quad (3.15)$$

$$t = (k_1 - k_3)^2 = (k_2 - k_4)^2 = m_2^2 + m_4^2 - 2m_2 m_4 \quad (3.16)$$

$$t = m_1^2 + m_3^2 - 2(E_1 E_3 - P_1 P_3 \cos \theta_{13})$$

Kao što se vidi iz gornjih izraza, invarijantna promenljiva s predstavlja totalnu energiju u cm sistemu, a invarijantna promenljiva t predstavlja transfer momenta u cm sistemu, odnosno

$$s = (\text{cm energija})^2 \quad (3.17)$$

$$t = -(\text{cm transfer momenta})^2 \quad (3.18)$$

Zbog simetrije procesa možemo definisati još jednu promenljivu kao

$$u = (k_1 - k_4)^2 = (k_2 - k_3)^2 \quad (3.19)$$

koja je povezana sa invarijantnim promenljivim s i t relacijama

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = \sum m^2 \quad (3.20)$$

Pre menljiva t daje informacije o uglu rasjemanja ili raspada θ'_{13} ili θ'_{23}

U elastičnom sudaru ($E'_1 = E'_3$, $E'_2 = E'_4$) invarijantna promenljiva t ima oblik

$$t = -2p'^2 (1 - \cos \theta') \quad (3.21)$$

odakle sledi izraz za ugao rasjemanja ili raspada θ' u cm sistemu

$$\cos \theta^1 = 1 + \frac{t}{2p^1_4} \quad (3.22)$$

U laboratorijskom sistemu izraz (3.21) postaje

$$t = -2M_4 T_4 \quad (3.23)$$

gdje je sa T_4 označena kinetička energija čestice 4.

Pošto $\cos \theta^1$ može uzimati vrednosti od 0 do 1, iz relacije (3.22) sledi da invariјantna forma t može pored 0 uzimati samo negativne vrednosti. Veoma instruktivno je odrediti granice prenjaljivih. U sistemu cm, ugao θ^1 može uzimati sve vrednosti od 0 do 180° dok su p^1 i E^1 dati relacijama (3.11) i (3.13). Granica invariјantne forme je se nalazi zamenom $\cos \theta^1 = \pm 1$ u izraz

$$t = M_1^2 - M_3^2 - 2(E_1^1 E_3^1 - p_1^1 p_3^1 \cos \theta_{34}^1) \quad (3.24)$$

Ugao raspada θ_{34} između čestica 3 i 4 se nalazi korišćenjem izraza (3.4)

$$\cos \theta_{34} = \frac{M_3 + M_4 - M_0^2 + 2E_3 E_4}{2p_3 p_4} \quad (3.25)$$

U elastičnom sudaru je $m_2 = m_4$, $m_1 = m_3$ odnosno $T_4 = E_4 = m_4$, $E_3 = E_1 - T_4$ pa izraz (3.25) postaje

$$\cos \theta_{34} = T_4 \frac{E_3 - M_4}{p_3 p_4} \quad (3.26)$$

U specijalnom slučaju, kada su sve mase jednake izraz (3.26) se može napisati u obliku

$$\cos \theta_{34} = \frac{T_3 T_4}{p_3 p_4} \quad (3.27)$$

Ukoliko je neka masa nepoznata, ona se može izraziti preko tri nepoznate pozavione mase. Za slučaj kada je masa m_3 nepoznata korišćenjem izraza

$$m_3^2 = K_3^2 = (K_1 + K_2 - K_4)^2 \quad (3.28-a)$$

se dobija relacija

$$m_3^2 = M_1^2 + 2E_1(M_2 - E_3) + 2p_1 p_2 \cos \theta_4 + M_2^2 + M_4^2 - 2M_2 E_4$$

U elastičnom sudaru $m_2 = m_4$ i $m_2 = E_4 = -T_4$ pa je

$$m_3^2 = M_1^2 + 2p_1 p_4 \cos \theta_4 - 2T_4(E_1 + M_2) \quad (3.29)$$

Predpostavimo da m_0 nije poznata u raspodu. Iz konzervacije momenta za

reakciju tipa



se dobija

$$\begin{aligned} p_0 &= p_3 \cos \theta_3 + p_4 \cos \theta_4 \\ p_0^2 &= p_3^2 + p_4^2 + 2p_3 p_4 \cos \theta_{34} \\ p_3^2 &= p_0^2 + p_4^2 - 2p_0 p_4 \cos \theta_4 \\ p_4^2 &= p_0^2 + p_3^2 - 2p_0 p_3 \cos \theta_3 \\ \frac{p_0}{\sin \theta_{34}} &= \frac{p_4}{\sin \theta_4} = \frac{p_3}{\sin \theta_3} \end{aligned} \quad (3.30)$$

gdje su sa θ_3 , θ_4 i θ_{34} označeni uglovi raspada čestice 3, čestice 4 u odnosu na početni pravac i ugao između raspadnutih čestica 3 i 4, respektivno.

$$p_3 p_4 \cos \theta_{34} = p_3 p_4 (\cos \theta_3 \cos \theta_4 - \sin \theta_3 \sin \theta_4) = \quad (3.31)$$

$$= p_3 \cos \theta_3 (p_0 - p_3 \cos \theta_3 - p_3^2 \sin^2 \theta_3) - p_3 (p_3 - p_0 \cos \theta_3) \quad (3.32)$$

$$E_3 = \sqrt{p_3^2 + m_3^2} = \sqrt{p_0^2 + p_3^2 - 2p_0 p_3 \cos \theta_3 + m_3^2 + 2p_3 (p_3 - p_0 \cos \theta_3)}$$

