UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

DIPLOMSKI RAD

O MOGUĆNOSTI POJAVE BOZE KONDENZACIJE U SISTEMU POLARITONA

RADJEN IZ PREDMETA: KVANTNA MEHANIKA

PREDMETNI NASTAVNIK: ŠKRINJAR Dr. MARIO

Novi Sad, 1976.

STUDENT
GUDURIĆ Đ. SVETLANA

NAJISKRENIJE SE ZAHVALJUJEM MENTORU
ŠKRINJAR Dr. MARIJU NA SVESRDNOJ POMOĆI
KOJU MI JE PRUŽIO PRI IZRADI OVOG
DIPLOMSKOG RADA.

SADRŽAJ

U V O D

Cilj ovog rada jeste ispitivanje mogućnosti Boze kondenzacije u sistemu realnih optičkih eksitacija u molekularnim kristalima, tj. u sistemu polaritona. Pošto će biti prodiskutovano pod kojim uslovima je moguća pojava Boze kondenzacija u sistemu polaritona, metodom dvovremenskih temperaturskih Grinovih funkcija, odrediće se spektar polaritona u uslovima Boze kondenzacija, i ispitati da li on zadovoljava uslov superfluidnosti. Napomenimo da ovakva istraživanja mogu imati i veliki praktični značaj s obzirom da u uslovima superfluidnosti u sistemu optičkog pobudjenja dolazi do prenosa energije (i drugih fizičkih veličina) kroz kristal bez gubitaka.

FRENKELOVI EKSITONI

Pobudjenja molekula u kristalu, koja nastaju prilikom pada svetlosnog snopa na kristal, prvi su objasnili Frenkel i Pjarsl za molekularne kristale, a Vanije i Mot za poluprovodnike. Ova pobudjenja molekula u kristalima, indukovane svetlošću, nazivaju se eksitoni. Eksitoni koji nastaju pobudjivanjem molekulskih kristala, nazivaju se Frenkelovi eksitoni, a eksitoni, koji se indukuju u poluprovodnicima nazivaju se eksitoni Vanije - Mota.

Kod poluprovodnika svetlost može izazvati prelaz elektrona iz popunjene (valentne) zone u provodnu, što znači da se u provodnoj zoni javlja elektron (negativna čestica), a u popunjenoj "šupljina" (pozitivna čestica). Izmedju ova dva raznoimena naelektrisanja deluje Kulonova privlačna sila i dok je ona dovoljno jaka da ih drži vezane, u poluprovodniku, ne teče struja, jer se par elektron "šupljina" ponaša kao neutralna celina. Ova električna neutralna celina kreće se kroz poluprovodnike kao talas (kao kvazi čestica), koji se naziva eksiton Vanije -Mota. Ukoliko Kulonova sila nije dovoljno jaka, par elektron "šupljina" se raspada i kroz poluprovodnik može da teče struja: u provodnoj zoni struja elektrona, a u popunjenoj struja "šupljina".

Pri optičkom pobudjivanju molekulskih kristala nastaju Frenkelovi eksitoni. Električno neutralan (pobudjen) par elektron "šupljina", u ovom slučaju ostaje na istom molekulu. Ovo pobudjenje prelazi sa pobudjenog na ostale molekule zbog promene matričnih elemenata interakcije medju njima. Ovaj talas pobudjenja (kvazi čestica) predstavlja Frenkelov eksitol.

Energija pobudjenja Frenkel-ovih eksitona i eksitona Vanije-Mota je reda veličine eV, što znači da se energetski veoma malo razlikuju.

Ako eksitone shvatamo kao čestice sfernog oblika, onda je bitna razlika izmedju ove dve vrste eksitona u veličini njihovih radijusa. Radijus eksitone Vanije-Mota (nekoliko μ) dosta je veći od radijusa Frenkel-ovih eksitona (nekoliko Å).

Frenkelovi eksitoni, kao što je pomenuto, javljaju se u molekulskim kristalima, čiji su atomi, odnosno molekuli, vezani Van der Walsovim silama. U molekulske kristale spadaju: Antracen, naftalin, benzol u čvrstom stanju i plemeniti gasovi u čvrstom stanju. Molekuli kristala antracena, naftalina i benzola supermanentni dipoli, a plemenitih gasova trenutni dipoli. Izmedju molekula postoji potencijal dipol-dipolne interakcije, koji je dat u obliku

$$V_{\vec{n}\vec{m}} = e^2 \frac{\vec{r}_{\vec{n}}\,\vec{r}_{\vec{m}}}{|\vec{n}-\vec{m}|^3} - 3e^2 \frac{[\vec{r}_{\vec{n}}(\vec{n}-\vec{m})][\vec{r}_{\vec{m}}(\vec{n}-\vec{m})]}{|\vec{n}-\vec{m}|^5} \qquad (I\ 1.1)$$

gde je:
e-naelektrisanje elektrona
V, V vektori dipola molekula na mestu n i m
n, m, - vektori položaja molekula.

Dipol - dipolna interakcija opada sa trećim stepenom rastojanja. Iz datog izraza se vidi da ova interakcija ima dva različita dela. Prvi, koji se naziva analitički i drugi, koji se naziva neanalitički deo dipol - dipolne interakcije. Prvi deo zavisi samo od intenziteta rastojanja izmedju molekula. Drugi deo, kao i prvi, zavisi od intenziteta rastojanja izmedju molekula, a pored toga zavisi i od uglova koje vektori-dipoli zaklapaju sa vektorom položaja ($\vec{n}$ i $\vec{m}$). Prilikom prostiranja eksitona kroz kristal, kao anizotropnu sredinu, svaki pravac prostiranja imaće različit zakon disperzije. Usled zavisnosti Furije Lika drugog dela interakcije od pravca prostiranja ovaj drugi deo dipol-dipolne interakcije naziva se neanalitički.

Svetlost, koja pada na kristal i indukuje eksiton, u molekulu može izazvati promenu stanja elektrona i promenu stanja unutrašnjih molekulskih vibracija. Ove druge promene nazivaju se vibroni, a redje eksitoni Frenkela. U daljem tekstu pod pojmom eksitona, podrazumevaju se samo Frenkelovi eksitoni, nastali usled promene stanja elektrona u molekulima.

U ovom slučaju hamiltonijan molekulskih kristala može se razmatrati kao hamiltonijan sa dvočestičnom fermijonskom interakcijom, koga u reprezentaciji druge kvantizacije možemo napisati u obliku:

$$H=\sum_{\vec{n}f} E_{\vec{n}f}\, a^{+}_{\vec{n}f} a_{\vec{n}f} + \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} V_{\vec{n}\vec{m}}(f_1 f_2; f_3 f_4)\cdot a^{+}_{\vec{n}f_1} a^{+}_{\vec{m}f_2} a_{\vec{m}f_3} a_{\vec{n}f_4} \qquad (I\ 1.2)$$

gde je:

$E_{\vec{n}f}$ - energija elektronskog pobudjenja molekula u čvoru ($\vec{n}$), iz osnovnog stanja u pobudjeno f-to stanje;

f1, f2, f3, f4 - kvantni brojevi, kojima je odredjena stanje elektrona u molekulu

$a^{+}_{\vec{n}f}$, $a_{\vec{n}f}$ -Fermijevi operatori, kreacije i anihilacije elektrona u čvoru $\vec{n}$ i u stanju f.

