

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

grupa FIZIKA

DIPLOMSKI RAD

TRANSPORTNE POJAVE KOD
POLUPROVODNIKA

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

grupa FIZIKA

Mentor:

D^r Vojislav Radojević
docent

Kandidat:

Miroslav G. Djurić

15. OKTOBAR 1970. NOVI SAD

Изложении наука Бранев 26. X. 1970.

комисия

- 1) Dr. Bojicic-Papovac - член
- 2) Dr. Miroslav Tabakov
- 3) Dr. Dragomir Krstic

Комисија је одговарала изложеним наука
на овим

Членски 9 (песни)
Членски 9 (песни) } 9 (песни)

26. X. 70.

D. Krstic

ZAHVALJUJEM SE DOCENTU DR V O J I S L A V U
R A D O J E V I Ć U KOJI JE PRIHVATIO OVU TEMU I SVOJIM SAVETIMA
I SUGESTIJAMA PRI IZRADI OVOG RADA, OMOGUĆIO DA ZAVRŠIM OVAJ RAD
NA VREME.

T R A N S P O R T N E P O J A V E K O D
P O L U P R O V O D N I K A

/PRIMENA BOLCMANOVE KINETIČKE JEDNAČINE/

U V O D

Transport nanelektrisanja kod metalnih i poluprovodničkih materijala ima ~~Niž~~ zajedničkih crta. Pre svega, kada se posmatra idealni sistem /što podrazumeva idealnu kristalnu rešetku/, prostiranje elektronskih talasa može da se opiše u kvaziklasičnoj aproksimaciji Njutnovim jednačinama, ali se uticaj kristalne rešetke uzima u obzir uvodjenjem tzv. efektivne mase namesto mase slobodnog elektrona.

Medjutim, postoji i veliki broj veoma bitnih razlika između transporta nanelektrisanja kod metala i poluprovodnika. To je pre svega činjenica da se transport kod metala vrši elektronima dok kod poluprovodnika ravnopravno u transportu učestvuju elektroni i šupljine. Druga veoma bitna razlika vezana je za veoma jaku temperatursku zavisnost koncentracije elektrona i šupljina kod poluprovodnika. Po red ovoga mehanizam transporta kod poluprovodnika može biti i difuzioni i driftovski /potiče od uticaja električnog polja \vec{E} / dok je kod metala uglavnom driftovski.

Glavni cilj ovog rada bio je da se dodje do transportnih jednačina za prenos nanelektrisanja u poluprovodnicima pod dejstvom električnog polja.

Ovom cilju prišli smo polazeći od ravnotežnih funkcija raspodele za elektrone i šupljine /I deo/.

Nakon toga dali smo način na koji se dolazi do Boltzmanove kinetičke jednačine, koja omogućava da se dobiju i neravnotežne funkcije raspodele /II deo, § 1 - 4/.

Smatrajući da je perturbacija usled dejstva električnog polja mala, rešili smo Boltmanovu kinetičku jednačinu u aproksimaciji vremena relaksacije i na taj način došli do izraza za struju elektrona i šupljina /II deo, § 5/.

Poznato je medjutim, da time još uvek nije rešen problem



transporta nanelektrisanja, i da se još moraju razmotriti efekti generacije i rekombinacije elektrona i šupljina u poluprovodniku, što je uzeto u obzir pomoću jednačine kontinuiteta date u § 6.

Najzad je celokupna teorija primenjena na izračunavanje naponsko-strujne zavisnosti kod P-N spojeva /III deo/.

Ceo rad predstavlja osnovu za proučavanje naponsko-strujnih zavisnosti kod poluprovodničkih elemenata /P-N spojeva, tranzistora itd./. Savremena elektronika sve više koristi poluprovodničke sastavne delove, pa ~~je~~ ova teorija ~~je~~ neophodna za razumevanje njihovog rada.

I D E O

RAVNOTEŽNE STATISTIČKE FUNKCIJE RASPODELE

§ 1. BROJ KVANTNIH STANJA U KVAZIKLASIČNOJ APROKSIMACIJI /9/

U statističkoj fizici u većini slučajeva posmatra se čestica koja se kreće u makroskopskim zapreminama, a takodje i ponašanje makroskopskih tela, koja sadrže ogroman broj čestica.

Za ovakve sisteme kvantne pojave igraju relativno malu ulogu, ali one se nikako ne smeju sasvim zanemariti. Zato se ove pojave posmatraju u kvaziklasičnoj aproksimaciji. Naime, može se pokazati, da uopštem slučaju proizvodnjog sistema, koji ima f stepena slobode, u ovoj aproksimaciji kretanje sistema možemo posmatrati kao i u klasičnoj mehanici, ali stavlјajući na moguća stanja ograničenje: svakom kvantnom stanju sistema sa f stepena slobode u kvaziklasičnoj aproksimaciji odgovara čelija u faznom prostoru, koja ima zapreminu h^f .

Važan pojam predstavlja broj kvantnih stanja koja odgovara-ju energiji sistema izmedju ε i $\varepsilon + \Delta\varepsilon$, koje ćemo označiti sa $\Omega(\varepsilon) \Delta\varepsilon$.

Za proizvoljni sistem koji ima f stepeni slobode može se napisati:

$$\Delta\Gamma = \frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon} \Delta\varepsilon \quad (1.1)$$

gde je $\Delta\Gamma$ element faznog prostora, po definiciji jednak:

$$d\Gamma = \prod_{i=1}^f dq_i dp_i ; i=1, \dots, f \quad (1.2.)$$

gde su q_i i p_i koordinate i impuls. Prema tome broj stanja je:

$$\Omega(\varepsilon) \Delta\varepsilon = \frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon} \cdot \frac{\Delta\varepsilon}{h^f} \quad (1.3.)$$

ili

$$\Omega = \int d\Omega = \frac{\Delta\Gamma}{h^f} \quad (1.4.)$$

Veličina $\Omega(\varepsilon)$ je gustina broja stanja koja se odnosi na jedinični interval promene energije.

§ 2. KVAZI NEZAVISNI SISTEMI /9/

Posmatrajmo jedan makroskopski sistem, koji se sastoji iz veoma velikog broja čestica. Predpostavimo da se kretanje svih čestica određuje zakonima kvantne teorije, tj. svako stanje čestice određeno je kvantnim brojevima. Ako ovaj sistem izdelimo na skup podsistema, tako da njihovo uzajamno dejstvo možemo u prvoj aproksimaciji da zanemarimo, dobićemo delove tog sistema koji se kreću u prvoj aproksimaciji nezavisno jedan od drugog, tj. dobijamo kvazi-nezavisne podsisteme. Očevidno je da su podsistemi kvazinezavisni, ako je energija njihovog uzajamnog dejstva u proseku mala u poređenju svakog podsistema.

Neka svaki od podsistema, koji ulaze u ceo sistem ima veliki broj delova /atoma, elektrona/ i predstavlja makroskopski sistem. Tada će ukupna energija kretanja pojedinih delova predstavljati energiju podsistema i biće proporcionalna ukupnom broju čestica koje ulaze u podsistemu. Uzajamno dejstvo medju različitim podsistemima uslovljeno je uglavnom silama interakcije izmedju čestica, koje se nalaze na površini svakog od uzajamno dejstvujućih podsistema. Prema tome energija uzajamnog dejstva izmedju podsistema proporcionalna je broju čestica koje se nalaze na njihovoj površini, tj. veličini same površine.

Na osnovu ovoga, energija podsistema $\bar{\epsilon}$ proporcionalna je R^3 , gde je R linearna dimenzija sistema, a energija uzajamnog dejstva $\epsilon_{ud} \sim R^2$. Njihov odnos:

$$\frac{\epsilon_{ud}}{\bar{\epsilon}} \sim \frac{R^2}{R^3} \sim \frac{1}{R} \sim N^{-\frac{1}{3}} \quad (2.1.)$$

je dovoljno mali pri velikom N .

Za energiju svih kvazinezavisnih sistema možemo uzeti da je jednaka zbiru energija pojedinih delova tj.

$$E \approx \sum_i \epsilon_i \quad (2.2.)$$

gde znak \approx izražava činjenicu da smo /2.2./ zanemarili energiju

uzajamnog dejstva izmedju podsistema, koji obrazuju ceo sistem.

Izdvojimo u mislima iz celog sistema jedan proizvoljno izabran podsistem. Prema ranijem, energija podsistema nije strogo konstantna, već se stalno menja u granicama Σ_{ud} , gde je Σ_{ud} energija uzajamnog dejstva sistema sa njegovom okolinom. Σ_{ud} možemo zanemariti u bilansu energija, ali ona predstavlja uzrok prelaza sistema iz jednog kvantnog stanja u drugo.

§ 3. STATISTIČKE RASPODELE U KVANTNOJ STATISTICI /9/

Ovde osnovni značaj imaju dva osnovna principa kvantne mehanike:

1. postojanje diskretnih stanja energije sistema
2. princip nerazličivosti elementarnih čestica.

Posmatrajmo jedan sistem, čije se čestice mogu nalaziti u pojedinačnim kvantnim stanjima sa energijom ξ_1, ξ_2, \dots . Dalje iza-berimo za kvazizatvoren podsistem sve čestice koje se nalaze u proizvoljnom kvantnom stanju sa energijom ξ_k . Sve ostale čestice, pri ovom obrazuju termostat.

Kao rezultat sudara čestica koja poseduju energiju ξ_k , prelazi u drugo stanje. Obrnuto, blagodareći ovom istom mehanizmu u ovo stanje dolaze druge čestice, koje su ranije imale energiju različitu od ξ_k i koje su prema tome pripadale termostatu. Ako je broj čestica koje ulaze ili izlaze iz podsistema mali u poređenju sa brojem čestica koje se u njemu nalaze, to se može smatrati, da je uzajamno dejstvo izmedju podsistema i termostata slabo. Ovaj uslov će biti ispunjen ako su sudari dosta retki tj. kada je gas koga čine ove čestice dosta razredjen. Kako vidimo izabrani podsistem predstavlja podsistem sa promenljivim brojem čestica. Energija nalog podsistema je jednaka:

$$\Sigma = \xi_k \cdot n_k$$

(3.1.)

gde je n_k broj čestica u podsistemu. Veličina ε menja se zajedno sa promenom n_k .

Da bi potpuno okarakterisali stanje izabranog podsistema moramo znati srednji broj čestica koje se nalaze na izabranom energetskom nivou. Srednja vrednost broja čestica u podsistemu izražava se formulom

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln \sum_{n_k} \left(e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{kT}} \right)^{n_k} \Omega(n_k) \quad (3.2.)$$

Zbog principa identičnosti stanja sistema, koja sadrže proizvoljan broj čestica $0 \leq n_k \leq \infty$, su negenerisana, pa je broj stanja sistema, koji sadrži n_k čestica jednak:

$$\Omega(n_k) = 1 \quad (3.3.)$$

Stavljujući /3.3./ u /3.2./ nalazimo:

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln \sum_{n_k} \left(e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{kT}} \right)^{n_k} \quad (3.4.)$$

Sumiranje se vrši po broju čestica u stanju sa energijom ε_k . Pri sabiranju moramo razlikovati dve vrste čestica; čestice koje se ne potčinjavaju principu zabrane i čestice koje se potčinjavaju ovom principu.

U prvom slučaju na broj čestica koje se nalaze u pojedinačnim kvantnim stanjima, ne stavljuju se nikakva ograničenja. Njihov broj može uzimati sve moguće vrednosti izmedju nule i celog broja čestica u sistemu. Prema tome:

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln \sum_{n_k=0}^N \left(e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{kT}} \right)^{n_k} \quad (3.5.)$$

Zamenjujući gornju granicu zbiru sa beskonačnošću dobijamo:

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln \sum_{n_k=0}^{\infty} \left(e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{kT}} \right)^{n_k} \quad (3.5a.)$$

Zamenu gornje granice smemo izvršiti jer se radi o veoma velikom broju čestica, a time matematički dobijamo izraz koji se veoma lako

asimtotski određuje.