Zamenom relacija (3.30) i (3.31) u relaciju (3.9), dobija se

$$m_0^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_3 \sqrt{p_0^2 + p_3^2 - 2p_0 p_3 \cos \theta_3 + m_3^2 + 2p_3 (p_3 - p_0 \cos \theta_3)} \quad (3.33)$$

Ukoliko su mase m_1 , m_2 , m_3 i m_4 poznate, mazu m_0 možemo naći znajući samo dve nezavisne promenljive p_0 , p_3 ili p_4 , pošto se jedan od momenata (na primer p_0) može izraziti preko druge dva momenta koristeći se zakonom konzervacije energije

$$\sqrt{p_0^2 + m_0^2} = \sqrt{p_3^2 + m_3^2} + \sqrt{p_4^2 + m_4^2} \quad (3.34)$$

Ukoliko su dati uglovi θ_3 i θ_4 , momenti p_0 , p_3 i p_4 se nalaze korišćenjem relacija (3.30):

$$\frac{p_3}{p_0} = \frac{\sin \theta_4}{\sin(\theta_3 + \theta_4)} = X ; \quad \frac{p_4}{p_0} = \frac{\sin \theta_3}{\sin(\theta_3 + \theta_4)} = Y \quad (3.35)$$

Iz (3.34) se dobija

$$p_0^2 + m_0^2 = p_3^2 + m_3^2 + p_4^2 + m_4^2 + 2E_3 E_4$$

$$p_0^2 (1 - X^2 - Y^2) + (m_0^2 - m_3^2 - m_4^2)^2 = 2E_3 E_4 = A p_0 + B \quad (3.36)$$

$$\text{gde je } A = \left(\frac{p_3}{p_0} \right)^2 + \left(\frac{p_4}{p_0} \right)^2 \text{ i } B = \frac{E_3 E_4}{p_0}$$

Aredjivanjem izraza (3.36) konačno se dobija

(3.37)

$$\rho_0^{\frac{1}{2}}(A^2 + \gamma X^2 Y^2) + 2\rho_0^2 [AB - 2(m_3^2 Y^2 + m_4^2 X^2)] + [B^2 - 4m_3^2 m_4^2] = 0$$

Treba primetiti da egzistiraju dva rešenja za $\rho_0^{\frac{1}{2}}$ iz jednačine (3.37).

U tablici III.1 dati su pregledno svi rezultati diskutovani u ovom delu o reakcijama dva tела. U prvoj koloni su date veličine koje se često koriste i koje je zbog toga neophodno odrediti preko veličina koje su date u drugoj koloni. Treća kolona označava relacije koje odgovaraju prvim dvema kolonama.

Tablica III.1

NACI	DATO	RELACIJA
Ako su sve mase poznate		
$t_{\max, \min}$	k_1, k_2, k_3, k_4	(3.24)
ρ_0	p_3, p_4	(3.34)
ρ_0, p_3, p_4		(3.37)
Ako je neka masa nepoznata		
m_0	k_3, k_4	(3.9)
m_3	k_1, k_2, k_4	(3.26.a)
m_0	p_0, m_3, m_4 p_3, θ_3	(3.33)

III.3 RELACIJE ZA PRAG ENERGIJE

Prag energije potrebne za produkciju sistema čestica je definisan kao minimum potrebne energije. U tom slučaju je $m_0 = m_f$, pa je prag kinetičke energije T_h dat izrazom

$$m_0^2 = (\sum m_f)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_{Th} m_2 = (m_1 + m_2)^2 + 2m_2 T_h$$

$$\frac{T_h}{m_2} = \frac{(\sum m_f)^2 - (\sum m_i)^2}{2m_2} \quad (3.38)$$

Relacija (3.38) definiše prag kinetičke energije kada se zeta naleti u miru, gde je $m_{T(1)}$ suma mase finalnih (inicijalnih) čestica. Ukoliko su poz-

nati prag energije i moment u cm sistemu, primenom inversnih Lorencovih transformacija se nađazi prag kinetičke energije u laboratorijskom sistemu

$$E_{TL} = \gamma (E_{TL}' + p_{TL}' \cos \theta') \quad (3.39)$$

gde su $\gamma = \frac{p_2}{E_2}$ i $\gamma = (\lambda - \lambda^2)^{1/2}$

Iz relacije (3.39) se vidi da je prag energije u laboratorijskom sistemu minimalan za $\cos \theta' = -1$, odnosno za $\theta' = 180^\circ$, tj. kada se meta i upadna čestica kreću jedna prema drugoj. Veoma čest slučaj od opšteg interesa je taj kada se meta kreće, kao što je na pr. kretanje nukleona u jezgru. Kinetička energija mete je zanemarljiva, pa je

$$E_0 = T_1 + m_1 + m_2 \quad p_0 = p_1 + p_2 \quad m_0^2 = E_0^2 - p_0^2$$

odnosno

$$m_0^2 = (m_1 + m_2)^2 + 2m_2 T_1 - p_2 (2p_1 + p_2) \quad (3.40)$$

III.4 DISTRIBUCIJE DVA TELA

Prilikom raspada sistema čestica $0 \rightarrow 3 + 4$, distribucija upadnog ugla

je data izrazom

$$\frac{dn}{d\theta} = \frac{dn}{d\cos \theta'} \left| \frac{d\cos \theta'}{dE_3} \right| \left| \frac{dE_3}{d\theta} \right| = \frac{dn}{d\cos \theta'} \frac{1}{\beta \gamma p_1} \left| \frac{dE_3}{d\theta} \right| \quad (3.41)$$