Vnm (f1,f2, f3,f4) - matrični element interakcije.

Za dva molekula u kristalu, koji se nalaze u različitim stanjima (f_1, f_2, f_3, f_4) i na različitim mestima $\vec{m}$ i $\vec{n}$, matrični elementi interakcije u reprezentaciji druge kvantizacije mogu se napisati u obliku:

$$V_{\vec{n}\vec{m}}(f_1 f_2; f_3 f_4)=\int \varphi^{*f_1}_{\vec{n}}\, \varphi^{*f_2}_{\vec{m}}\, V_{\vec{n}\vec{m}}\, \varphi^{f_3}_{\vec{m}}\, \varphi^{f_4}_{\vec{n}}\, d\tau_{\vec{n}}\, d\tau_{\vec{m}} \qquad (I\ 1.3)$$

gde je:

$\varphi^{f}_{\vec{n}}$ - svojstvena funkcija izolovanog molekula u stanju f i na mestu $\vec{n}$.

$d\tau_{\vec{n}}$, $d\tau_{\vec{m}}$-elementi zapremine prostora, koju zauzimaju molekuli.

Pošto svojstvena funkcija φ brzo opada sa rastojanjem izraz(I 1.3) se integrali po beskonačnoj zapremini.

Hamiltonijan molekulskih kristala dat izrazom (I 1.2) nije pogodan za opisivanje eksitona. Eksiton nije pobudjen elektron, već kvant pobudjenja molekula kristala, što znači da u hamiltonijanu (I 1.2) treba Fermi operatore zemeniti novim (P^{+}; P), tako da ga prilagodimo eksitonima. Da bi uveli nove operatore (P^{+}; P) moramo predpostaviti da eksitoni nastaju pri prelazu molekula izmedju dva stanja: osnovnog (0) i nekog pobudjenog stanja (f). Ovakva šema sa dva nivoa može se usvojiti u dva slučaja: ako je upadna svetlost monohromatska ili ukoliko su ostali mogući nivoi znatno udaljeni od stanja (f). Uvedimo sada, kao što je rečeno, umesto Fermi operatora, nove operacije (P^+, P) na sledeći način:

$$P^+_{\vec{n}} = a^+_{\vec{n}f}\, a_{\vec{n}o} \quad ; \quad P_{\vec{n}} = a^+_{\vec{n}o}\, a_{\vec{n}f}$$

P^+ - je operator kreacije. On kreira kvant pobudjenja (eksiton), tj. predstavlja njegovu kreaciju u stanju (f) a nestanak u stanju (o).

P -je operator anihilacije. On predstavlja nestanak elektrona iz stanja (f), odnosno predstavlja pojavu elektrona u osnovnom stanju (o).

Ovako uvedeni operatori nazivaju se Pauli operatori. Oni predstavljaju "sredinu" izmedju Fermi i Boze operatora, jer se ne pokoravaju ni Fermi, ni Boze komutacionim relacijama. Pauli operatori se pokoravaju sledećim komutacionim relacijama,koje su dobijene iz komutacionih relacija Fermi operatora uz dopunske uslove

$$[P_{\vec{n}}, P^+_{\vec{m}}] = (1 - 2P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}})\, \delta_{\vec{n}\vec{m}}$$

$$[P_{\vec{n}}, P_{\vec{m}}] = [P^+_{\vec{n}}, P^+_{\vec{m}}] = 0 \qquad \vec{m} = \vec{n} \tag{I 1.5}$$

$$P^2_{\vec{n}} = P^{+2}_{\vec{n}} = 0$$

$$P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}} = a^+_{\vec{n}f}\, a_{\vec{n}f} = 0 \text{ ili } 1$$

Ako ove komutacione relacije primenimo na jedan čvor rešetke ($\vec{m} = \vec{n}$). Pauli operatori će se ponašati kao Fermi operatori

$$[P_{\vec{n}}, P^+_{\vec{n}}] = 1 - 2P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}}$$

a za različite čvorove rešetke ($\vec{m} \neq \vec{n}$) ponašaće se kao Boze operatori.

$$[P_{\vec{n}}, P_{\vec{m}}] = 0$$

Ako u hamiltonijanu (I 1.2) Fermi operatore zamenimo Pauli operatorima, dobićemo ga u sledećem obliku, koji je prilagodjen eksitonima.

$$H=\mathcal{E}_0+\Delta\sum_{\vec{n}}P^+_{\vec{n}}P_{\vec{n}}+\sum_{\vec{n}\vec{m}}I_{\vec{n}\vec{m}}P^+_{\vec{n}}P_{\vec{m}}+\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}\beta_{\vec{n}\vec{m}}\times$$

$$\times(P^+_{\vec{n}}P^+_{\vec{m}}+P_{\vec{m}}P_{\vec{n}})+\sum_{\vec{n}\vec{m}}\gamma_{\vec{n}\vec{m}}P^+_{\vec{n}}P^+_{\vec{m}}P_{\vec{m}}P_{\vec{n}} \tag{I 1.6}$$

gde je:

$$\mathcal{E}_0=N[E_0+\frac{1}{2}V_0(00;00)]$$

$$\Delta=E_{\vec{n}f}-E_{\vec{n}0}-V_0(00;00)+\frac{1}{2}V_0(f0;0f)+\frac{1}{2}V_0(0f;f0)$$

$$2I_{\vec{n}\vec{m}}=V_{\vec{n}\vec{m}}(f0;f0)+V_{\vec{n}\vec{m}}(0f;0f) \tag{I 1.7}$$

$$\beta_{\vec{n}\vec{m}}=V_{\vec{n}\vec{m}}(ff;00)=V_{\vec{n}\vec{m}}(00;ff)$$

$$2\gamma_{\vec{n}\vec{m}}=V_{\vec{n}\vec{m}}(ff;ff)+V_{\vec{n}\vec{m}}(00;00)-V_{\vec{n}\vec{m}}(f0;0f)-V_{\vec{n}\vec{m}}(0f;f0)$$

$$V_0(f_1f_2f_3f_4)=\sum_{\vec{n}\vec{m}}V_{\vec{n}\vec{m}}(f_1f_2f_3f_4)$$

Predpostavljeno je da kristal ima centar inverzije koji se poklapa sa centrom inverzije izolovanog molekula. Tada su sledeći matrični elementi jednaki nuli.

$$V_{\vec{n}\vec{m}}(f0;00)\quad V_{\vec{n}\vec{m}}(0f;00)\quad V_{\vec{n}\vec{m}}(00;f0)\quad V_{\vec{n}\vec{m}}(00;0f)$$

$$V_{\vec{n}\vec{m}}(ff;f0)\quad V_{\vec{n}\vec{m}}(ff;0f)\quad V_{\vec{n}\vec{m}}(f0;ff)\quad V_{\vec{n}\vec{m}}(0f;ff)$$