Ako važi nejednakost

$$e^{\frac{\beta - \varepsilon_k}{kT}} < 1 \quad (3.6.)$$

zbir u /3.5 a/ predstavlja beskonačnu opadajuću geometrijsku progresiju

$$\sum_{n_k=0}^{\infty} \left(e^{\frac{\beta - \varepsilon_k}{kT}} \right)^{n_k} = \frac{1}{1 - e^{\frac{\beta - \varepsilon_k}{kT}}}$$

odakle je

$$n_k = kT \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\frac{1}{1 - e^{\frac{\beta - \varepsilon_k}{kT}}} \right) = \frac{1}{e^{\frac{\beta - \varepsilon_k}{kT}} - 1} \quad (3.7.)$$

Formula /3.7./ daje srednji broj čestica idealnog gasa koji se nalazi u stanju sa energijom ε_k , ako se čestice ne podčinjavaju principu zabrane. U ovu klasu čestica spadaju sve one koje imaju celobrojni spin. Raspodela /3.7./ naziva se Boze-Ajnštajnovom. Primetimo da zbog /3.6./ mora da važi nejednakost

$$e^{\frac{\beta}{kT}} < 1 \quad (3.8.)$$

Nejednakost /3.8./ pokazuje, da kod čestica koje se podčinjavaju raspodeli Boze - Ajnštajna, β je suštinski negativna veličina

$$\beta < 0 \quad (3.9.)$$

U slučaju čestica koje se podčinjavaju principu zabrane, broj čestica n_k , koje se mogu jednovremeno nalaziti u individualnim kvantnim stanjima ne može da predje jedinicu. Znači, moguće vrednosti n_k ograničene su dvema $n_k=0$ i $n_k = 1$. Zamenjujući gornju granicu integriranja u formuli /8.2./ nalazimo:

$$n_k = kT \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \sum_{n_k=0}^1 \left(e^{\frac{\beta - \varepsilon_k}{kT}} \right)^{n_k} = kT \frac{\partial}{\partial \beta} \ln (1 + e^{\frac{\beta - \varepsilon_k}{kT}}) = \frac{1}{e^{\frac{\beta - \varepsilon_k}{kT}} + 1} \quad (3.10.)$$

Raspodela /3.10./ predstavlja raspodelu po stanjima idealnog gasa, u slučaju kada se čestice podčinjavaju principu zabrane. Raspodela /3.10/ dobila je naziv Fermi-Dirakova raspodela.

U svim slučajevima koji se sreću u praksi, rastojanja izmedju nivoa energija toliko su mala u poređenju sa topotnom ener-

gijom kT , da se energetski spektar može smatrati neprekidnim. Tada umesto srednjeg broja čestica na K - tom energetskom nivou potrebno je uvesti srednji broj čestica d_n sa energijom koja leži izmedju ε i $\varepsilon + \Delta\varepsilon$. Očevidećno $d_n = \bar{n} \frac{d\varepsilon}{\hbar^3}$, gde je $\frac{d\varepsilon}{\hbar^3}$ broj stanja, koja odgovaraju energiji u intervalu ε i $\varepsilon + \Delta\varepsilon$. Stavljaajući \bar{n} iz /3.7./ i /3.10./ nalazimo:

$$d_n = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \chi}{kT}} + 1} \cdot \frac{d\varepsilon}{\hbar^3} \quad (3.11.)$$

Potencijal χ , koji ulazi u Bozeovu i Fermijevu raspodelu određuje se iz uslova normiranja

$$\int d_n = N \quad (3.12.)$$

koji izražava konstantnost čestica koje se nalaze u datoj zapremini.

§ 4. VEZA IZMEDJU KVANTNIH I KLASIČNE MAKSEV-BOLCMANOVE STATISTIKE

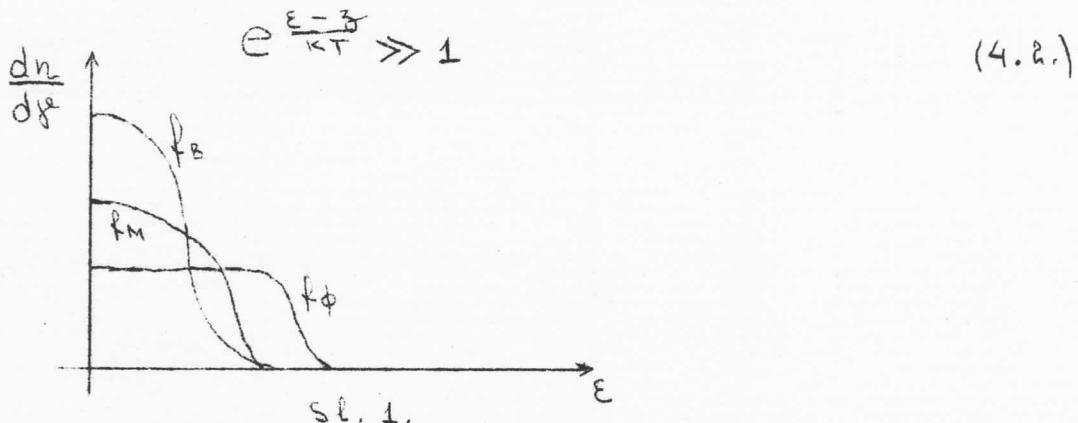
Gasovi koji se podčinjavaju klasičnoj statistici nazivaju se nedegenerisanim. Obrnuto, idealni gasovi, čije se ponašanje daje kvantnim zakonima, nazivaju se degenerisanim. Naš zadatak je objašnjenje pitanja u kakvim uslovima je gas degenerisan ili drugačije govoreći, kada je klasična statistika primenjiva, a kada je neophodno uzimati u obzir zakone kvantne statistike. Pri rešavanju ovog pitanja, mi ćemo polaziti od toga, da su pravilni i tačniji zakoni raspodeli Boze - Ajnštajna i Fermi - Diraka. Prema tome, zakon Maksvel - Bolcmana, možemo koristiti samo tada kada je razlika izmedju njega i kvantnih raspodela dovoljno mala.

Znajući da je Maksvel - Bolcmanova raspodela data sa:

$$d_n = \bar{n} \frac{d\varepsilon}{\hbar^3} = e^{\frac{\chi - \varepsilon}{kT}} \cdot \frac{d\varepsilon}{\hbar^3} \quad (4.1.)$$

i uporedjujući je sa izrazima /3.7./ i /3.10./ iz prošlog paragrafa vidimo da one u opštem slučaju imaju različit karakter.

Medjutim, ova razlika iščezava ako je ispunjena nejednakost:



Sl. 1. daje tok sve tri krive. Njihovo nepoklapanje pri velikim ϵ vezano je sa tim, što tim krivama odgovaraju razne vrednosti \bar{z} . Na taj način nejednakost /4.2./ služi kao uslov primenljivosti klasične statistike. Za ispunjenje nejednakosti /4.2./ pri energiji $\epsilon \approx kT$ /pri $\epsilon > kT$ eksponent brzo raste/ potrebno je da je $e^{-\frac{\bar{z}}{kT}} \gg 1$. Ako predpostavimo da je poslednja nejednakost ispunjena tada je pri svim energijama

$$\frac{1}{e^{\frac{\bar{z}-\epsilon}{kT}} \pm 1} \approx e^{\frac{\bar{z}-\epsilon}{kT}} \quad (4.3.)$$

Iz uslova normiranja /3.12/. nalazimo:

$$N = \int dV \frac{dp_x dp_y dp_z}{h^3} e^{\frac{\bar{z}-\epsilon}{kT}} = \frac{c\pi (2m)^{3/2}}{h^3} e^{\frac{\bar{z}}{kT}} \int d\epsilon N(\epsilon) e^{-\frac{\epsilon}{kT}} = \\ = V \left(\frac{c\pi m k T}{h^3} \right)^{3/2} e^{\frac{\bar{z}}{kT}}$$

odakle je:

$$e^{-\frac{\bar{z}}{kT}} = \frac{V}{N} \left(\frac{c\pi m k T}{h^3} \right)^{3/2} \quad (4.4.)$$

Prema tome, kriterijum zakonitosti primene klasične mehanike je ispunjenje nejednakosti:

$$e^{-\frac{\bar{z}}{kT}} = \frac{V}{N} \left(\frac{c\pi m k T}{h^3} \right)^{3/2} \gg 1 \quad (4.5.)$$

Vidimo da kriterijum /4.5./ sadrži nekoliko parametara.

U njega ulazi masa čestice m ; ukoliko je veća masa time je veća leva strana nejednakosti. Dalje u nejednakosti /4.5./ ulazi gustina

gasa i njegova temperatura T . Kao što je trebalo očekivati posmatrana nejednakost je ispunjena pri viskim temperaturama, jer se pri niskim pojavljuju kvantni efekti. Ispunjavaju nejednakosti /4.5./ odgovara mala gustina gase. U opštem slučaju, kada je

$$\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \ll 1 \quad (4.6.)$$

nastupa degeneracija gase. Prema tome, degeneracija može da bude uslovljena sledećim uzrocima:

1. velika gustina gase
2. mala masa čestica
3. niske temperature.

U slučaju elektronskog gasa velike gustine degeneracija ne postoji i pri relativno visokim temperaturama.

§ 5. RAVNOTEŽNA FUNKCIJA RASPODELE ELEKTRONA I ŠUPLJINA U POLUPROVODNIKU /11; 12/

U jednoelektronskoj aproksimaciji uzajamno dejstvo medju elektronima čvrstog tela izračunava se samo posredstvom samosaglašenog polja, u kojem se svaki elektron kreće nezavisno od drugog. Sa statističke tačke gledišta što je bitno u ovom slučaju jednoelektronska aproksimacija odgovara modelu idealnog gasa. U stanju statističke ravnoteže idealni gas elektrona podčinjava se statistici Fermi - Diraka, koju smo mi proučili u § 3. U statističkoj ravnoteži srednji broj elektrona u određenom kvantnom stanju i sa određenom energijom ξ_k pri temperaturi T je jednak:

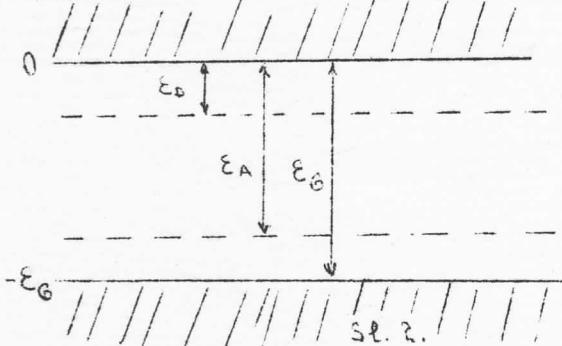
$$f_0(\xi_k) = \frac{1}{e^{\frac{\xi_k - \beta}{kT}} + 1} \quad (5.1.)$$

Ovde je β , hemijski potencijal obračunat na jedan elektron, k -Boltzmannova konstanta. Prema tome, $f_0(\xi_k)$ predstavlja ravnotežnu raspodelu elektrona u poluprovodniku. Verovatnoća da kvantno stanje sa energijom ξ_k ne ispunjava elektron, tj. verovatnoća za pojavljivanje

šupljine je:

$$f'_o(\varepsilon'_k) = 1 - f_o(\varepsilon_k) = 1 - \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon'_k}{kT}} + 1} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon'_k}{kT}} + 1} \quad (5.2.)$$

gde je $f'_o(\varepsilon'_k)$ ravnotežna funkcija raspodele Fermi - Diraka za šupljine.



Ako računamo sve energije od najnižeg kraja zone provodnosti, to energija elektrona u zoni provodnosti je jednaka $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}$, na donorskom nivou $\varepsilon = -\varepsilon_0$, na akcetorskom nivou $\varepsilon = -\varepsilon_A$ i u valetnoj zoni $\varepsilon = -\varepsilon_0 - \varepsilon'$, gde je $\varepsilon' = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p}$ kinetička energija šupljina, a ε_0 širina zarađene zone. Sve ovo je prikazano na slici 2.