gde je

U slučaju izotropnog raspada $\frac{dn}{d\cos \theta'} = \frac{1}{2}$ a izraz $\frac{dE_3}{d\theta}$ se dobija diferencijiranjem izraza (3.9) uzimajući u obzir da je $dE_3 = -dE_4$, $pdp = EdE$

$$\frac{dE_3}{d\theta} = -\tan \theta \left[\frac{E_3 - E_4}{E_3 E_4 - A} - \frac{E_3}{p_3^2} + \frac{E_4}{p_4^2} \right]^{-1} \quad (3.42)$$

gde je $A = \frac{m_0^2 - m_3^2 - m_4^2}{2}$; $\cos \theta' = \frac{E_3 E_4 - A}{p_3 p_4}$
pa izraz (3.41) prelazi u

$$\frac{dn}{d\theta} = \frac{\tan \theta}{2\beta \gamma p_1} \left[\frac{E_3 - E_4}{E_3 E_4 - A} - \frac{E_3}{p_3^2} + \frac{E_4}{p_4^2} \right]^{-1} \quad (3.43)$$

Za jednake mase, $\frac{dn}{d\theta} \rightarrow \infty$, $E_3 = E_4 \pm \theta - \theta_S$ ($\theta = \theta$ simetrično) gde je

$$\cos \theta_s = \frac{E_0^2 - A}{E_0^2 - m_3^2} \quad (3.44)$$

Distribucija transferalnog momenta u raspodu dva tела je data u zavisnosti od $\cos \theta$:

$$\frac{du}{dP_T} = \frac{du}{d\cos \theta'} \left| \frac{d\cos \theta'}{dP_T} \right| = \frac{du}{d\cos \theta'} \frac{P_T}{p^{12}} \left[1 - \frac{P_T}{p^1} \right]^{-1/2} \quad (3.45)$$

gde je $\cos \theta' = \sqrt{1 - \sin^2 \theta'} = \sqrt{1 - \left(\frac{P_T}{p^1}\right)^2}$ (3.46)

III.5 RASPADI TRI ILI VISE TELA

Raspad tri tела koji je dat relacijom $0 \rightarrow 1 + 2 + 3$ je opisan kinematički sa dve nezavise promenljive ako su sve mase poznate kao i u slučaju raspada dva tела. Čestica mase m_0 koja je u miru, raspada se u tri izlazne čestice sa tri vektorske momenata od kojih se svaki karakteriše intenzitetom, azimutalnim i polarnim uglovima. Pravac čestice 1 i azimutalni uglovi čestice 1 i 2 nisu kinematički interesantni. Ostalih 6 kinematičkih veličina se mogu dovesti u vezu sa zakonom konzervacije četverovektora energija-moment. Primenom ovog zakona mogu se odrediti četiri nepoznate veličine tako da je za rešavanje problema raspada tri tела dovoljno znati samo dve nezavise promenljive veličine.

Raspad n tела se predstavlja kao raspad razlike početne i krajnje čestice, u kome se dobija (n-1) čestica, odnosno

$$K_0 - K_n = K_1 + K_2 + \dots + K_{n-1} \quad (3.48)$$

Maksimum energije n-te čestice se nalazi kao minimum energije sistema (n-1) čestica koji je definisan izrazom (3.48)

$$E_n^1 = \frac{m_0^2 + m_1^2 - (K_1 + K_2 + \dots + K_{n-1})^2}{2m_0} \quad (3.49)$$

Izraz (3.48) se može napisati u pogodnijem obliku kao

$$\left(\sum_i^j K_i + \sum_{j+1}^{n-1} K'_i \right)^2 = \left(\sum_i^j K_i \right)^2 + \left(\sum_{j+1}^{n-1} K'_i \right)^2 + 2 \sum_i^j K_i \sum_{j+1}^{n-1} K'_i \quad (3.50)$$

* (3.47)

gdje se prva suma \sum_1^j odnosi na čestice određene mase a druga suma \sum_{j+1}^{n-1} se odnosi na čestice nulte mase.

Maksimum sistema od $(n-1)$ čestica dobijamo stavljuajući da je energija čestica nulte mase jednaka nuli i da je relativna kinetička energija čestica poznatih masa jednak nuli, pa je

$$\left(\sum_1^{n-1} k_i \right)^2 = \left(\sum_{j+1}^{n-1} k_i \right)^2 \quad (3.51)$$

Uopšteni izraz za maksimum energije čestice m_0 u sistemu mirovanja je tada dat kao

$$E_{W_{\max}}^1 = \frac{m_0^2 + m_n^2 - \left(\sum_1^{n-1} m_i \right)^2}{2m_0} \quad (3.52)$$

a energija raspada je definisana relacijom

$$Q \equiv m_0 - \left(\sum_1^{n-1} m_i \right) \quad (3.53)$$

III.6 DALICOVI DLIJAGRANI

III.6.1 UVOD

Granice fizičkih oblasti za različite procese su određene eksplicitno energijom i momentom konzervacije. Ukoliko želimo opisati procese interakcije gde su zastupljeni svi četveromentni, onda to činimo preko dve, pinoane tri invarijantne promenljive, (s,t) i (s,t,u) koje su date u odeljku III.2.