U hamiltonijanu (I 1.6) Pauli operatori mogu se zameniti Boze operatorima pomoću sledećih relacija (videti [1] GLAVA X AGRANOVIČ: TEOR. EKS.)

$$P_{\vec{n}}=\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-2)^\nu}{(1+\nu)!}B^{+\nu}_{\vec{n}}B^{\nu}_{\vec{n}}\right]^{\frac{1}{2}}B_{\vec{n}}$$

$$P^+_{\vec{n}}=B^+_{\vec{n}}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-2)^\nu}{(1+\nu)!}B^{+\nu}_{\vec{n}}B^{\nu}_{\vec{n}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{I 1.8}$$

$$P^+_{\vec{n}}P_{\vec{n}}=\hat{N}^{(P)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-2)^\nu}{(1+\nu)!}B^{+\nu+1}_{\vec{n}}B^{\nu+1}_{\vec{n}}$$

gde je $\hat{N}^{(P)}$ operator broja paulijona. Ako je kristal slabo eksitiran tj. ako postoji mali broj eksitona Pauli operatore u hamiltonijanu (I 1.6) možemo zameniti Boze operatorima na osnovu sledećih približnih formula:

$$P_{\vec{n}} = B_{\vec{n}} \; ; \quad P^{+}_{\vec{n}} = B^{+}_{\vec{n}} \qquad P^{+}_{\vec{n}} P_{\vec{n}} = B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \qquad (I\ 1.9)$$

Greška, koja pri tom nastaje, je manja ukoliko je broj eksitiranih molekula manji. To se može zaključiti posle razvijanja u red zadnje relacije $(I\ 1.8)$

$$P^{+}_{\vec{n}} P_{\vec{n}} = \hat{N}^{(p)} = B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} - B^{+}_{\vec{n}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}} = \hat{N}_{\vec{n}} - \hat{N}_{\vec{n}}(\hat{N}_{\vec{n}} - 1)$$

gde je $\hat{N}_{\vec{n}}$ - operator broja bozona. Ako je broj bozona 0,1 i 2 broj pauliona biće 0 i 1, dok za veći broj bozona to neće biti slučaj.

Ako u hamiltonijanu $(I\ 1.6)$ Pauli operatore zamenimo Boze operatorima po približnim formulama, dobiće se hamiltonijan približne druge kvantizacije

$$H = \mathcal{E}_0 + \Delta \sum_{\vec{n}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} + \sum_{\vec{n}\vec{m}} L_{\vec{n}\vec{m}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{m}} \qquad (I\ 1.10)$$

Ako se izvrše Furije transformacije Boze operatora

$$B_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\vec{n}} \qquad B^{+}_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} B^{+}_{\vec{k}}\, e^{-i\vec{k}\vec{n}}$$

$$L_{\vec{n}\vec{m}} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} L(\vec{k})\, e^{i\vec{k}(\vec{n}-\vec{m})} \qquad (I\ 1.11)$$

dobija sehamiltonijan

$$H = \mathcal{E}_0 + \sum_{\vec{k}} [\Delta + L(\vec{k})]\, B^{+}_{\vec{k}} B_{\vec{k}} \qquad (I\ 1.12)$$

Ovaj hamiltonijan je u dijagonalizovanom obliku. Iz njega se može odrediti zakon disperzije za eksitone.

$$E(\vec{k}) = \frac{\partial H}{\partial B^{+}_{\vec{k}} \partial B_{\vec{k}}} = \frac{\partial}{\partial B^{+}_{\vec{k}} \partial B_{\vec{k}}} \left\{ \mathcal{E}_0 + \sum_{\vec{k}} [\Delta + L(\vec{k})]\, B^{+}_{\vec{k}} B_{\vec{k}} \right\} =$$

$$= \Delta + L(\vec{k}) \qquad (I\ 1.13)$$

Ovaj izraz se može napisati u pogodnijem obliku, ako za kristal proste kubne strukture uzmemo da je kod $L(\vec{k})$ značajan samo analitički deo dipol - dipolne interakcije, koja opada sa trećim stepenom rastojanja, a posmatra se samo ona oblast u kojoj talasni vetrovi imaju male vrednosti.

Izraz za energiju eksitona sada je dat u obliku:

$$E(\vec{K}) = \Delta + L(\vec{K}) \qquad (I\ 1.14)$$

Ako matrični element interakcije, koji je na osnovu navedenih aproksimacija dat u obliku

$$L(\vec{K}) = 2L(\cos K_x a + \cos K_y a + \cos K_z a)$$

razvijemo u red dobiće se :

$$L(\vec{K}) = 6L - La^2K^2 \qquad (I\ 1.15)$$

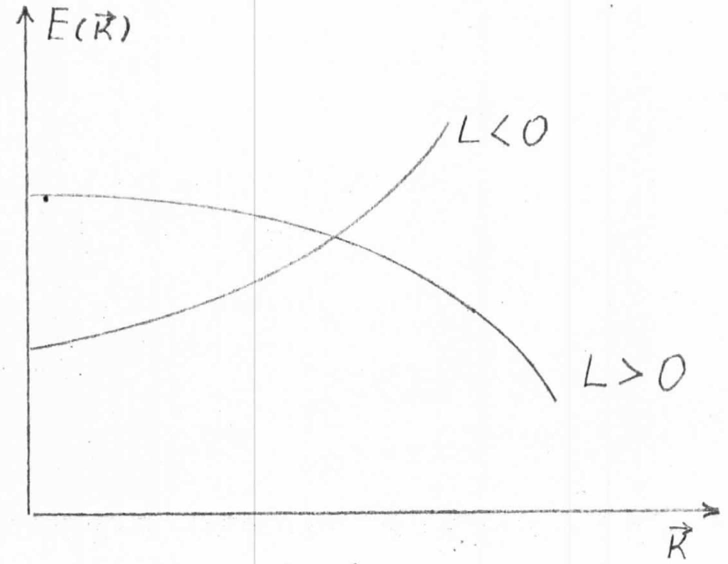
Koristeći ovaj rezultat izraz za energiju $(I\ 1.4)$ može se napisati u obliku:

$$E(\vec{K}) = \widetilde{\Delta} + \frac{\hbar^2 K^2}{2m^*} \qquad (I\ 1.16)$$

Iz izraza se vidi da se pri navedenim aproksimacijama eksitoni ponašaju kao kvazi čestice sa efektivnom masom

$$m^* = -\frac{\hbar^2}{2La^2} \qquad (I\ 1.17)$$

Eksitoni imaju pozitivnu efektivnu masu ako je matrični element interakcije $L < 0$, a negativnu ako je $L > 0$ što se grafički može predstaviti:



Sl. 1

POLARITONI

Eksitoni, koje smo do sada razmatrali, su idealizovane kvazi čestice. Prvi radovi, koji su na to ukazivali, su radovi Fano-a 1956. godine. Kasnije 1957. godine Hopfild zastupa teoriju prema kojoj u kristalu postoje hibridne eksitacije, koje ustvari predstavljaju smešu eksitona i fransferzalnih fotona. Agranović 1959. godine ove hibridne eksitacije naziva polaritoni i daje njihovu matematičku teoriju.