Ako uvedemo hemijski potencijal šupljina $\beta' = -\varepsilon_0 - \beta$, to funkcija raspodele za šupljine /5.2./ može se napisati u obliku:

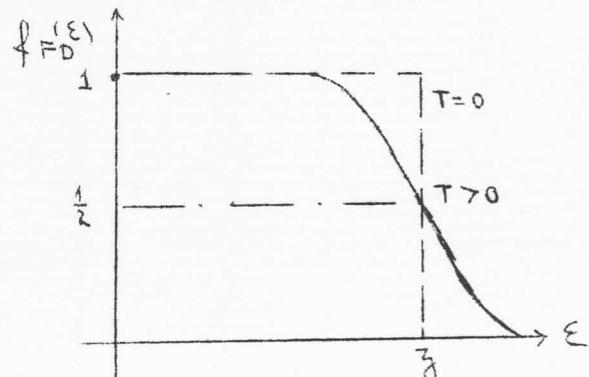
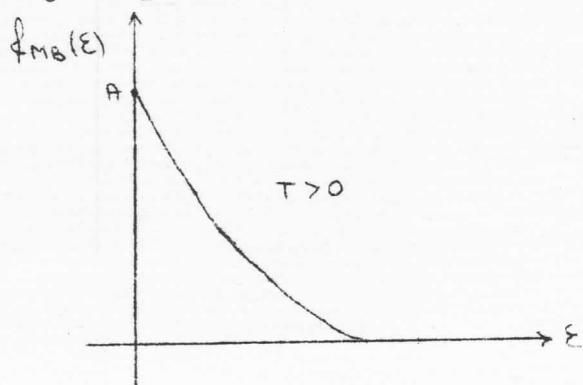
$$f'_o(\varepsilon'_k) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \beta'}{kT}} + 1} \quad (5.3.)$$

što je potpuno analogno funkciji raspodele /5.1./ za elektrone.

Predstavimo grafički funkcije raspodele Maksvel - Bolcmana i Fermi - Diraka u funkciji energije i temperature kao parametra. Znajući da je funkcija raspodele Maksvel - Bolcmana data izrazom:

$$f_{MB} = A e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \quad (5.4.)$$

gde je A parametar koji treba odrediti kako je dato u /4; 5/.



Slika 3.

Sa slike 3. vidi se da se f_{FD} za $T > 0$ više ne menja skokovito /kod Fermijevog nivoa $\bar{\epsilon}$ /, već kontinualno, ali opet vrlo brzo. Pri $\epsilon \gg kT$ t.j. u oblasti "repa" imamo da je $f_{FD} \approx f_{MB}$:

$$f_{FD} \approx e^{-\frac{\epsilon - \bar{\epsilon}}{kT}} = e^{-\frac{\epsilon}{kT}} \cdot e^{\frac{\bar{\epsilon}}{kT}} \quad (5.5.)$$

Ovo je veoma važan zaključak za teoriju poluprovodnika. Stvarno, mađa je u principu za elektrone i šupljine u poluprovodnicima potrebno primenjivati Fermi - Dirakovu statistiku, većina elektrona je daleko energetski od $\bar{\epsilon}$ u odnosu na kT , pa praktično za njih važi Maksvel - Boltmanova klasična statistika.

II D E O

KINETIČKA JEDNAČINA ZA ELEKTRONE I ŠUPLJINE U POLUPROVODNIKU
=====

§ 1. POJAVA PRENOSA I BOLCMANOVA KINETIČKA JEDNAČINA /14./

Pored statistički ravnotežnih stanja, čija je najvažnija osobina, da svojstva sistema koji se nalaze u takvim stanjima ne zavise od mehanizma uzajamnog dejstva, međutim postoje i neravnotežna stanja. Ovde će biti posmatrane pojave vezane za kretanje elektrona i šupljina pod dejstvom spoljašnjih polja i to: električnog, magnetnog ili temperaturnog. Procesi koji su vezani za kretanje elektrona i šupljina, nazivaju se kinetičkim efektima ili pojavama prenosa.

Kad veličine, koje opisuju prenos: gustina električne struje, topotni tok, jačina električnog polja itd. ne zavise od vremena, tada pojavu nazivamo stacionarnom. Da bi pri dejstvu električnog polja, koje upravlja elektrone struja bila stacionarna, neophodno je da se elektroni provodnosti sudaraju odnosno rasejavaju na nehomogenostima rešetke kao na primer na oscilovanju atoma ili defektima kristala. Pri ovim sudarima oni gube energiju dobivenu od električnog polja. U velikom broju slučajeva sudara odnosno rasejavanja elektrona ovde praktično možemo smatrati elastičnim zbog slabog električnog polja.

Važna osobina neravnotežnih procesa je ta, da oni bitno zavise od mehanizma interakcije u sistemu.

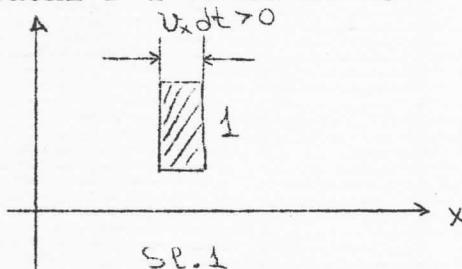
Kao što smo videli u I delu elektroni u stanju termodinamičke ravnoteže u kvaziklasičnom slučaju opisuju se ravnotežnom funkcijom Maksvel - Bolcmana $A e^{\frac{-\epsilon}{kT}}$, gde je $\epsilon = \frac{mv^2}{2} + \text{ukupna energija elektrona, a } m \text{ potencijalna energija}$, ovde obično jednaka nuli.

Za elektrone u neravnotežnom stanju možemo uvesti neravnotežnu funkciju raspodele, koja ima takav smisao da izraz:

$$f(\vec{v}, \vec{r}, t) d^3 r d^3 v \quad (1.1.)$$

daje broj elektrona u trenutku t u tački \vec{r} i zapremini $d^3 r$ sa brzina izmedju v_x i $v_x + dv_x$ itd. Takve elektrone mi ćemo nazvati v -elektronima. Opisivanje elektrona posredstvom jednovremenog zadanja koordinata i brzina /impulsa/, moguće je samo u toj mjeri u kojoj se njihovo kretanje podčinjava zakonima klasične mehanike.

Ako je poznata funkcija $f(\vec{v}, \vec{r}, t)$ tada možemo izračunati gustinu struje u tački \vec{r} u trenutku t .



Na slici 1. je nacrtana jedinična površina normalna na ravan crteža i osi x, i cilinder visine $v_x dt$ paralelno na ovoj površini.

Broj v -elektrona unutar cilindra je $\int d^3 v v_x f(\vec{v}, \vec{r}, t) v_x dt$. Svi ovi elektroni za vreme dt pomere se u pravcu x za veličinu $v_x dt$, što znači preseku površinu. Ukupni broj elektrona svih brzina, koji presecaju površinu za vreme dt je:

$$dt \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 v v_x f(\vec{v}, \vec{r}, t)$$

Pošto svaki elektron ima nanelektrisanje $/-e/$, gustostrina struje u pravcu x biće jednaka:

$$j_x = -e \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 v v_x f(\vec{v}, \vec{r}, t) \quad (1.2.)$$

Uzmimo neravnotežnu funkciju raspodele u obliku:

$$f(\vec{v}, \vec{r}, t) = f_0(\epsilon) + f_1(\vec{v}, \vec{r}, t)$$

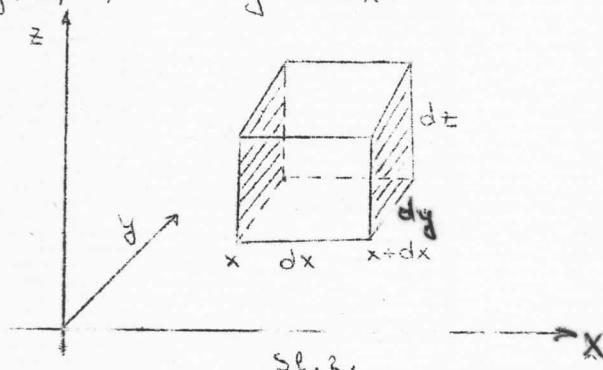
Kako je $f_0(\epsilon)$ parna funkcija v_x /zavisi od v_x^2 / $, tada integral /1.2./ pod v_x od $f_0(\epsilon)$ jednak je nuli i /1.2./ daje:$

$$j_x = -e \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 v v_x f_1(\vec{v}, \vec{r}, t) \quad (1.2.a.)$$

Osnovni zadatak teorije kinetičkih pojava je određivanje neravnotežne funkcije raspodele $f(\vec{v}, \vec{r}, t)$, koju ćemo mi odrediti pri kraju ovog dela.

Sada izvedimo jednačinu, koju zadovoljava funkcija $f(\vec{v}, \vec{r}, t)$.

Posmatrajmo promenu broja v-elektrona za vreme dt , kao rezultat njihovog kretanja u običnom /geometrijskom/ prostoru. Na slici 2. predstavljen je element zapremine $d^3r = dx dy dz$. Izračunajmo promenu broja v-elektrona unutar ove zapremine, koja nastaje na račun ulazenja elektrona kroz levu stranu $dy dz$ i izlazenja elektrona kroz desnu stranu $dy dz$ /predpostavlja se da je $v_x > 0$ /: broj v-elektrona, koji pridolaze za vreme dt kroz levu stranu iznosi $f(\vec{v}, \vec{r}) d^3v dy dz v_x dt$, broj v-elektrona koji odlaze kroz desnu stranu za vreme dt jednak je $f(\vec{v}, x+dx, y, z, t) d^3v dy dz v_x dt$.



sl. 2.

Povećanje broja v-elektrona u zapremini d^3r na račun ovog procesa jednako je:

$$f(\vec{v}, x, y, z, t) d^3v dy dz v_x dt - f(\vec{v}, x+dx, y, z, t) d^3v dy dz v_x dt = \\ = -v_x \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz d^3v dt \quad (1.3.)$$

Povećanje broja v-elektrona u zapremini d^3r na račun kretanja elektrona kroz šest strana zapremine d^3r , jednako je:

$$- \left(v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) d^3v d^3r dt = \\ = - (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f) d^3r d^3v dt = - \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} d^3r d^3v dt \quad (1.4.)$$

Analogno promeni broja v-elektrona u geometrijskom prostoru možemo posmatrati promenu broja v-elektrona u zapremini $d^3v = dx dy dz$ koje nastaju kao rezultat njihovog "kretanja" u v-prostoru sa "brzinama" v_x, v_y i v_z . Porast broja v-elektrona pri kretanju u v-prostoru



ru jednak je:

$$-(\vec{U} \cdot \nabla_{\vec{v}} f) d^3v d^3r dt = -\vec{U} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d^3r d^3v dt = \\ = -\frac{1}{m} (\vec{F} \nabla_{\vec{v}} f) d^3v d^3r dt \quad (1.4a.)$$

jer ubrzaju odgovara $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}, t)$, gde je $\vec{F}(\vec{r}, t)$ sila koja deluje na elektron u tački \vec{r} u momentu t .

Osim zbog gornjeg broj v-elektrona menja se kao rezultat sudara sa oscilovanjima rešetke /fononima/ i defektima kristala. Svaki sudar v-elektrona odvodi ga iz zapreme d^3v jer se pri sudaru oštrosno menja njegova brzina. Dalje ćemo mi posmatrati elastične sudeare, pri kojima se menja samo pravac brzine, tako da je posle suda intenzitet brzina jednak tj. $|\vec{v}| = |\vec{v}'|$.

Neka je $W(\vec{v}, \vec{v}', \Omega) dt$ verovatnoća da se v-elektron za vreme dt elastično raseje u elementarni prostorni ugao $d\Omega$ oko pravca \vec{v}' . Pošto je verovatnoća bezdimenzionala veličina to $W(\vec{v}, \vec{v}', \Omega)$ ima dimenziju recipročnu vremenu (sec^{-1}).

Broj v-elektrona koji u rezultatu suda iščezavaju za vreme dt jednak je:

$$-\int_{\Omega'} f(\vec{v}, \vec{r}, t) d^3v d^3r W(\vec{v}, \vec{v}', \Omega') dt d\Omega'.$$

Sa druge strane, broj v-elektrona će da raste, zbog pretvaranja svih mogućih v'-elektrona u v-elektrone kao posledicu suda. Ovaj porast za vreme dt biće jednak:

$$\int_{\Omega'} d\Omega' f(\vec{v}, \vec{r}, t) d^3v d^3r W(\vec{v}', \vec{v}) dt.$$

Pošto su sudi elastični tj. $|\vec{v}'| = |\vec{v}|$ to se integraljenje po d^3v' svodi na integral po Ω' .