S -matricom su teorijski proučavani procesi tipa

$$I \quad 1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

Počte sistemi dva tела predstavljaju savršene kinematičke simetrije te se procesi tipa I proširuju na još dva tipa procesa:

$$II \quad 1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$$

$$III \quad 1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3$$

Procesi raspada

$$IV \quad 1 \rightarrow \bar{2} + 3 + 4$$

spadaju takođe u grupu simetrijskih procesa. Proses IV je energetski moguć za $m_1 > m_2 + m_3 + m_4$.

Procesi tipa I, II i III se opisuju sa dve invarijantne skalarne promenljive, s i t, dok se procesi tipa IV opisuju sa tri invarijantne promenljive s, t i u. Veoma interesantni su i eksperimenti sa više od tri čestice u krajnjem stanju kao na pr, proces tipa

$$V \quad 1 \rightarrow 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

Procese ovoga tipa rešavamo preko dve nezavisne kinematičke promenljive koristeći pri tome procese tipa IV kao početni položaj. Na taj način se mogu rešavati procesi raspada za više čestica finalnog stanja.

Na kraju uvođa treba naglasiti da procesi tipa (I-III) predstavljaju procese rasejanja, a procesi tipa IV i V procese raspada koji će biti posebno proučeni u daljem razmatranju.

III.6.2 PROCESI RASPADA

Pošmatrajmo tri čestice sa masama m_2 , m_3 i m_4 i totalnom energijom $E = m_1$ u nula momentnom obliku. U tom slučaju imamo 9 promenljivih veličina. Koristeći se energijom i momentom konzervacije

$$E_2 + E_3 + E_4 = m_1 \quad (3.54)$$

$$p_2 + p_3 + p_4 = 0 \quad (3.55)$$

gde je $E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2}$ (3.56)

Za energiju konzervacije sledi

$$E_2^- < m_1 - E_3 - E_4 < E_2^+ \quad (3.57)$$

gde su E_2^- i E_2^+ , respektivno niža i viša granica od E_2 . Za moment konzervacije sledi

$$E_2 = \sqrt{m_2^2 + (p_3 + p_4)^2} \quad (3.58)$$

$$E_2^\pm = \sqrt{m_2^2 + (p_3 \pm p_4)^2} \quad (3.59)$$

Granice oblasti u (E_3, E_4) ravni su dati izrazom

$$\sqrt{m_2^2 + (p_3 \pm p_4)^2} = m_1 - E_3 - E_4 \quad (3.60)$$

Zamenjujući p_3 i p_4 sa E_3 , E_4 , m_3 i m_4 u relaciju (3.60) dobija se granica oblike

$$F(E_3, E_4, m_1, m_2, m_3, m_4) = 0 \quad (3.61)$$

gle je funkcija F definisana

$$F = -8m_1(E_3^2 E_4 + E_3 E_4^2) + \frac{1}{2}(m_1^2 + m_4^2)E_3^2 + \frac{1}{2}(m_1^2 + m_3^2)E_4^2 + \frac{1}{2}(3m_1^2 - m_2^2 + m_3^2 + m_4^2)E_3 E_4 - \frac{1}{2}(m_1^2 - m_2^2 + m_3^2 + m_4^2)m_1 E_3 - \frac{1}{2}(m_1^2 - m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) + (m_1^2 - m_2^2 + m_3^2 + m_4^2)^2 - \frac{1}{2}m_3^2 m_4^2 \quad (3.62)$$

Četvoro-varijantne mase su definisane sa

$$M_{ij}^2 = (E_i + E_j)^2 - (p_i + p_j)^2 \quad (3.63)$$

pri čemu će čestice biti obe ulazne ili obe izlazne. Koristeci se izrazom

(3.63), dobijamo tri karakteristične četvoro-invarijantne mase M_{23} , M_{24} i M_{34} koje su međusobno povezane izrazom

$$M_{23}^2 + M_{24}^2 + M_{34}^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (3.64)$$

Ove tri invarijantne četvoro mase mogu biti eksplicitno date preko mase i energije čestica koje učestvuju u raspodu

$$M_{23}^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2m_1 E_4 \quad (3.65)$$

$$M_{34}^2 = 2m_1(E_3 + E_4) - m_1^2 + m_2^2 \quad (3.66)$$

$$M_{24}^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2m_1 E_3 \quad (3.67)$$

U zavisnosti od invarijantnih četvoro mase, granicu datu izrazom (3.61) pišemo u obliku

$$G(M_{23}^2, M_{34}^2, m_1^2, m_2^2, M_{24}^2, M_3^2, m_4^2) = 0 \quad (3.68)$$

gle je funkcija G definisana kao

$$G = M_{23}^2 M_{34}^2 + M_{23}^2 M_{24}^2 - M_{23}^2 (m_1^2 - m_3^2)(m_1^2 - m_2^2) + M_{34}^2 (m_2^2 - m_3^2) \\ (m_1^2 - m_4^2) + (m_3^2 m_1^2 - m_2^2 m_4^2)(m_1^2 - m_2^2 + m_3^2 - m_4^2) \quad (3.69)$$

Iz relacije (3.63) sledi da je $M_{ij}^2 \geq (m_i + m_j)^2$, iz (3.65) sledi

$$M_{23}^2 \leq (m_1 - m_3)^2 \text{ a iz (3.67) sledi } M_{24}^2 \leq (m_1 - m_3)^2$$