Analizirajući eksitone, koji nastaju osvetljavanjem kristala, moramo obratiti pažnju na svetlost, koja stvara eksitone i na interakciju upadne svetlosti sa stvorenim eksitonima, što znači da će se hamiltonijan posmatranog sistema sastojati iz tri dela:

a) hamiltonijan kristala
b) hamiltonijan polja transverzalnih fotona
c) hamiltonijan interakcije izmedju već nastalih eksitona i upadne svetlosti

$$H = H_{eks} + H_{fot} + H_{int} \qquad (I\ 2.1)$$

gde je:

H_{eks} - hamiltonijan eksitona (obradjen u paragrafu $(I\ 1.)$ i dat formulom $(I\ 1.6)$

H_{fot} - hamiltonijan polja transverzalnih fotona, dat izrazom

$$H_{fot} = \sum_{\vec{k}j} \hbar c |\vec{k}| \alpha^{+}_{\vec{k}j} \alpha_{\vec{k}j} \qquad (I\ 2.2)$$

gde je:

c - brzina svetlosti
$\vec{k}$ - talasni vektor svetlosti
j - polarizacija
$\alpha^{+}_{\vec{k}j}$ i $\alpha_{\vec{k}j}$ - operatori kreacije i anihilacije fotona.

H_{int} - hamiltonijan interakcije elektrona sa poljem transverzalnih fotona. Dat je izrazom

$$H_{int} = -\frac{\sigma e}{c m_e} \sum_{\vec{n}} \vec{P}_{\vec{n}} \vec{A}_{\vec{n}} \qquad (I\ 2.3)$$

gde je:

σ - broj elektrona u molekulu

$\vec{A}$ - vektorski potencijal elektromagnetnog polja

$\vec{p}$ - stvarni impuls elektrona

U reprezentaciji druge kvantizacije operator impulsa dat je u obliku

$$\vec{P}_{\vec{n}} = -i\hbar \sum_{f_1 f_2} \left[\int \varphi_{\vec{n}}^{*f_1} \nabla_{\vec{n}} \varphi_{\vec{n}}^{f_2} d\tau_{\vec{n}} \right] a_{\vec{n}f_1}^{+} a_{\vec{n}f_2} \qquad (I\ 2.4)$$

Operator impulsa se preko Furije transformacije može izraziti preko Pauli operatora, jer je predpostavljeno da kvantna stanja f_1 i f_2 mogu imati samo vrednosti o i f.

$$\hat{\vec{P}}_{\vec{n}} = \sum_{f_1 f_2} \vec{\mathcal{P}}_{f_1 f_2} a_{\vec{n}f_1}^{+} a_{\vec{n}f_2} \qquad (I\ 2.5)$$

gde je:

$$\mathcal{P}_{f_1 f_2} = \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \int d^3_{\vec{k}_1} d^3_{\vec{k}_2} d\tau_{\vec{n}} \varphi_{\vec{k}_1}^{*f_1} \varphi_{\vec{k}_2}^{f_2} \vec{k}_2 e^{i\vec{n}(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)}$$

Zadnji izraz se može napisati u obliku

$$\hat{\vec{P}}_{\vec{n}} = \mathcal{P}_{oo} + (\mathcal{P}_{ff} - \mathcal{P}_{oo}) P_{\vec{n}}^{+} P_{\vec{n}} + \mathcal{P}_{fo} P_{\vec{n}}^{+} + \mathcal{P}_{of} P_{\vec{n}}$$

Za procese rasejanja eksitacija je $\vec{\mathcal{P}}_{fo} = \vec{\mathcal{P}}_{of} \equiv \vec{\mathcal{P}}_{f}$ pa operator impulsa ima oblik

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \vec{\mathcal{P}}_{f} (P_{\vec{n}}^{+} + P_{\vec{n}}) \qquad (I\ 2.6)$$

Imajući u vidu ovaj izraz i izraz za vektorski potencijal

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}, j} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{N a^3 |\vec{k}|}} \vec{\ell}_{\vec{k}j} \left\{ \alpha_{\vec{k}j}^{+} + \alpha_{-\vec{k}j} \right\} e^{i\vec{k}\vec{n}} \qquad (I\ 2.7)$$

hamiltonijan dat relacijom $(I\ 2.3)$ može se napisati u obliku

$$H_{int}=\sum_{\vec{K}j}\vec{\Omega}_{\vec{K}}\vec{\ell}_{\vec{K}j}(\alpha_{\vec{K}j}+\alpha_{-\vec{K}j})(P^{+}_{\vec{K}}+P_{-\vec{K}}) \qquad (I\ 2.8)$$

gde je $\vec{\Omega}^{f}_{\vec{K}}$ dipolni moment prelaza u molekulu dat izrazom.

$$\vec{\Omega}^{f}_{\vec{K}}=-\frac{\sigma e}{me}\sqrt{\frac{2\pi\hbar N}{a^{3}|\vec{K}|c}}\;\vec{\wp}_{f} \qquad (I\ 2.9)$$

Uz predpostavku da eksiton interaguje samo sa jednom fotonskom granom, prelazeći sa Pauli na Boze operatore

$$(P_{\vec{n}}=B_{\vec{n}}-B^{+}_{\vec{n}}B_{\vec{n}}B_{\vec{n}})$$

i Furije transformacijom operatora $P_{\vec{K}}$ i $B_{\vec{K}}$ dobićemo hamiltonijan interakcije eksitona i fotona u harmonijskoj aproksimaciji.

$$H_{int}=\sum T_{\vec{K}}(B^{+}_{\vec{K}}\alpha_{\vec{K}}+\alpha^{+}_{\vec{K}}B_{\vec{K}}+B^{+}_{\vec{K}}\alpha^{+}_{-\vec{K}}+\alpha_{\vec{K}}B_{\vec{K}} \qquad (I\ 2.10)$$

gde je:

$$T_{\vec{K}}=\vec{\Omega}^{+}_{\vec{K}}\vec{\ell}_{\vec{K}} \qquad (I\ 2.11)$$

Eksiton interaguje samo sa jednom fotonskom granom ako vektori $\vec{\Omega}^{+}_{\vec{K}}$ i $\vec{\ell}_{\vec{K}}$ leže u ravni na koju je drugi vektor polarizacije normalan.