U konačnom bilansu porast broja v-elektrona zbog suda za vreme dt je:

$$d^3v d^3r dt \int d\Omega' [f(\vec{v}, \vec{r}, t) W(\vec{v}, \vec{v}') - f(\vec{v}', \vec{r}, t) W(\vec{v}, \vec{v}')] \quad (1.4b.)$$

Porast broja v-elektrona za vreme dt jednak je:

$$f(\vec{v}, \vec{r}, t + dt) d^3 v d^3 r - f(\vec{v}, \vec{r}, t) d^3 v d^3 r = \frac{\partial f}{\partial t} d^3 v d^3 r dt \quad (1.5.)$$

Izjednačujući sa /1.5./ zbir /1.4./, /1.4a./ i /1.4b/ dobijamo:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -(\vec{v} \nabla_{\vec{r}} f) - \frac{1}{m} (\vec{F} \nabla_{\vec{v}} f) + \int d\Omega' [f(\vec{v}', \vec{r}, t) W(\vec{v}', \vec{v}) - f(\vec{v}, \vec{r}, t) W(\vec{v}, \vec{v}')] \quad (1.6.)$$

Ova jednačina je tražena Boltzmanova kinetička jednačina koja zadovoljava funkciju raspodele $f(\vec{v}, \vec{E}_B)$.

U ovoj jednačini možemo razlikovati dva člana i to: član koji nastaje usled polja /član polja/:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{polje}} = -(\vec{v} \nabla_{\vec{r}} f) - \frac{1}{m} (\vec{F} \nabla_{\vec{v}} f) \quad (1.7.)$$

određuje brzinu promene funkcije raspodele f koja je rezultat neprekidnog kretanja elektrona u \vec{r} -i \vec{v} -prostoru, a član sudara:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{sud.}} = \int d\Omega' [f(\vec{v}', \vec{r}, t) W(\vec{v}', \vec{v}) - f(\vec{v}, \vec{r}, t) W(\vec{v}, \vec{v}')] \quad (1.7a.)$$

određuje brzinu promene funkcije raspodele f koja nastaje kao rezultat sudara odnosno rasejanja elektrona.

U stacionarnom slučaju koristeći /1.7./ i /1.7a/ možemo napisati Boltzmanovu kinetičku jednačinu u obliku:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{polje}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{sud.}} = 0 \quad (1.8.)$$

ili eksplicitno napisano:

$$(\vec{v} \nabla_{\vec{r}} f) + \frac{1}{m} (\vec{F} \nabla_{\vec{v}} f) = \int d\Omega' [f(\vec{v}', \vec{r}) W(\vec{v}', \vec{v}) - f(\vec{v}, \vec{r}) W(\vec{v}, \vec{v}')] \quad (1.8a.)$$

Kako sa desne strane /1.8a/ stoji integral od nepoznate funkcije $f(\vec{v}')$, to je kinetička Boltzmanova jednačina integro-diferencijalna. Za njeno rešenje neophodno je znati silu \vec{F} i verovatnoću prelaza za jednu sekundu u jedinici prostornog ugla $W(\vec{v}, \vec{v}')$. U ravnotežnom slučaju, kako smo videli u I delu funkcija raspodele u kvaziklasičnog aproksimaciji je $\propto e^{-\frac{E}{kT}}$, gde je E ukupna energija tj. jednaka zbiru kinetičke energije $\eta = \frac{mv^2}{2}$ i potencijalne energije $U(r)$. U tom slučaju leva strana jednačine /1.8a/ jednaka je nuli. U stvari izračunavši pojedine članove tj. za ovaj slučaj dobijamo:

$$\vec{V} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_0(\eta + u) = \frac{1}{kT} f_0 \vec{V} (-\nabla_{\vec{r}} u) = \frac{1}{kT} f_0 (\vec{V} \cdot \vec{F})$$

i

$$\frac{1}{m} \vec{F} \nabla_{\vec{v}} f_0(\eta + u) = -\frac{1}{m} \vec{F} \frac{m \vec{v}}{kT} f_0 = -\frac{1}{kT} f_0 (\vec{v} \cdot \vec{F}).$$

Na taj način iz jednačine /1.8a/ koristeći gornje rezultate dobija-

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{sud.}} &= \int d\Omega' [f_0(\varepsilon') W(\vec{v}, \vec{v}') - f_0(\varepsilon) W(\vec{v}, \vec{v}')] = \\ &= f_0(\varepsilon) \int d\Omega' [W(\vec{v}, \vec{v}') - W(\vec{v}, \vec{v}')] = 0 \end{aligned} \quad (1.9.)$$

jer po ranijoj predpostavci je $\varepsilon' = \varepsilon$.

Iz relacije /1.9./ zaključujemo da pri proizvoljnoj brzini integral može da bude jednak nuli samo ako je ispunjen uslov da je:

$$W(\vec{v}, \vec{v}') = W(\vec{v}; \vec{v}') \quad (1.10.)$$

Poslednja jednakost je posledica opšteg principa detaljne ravnoteže saglasno kojoj su verovatnoće direktnog i obrnutog procesa jednake. Pri izračunavanju verovatnoće prelaza u kvantnoj mehanici jednačina /1.10./ je direktna posledica njenih zakona.

Ako na elektron dežuje samo električno polje \vec{E} upravljeno duž ose x , tada se popravka funkcije raspodele može predstaviti u obliku:

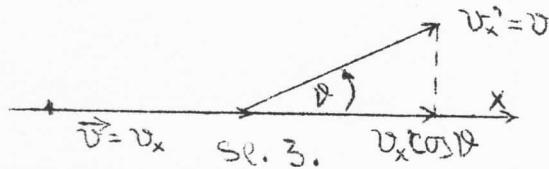
$$f_1 = - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \chi(\varepsilon) v_x \quad (1.11.)$$

tj. u vidu proizvoda neke funkcije od energije $\chi(\varepsilon)/\varepsilon = \frac{1}{2}(v_x^2 + \dots)$ i v_x , množitelj $(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon})$ uzima se radi olakšanja u daljim proračunima.

Stavlјajući /1.11./ u /1.7a/ i smatrajući sudar elastičnim $/\varepsilon' = \varepsilon/$ i uzimajući jednakost /1.10./ u obzir dobijamo:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{sud}} = f_1 \int d\Omega' W(\vec{v}, \vec{v}') (1 - \cos \vartheta) \quad (1.12.)$$

Ovde je $\cos \vartheta = \frac{v_x'}{v_x}$, gde je ϑ ugao skretanja elektrona od prvobitnog pravca kretanja zbog sudara sl. 3. /gde je osa x izabrana paralelno brzini elektrona \vec{v} do sudara/.



Pošto $W(v, \tilde{v})$ ima dimenziju obrnutu vremenu pogodno je uvesti vreme relaksacije τ stavljajući:

$$\frac{1}{\tau} = \int W(v, \tilde{v}) (1 - \cos \theta) dS' \quad (1.13.)$$

Iz jednačina /1.12./ i /1.13./ proizilazi vrlo važna jednačina za kinetičke pojave:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{sud.}} = - \frac{f_1}{\tau} = - \frac{f - f_0}{\tau} \quad (1.14.)$$

Očigledan smisao vremena relaksacije možemo pokazati, posmatrajući uspostavljanje statističke ravnoteže u homogenom sistemu, u kome je u početnom trenutku $t=0$ raspodela po brzinama bila neravnotežna i na koju ne deluju sile. Stavljući $\nabla_{\vec{r}} f = 0$ i $\vec{F} = 0$, imamo na osnovu izraza /1.6./, /1.7a./ i /1.14./:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{sud.}} = - \frac{f - f_0}{\tau} .$$

Integraljeći posebnu jednakost, dobijamo:

$$f - f_0 = (f - f_0)_{t=0} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.14.)$$

Mi vidimo, da je τ vreme, u toku koga razlika $(f - f_0)$ pri isključivanju spoljašnjeg polja smanjuje se e puta. Pošto težnja ka ravnoteži u sistemu proizilazi kao rezultat sudara elektrona /sa vibracijama rešetke ili defektima kristala/, a pri ovom je dovoljno nekoliko sudara da elektroni predju u ravnotežno stanje, to je vreme relaksacije τ reda vremena slobodnog puta elektrona. Mi ćemo definisati srednju dužinu slobodnog puta elektrona kao:

$$l = v \tau \quad (1.15.)$$

Iz definicije /1.13./ proizilazi da je τ funkcija brzine odnosno energije $\tau(v)$ ili $\tau(\epsilon)$. U svim za praksu interesantnim slučajevima popravka ravnotežnoj funkciji raspodele je $f_1 < f_0$. Prema tome sa

tačnošću do veličine prvog reda f_1 , možemo u levu stranu jednačine /1.8a./ staviti umesto f ravnotežnu funkciju f_0 . U prisustvu samo električnog polja iz /1.8a./ i /1.14./ dobijamo:

$$f_1 = \frac{e}{m} E_x \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \tau = -E_x \frac{f_0}{\tau} \tau v_x \quad (1.16.)$$

Ako nam je poznato vreme relaksacije τ , tada po formuli /1.2a./ možemo odrediti gustoštinu struje. Istovremeno vidimo da funkcija ima oblik /1.11./, gde smo dobili i eksplicitni izraz za $\chi(\varepsilon) = -eE_x \tau$.

§ 2. KINETIČKA JEDNAČINA ZA ELEKTRONE I ŠUPLJINE U POLUPROVODNIKU

U prošlom paragrafu predpostavili smo, da se kretanje elektrona podčinjava zakonima klasične mehanike, pa se njihova stanja opisuju u \vec{r} - i \vec{v} -prostoru i smatramo da je

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F} \quad (2.1.)$$

Ova jednačina je ispravna i u kvaziklasičnoj aproksimaciji, ako je energija elektrona $\xi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$ gde je m^* efektivna masa, a $\vec{v} = \frac{\hbar \vec{k}}{m^*}$. Ako energija $\xi(\vec{k})$ elektrona ima navedeni oblik ili može da se svede na taj oblik, tada su primenljive sve formule iz predhodnog paragrafa pri zameni m sa m^* . U opštem slučaju proizvoljnog zakona energije $\xi(\vec{k})$ brzina elektrona u poluprovodniku je:

$$\vec{v} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} \xi(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \xi(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \quad (2.2.)$$

i nije jednaka $\frac{\hbar \vec{k}}{m^*}$; pa prema tome pojavljuje se pitanje kakav oblik ima kinetička Boltmanova jednačina /1.8a./ u tom slučaju? U kvaziklasičnoj aproksimaciji elektronu se može pripisati trajektorija, po kojoj se on kreće sa brzinom /2.2./. Talasni vektor elektrona karakteriše njegovo stanje, i zadovoljava u kvaziklasičnoj aproksimaciji jednačinu:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{1}{\hbar} \vec{F} \quad (2.3.)$$

Posmatrajući elektrone u \vec{r} - i \vec{k} -prostoru, uvedimo funkciju raspodele $f(\vec{k}, \vec{r}, t)$ tako da je:

$$f(\vec{k}, \vec{r}, t) \frac{d^3 k}{4\pi^3} \quad (2.4.)$$

broj elektrona u momentu t u tački \vec{r} u jedinici zapremeine sa komponentama talasnog vektora od k_x do $k_x + dk_x$ itd / $d^3 k = dk_x dk_y dk_z$ /.

U stanju statističke ravnoteže kako smo videli u prvom delu je funkcija raspodele:

$$f_0(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} + 1} \quad (2.5.)$$

gde je $\varepsilon(\vec{k})$ zadata funkcija od \vec{k} .