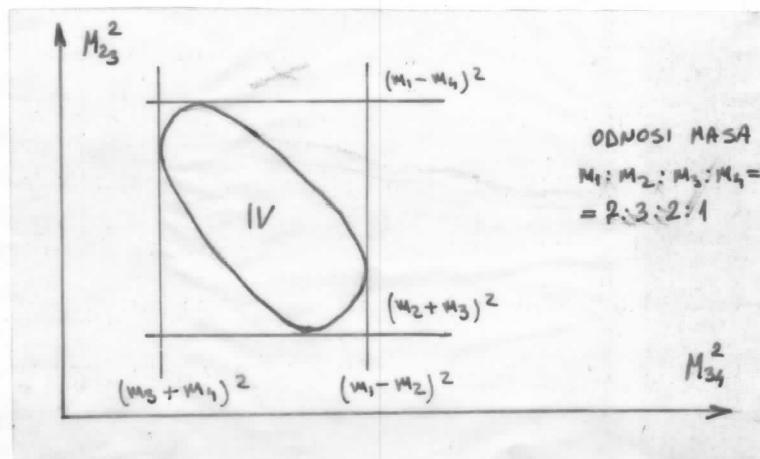
Tada su fizičke oblasti za procese tipa IV date relacijom (3.60), date kao

$$(m_2 + m_3)^2 \leq M_{23}^2 \leq (m_1 - m_4)^2 \quad (3.70)$$

$$(m_3 + m_4)^2 \leq M_{34}^2 \leq (m_1 - m_2)^2 \quad (3.71)$$

U (M_{23}^2, M_{34}^2) dijagramu relacije (3.70) i (3.71) predstavljaju jedan pravougaonik unutar koga se nalazi zatvorena kriva linija data izrazom (3.69).

Kao što se sa slike 14 može videti ta zatvorena kriva linija dodiruje svaku stranicu pravougaonika u jednoj tački.



SLIKA 14.

III.6.3 PROCESI RASEJANJA

Procesi rasejanja (I-III) su opisani u laboratorijskom sistemu u kojem je čestica 1 u miru sa 9 promenljivih $\vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$ koje su date pravilom konzervacije

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \quad (3.72)$$

$$m_1 + E_2 = E_3 + E_4 \quad (3.73)$$

Za potpuno opisivanje ovoga problema potrebne su dve nezavisne kinematičke promenljive (na pr. E_3 i E_4 ili ugao rasejanja θ_{23} ili θ_{24}). Ukoliko se za nezavisne promenljive uzmu E_3 i E_4 , iz zakona o konzervaciji energije sledi

$$E_2^- \leq E_3 + E_4 - m_1 \leq E_2^+ \quad (3.74)$$

Primenom konzervacije momenta za ovaj slučaj se dobija granica fizičke oblasti

$$\left[m_2^2 + (p_3^2 \pm p_4^2)^2 \right]^{1/2} = - (m_1 - E_3 - E_4) \quad (3.75)$$

Lako se može videti da je za negativnu vrednost relacija (3.75) identična relaciji (3.60).

Zamenjujući p_3 i p_4 sa E_3, E_4, m_3 i m_4 u relaciju (3.75) dobijamo re-

laciјu

$$F(E_3, E_4, m_1, m_2, m_3, m_4) = 0$$

koja opisuje granicu fizičke oblasti za proces I. Iz relacije (3.54) za procese raspada sledi

$$E_3 + E_4 \leq m_1 - m_2 \quad (3.26)$$

dok iz relacije (3.73) za procese rasejanja sledi

$$E_3 + E_4 \geq m_1 + m_2 \quad (3.27)$$

Za procese rasejanja tipa I pogodne kovarijantne proizvajivе su četveri invarijantne mase M_{34}^2 definisane relacijama (3.63) i (3.66) zajedno sa transferom četveromentora T_{ij}^2 definisanog sa

$$T_{ij}^2 = (E_i - E_j)^2 - (p_i - p_j)^2 \quad (3.28)$$

gde se indeks i odnosi na ulazne, a indeks j na izlazne čestice.

Za T_{23}^2 se dobija

$$T_{23}^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2m_1 E_4 \quad (3.29)$$

što je identičan izraz sa relacijom (3.65), tako da možemo pisati

$$T_{23}^2 = M_{23}^2 \quad (3.80)$$

odnosno, analogne tome zamenom $T_{24}^2 = M_{24}^2$ (3.81)

i izraza (3.80) u (3.64) se dobija

$$T_{23}^2 + T_{24}^2 + M_{34}^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (3.82)$$

U zavisnosti od četveromentora i četvero mase, T_{23}^2 i M_{34}^2 , dobijamo granicu fizičke oblasti

$$G(T_{23}^2, M_{34}^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2) = 0 \quad (3.83)$$

u nekom referentnom sistemu.

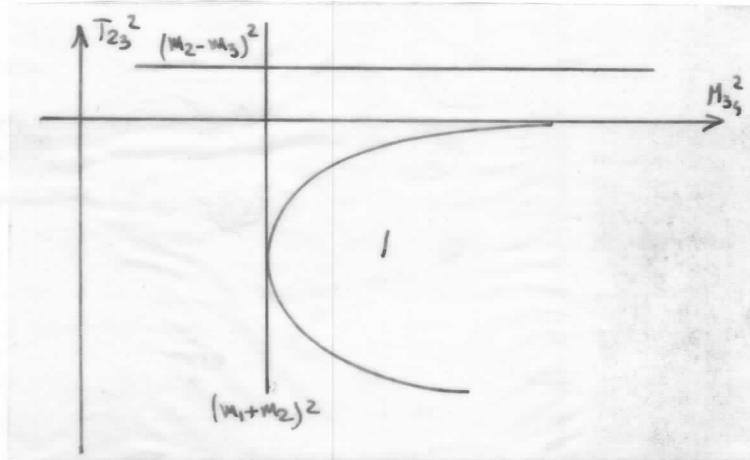
Iz relacija (3.63) i (3.73) sledi za proces tipa I

$$M_{34}^2 \geq \text{Max} [(m_3 + m_4)^2, (m_1 + m_2)^2] = (m_1 + m_2)^2 \quad (3.84.a)$$

a iz relacija (3.89) i (3.92) sledi

$$T_{23}^2 \leq \text{Min} [(m_2 - m_3)^2, (m_1 - m_4)^2] = (m_2 - m_3)^2 \quad (3.84.b)$$

Relacije (3.83), (3.84) i (3.84.b) zajedno definišu granicu fizičke oblasti za procese tipa I koja je prikazana na slici 15.