Zamenom Boze operatora $B_{\vec{K}}$ u hamiltonijan $(I\ 2.1)$, preko novih operatora $b_{\vec{K}}$, relacijama:

$$\begin{aligned} B_{\vec{K}}&=U_{\vec{K}}b_{\vec{K}}+V_{\vec{K}}b_{-\vec{K}}\\ B^{+}_{\vec{K}}&=U_{\vec{K}}b^{+}_{\vec{K}}+V_{\vec{K}}b_{-\vec{K}}\end{aligned} \qquad (I\ 2.12)$$

gde su b^{+} i b takodje Boze operatori, tj. zadovoljavaju komutacione relacije:

$$[b_{\vec{k}}, b^{+}_{\vec{k}}] = 1 \qquad [b^{+}_{-\vec{k}}, b_{-\vec{k}}] = -1$$

$$[b_{\vec{k}}, b_{-\vec{k}}] = [b^{+}_{-\vec{k}}, b^{+}_{\vec{k}}] = 0 \qquad (I\ 2.13)$$

dobijamo:

$$H = \sum_{\vec{k}} E_e(\vec{k})\, b^{+}_{\vec{k}} b_{\vec{k}} + \sum E_\phi(\vec{k})\, \alpha^{+}_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}} (B^{+}_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + \qquad (I\ 2.14)$$

$$+ \alpha^{+}_{\vec{k}} B_{\vec{k}} + B^{+}_{\vec{k}} \alpha^{+}_{-\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}} B_{\vec{k}})$$

gde je

$$E_0(\vec{k}) = \sqrt{(\Delta + L_{\vec{k}})^2 - \beta^2_{\vec{k}}}$$

$$E_\phi(\vec{k}) = \hbar C |\vec{k}| \qquad (I\ 2.15)$$

$$\phi_{\vec{k}} = \frac{\Delta + L\vec{k}}{E_0 |\vec{k}|} T_{\vec{k}}$$

Hamiltonijan ($I\ 2.14$), zbog dijagonalizacije, pišemo u pogodnijem obliku:

$$H = \sum_{s,s_1=1}^{2} M_{ss_1} b^{+}_{s} b_{s_1} + \frac{1}{2} \sum_{s,s_1=1}^{2} N_{ss_1} (b^{+}_{s} b^{+}_{s_1} + b_{s_1} b_{s}) \qquad (I\ 2.16)$$

gde je

$$M_{11} \equiv E_e(\vec{k}) \qquad N_{11} = 0 \qquad b_1 \equiv b_{\vec{k}} \qquad (I\ 2.17)$$

$$M_{22} \equiv E_\phi(\vec{k}) \qquad N_{22} = 0 \qquad b_2 \equiv \alpha_{\vec{k}}$$

$$M_{12} \equiv M_{21} = \phi_K \qquad N_{12} = N_{21} = \phi_{\vec{k}}$$

Dijagonalizacija se vrši po Tjablikovu[2]a koristi se Hajzenbergova jednačina kretanja, koja za bilo koji ermitski operator fizičke veličine ima oblik:

$$i\hbar \frac{d\hat{F}}{dt} = [\hat{F}, H]$$

a za naš slučaj

$$i\dot{b}(t) = [b_s, H]_{t=0} = \sum M_{ss_1} b_{s_1} + \sum N_{ss_1} b^{+}_{s_1} \qquad (I\ 2.18)$$

Sledećom relacijom prelazimo na nove operatore $C_\sigma(t)$ jer $b_s(t)$ nije konstanta kretanja.

$$b_s(t) = \sum [U_{s\sigma} C_\sigma e^{-iEt} + V^{*}_{s\sigma} C^{+}_\sigma e^{iEt}] \qquad (I\ 2.19)$$

Operatori C_σ i C^{+}_σ moraju biti Boze operatori, da bi zadnja transformacija bila kanonična. Inverzna transformacija od $(I\ 2.19)$ ima oblik

$$C_\sigma = \sum_{s=1}^{2} (U^{*}_{s\sigma} b_s - V^{*}_{s\sigma} b^{+}_s) \qquad (I\ 2.20)$$

Ako u izraz $(I\ 2.18)$ zamenimo izraz $(I\ 2.19)$ dobija se sledeća jednačina:

$$\sum_{\sigma=1}^{2} \Big\{ C_\sigma e^{iEt} [E U_{s\sigma} - \sum_{s_1=1}^{2} (M_{ss_1} U_{s_1\sigma} + N_{ss_1} V_{s_1\sigma})] +$$

$$+ C^{+}_\sigma e^{iEt} [-E V^{*}_{s\sigma} - \sum_{s_1=1}^{2} (M_{ss_1} V^{*}_{s_1\sigma} + N_{ss_1} U^{*}_{s_1\sigma})] \Big\} = 0 \qquad (I\ 2.21)$$

Ako su matrični elementi M_{ss_1} i N_{ss_1} realni, a koeficijente uz operatore C i C^{+} izjednačimo sa nulom, dobija se da je

$$E U_{s\sigma} = \sum_{s_1=1}^{2} (M_{ss_1} U_{s_1\sigma} + N_{ss_1} V_{s_1\sigma}) \qquad (I\ 2.22)$$

$$-EV_{s\sigma}=\sum_{s_1=1}^{2}(N_{ss_1}U_{s_1\sigma}+M_{ss_1}V_{s_1\sigma}) \qquad (I\ 2.22)$$

Kada se ovaj izraz razvije biće:

$S=1$

$$EU_{1\sigma}=M_{11}U_{1\sigma}+M_{12}U_{2\sigma}+ +N_{11}V_{1\sigma}+N_{12}V_{2\sigma}$$

$$-EV_{1\sigma}=N_{11}U_{1\sigma}+N_{12}U_{2\sigma}+ +M_{11}V_{1\sigma}+M_{12}V_{2\sigma}$$

$S=2$

$$EU_{2\sigma}=M_{21}U_{1\sigma}+M_{22}U_{2\sigma}+ +N_{21}V_{1\sigma}+N_{22}V_{2\sigma}$$

$$-EV_{2\sigma}=N_{21}U_{1\sigma}+N_{22}U_{2\sigma}+ +M_{2\sigma}V_{1\sigma}+M_{22}V_{2\sigma}$$

Zamenom vrednosti za M_{ss_1} i N_{ss_1} i sredjivanjem dobija se:

$$[E-E_e(\vec{K})]U_{1\sigma}-\Phi_{\vec{K}}U_{2\sigma}-OV_{1\sigma}-\Phi_{\vec{K}}V_{2\sigma}=0$$

$$-\Phi_{\vec{K}}U_{1\sigma}+[E-E_\phi(\vec{K})]U_{2\sigma}-\Phi_{\vec{K}}V_{1\sigma}-OV_{2\sigma}=0$$

$$OU_{1\sigma}+\Phi_{\vec{K}}U_{2\sigma}+[E+E_e(\vec{K})]V_{1\sigma}+\Phi_{\vec{K}}V_{2\sigma}=0 \qquad (I\ 2.23)$$

$$\Phi_{\vec{K}}U_{1\sigma}+OU_{2\sigma}+\Phi_{\vec{K}}V_{1\sigma}+[E+E_\phi(\vec{K})]V_{2\sigma}=0$$