Sada umesto jednačine /2.1./ ovde imamo jednačinu /2.3./ pa kinetička Boltzmanova jednačina /1.8a./, ako na elektrom deluje električno i magnetno polje \vec{E} i \vec{H} tj. spoljašnja sila biće $\vec{F} = e(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}])$, pa jednačina dobija novi oblik:

$$\vec{v} \nabla_{\vec{r}} f - \frac{e}{\hbar} (\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{H}]) \nabla_{\vec{k}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{sud}}, \quad (2.6.)$$

gde je \vec{v} i f odredjena izrazima /2.2./ i /2.5./. Član "sudara" $(\frac{\partial f}{\partial t})_{\text{sud}}$ može se izraziti analogno tome, kao što je učinjeno u predhodnom paragrafu. Neka je $W(\vec{k}, \vec{k}')$ verovatnoća da elektron za jednu sekundu predje iz stanja \vec{k} u stanje \vec{k}' ; tada analogno /1.7a./ dobijamo izraz:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{sud.}} = \sum_{\vec{k}'} \left\{ W(\vec{k}, \vec{k}') f(\vec{k}') [1 - f(\vec{k}')] - W(\vec{k}', \vec{k}) f(\vec{k}) [1 - f(\vec{k}')] \right\} \quad (2.7.)$$

gde je uzeto u obzir i Paulijev princip, tj. verovatnoća prelaza $\vec{k} \rightarrow \vec{k}'$ proporcionalna je $[1 - f(\vec{k}')]$ /verovatnoća da je stanje \vec{k}' slobodno/.

Iz principa detaljne ravnoteže proizilazi da su u statističkoj ravnoteži flukssevi elektrona $\vec{k} \rightarrow \vec{k}'$ i obrnuti jednaki tj. dolazimo eksplicitno do izraza:

$$W(\vec{k}, \vec{k}') f_0(\varepsilon') [1 - f_0(\varepsilon)] = W(\vec{k}', \vec{k}) f_0(\varepsilon) [1 - f_0(\varepsilon')] \quad (2.7?)$$

Koristeći eksplicitan izraz za funkciju raspodele Fernija dobijamo iz /2.7?/:

$$e^{\frac{\varepsilon}{kT}} W(\vec{k}, \vec{k}') = W(\vec{k}', \vec{k}) e^{\frac{\varepsilon}{kT}} \quad (2.7a.)$$

Pri elastičnom rasejanju je $\varepsilon' = \varepsilon$ pa dobijamo da je ispunjena jednakost:

$$W(\vec{k}, \vec{k}') = W(\vec{k}', \vec{k}) \quad (2.7b.)$$

Koristeći jednakost /2.7b./ iz /2.7./ dobijamo u ovom slučaju izraz

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{sud}} &= \sum_{\vec{k}'} \{ W(\vec{k}, \vec{k}') f(\vec{k}') - W(\vec{k}', \vec{k}) f(\vec{k}) \} = \\ &= \sum_{\vec{k}'} W(\vec{k}, \vec{k}') \{ f(\vec{k}') - f(\vec{k}) \}, \end{aligned} \quad (2.8.)$$

tj. član "sudara" je isti, kao i bez uzimanja u obzir Paulijevog principa. Ova okolnost vezana je sa tim da pri uzimanju u obzir Paulijevog principa povećava se za jednu istu veličinu i broj elektrona koji prelazi iz stanja \vec{k} u \vec{k}' , tako i obrnuto iz \vec{k}' u \vec{k} . Neravnotežna funkcija raspodele može se predstaviti u obliku :

$$f(\vec{k}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\vec{k}) = f_0(\varepsilon) - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \vec{\chi}(\varepsilon) \vec{k} \quad (2.9.)$$

gde je $\vec{\chi}(\varepsilon)$ nepoznata vektorska funkcija koja zavisi od energije elektrona. Kao što vidimo neravnotežni dodatak funkcije raspodele ima oblik:

$$f_1(\vec{k}) = - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \vec{\chi}(\varepsilon) \vec{k} \quad (2.9a.)$$

Kako u prisustvu električnog i magnetnog polja, tako i u prisustvu gradijenta temperature, ako je $\varepsilon \sim \vec{k}$ i $\vec{\chi}$ zavisi samo od energije.

Pošto je pri elastičnom rasejanju $\varepsilon' = \varepsilon$ tada je:

$$\begin{aligned} f(\vec{k}') - f(\vec{k}) &= f_0(\varepsilon') - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \vec{\chi}(\varepsilon') \vec{k}' - f_0(\varepsilon) + \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \vec{\chi}(\varepsilon) \vec{k} = \\ &= \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \vec{\chi}(\varepsilon) \vec{k}' \left[1 - \frac{\vec{k}'}{\vec{k}_x} \right] = f_1(\vec{k}') \frac{\Delta k_x}{k_x}, \end{aligned} \quad (2.10.)$$

gde je k_x projekcija \vec{k} na vektor $\vec{\chi}$ i $\Delta k_x = \vec{k}'_x - \vec{k}_x$. Iz /2.8./ i /2.10./ dobijamo:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{sud}} = - f_1(\vec{k}) \sum_{\vec{k}'} W(\vec{k}, \vec{k}') \left[1 - \frac{\vec{k}'}{\vec{k}_x} \right]. \quad (2.11.)$$

Kao i u predhodnom paragrafu i ovde ćemo uvesti vreme relaksacije τ , stavljajući:

$$\frac{1}{\tau(\vec{k})} = \sum_{\vec{k}'} W(\vec{k}, \vec{k}') \left[1 - \frac{\vec{k}_x}{\vec{k}'_x} \right] = - \sum_{\vec{k}'} W(\vec{k}, \vec{k}') \frac{\Delta \vec{k}_x}{\vec{k}_x} = \\ = \sum_{\vec{k}'} W(\vec{k}', \vec{k}) (1 - \cos \vartheta), \quad (2.12.)$$

gde je analogno /1.13./ ϑ , ugao izmedju talasnih vektora \vec{k} i \vec{k}' , koji karakterišu kretanje elektrona, do i posle rasejanja. Na osnovu toga jednačinu /2.11./ možemo napisati u obliku:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{vid}} = - \frac{f_1(\vec{k})}{\tau} = - \frac{f - f_0}{\tau} \quad (2.13.)$$

Ovaj oblik kinetičke jednačine najčešće se sreće u primeni na poluprovodnike.

Ako je površina konstantne energije jednaka konstanti $/\epsilon(\vec{k}) = \text{const}/$, ali ne sferno tj. na primer elipsoidna, tada strogo govoreći neophodno je uzimati u obzir anizotropiju sredine tj. anizotropiju rasejanja elektrona, i u tom slučaju vreme relaksacije τ , ako se može uvesti, nije skalar već tenzor drugog reda.

U slučaju složenog zakona disperzije energije $\epsilon(\vec{k})$ na primer takvog, kao za šupljine u P-Ge i P-Si, uopšte nije moguće strogo uvesti vreme relaksacije, pa je za to u ovom slučaju teorija kinetičkih pojava vrlo složena i mi je nećemo u ovom radu razmatrati.

§ 3. VREME RELAKSACIJE ZA ELEKTRONE I ŠUPLJINE U POLUPROVODNIKU

Vreme relaksacije igra veoma važnu ulogu u teoriji kinetičkih pojava. Kao što smo videli u drugom delu § 1. i § 2. vreme relaksacije za klasične čestice definisano je izrazom:

$$\frac{1}{\tau(\epsilon)} = \frac{1}{\tau(v)} = \int d\Omega W(\vec{v}, \vec{v}') (1 - \cos \vartheta) \quad (3.1.)$$

a za elektrone u kristalu izrazom:

$$\frac{1}{\tau(\vec{k})} = \sum_{\vec{k}'} W(\vec{k}, \vec{k}') (1 - \cos \varphi) \quad (3.2.)$$

Kako neravnotežne procese karakteriše mehanizam rasejanja, u teoriji kinetičkih pojava zavisno od tipa rasejanja nailazimo na razne izraze za vreme relaksacije. Ako su ekvienergetske površine $\Sigma(\vec{k})$ sferne onda vreme ~~vreme~~ relaksacije predstavlja skalar. Međutim, ako su ekvienergetske površine $\Sigma(\vec{k})$ elipsoidne mora se uzeti u obzir anizotropnost rasejanja elektrona što se čini na taj način, ako se uopšte može govoriti o vremenu relaksacije, uvedjenjem tenzora vremena relaksacije. Kao što smo videli u II delu, § 1. jednačina koja predstavlja proces uspostavljanja ravnotežnog stanja je:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{usd.}} = - \frac{f_1}{\tau} = - \frac{f - f_0}{\tau} \quad (3.3.)$$

Integraljeći dobijamo:

$$f_1 = (f - f_0)_{t=0} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.4.)$$

ako τ ne zavisi od vremena. Prema tome, vreme relaksacije je vremenska konstanta procesa uspostavljanja ravnoteže sistema, kad se ukine pobuda, i ne treba brkati vreme relaksacije sa vremenom životra nosilaca.

Ako je zakon disperzije $\Sigma(\vec{k})$ složen, nije ni sferan ni elipsoidan, kao što je slučaj za šupljine u Ge i Si P-tipa, strogo govoreći ne može se uvesti pojам vremena relaksacije.

Da bi pokazali izraze za vreme relaksacije s obzirom na tip rasejanja daćemo tabelu 1. koja je uzeta iz /17./

FORMULA
Kao opšta ~~za vreme~~ relaksacije može se uzeti:

$$\tau = \tau_0 \left(\frac{\epsilon}{kT} \right)^{r-\frac{1}{2}} \quad (3.5.)$$

gde izložilac ima razne vrednosti za različite mehanizme rasejanja

Tabela 1.

Tip rasejanja	r	τ	Primedbe
Atomski poluprovodnici /akustička oscilovanja/.	0	$\frac{g\pi}{4\sqrt{2}} \frac{M V_0^2 \hbar^4}{S_0 c^2 m^{3/2} kT} \epsilon^{-1/2}$	V_0 - brzina zvuka M - masa atoma c - Blohova konstanta
Jonski poluprovodnici /visoke temperature/.	1	$\frac{\sqrt{2}}{4\pi} \frac{M a^3 (\hbar w_0)^2}{Z^2 e^4 m^* kT} \epsilon^{1/2}$	w_0 - granična frekvenca opštičkih oscilovanja.
Jonski poluprovodnici /niske temperature/.	$1/2$	$\frac{3\sqrt{2}}{4\pi} \frac{M a^3 (\hbar w_0)^{3/2}}{Z^2 e^4 m^{*1/2}} e^{\frac{\hbar w_0}{kT}}$	ze - nanelektrisanje jona
Rasejanje na primesnim jonima.	2	$\frac{\sqrt{e} m^* \chi^2}{\pi} \epsilon^{3/2}$ $\Phi(n) = \ln(1+n) - \frac{n}{1+n}$ $n = \frac{8m^* \epsilon}{\hbar^2 \chi}$	χ - dijelektrična konstanta η - koeficijent ekraniranja kulonovskog potencijala n_I - koncentracija primesnih jona.
Rasejanje na neutralnim primesama.	$1/2$	$\frac{m^{*2} \epsilon^2}{20 \pi k^2} n_0$	n_0 - koncentracija neutralnih primesa.

§ 4. ODREDJIVANJE NERAVNOTEŽNE FUNKCIJE RASPODELE U SLUČAJU SFERNE FORME POVRŠINE KONSTANTNE ENERGIJE /14/

Odredimo neravnotežni dodatak ravnotežnoj funkciji raspodele elektrona uz pretpostavku da je energija elektrona:

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \quad (4.1.)$$

gde je \vec{k} - talasni vektor i m^* - skalarna efektivna masa.

U tom slučaju brzina elektrona je kao što smo videli u II delu, paragraf 2.

$$\vec{V} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{k}} = \frac{\hbar}{m^*} \vec{k}, \quad (4.1a.)$$

tj. \vec{V} se razlikuje od \vec{k} samo konstantnim množiteljem $(\frac{\hbar}{m^*})$.

Uzmimo da je neravnotežna funkcija raspodele za elektrone data izrazom:

$$f(\vec{k}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\vec{k}) \quad (4.2.)$$

gde je kao što smo videli

$$f_1 = - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \vec{\chi}(\varepsilon) \cdot \vec{k}$$

a

$$f_0(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \beta}{kT}} + 1} \quad (4.2a.)$$

Kao što smo videli u I delu, § 2 kinetička jednačina za elektrone je:

$$\vec{V} \nabla_{\vec{r}} f - \frac{e}{\hbar} (\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V}, \vec{H}] \vec{V}) \nabla_{\vec{k}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{sud}} = - \frac{f_1(\vec{k})}{\tau} \quad (4.3.)$$

Da bi našli eksplicitno $f_1(\vec{k})$ moramo izračunati levi deo kinetičke jednačine /4.3./. Izračunavanje kinetičke jednačine sa tačnošću do prvog člana u f , dovoljno je staviti $f = f_0$. Prema tome imamo da je:

$$\nabla_{\vec{r}} f \approx \nabla_{\vec{r}} f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\beta - \varepsilon}{T} \nabla T - \nabla \beta \right\}. \quad (4.4.)$$

Ovde je uzeto da je:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = - \frac{1}{kT} \left[e^{\frac{\varepsilon - \beta}{kT}} + 1 \right]^{-2} \quad (4.4a.)$$

gde je $\nabla_{\vec{r}}$ u opštem slučaju primenjuje na veličine T i β , koje zavise od prostornih koordinata.