SLIKA 15.

Granice fizičkih oblasti za procese tipa II se mogu dobiti iz prethodnih rezultata dobijenih za procese tipa I ako se u tim rezultatima izvrši zamena indeksa 2 indeksom 3 i obratno. Zamenom M_{34}^2 sa M_{24}^2 u relaciju (3.83) dobijamo granicu fizičke oblasti za procese tipa II

$$G(T_{23}^2, M_{24}^2, M_1^2, M_2^2, M_3^2, M_4^2) = 0 \quad (3.85)$$

Za procese tipa III, M_{24}^2 i T_{23}^2 su dovedene u vezu sa T_{34}^2 kao

$$T_{23}^2 + T_{34}^2 + M_{24}^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2 \quad (3.86)$$

Ako M_{24}^2 izrazimo preko T_{34}^2 pa zamenimo u (3.85) dobijamo sledeću formulu granice fizičkih veličina

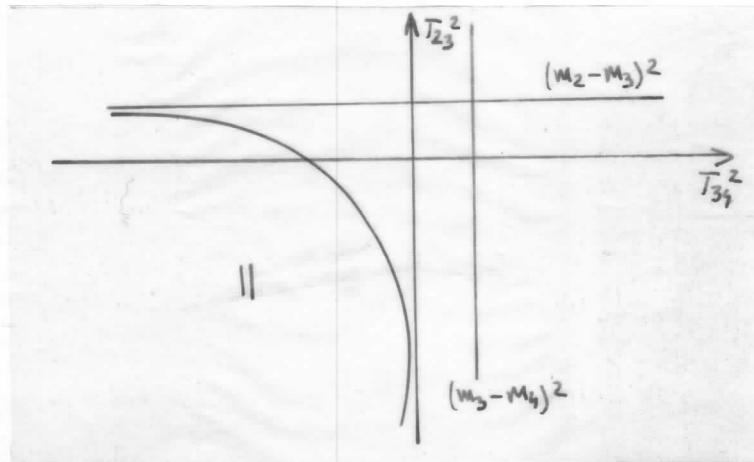
$$G(T_{23}^2, T_{34}^2, M_1^2, M_2^2, M_3^2, M_4^2) = 0 \quad (3.87)$$

za

$$T_{23}^2 \leq \min [(m_2 - m_3)^2, (m_1 - m_4)^2] = (m_2 - m_3)^2 \quad (3.88.a)$$

$$T_{34}^2 \leq \min [(m_3 - m_4)^2, (m_1 - m_2)^2] = (m_3 - m_4)^2 \quad (3.88.b)$$

Granica fizičkih oblasti za procese tipa II u (T_{23}^2, T_{34}^2) dijagramu je data na slici 16.



SLIKA 16.

Granica fizičkih oblasti za procese tipa III se može dobiti zamenom indeksa 2 indeksom 4 i obratno u izraz za granicu fizičkih oblasti procese tipa I. Nezavisne promenljive u ovom slučaju su M_{23}^2 i T_{34}^2 pa je granica fizičkih oblasti data izrazom

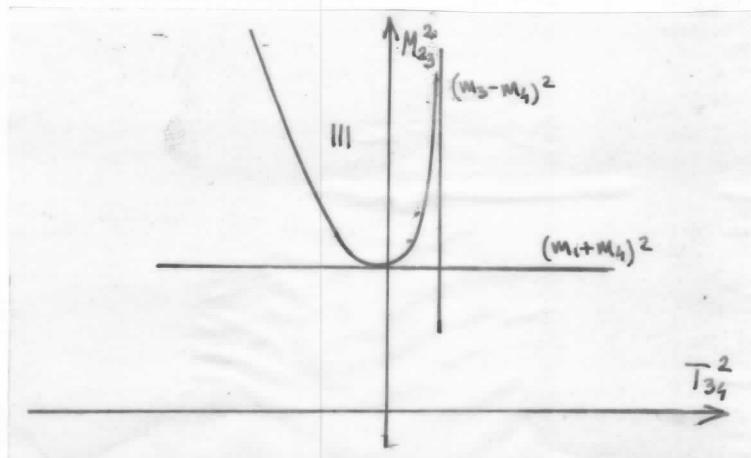
$$G(M_{23}^2, T_{34}^2, M_1^2, M_2^2, M_3^2, M_4^2) = 0 \quad (3.89)$$

za

$$M_{23}^2 \geq \text{Max} [(m_2 + m_3)^2, (m_1 + m_4)^2] = (m_1 + m_4)^2 \quad (3.90.a)$$

$$T_{34}^2 \leq \text{Min} [(m_3 - m_4)^2, (m_1 - m_2)^2] = (m_3 - m_4)^2 \quad (3.90.b)$$

Granica fizičkih oblasti za procese tipa III u (M_{23}^2, T_{34}^2) dijagramu je data na slici 17.