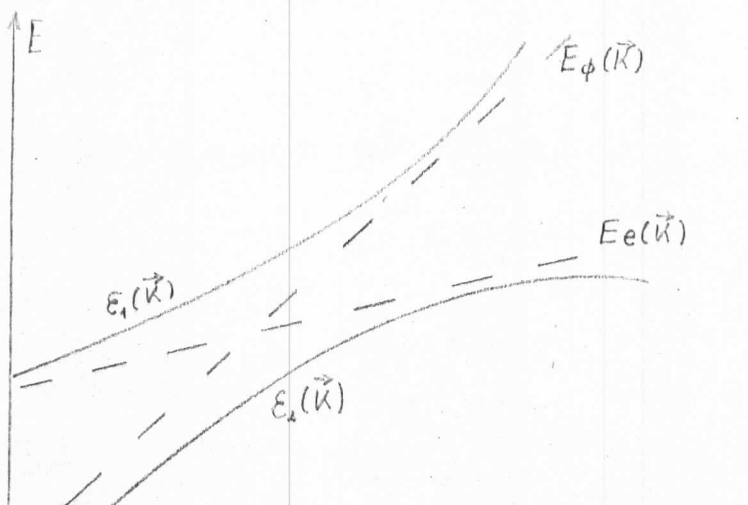
Izjednačimo determinantu ovog sistema sa nulom

$$\begin{vmatrix} E-E_e(\vec{K}) & \phi_{\vec{K}} & 0 & -\phi_{\vec{K}} \\ -\phi_{\vec{K}} & E-E_\phi(\vec{K}) & -\phi_{\vec{K}} & 0 \\ 0 & \phi_{\vec{K}} & E+E_e(\vec{K}) & \phi_{\vec{K}} \\ \phi_{\vec{K}} & 0 & \phi_{\vec{K}} & E+E_\phi(\vec{K}) \end{vmatrix} = 0$$

Rešavanjem ove determinante dobija se bikvadratna jednačina čija su rešenja

$$\mathcal{E}_{1/2}(\vec{K}) = \sqrt{\frac{E_e^2(\vec{K}) + E_\phi^2(\vec{K})}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{E_e^2(\vec{K}) - E_\phi^2(\vec{K})}{2}\right]^2 + 4E_e(\vec{K})E_\phi(\vec{K})\phi_{\vec{K}}^2}} \qquad (I\ 2.24)$$

Znači postoje dve vrednosti energije $\mathcal{E}_{1/2}$, a to su energije realnih optičkih eksitacija u kristalu, tj. polaritona, koje se mogu predstaviti grafički, kao što je pokazano na sl.2.



Sl. 2

II BOZE KONDENZACIJA U SISTEMU POLARITONA

II-1 Boze kondenzacije u sistemu kvazičestica (eksitona)

Boze kondenzacije u sistemu kvazičestica može nastati samo pod uslovom da je vreme uspostavljanja termodinamičke ravnoteže (t_c) pri sudaru kvazičestica, manje od vremena života kvazičestice (t_e) (eksitona), jer će u tom vremenskom intervalu broj kvazičestica biti konstantan. Vreme uspostavljanja termodinamičke ravnoteže (vreme relaksacije) dato je izrazom:

$$t_c = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} \cdot \frac{1}{a^2 n v} \qquad (II\ 1.1)$$

gde je:

a- prečnik eksitona

n- broj eksitona u sm3 kristala

v- brzina eksitona

Do ovog izraza može se doći poznavanjem brzine eksitona, koja se pokorava Maksvelovoj raspodeli, pri čemu je srednji slobodni put

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sigma n} \qquad (II\ 1.2)$$

gde je σ presek rasejanja.

Ako predpostavimo da su prečnici svih eksitona približno jednaki, pošto kod molekulskih kristala ostaju u granicama molekula, biće reda veličina

$$a \sim 5 \cdot 10^{-8}\,cm$$

Ako se u kristalu pomoću jakog laserskog snopa proizvede $n \sim 2{,}7 \cdot 10^{17} - 2{,}7 \cdot 10^{18} (cm^{-3})$ eksitona i uzmemo da je brzina $v \sim 4 \cdot 10^{5} - 4 \cdot 10^{6} cm/s$ vreme relaksacije dato izrazom $(II\ 1.1)$ biće:

$$t_c \sim 10^{-9} - 10^{-13} (s)$$

Eksperimentalno je odredjeno da je vreme života eksitona kod nekih kristala

$$t_e \sim 10^{-6} - 10^{-8} (s)$$

što znači da je uslov $t_c < t_e$ ispunjen, pa se prema pomenutom uslovu može reći da se Boze kondenzacija u sistemu kvazi čestica (eksitona) javlja u vremenskom intervalu.

$$10^{-9} (s) < t < 10^{7} (s)$$

Da bi ispitali kolektivna svojstva sistema eksitona, vratimo se na hamiltonijan $(I\ 1.6)$ i pomoću relacija $(I\ 1.8)$ predjimo sa Pauli na Boze operatore, uzimajući samo članove, koji opisuju dvobozonske interakcije, tj.:

$$
\begin{aligned}
P_{\vec{n}} &= B_{\vec{n}} - B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \\
P^{+}_{\vec{n}} &= B^{+}_{\vec{n}} - B^{+}_{\vec{n}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \qquad (II\ 1.3) \\
\vec{P}_{\vec{n}} P_{\vec{n}} &= B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} - B^{+}_{\vec{n}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}}
\end{aligned}
$$

Hamiltonijan $(I\ 1.6)$ će sada imati oblik:

$$H=\sum_{\vec{n}}\Delta B^{+}_{\vec{n}}B_{\vec{n}}+\sum_{\vec{n}\neq\vec{m}}L_{\vec{n}\vec{m}}B^{+}_{\vec{n}}B_{\vec{m}}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\neq\vec{m}}\beta_{nm}(B_nB_m+B_nB_m)-\Delta\sum_{\vec{n}}B_nB_nB_nB_n- \qquad (II\ 1.4)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\neq\vec{m}}L_{nm}(B_nB_nB_nB_m+B_nB_mB_mB_m)+$$

$$+\sum_{\vec{n}\neq\vec{m}}\gamma_{\vec{n}\vec{m}}B_nB_mB_mB_m$$

Deo hamiltonijana koji opisuje rasejanje eksitona na δ -potencijalu, dat je izrazom:

$$H_{\delta}=-\Delta\sum_{\vec{n}\vec{m}}\delta_{\vec{n}\vec{m}}B^{+}_{\vec{n}}B^{+}_{\vec{m}}B_{\vec{m}}B_{\vec{n}} \qquad (II\ 1.5)$$

odakle vidimo da je δ - potencijal oblika:

$$U_{\vec{n}\vec{m}}=-2\Delta\,\delta_{\vec{n}\vec{m}} \qquad (II\ 1.6)$$

Izraz $(II\ 1.5)$ predstavlja prvi član hamiltonijana $(II\ 1.4)$ koji opisuje kinematičku interakciju u sistemu eksitona. Sledećim izrazom dati su drugi članovi kinematičke interakcije

$$H_{\vec{n}\vec{m}}=-\sum_{\vec{n}\vec{m}}L_{\vec{n}\vec{m}}(B^{+}_{\vec{n}}B^{+}_{\vec{n}}B_{\vec{n}}B_{\vec{m}}+ \qquad (II\ 1.7)$$

$$+B^{+}_{\vec{n}}B^{+}_{\vec{m}}B_{\vec{m}}B_{\vec{m}}$$

Ovaj deo hamiltonijana opisuje procese rasejanja eksitona na potencijalima Bornovskog tipa.

Poslednji sabirak u izrazu $(II\ 1.4)$ predstavlja dinamičku interakciju izmedju eksitona.