Koristeći /4.1a/, dobijamo:

$$\nabla_{\vec{k}} f \approx \nabla_{\vec{k}} f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \hbar \vec{V} \quad (4.5.)$$

Odavde se vidi, da u aproksimaciji $f \approx f_0$ sadržano magnetno polje u levom delu /4.3./ isпада jer je $([\vec{V}, \vec{H}] \vec{V}) \equiv 0$. Na taj način, za slaganje u /4.3./ koje sadrži magnetno polje, treba izračunati i

$\nabla_{\vec{k}} f$ u sledećoj aproksimaciji:

$$\nabla_{\vec{k}} f_1 = - \nabla_{\vec{k}} \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \vec{\chi}(\varepsilon) \vec{k} \right\} = - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \vec{\chi}(\varepsilon) - \left(\hbar \vec{k} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \vec{\chi} \right\} \right) \vec{V}$$

/stavljanjući $\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \vec{\chi}(\varepsilon) = \vec{A}(\varepsilon)$ i izračunavši grad $\vec{k} (\vec{A}(\varepsilon) \vec{k})$ /.

Tako za sabirak sa magnetnim poljem u /4.3./ dobijamo:

$$\frac{e}{\hbar c} ([\vec{v}, \vec{H}] \vec{\chi}) \frac{\partial f_0}{\partial \xi} = \frac{e}{\hbar c} \frac{\partial f_0}{\partial \xi} [\vec{H}, \vec{\chi}] \vec{v}, \quad (4.6.)$$

gde smo iskoristili ciklično svojstvo mešovitog vektorskog proizvoda.

Koristeći /4.2./ i određujujući $f_1(\vec{k})$ iz jednačine /4.3./ dobijamo:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{k}) &= - \frac{\partial f_0}{\partial \xi} \vec{\chi}(\xi) \vec{k} = - \frac{m^*}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial \xi} \vec{\chi}(\xi) \vec{v} = \\ &= - \mathfrak{T}(\vec{k}) \frac{\partial f_0}{\partial \xi} \left\{ \frac{z-\xi}{T} \nabla T - \nabla(z - e^{\xi}) + \frac{e \vec{k}}{\hbar c} [\vec{H}, \vec{\chi}] \right\} \vec{v} \end{aligned} \quad (4.7.)$$

gde je $\vec{E} = -\nabla \varphi$, φ je elektrostaticki potencijal. Pri izračunavanju ovog izraza korišćene su relacije /4.1a/, /4.4./, /4.5./ i /4.6./

Uzimajući u obzir /4.2./ i dobijenu relaciju /4.7./ dobijamo izraz

$$\vec{\chi}(\xi) := \vec{\chi}_n(\xi) = - \frac{\hbar}{m_n} \mathfrak{T}_n(\vec{k}) \left\{ \frac{\xi - z}{T} \nabla T + \nabla(z - e^{\xi}) - \frac{e \vec{k}}{\hbar c} [\vec{H}, \vec{\chi}_n] \right\} \quad (4.8.)$$

gde indeks n označava da se odgovarajuće veličine odnose na elektrone. Može se pokazati, a mi smo učinili u I delu, da je statističko ponašanje ^{ŠUPLJINA} ~~šasvima~~ ekvivalentno ponašanju elektrona, ako im pripisemo energiju ξ' i hemijski potencijal z' , jednake:

$$\xi' = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m_p} \quad (4.9.)$$

$$z' = -\xi_0 - z \quad (4.9a.)$$

gde je ξ_0 širina zabranjene zone. Tada za šupljine, umesto /4.8./ dobijamo izraz:

$$\vec{\chi}_p(\xi) = - \frac{\hbar}{m_p} \mathfrak{T}_p(\vec{k}') \left\{ \frac{\xi' + \xi_0 + z}{T} \nabla T - \nabla(z - e^{\xi}) + \frac{e}{\hbar c} [\vec{H}, \vec{\chi}_p] \right\} \quad (4.10.)$$

Pri čemu je u poređenju sa /4.8./ promenjen samo znak zbog nanelektrisanja.

Da bi /4.8./ i /4.10./ određivali neravnotežne funkcije raspodele za elektrone i šupljine, neophodno je da vreme relaksacije \mathfrak{T}_n i \mathfrak{T}_p bude daleko manje od srednjeg vremena života elektrona od-

nosno šupljina u odnosu na rekombinacione procese.

Ako je magnetno polje $\vec{H} = 0$ iz /4.8./ i /4.10./ neposredno se dobijaju $\vec{\chi}_n$ i $\vec{\chi}_p$, što je za nas važno. Međutim pri $\vec{H} \neq 0$ moraju /4.8./ i /4.10./ da se reše po $\vec{\chi}_n$ i $\vec{\chi}_p$ što dovodi do komplikovanih izraza koje mi nećemo ovde izvoditi.

§.5. STRUJA ELEKTRONA I ŠUPLJINA U POLUPROVODNIKU^{/2/}

Driftovska brzina elektrona ili šupljina u poluprovodniku, usled uniformnog električnog polja \vec{E} , je proporcionalna jačini električnog polja \vec{E} samo u graničnom slučaju kada $\vec{E} \rightarrow 0..$ Varijacija pokretljivosti nastaje usled povećanja srednje kinetičke energije iznad $\frac{3}{2}kT_0$, gde je T_0 temperatura rešetke. Zavisno od polja srednja kinetička energija može da se izrazi kao $\frac{3}{2}kT(\vec{E})$ i tada je temperatura elektrona veća od T_0 i teži toj granici kada $\vec{E} \rightarrow 0..$ Razlika izmedju T i T_0 je određena uslovom da u stacionarnom stanju provođenja brzina kojom elektroni dobijaju energiju od polja \vec{E} mora biti jednaka brzini sa kojom se energija prenosi od elektrona na rešetku sudarima sa samom rešetkom. Pokretljivost elektrona odnosno šupljina tada će biti funkcija električnog polja \vec{E} preko zavisnosti od T .

Koristeći Boltmanovu stacionarnu kinetičku jednačinu, koju smo mi izveli u ovom delu § 1 i § 2, za raspodelu elektrona $f(\vec{v}, x)$ u prostoru brzina i koordinata. Kao što smo videli u ovom delu § 2 Boltmanova kinetička jednačina u jednodimenzionalnom slučaju ako je prisutno samo električno polje \vec{E} je:

$$\frac{eE_x}{m^*} \frac{\partial f}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{sud}} = 0 \quad (5.1.)$$

gde su oznake odgovarajuće kao ranije. Ako uzmemo da funkciju raspodela elektrona i šupljina možemo u ovom slučaju da predstavimo izra-

zom $f(\varepsilon, x) = f_0(\varepsilon, x) + f_1(\varepsilon, x)$ (5.2.)

koji je analogan ranijem, gde je $f_0(\varepsilon, x)$ ravnotežna funkcija elektrona odnosno šupljina, a $f_1(\varepsilon, x)$ neravnotežni dodatak u prvoj aproksimaciji.

Stavljujući /5.2./ u /5.1./ dobijamo koristeći Boltzmanovu stacionarnu kinetičku jednačinu u aproksimaciji vremena relaksacije tj. da je:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{stav}} = - \frac{f_1(\varepsilon)}{\tau(\varepsilon)}$$

Jednačinu /5.1./ u obliku:

$$eE_x v_x \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} - v_x \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{f_1(\varepsilon)}{\tau(\varepsilon)} = 0 \quad (5.3.)$$

Iz ovako napisane Boltzmanove kinetičke jednačine izračunajmo neravnotežni dodatak $f_1(\varepsilon)$ i tako izračunato $f_1(\varepsilon)$ odnosno $f(\varepsilon)$ stavimo u izraz za gustinu struje koji je kao što je poznato dat sledećom formulom:

$$j = -e m^* \int_0^\infty d^3v v_x f(\vec{v}) = -\frac{e}{3} m^{*2} \int_0^\infty d^3v v f_1(\vec{v}) \quad (5.4.)$$

Prelazak sa $f(\vec{v})$ na $f_1(\vec{v})$ smemo da izvršimo jer je integral $f_0(\vec{v})$, jer je parna funkcija jednak nuli.

Izračunatu vrednost za $f_1(\varepsilon)$ iz /5.3./

$$f_1(\varepsilon) = eE v \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \tau(\varepsilon) - v \frac{\partial f_0}{\partial x} \tau(\varepsilon)$$

stavljamo u /5.4./ i dobijamo gustinu struje u obliku:

$$j = -\frac{e}{3} m^{*2} \left\{ \int_0^\infty d^3v v_x eE \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \tau(\varepsilon) - \int_0^\infty d^3v v_x \frac{\partial f_0}{\partial x} \tau(\varepsilon) \right\}$$

Sprovodeći integraciju član po član i uvodeći oznake /5.5./, 5.6./ i 5.7./ tj. da je:

$$n = \int d^3v f_0 m^* \quad (5.5.)$$

koncentracija elektrona

$$ju = -\frac{e}{3} \frac{m^*}{m} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{5/2} \tau(\varepsilon) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} / \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{1/2} f_0 = \frac{e}{m^*} \langle \tau(\varepsilon) [1 + \frac{1}{3} \frac{d(\ln \tau)}{d(\ln \varepsilon)}] \rangle \quad (5.6.)$$

pokretljivost elektrona. Zgrade < > označavaju srednje statističke vrednosti uvedenih veličina, a u ovom slučaju su definisane kao

$$\langle X \rangle = \frac{\int f(x) \varphi dx}{\int f(x) dx}$$

gde je φ funkcija čija se traži srednja statistička vrednost.

$$D = \frac{\int d\varepsilon \varepsilon^{1/2} \tau(\varepsilon) f_0(\varepsilon)}{\int d\varepsilon f_0(\varepsilon)^{1/2}} = \langle \tau(\varepsilon) \cdot \varepsilon \rangle \quad (5.7.)$$

difuzioni koeficijent elektrona.

Konačno, dobijamo traženi izraz za gustinu struje elektro- na odnosno šupljina u sažetom obliku, koristeći uvedene predhodne oznake je:

$$\vec{j} = e n \mu(T) \vec{E} + e \frac{d}{dx} (n D(T)) \quad (5.8.)$$

gde su $\mu(T)$ i $D(T)$ pokretljivost odnosno difuzioni koeficijenti za elektrone ili šupljine, ali poznate funkcije temperature T, određene iz Boltmanove kinetičke jednačine za određeni mehanizam rasejanja elektrona odnosno šupljina. Sam mehanizam rasejanja uzet je u obzir oblikom odnosno funkcionalnom zavisnošću vremena relaksacije.

U slučaju malih poremećaja ravnoteže može se smatrati da je gas nosilaca struje u termodinamičkoj ravnoteži sa kristalnom rešetkom . Tada ako ne postoje temperaturski gradijenti u kristalu /izazvani spolja, odnosno spoljašnjim delovanjem/, možemo smatrati da su veličine pokretljivosti μ i difuzioni koeficijenti D , konstante pa jednačina /5.8./ u ovom slučaju postaje:

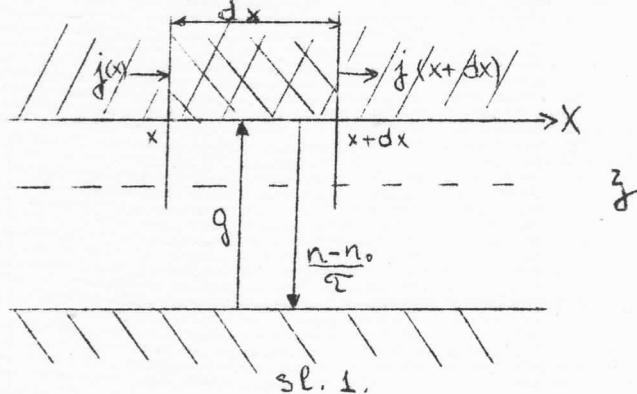
$$\vec{j}_n = e n \mu_n \vec{E} + e D_n \text{grad } n \quad (5.9.)$$

Potpuno analogna jednačina dobija se za šupljine uz ista izvodjenja tj. ona je oblika:

$$\vec{j}_p = e p \mu_p \vec{E} - e D_p \text{grad } p \quad (5.10.)$$

§ 6. JEDNAČINA NEPREKIDNOSTI ZA ELEKTRONE I ŠUPLJINE U POLUPROVODNIKU /16; 18/

Posmatrajmo jednodimenzionalni sluačj poluprovodnika kada se koncentracija menja u pravcu X a polje ima samo jednu komponentu E_x . Izdvojimo sloj debljine dx i jediničnog preseka, sl. 1.