SLIKA 17.

III.6.4 PROCESI RASJAJA I RASPADA (ZAJEDNIČKI OPISI)

Formalno svi četvoromomenti k_i su do sada smatrani ulaznim veličinama. Razmotrimo sada slučaj kada su dve od četiri veličine ulazne a druge dve (bile koje u opštem slučaju) izlazne veličine. U procesu raspada tipa IV čestice 2, 3 i 4 su izlazne.

Konzervacija četvoromomenta za četiri različita procesa je data rulcijom (

$$K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = 0 \quad (3.91)$$

Definišimo S_{ij}^2 sa

$$S_{ij}^2 = -(k_i + k_j)^2 \quad (3.92)$$

odnosno

$$S_{ij}^2 = \begin{cases} M_{ij}^2 & (i \text{ i } j \text{ su obe ulazne ili obe izlazne}) \\ T_{ij}^2 & (\text{obe samo i ili samo j izlazne}) \end{cases}$$

Tada relaciju (3.74) možemo pisati u obliku

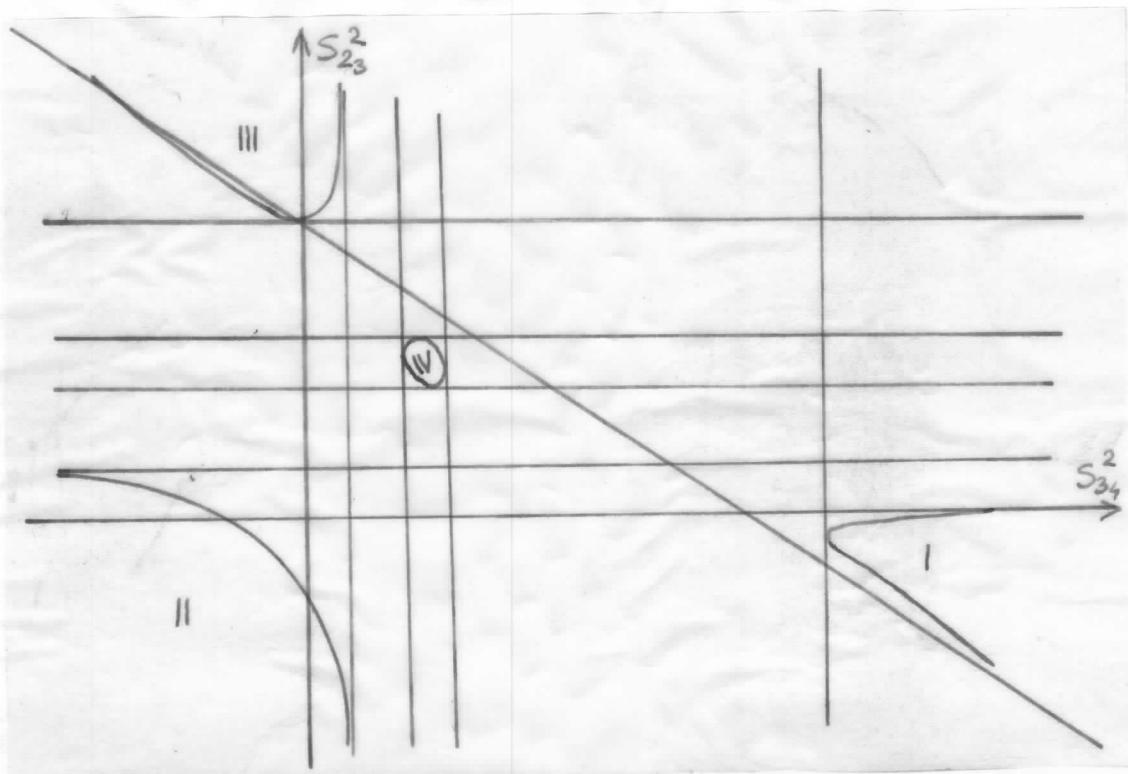
$$S_{23}^2 + S_{24}^2 + S_{34}^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2 \quad (3.93)$$

Treba napomenuti da su S_{23}^2 , S_{24}^2 i S_{34}^2 često date kao s, t i u.

Četiri granice za četiri različita procesa se mogu predstaviti na (S_{23}^2, S_{34}^2) dijagramu u obliku

$$G(S_{23}^2, S_{34}^2, M_1^2, M_2^2, M_3^2, M_4^2) = 0 \quad (3.94)$$

Relacija (3.94) je simetrična sa stanovista izmene S_{23}^2 i M_2^2 sa S_{34}^2 i M_4^2 , respektivno.



SLIKA 18.

S_{23}^2 se može eksplicitno izraziti kao:

$$S_{23}^2 = \left(2S_{34}^2\right)^{-1} \left[-S_{34}^2 + S_{34}^2 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) + (m_1^2 - m_2^2) \right] \pm \left(2S_{34}^2\right)^{-1} \times \left\{ \left[S_{34}^2 - (m_3 - m_4)^2 \right] \left[S_{34}^2 - (m_3 + m_4)^2 \right] \times \left[S_{34}^2 - (m_1 - m_2)^2 \right] \left[S_{34}^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] \right\}^{1/2} \quad (3.95)$$

Analogni eksplicitni izraz za S_{34}^2 se može dobiti zamjenom indeksa 2 indeksom 4 i obratno. Relacije (3.94) i (3.95) egzistiraju u dатој форми за

$$S_{34}^2 \leq (m_3 - m_4)^2$$

$$S_{34}^2 > (m_1 + m_2)^2 \quad (m_3 + m_4)^2 \leq S_{34}^2 \leq (m_1 - m_2)^2 \quad (3.96)$$

Slična ograničenja za S_{23}^2 slijede za indekse simetrije $2 \leftrightarrow 4$.