Hamiltonijan $(II\ 1.4)$ može se uzeti u sledećem obliku, uzimajući da je energija eksitacije $\Delta \gg L_{\vec{n}\vec{m}}$

$$H = \sum_{\vec{n}} \Delta B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} + \sum_{\vec{n}\vec{m}} L_{\vec{n}\vec{m}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{m}} + \Delta \sum_{\vec{n}\vec{m}} \delta_{\vec{n}\vec{m}} B^{+}_{\vec{n}} B^{+}_{\vec{m}} B_{\vec{m}} B_{\vec{n}} \qquad (II\ 1.8)$$

Za prelaz u inpulsni prostor koristi se relacija:

$$\sum_{\vec{n}\vec{m}} U_{\vec{n}\vec{m}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{m}} B_{\vec{m}} B_{\vec{n}} \longrightarrow \frac{1}{N} \sum_{K_1 K_2 K_3} L(\vec{K}_1 - \vec{K}_3) \times b^{+}_{\vec{K}_1} b^{+}_{\vec{K}_2} b_{\vec{K}_3} b_{\vec{K}_1+\vec{K}_2-\vec{K}_3} \qquad (II\ 1.9)$$

gde je $L(\vec{k})$ dat preko amplitude rasejanja.

$$I(\vec{k}) = -\frac{2\pi\hbar^2}{mV}[A(\vec{k}) + A^{*}(\vec{k})] \qquad (II\ 1.10)$$

Amplituda rasejanja eksitona na δ-potencijalu data izrazom (Agranovič)

$$A(\vec{K}) = f = -\frac{a}{2}$$

Primenom na izraz $(\text{II } 1.10)$ dobija se :

$$I(\vec{K}) \equiv \gamma_0 = \frac{2\pi a \hbar^2}{V m} \qquad (\text{II } 1.11)$$

gde je v - zapremina elementarne ćelije. Na osnovu ovoga, hamiltonijan eksitona u inpulsnom prostoru biće dat u obliku:

$$H = \sum_{\vec{K}} \left(\tilde{\Delta} + \frac{\hbar^2 K^2}{2m} \right) b^{+}_{\vec{K}} b_{\vec{K}} + \qquad (\text{II } 1.12)$$

$$+ \frac{\gamma_0}{N} \sum_{\vec{K}_1 \vec{K}_2 \vec{K}_3 \vec{K}_4} \delta(\vec{K}_1 + \vec{K}_2 - \vec{K}_3 - \vec{K}_4)\, b^{+}_{\vec{K}_1} b^{+}_{\vec{K}_2} b_{\vec{K}_3} b_{\vec{K}_4}$$

Kao što se iz poslednjeg izraza vidi, sistem eksitona se ponaša kao slabo neidealan Boze gas, te u njemu može doći do pojave Bøze kondenzacije.

Spektar eksitona u uslovima Boze kondenzacije (metod Bogoljubova)

Ako se sistem eksitona ponaša kao slabo neidealan Boze gas, za odredjivanje energetskog spektra eksitona u uslovima Boze kondenzacije, može se primeniti teorija Bogoljubova kojom objašnjava superfluidnost tečnog He^4 (superfluidnost je pojava kretanja tečnosti kroz kapilare bez trenja). Atom helijuma se sastoji od dva protona, dva neutrona i dva elektrona, koji su spareni sa antiparalelnim spinovima, tako da je ukupan spin atoma jednak nuli. To znači da je on boze čestica.

Boze čestice se mogu sakupljati u neograničenom broju u jednom kvantnom stanju. Pošto u prirodi postoji opšta težnja da sistem zauzme stanje najniže energije, znači da u sistemu bozona najveći deo čestica ima impuls jednak nuli. Ovo su polazne ideje na osnovu kojih je Bogoljubov sistem atoma He^4 posmatrao kao slabo neidealan Boze gas, čiji se hamiltonijan može pisati kao suma kinetičkih energija pojedinih čestica i potencijalne energije.

$$H=\sum_{\vec{n}}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\Delta\vec{n} + \frac{1}{2}\sum W_{\vec{n}-\vec{m}} \qquad (II\ 1.13)$$

U representaciji druge kvantizacije hamiltonijan ima oblik:

$$H=\sum_{\vec{n}} b^+_{\vec{k}}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\vec{n}\right) b_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} W_{\vec{n}-\vec{m}}\, b_{\vec{n}}\, b_{\vec{m}}\, b_{\vec{m}}\, b_{\vec{n}} \qquad (II\ 1.14)$$

Prelaskom iz konfiguracionog u impulsni prostor pomoću sledećih relacija

$$b^{+}_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{p}} b^{+}_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\vec{n}} \qquad (II\ 1.15)$$

$$b_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{p}} b_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{n}}$$

hamiltonijan za sistem atoma He^{4} imaće oblik:

$$H = \sum_{\vec{p} \neq 0} \frac{p^2}{2m} b^{+}_{\vec{p}} b_{\vec{p}} +$$

$$+ \frac{1}{2N} \sum_{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3 \vec{p}_4} W(\vec{p}_4 - \vec{p}_1) b^{+}_{\vec{p}_1} b^{+}_{\vec{p}_2} \times \qquad (II\ 1.16)$$

$$\times b_{\vec{p}_3} b_{\vec{p}_4} \delta_{\vec{p}_1 + \vec{p}_2, \vec{p}_3 + \vec{p}_4}$$

gde je:

m - masa atoma He^{4}

W - Furije lik interakcija izmedju helijumovih atoma.

Ako je ukupan broj atoma helijuma u sistemu N, a N_0 broj atoma sa impulsom jednakim nuli, onda je

$$N \approx N_0 \qquad (II\ 1.17)$$

jer je bozonskim karakterom uslovljena činjenica da gotovo svi atomi He^{4} imaju impuls ravan nuli. Bozoni, čiji je impuls različit od nule nazivaju se nadkondenzatni bozoni, a bozoni čiji je impuls jednak nuli kondezatni bozoni i oni obrazuju Boze kondenzaciju.

Na vrlo niskim temperaturama skoro sve čestice će biti u kondenzatu i

$$\sum b^{+}_{\vec{p}} b_{\vec{p}} = b_0^{+} b_0 + \sum_{\vec{p}\neq 0} b^{+}_{\vec{p}} b_{\vec{p}} = N_0 + \sum_{\vec{p}\neq 0} b^{+}_{\vec{p}} b_{\vec{p}}$$

$$[b_0, b_0^{+}] = b_0 b_0^{+} - b_0^{+} b_0 \qquad b_0 b_0^{+} - b_0^{+} b_0 = 1 \qquad (II\ 1.8)$$

$$b_0 b_0^{+} = 1 + b_0^{+} b_0 \qquad b_0 b_0^{+} = b_0^{+} b_0$$

Operatori kondenzantnih bozona (Boze operatori u kondenzatu) ponašaju se kao obični brojevi, dok su operatori $b^{+}_{\vec{p}}$ i $b_{\vec{p}}$ nadkondenzatnih bozona operatori, a ne brojevi, jer ih ima veoma mali broj. Na osnovu ovoga, u delu hamiltonijana, koji opisuje interakciju medju bozonima, izdvojićemo delove sa impulsom $p = 0$ prema sledećoj tabeli. (članovi sa neparnim brojem operatora sa impulsom $p \neq 0$ ne daju nikakav doprinos u prvoj aproksimaciji teorije perturbacija, pa ih zato ne uzimamo u obzir):