Zapremina ovog sloja jednaka je dx , a koncentracija elektrona $n(x,t)$ tj, broj elektrona u njemu jednak je $n(x,t) dx$. Promena broja elektrona za dt je jednaka:

$$n(x,t+dt)dx - n(x,t)dx = \frac{\partial n}{\partial t} dx dt \quad (6.1.)$$

Sada ćemo navesti procese koji dovode do promene broja elektrona odnosno šupljina:

1. elektroni nastaju pod dejstvom svetlosti ili drugih ionizujućih agenasa. Za vreme dt stvari se $q dx dt$ elektrona gde je q broj parova koji se stvore za 1 sec u 1 cm^3 .

2. Broj nosilaca se menja usled toplotne generacije i rekombinacije za 1 sec u 1 cm^3 promena broja nosilaca u sloju dx za vreme dt je :

$$-\frac{n-n_0}{\tau} dt dx \quad (6.2.)$$

gde je τ vreme života nosilaca /elektrona/.

3. Kroz granicu sloja X za vreme dt u sloj utiče $I_n(x,t)$ elektrona gde je $I_n(x,t)$ fluks elektrona, tj. broj elektrona koji prolazi kroz jediničnu površinu za 1 sec. Za isto vreme kroz granicu

$x+dx$ ističe $I_n(x+dx) dt$ elektrona. Promena broja elektrona usled razlike ovih flukseva jednaka je:

$$I_n(x)dt - I_n(x+dx)dt = - \frac{\partial I_n}{\partial x} dx dt \quad (6.3.)$$

Na osnovu svega ovoga ukupna promena elektrona jednaka je:

$$\frac{\partial n}{\partial t} dx dt = \left(- \frac{\partial I_n}{\partial x} + q - \frac{n-n_0}{\tau} \right) dx dt \quad (6.4.)$$

Skrativši sa $dx dt$ dobijamo jednačinu neprekidnosti u obliku:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{\partial I_n}{\partial x} + q - \frac{n-n_0}{\tau} \quad (6.4a.)$$

Znajući da je gustina struje elektrona data izrazom:

$$j_n = -e I_n \quad (6.5.)$$

dobijamo iz /6.4a./ za trodimenzionalni slučaj jednačinu

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{e} \operatorname{div} \vec{j}_n + q - \frac{n-n_0}{\tau} \quad (6.6.)$$

koja predstavlja jednačinu neprekidnosti za elektrone.

Sasvim analognim postupkom dobija se jednačina neprekidnosti za šupljine koju ćemo mi ovde napisati samo u konačnom obliku:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{1}{e} \operatorname{div} \vec{j}_P + q - \frac{P-P_0}{\tau} \quad (6.7.)$$

III D E O

PRIMENA TEORIJE

=====

§ 1. PRIMENA TEORIJE NA IZRAČUNAVANJU NAPONSKO-STRUJNE ZAVISNOSTI
KOD P-N PRELAZA /16; 18/

Nadjimo gustinu struje koja teče kroz elektronsko-šupljinski prelaz u zavisnosti od primjenjenog spoljašnjeg napona V . Da bi ovo izračunali nužno je poznavati, kako se menja koncentracija ubaćenih nosilaca na granici zaprečnog sloja pri promeni spoljašnjeg napona V . Pošto je stroga analiza veoma složena i prevazilazi nivo ovog rada mi uvodimo niz predpostavki koje nam uprošćavaju rešavanje ovoga zadatka, a koristili smo ih u ranijem radu:

1. P- i N-oblasti imaju beskonačnu protegnutost.
2. U P- i N-oblasti primese se raspodeljuju ravnomerno, a na granici spoja umanjuju se skokom do nule.
3. Spoljašnje električno polje \vec{E} je malo. U tom slučaju gustina sporednih nosilaca sastoji se od difuzionog i driftovskog tj. konkretno izraženo biće:

$$\begin{aligned} j_p &= e \mu_p p E - e D_p \frac{dp}{dx} \\ j_n &= e \mu_n n E + e D_n \frac{dn}{dx} \end{aligned} \quad (1.1)$$

gde je μ_p , μ_n , D_p i D_n - pokretljivost i koeficijenti difuzije šupljina odnosno elektrona.

Kako je električno polje \vec{E} malo, driftovski deo gustine struje, koje zavisi od njega, je zanemarljiv u predhodnim jednačinama pa dobijamo izraze u ovom slučaju za gustine struje šupljina i elektrona:

$$j_p \approx -e D_p \frac{dp}{dx},$$

$$j_n \approx e D_n \frac{dn}{dx}. \quad (1.2.)$$

4. Gustina sporednih nosilaca veoma je mala u poređenju sa gustinom osnovnih nosilaca. Znači u ovom slučaju odgovarajuće gustine struja biće odredjene osnovnim nosiocima.

5. U P-N prelazu nema generacije i rekombinacije šupljina odnosno elektrona.

Uzimajući u obzir navedene predpostavke jednačina neprekidnosti za šupljine u N-oblasci i elektrona u P-oblasci dobijaju odlik, kao što smo ranije videli u § 6, II deo:

$$-\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{e} \frac{\partial j_p}{\partial x} + \frac{P - P_{n_0}}{\tau_p}$$

$$-\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{e} \frac{\partial j_n}{\partial x} + \frac{n - n_{p_0}}{\tau_n} \quad (1.3.)$$

gde je τ_p i τ_n vreme života nosilaca nanelektrisanja; $P - P_{n_0}$ i $n - n_{p_0}$ koncentracija neravnotežnih šupljina odnosno elektrona.

Pri nalaženju naponsko-strujne karakteristike P-N prelaza neophodno je rešiti jednačinu neprekidnosti za sluačj kada se koncentracija sporednih nosilaca ne menja u vremenu, tj.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \quad (1.4.)$$

Jednačine /1.3./ uzimanjem u obzir jednačina /1.4./ postaju stacionarne jednačine neprekidnosti, a one uzimanjem u obzir jednačina /1.2./ postaju:

$$\frac{d^2 P}{dx^2} - \frac{P - P_{n_0}}{L_p^2} = 0;$$

$$\frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{n - n_{p_0}}{L_n^2} = 0. \quad (1.5.)$$

gde su uvedene označke $L_p^2 = \sqrt{D_p \tau_p}$ i $L_n^2 = \sqrt{D_n \tau_n}$ a predstavljaju difuzione dužine šupljina u N-oblasci i elektrona u P-oblasci.

Rešenje jednačina /1.5./ i određivanjem konstanti korišćenjem polaznih predpostavki dolazimo do rešenja oblika:

$$P(x) = P_{n_0} + (P_{n_1} - P_{n_0}) e^{-x/L_p}; \quad (1.6.)$$

$$n(x) = n_{p_0} + (n_{p_1} - n_{p_0}) e^{x/L_n}.$$

gde je P_{n_1} - koncentracija šupljina u N-oblasti na granici P-N prelaza / $x = 0$ /, a n_{p_1} - koncentracija elektrona u P-oblasti na granici P-N prelaza.

Pri upotrebi spoljašnjeg napona U koncentracija sporednih nosilaca na granici P-N prelaza biće:

$$P_{n_1} = P_{n_0} e^{U/\varphi_T}$$

$$n_{p_1} = n_{p_0} e^{U/\varphi_T} \quad (1.7.)$$

gde je $\varphi_T = \frac{kT}{e}$, temperaturski potencijal.

Jednačine /1.2./ primenjene na izraze /1.6./ i uzimanjem u obzir jednačina /1.7./ daju šupljinsku gustinu struje u N-oblasti i elektronsku gustinu struje u P-oblasti u zavisnosti od koordinata P-N prelaza:

$$j_p(x) = \frac{D_p P_{n_0}}{L_p} \left(e^{U/\varphi_T} - 1 \right) e^{-\frac{x}{L_p}} \quad (1.8.)$$

$$j_n(x) = \frac{D_n n_{p_0}}{L_n} \left(e^{U/\varphi_T} - 1 \right) e^{\frac{x}{L_n}}$$

Ukupna gustina struje koja teče kroz P-N prelaz sastoji se kao što je poznato iz gustine elektrona i šupljina. U stacionarnom slučaju suma ovih gustina mora biti konstantna u bilo kom preseku poluprovodnika:

$$j(x) = j_p(x) + j_n(x) \quad (1.9.)$$

U samom P-N prelazu po predpostavci 5 nema generacije ni rekombinacije nosilaca, pa ne može da se smanjuje gustina struje i znači ona ostaje konstantna.

Ukupna gustina struje koja prolazi kroz P-N prelaz po četvrtoj predpostavci odredjena je samo gustom osnovnih nosilaca

i može se odrediti iz izraza /1.8./ korišćenjem jednačine /1.9./ ako u njih stavimo $x=0$:

$$j = j_p(0) + j_n(0) = \left(\frac{e^{D_p p_{no}}}{L_p} + \frac{e^{D_n n_{po}}}{L_n} \right) \left(e^{\frac{U}{\rho_T}} - 1 \right). \quad (1.10.)$$

Kako vidimo, jednačina /1.10./ određuje gustinu struje, koja teče kroz P-N prelaz u zavisnosti od spoljašnjeg napona.

Ako je površina prelaza S , to je ukupna struja koja prolazi kroz prelaz jednaka $I = j S$. Tada naponsko-strujna karakteristika P-N prelaza može se napisati u obliku:

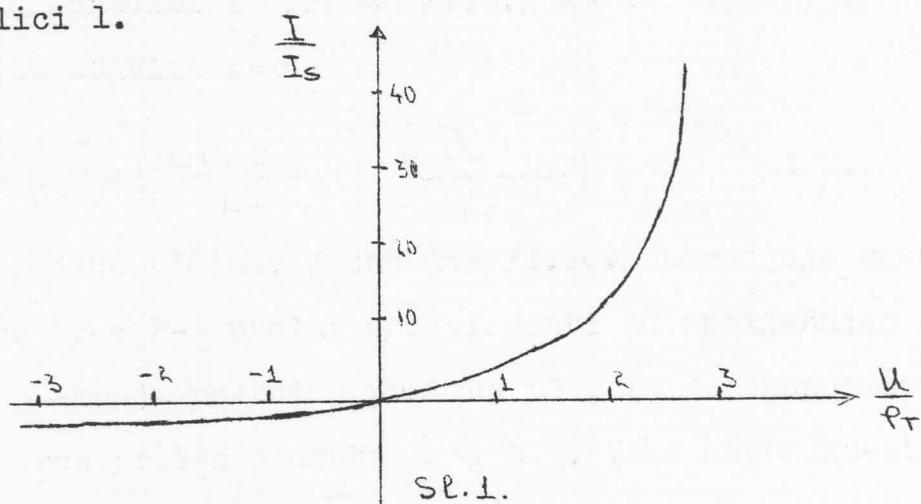
$$I = I_s \left(e^{\frac{U}{\rho_T}} - 1 \right) \quad (1.11.)$$

Veličina,

$$I_s = \left(\frac{e^{D_p p_{no}}}{L_p} + \frac{e^{D_n n_{po}}}{L_n} \right) S \quad (1.12.)$$

naziva se struja zasićenja P-N prelaza.

Naponsko-strujna karakteristika idealnih P-N prelaza data je na slici 1.