Za $m_1 = m_4$ i $m_2 = m_3$, relacija (3.94) postaje

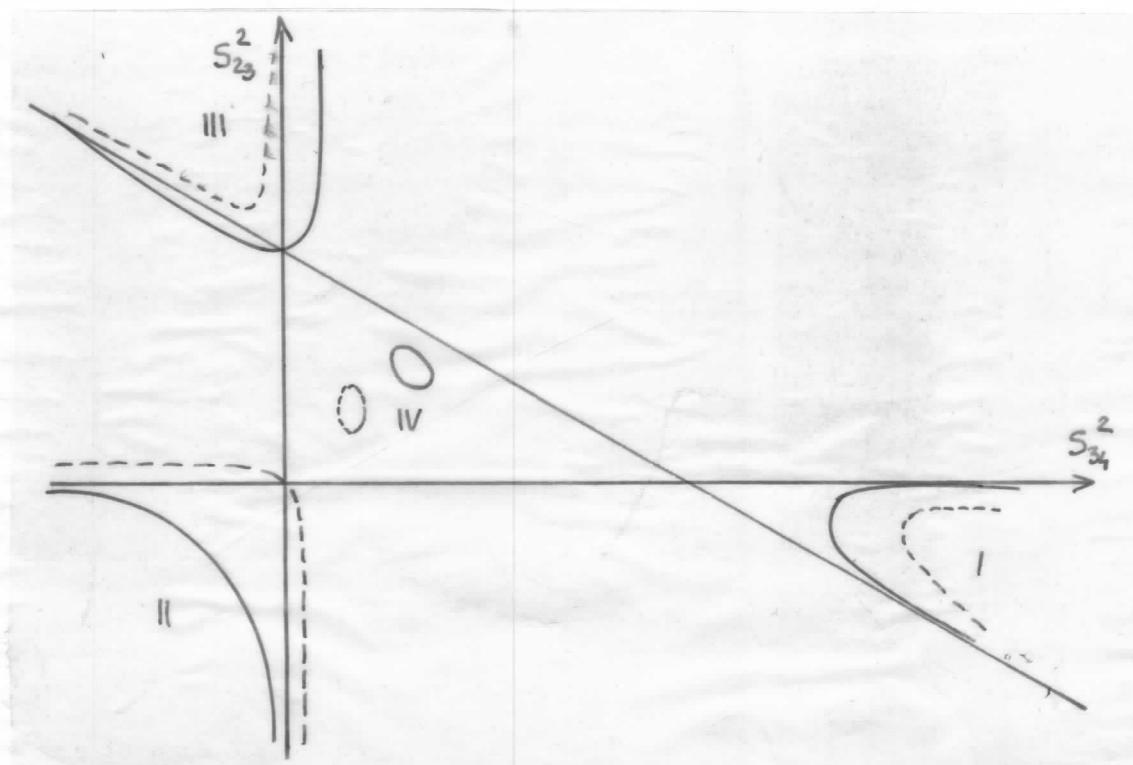
$$S_{23}^2 \left[S_{34}^2 + S_{23}^2 - 2(m_1^2 + m_2^2) S_{34}^2 + (m_1 - m_2)^2 \right] = 0 \quad (3.97)$$

Dijagram relacije (3.97) je predstavljen pravim linijama i hiperbolama.

Za sve četiri jednake mase relacija (3.94) se redukuje na

$$S_{23}^2 S_{34}^2 (S_{23}^2 + S_{34}^2 - 4m_1^2) = 0 \quad (3.98)$$

pri čemu je odgovarajući dijagram predstavljen na slici 19.



SLIKA 19.

Na slici 19 je grafički predstavljena relacija (3.94) za različite odnose masa: $m_1 : m_2 : m_3 : m_4 = 7 : 2 : 3 : 1$ a isprekidanom linijom za $m_1 : m_2 : m_3 : m_4 = 7 : 3 : 1 : 2$. Ovom dijagramu će odgovarati dijagrami (S_{34}^2, S_{24}^2) i (S_{24}^2, S_{23}^2) za odnose masa $m_1 : m_2 : m_3 : m_4 = 7 : 3 : 2 : 1$.

Korišćenjem izraza (3.93) i (3.94) mogu se dati granice fizičkih oblasti u obliku simetričnog izraza za tri promenljive S_{23}^2, S_{24}^2 i S_{34}^2 , kao

$$(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) S_{34}^2 S_{24}^2 S_{23}^2 = (m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2) (m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2) S_{34}^2 + (m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2) (m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2) S_{24}^2 + (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2) (m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2) S_{23}^2 \quad (3.99)$$

LITERATURA

EDITOR

1. Milan Nikolić: Kinematics and multiparticle systems

EDITOR

2. Milan Nikolić: Methods in subnuclear physics-volume I

3. Ivan Šupek: Teorijska fizika i struktura materije - prvi deo

4. Per Nyberg: Kinematics of Scattering and Decay Processes

5. Kinematics of relativistic particles

6. G. C. Wick: Visual aids to relativistic kinematics

7. Physics letters: Review of particle properties - APRIL 1972

8. Djordje Kulički: Teorijska fizika - drugi deo

9. И. Л. Розенфельд: Кинематике ядерных реакций.