Z A K L J U Č A K
=====

Statistička mehanika i kvantna teorija našle su svoju punu teorijsku primenu kod proučavanja problema fizike čvrstog stanja, posebno problema fizike poluprovodnika. Isto tako osnovni principi ovih teorija u ovoj oblasti su i potvrđeni.

Cilj celokupnog rada bio je da se primenom STATISTIČKE MEHANIKE dodje do relativno zaokružene teorije, koja bi omogućila da se razmatraju problemi vezani za način rada poluprovodničkih elemenata /P-N prelaza, tranzistora itd./.

Interesantno je, medjutim da se rad najvećeg broja elemenata, može opisati teorijom koja je veoma bliska ravnotežnoj /prvog reda po poremećajima/. Zbog toga, prvi deo rada posvećen je razmatranju ravnotežnih parametara sistema koji se nalaze u statističkoj /termodynamičkoj/ ravnoteži. Kao osnovni sistem posmatran je elektronski gas koji ^{je} ~~u~~ ravnoteži sa kristalnom rešetkom. Bitna osobina poluprovodnika je da elektronski gas može da bude nedegenerisan i degenerisan, dok je kod metala elektronski gas isključivo degenerisan. U radu su date statističke raspodele za oba slučaja, Maksvel-Bolcmanova za nedegenerisan gas formula /4.3./ i Fermi - Dirakova za degenerisani gas formula /3.10./, I deo, § 3 i 4.

Pored toga izvedene su u paragrafu 5 na osnovu statističke raspodele za elektrone odgovarajuće raspodele za šupljine koja je data formulom /5.3./.

U samom radu dat je kriterijum prelaza sa degenerisanog na nedegenerisani gas u I delu nejednačinom /4.5./. Iz ove nejednačine zaključujemo da je gas nedegenerisan ako je ispunjeno :

1. mala gustina gasa
2. velika masa čestica
3. visoka temperatura.

Posle toga razmotrili smo sisteme koji nisu u ravnoteži, ali smo smatrali da je perturbacija mala za koju navedena teorija i važi. Da bi odredili razvitak sistema u vremenu potrebno je odrediti osnovne kinetičke parametre. Rešavanju ovog problema prišli smo preko kinetičke Boltzmanove jednačine, koja je izvedena u II delu, § 1 i 2. Samo ponašanje elektrona opisali smo jednoelektronskom aproksimacijom odnosno elektronski gas posmatrali smo kao idealni gas za koji navedena teorija i važi.

Uzimajući da je perturbacija električnog polja \vec{E} mala rešili smo kinetičku Boltzmanovu jednačinu /2.13./ u aproksimaciji vremena relaksacije čije smo tumačenje dali u § 3.

Na taj način došli smo u § 5 do izraza /5.6./ za pokretljivost elektrona odnosno šupljina i izraza /5.7./ za difuzione koeficijente koje figurišu u jednačini /5.4./ za gustinu struje šupljina odnosno elektrona.

Da bi opisali ponašanje nosilaca struje u poluprovodnicima dali smo izvodjenje u § 6 jednačina neprekidnosti za elektrone i šupljine, formule /6.6./ i /6.7./, koje uračunavaju procese generacije i rekombinacije strujnih nosilaca.

Najzad celokupna izvedena teorija primenjena je u III delu na određivanje funkcionalne veze izmedju napona i struje kod poluprovodničkih N-prelaza. Na ovaj način dobijena je naponsko-strujna zavisnost jednačinom /1.11./ koja je veoma značajna za razumevanje rada poluprovodničkih elemenata.

PRILOG I

EFEKTIVNE MASE ELEKTRONA I ŠUPLJINA U KRISTALIMA /4; 6/

U drugom delu u § 2 uveli smo pojam efektivne mase, a sada ćemo dati bliže tumačenje ovoga pojma.

Elektron u kristalu ponaša se kao da ima masu različitu od mase slobodnog elektrona /može biti veća ili manja od slobodne mase, kao i pozitivna, a i negativna/. Najvažnija činjenica je da se elektron u periodičnom potencijalu ubrzava relativno u odnosu na rešetku, u primjenjenom električnom polju \vec{E} , tako kao da mu je masa jednaka efektivnoj masi. Uvodjenjem efektivne mase drugi Njutnov zakon ostaje u važnosti i za kretanje elektrona u kristalu.

Koristeći izraz iz talasne optike za grupnu brzinu $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ i znajući da je frekvencija ω povezana sa talasnom funkcijom energije $\epsilon(k)$ na sledeći način $\omega = \frac{\epsilon}{\hbar}$ dobijamo da je:

$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{d\epsilon}{dk} \quad (\text{I.1.})$$

Rad električnog polja \vec{E} , izvršen na elektronu u vremenskom intervalu dt je:

$$d\epsilon = -e \vec{E} v_g dt \quad (\text{I.2.})$$

Koristeći /I.2./ dobijamo da je

$$d\epsilon = \frac{d\epsilon}{dk} dk = \hbar v_g dk \quad (\text{I.3.})$$

Sada izvršimo poredjenje /I.2./ i /I.3./ i dobijamo:

$$dk = -\frac{e}{\hbar} \vec{E} dt, \quad (\text{I.4.})$$

odakle nalazimo da je $\frac{dk}{dt} = -e \vec{E}$, ili pošto je $-e \vec{E} = \vec{F}$

$$\hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{F} \quad (\text{I.5.})$$

Ovo je važna relacija i mi smo je koristili u kvaziklasičnom prilazu u II delu, u § 2. Iz nje vidimo da je $\hbar \frac{d\vec{k}}{dt}$ jednaka spoljašnjoj sili koja dejstvuje na elektron.

Relacija /I.1./ daje:

$$\frac{dU_0}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{d^2\varepsilon}{dk^2 dt} = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{d^2\varepsilon}{dk^2} \frac{dk}{dt} \right) \quad (\text{I.6.})$$

Koristeći /I.5./ za $\frac{dk}{dt}$ dobijamo:

$$\frac{dU_0}{dt} = \frac{d^2\varepsilon}{dk^2} \frac{F}{\hbar^2}$$

odnosno ako malo preuređimo biće:

$$\frac{dU_0}{dt} \cdot \frac{\hbar^2}{d^2\varepsilon/dk^2} = F \quad (\text{I.7.})$$

Očigledno iz jednačine /I.7./ zaključujemo da $\frac{\hbar^2}{d^2\varepsilon/dk^2}$ igra ovde ulogu mase. Tu veličinu nazivamo efektivnom masom i obeležavamo je sa m^* . Prema tome je:

$$m^* = \frac{\hbar^2}{d^2\varepsilon/dk^2} \quad (\text{I.8.})$$

Sada jednačina /I.7./ je oblika:

$$m^* \frac{dU_0}{dt} = F \quad (\text{I.9.})$$

Ako je energija kvadratna funkcija od \vec{k} možemo je kao što smo ranije videli napisati u obliku $\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m^*} \vec{k}^2$.

U slučaju anizotropne energetske površine mesto /I.8./ uvodi se recipročna vrednost tenzora efektivne mase jednačinom:

$$\left(\frac{1}{m^*}\right)_{ij} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2\varepsilon}{dk_i dk_j} \quad (\text{I.10.})$$

gde su i i j Dekartove koordinate.

Konačno možemo zaključiti, da smo uvedenjem efektivne mase omogućili da opišemo kretanje elektrona bez uzimanja u obzir dejstva kristala, jer se ono već sadrži u ovako uvedenoj efektivnoj masi.

NEKE VAŽNIJE OZNAKE

$\rho(\varepsilon)$ - gustina broja stanja

K - Boltzmanova konstanta

T - apsolutna temperatura

χ - hemijski potencijal /Fermijev nivo/

f - funkcija raspodele

v - brzina

e - nanelektrisanje elektrona

j_e - gustina struje elektrona /šupljina/

\vec{F} - spoljašnja sila koja deluje na elektron

W - verovatnoća

m - masa elektrona

E - ukupna energija elektrona /kinetička energija/

τ - vreme relaksacije

E - jačina električnog polja

H - jačina magnetnog polja

c - brzina svetlosti

h - Plankova konstanta

k - talasni vektor

m^* - efektivna masa

μ_n, μ_p - pokretljivost elektrona, šupljina

n - koncentracija elektrona

p - koncentracija šupljina

I_n - fluks elektrona

D_n, D_p - difuzioni koeficijenti elektrona, šupljina

D_A - difuzione dužine elektrona, šupljina

U - spoljašnji napon

T - temperaturski potencijal

I - struja P-N prelaza

I_s - struja zasićenja P-N prelaza

S - površina P-N prelaza

ω - frekvencija

SPISAK KORIŠĆENE LITERATURE:

- /1/. Dj. Mušicki: Uvod u teorijsku fiziku, I deo, Beograd, 1964.
- /2/. R. Stratton: Diffusion of Hot and Cold Electrons in Semiconductor Barriers, Phys. Rev., 126 /1962./ 2002
- /3/. Congers Herring: Transport properties of many-Valley semiconductor, The Bell System Technical Journal, vol XXXIV /1965,
- /4/. D.A. Tjapkin: Elektronska fizika čvrstog tela, knjiga I, Beograd, 1963.
- /5/. D.A. Tjapkin: Elektronska fizika čvrstog tela, knjiga II, Beograd, 1964.
- /6/. Charles Kittel: Uvod u fiziku čvrstog stanja, Beograd, 1970.
/prevod sa engleskog/
- /7/. S. Carić: Uvod u fiziku čvrstog stanja, I deo, N.Sad, 1969.
- /8/. W. Shockley: The Theory of P-N Junctions in Semiconductors and P-N Junction Transistors, The Bell System Technical Journal, vol XXVIII /1949./, 435.
- /9/. В.Г. Левич: Курс теоретической физики, Том I, Москва 1962.
- /10/. Я.П. Терлеций: Статистическая физика, Москва, 1966.
- /11/. Дж. Блэкмор: Статистика электронов в полупроводниках, Москва, 1964. (prevod sa engl.)
- /12/. М.С. Оминский: Полупроводники, Ленинград, 1967.
- /13/. Нэрзон Хуанг: Статистическая механика, Москва, 1966.
(prevod sa engl.)
- /14/. А.И. Ансельм: Введение в теорию полупроводников, Москва, 1962.
- /15/. Ф.Дж. Блатт: Теория подвижности электронов в твердых телах, Москва, 1963. (prevod sa engl.)
- /16/. Ю.К. Шалабутов: Введение в физику полупроводников, Ленинград, 1969.
- /17/. И.М. Цидильковский: Термомагнитные явления в полупроводниках, Москва, 1960.
- /18/. Практикум по полупроводникам и полупроводниковым приборам, Москва, 1968.
- /19/. Р. Смит: Полупроводники, Москва, 1962. (prevod sa engl.)

S A D R Ž A J

UVOD:	1
I DEO: RAVNOTEŽNE STATISTIČKE FUNKCIJE RASPODELE.....	3
§ 1. Broj kvantnih stanja u kvaziklasičnoj aproksimaciji.	3
§ 2. Kvazinezavisni sistemi	4
§ 3. Statističke raspodele u kvantnoj statistici.....	5
§ 4. Veza izmedju kvantne i klasične Maksvel-Bolcmanove statistike	8
§ 5. Ravnotežna funkcija raspodele elektrona i šupljina u poluprovodniku	10
II DEO: KINETIČKA JEDNAČINA ZA ELEKTRONE I ŠUPLJINE U POLUPROVODNIKU.....	13
§ 1. Pojava prenosa i Bolcmanova kinetička jednačina.....	13
§ 2. Kinetička jednačina za elektrone i šupljine u poluprovodniku	20
§ 3. Vreme relaksacije za elektrone i šupljine u poluprovodniku	23
§ 4. Odredjivanje neravnotežne funkcije raspodele u slučaju sferne forme površine konstantne energije.....	25
§ 5. Struja elektrona i šupljina u poluprovodniku.....	28
§ 6. Jednačina neprekidnosti za elektrone i šupljine u poluprovodniku.....	31

III DEO: PRIMENA TEORIJE	33
§ 1. Primena teorije na izračunavanje naponsko-strujne zavisnosti kod P-N prelaza	33
ZAKLJUČAK	37
Prilog I: Efektivne mase elektrona i šupljina u kristalima	39
NEKE VAŽNIJE OZNAKE	41
SPISAK KORIŠĆENE LITERATURE.....	43