$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$
0	0	0	0
$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	0	0
$\vec{P}_1$	0	$\vec{P}_3$	0
$\vec{P}_1$	0	0	$\vec{P}_4$
0	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	0
0	$\vec{P}_2$	0	$\vec{P}_4$
0	0	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$

TABLICA BR. 1

Prema gornjoj tabeli hamiltonijan $(II\ 1,6)$ postaje

$$H=\sum_{\vec{p}\neq 0}\left\{\frac{p^2}{2m}+\frac{N_0}{N}W(\vec{p})\right\}b^+_{\vec{p}}\,b_{\vec{p}}\,+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\vec{p}\neq 0}\left[W(\vec{p})(b^+_{\vec{p}}b^+_{-\vec{p}}+b_{-\vec{p}}b_{\vec{p}})+\frac{N_0}{N}(W(0)\sum_{\vec{p}\neq 0}b^+_{\vec{p}}b_{\vec{p}}\,+\right. \qquad (\text{II } 1.19)$$

$$+\frac{1}{2N}\sum_{\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3\neq 0}W(\vec{p}_2-\vec{p}_3)\,b^+_{\vec{p}_1}b_{\vec{p}_2}b_{\vec{p}_3}b_{\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{p}_3}+\frac{1}{2}\frac{N_0^2}{N}W(0)$$

Polazeći od činjenice da poslednji član hamiltonijana predstavlja energiju osnovnog stanja, koja ne utiče na zakon disperzije i odbacujući četvrti član kao veoma mali, dobija se hamiltonijan iz koga dijagonalizacijom ("UV" transformacijom) dobijamo izraz za energiju.

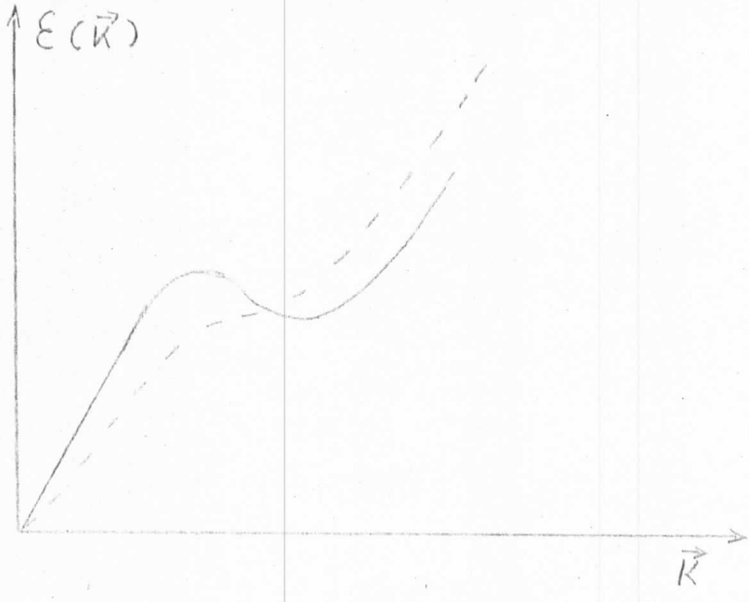
$$\mathcal{E}(\vec{K})=\sqrt{\Delta^2\vec{K}^2-\beta^2\vec{K}^2} \qquad (\text{II } 1.20)$$

Pri prelazu na amplitudu rasejanja Bogoljubov je za tečni He na niskim temperaturama dobio izraz:

$$\mathcal{E}(\vec{K})=\sqrt{\left(\frac{\hbar^2K^2}{2m}\right)^2+\frac{\hbar^2K^2}{2m}\cdot\frac{4\pi a\hbar^2N_0}{m}}$$

a isti se rezultat dobija i za eksitone, s obzirom na identičnost hamiltonijana. Gornji spektar zadovoljava uslov superfluidnosti, tj. u sistemu eksitona dolazi do superfluidnog kretanja.

$$\min\frac{\mathcal{E}(\vec{p})}{p}>0$$



Eksperimentalno dobijena kriva za He^4 na grafiku je data punom linijom a teorijski isprekidanom.

II-2 Boze kondenzacija u sistemu polaritona

Pri ispitivanju Boze kondenzacije u sistemu polaritona moraju se uzeti u ozbir i anharmonijski delovi eksitonskog hamiltonijana, obradjenog u prvoj glavi.

Zamenom Pauli operatora sa Boze operatorima prema relacijama (II 1.3) u hamiltonijan (I 1.6) i zadržavajući samo rasejanje na δ - potencijalu kao dominantnom anharmonijski efekat u bozonskom sistemu dobija se efektivni eksitonski hamiltonijan u obliku:

$$H_{eff}=\sum_{\vec{n}}\Delta B^{+}_{\vec{n}}B_{\vec{n}}+\sum_{\vec{n},\vec{m}}L_{\vec{n}\vec{m}}B^{+}_{\vec{n}}B_{\vec{m}}+\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}\beta_{\vec{n}\vec{m}}\times \\ \times\left(B^{+}_{\vec{n}}B^{+}_{\vec{m}}+B_{\vec{m}}B_{\vec{n}}\right)-\Delta\sum_{\vec{n}}B^{+}_{\vec{n}}B^{+}_{\vec{n}}B_{\vec{n}}B_{\vec{n}} \qquad (II\ 2.1)$$

Anharmonijski deo ovog hamiltonijana je:

$$H_{A}=-\Delta\sum_{\vec{n}}B^{+}_{\vec{n}}B^{+}_{\vec{n}}B_{\vec{n}}B_{\vec{n}} \qquad (II\ 2.2)$$

i može se napisati u obliku

$$H_{A}=\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}2\Delta\,\delta_{\vec{n}\vec{m}}B^{+}_{n}B^{+}_{m}B_{m}B_{n} \qquad (II\ 2.3)$$

Ako predjemo na amplitudu rasejanja

$$\Delta=-\frac{4\pi\frac{a}{2}\hbar^{2}}{\frac{m^{*}}{2}a^{3}}=-\frac{4\pi\hbar^{2}}{m^{*}a^{2}}=8\pi L=A \qquad (II\ 2.4)$$

dobijamo

$$H_A = A \sum_{\vec{n}} B^+_{\vec{n}} B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \qquad (II\ 2.5)$$

Izraz za hamiltonijan interakcije eksitona sa fotonima dobijen je u prvoj glavi $(I\ 2.10)$.

Izrazimo li ga u Pauli operatorima dobićemo izraz:

$$H_{int} = \sum_{\vec{k}} T_{\vec{k}} (P^+_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + \alpha^+_{\vec{k}} P_{\vec{k}} + P^+_{\vec{k}} \alpha^+_{\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}} P_{\vec{k}} \qquad (II\ 2.6)$$

Pri tome smo koristili sledeće relacije

$$P^+_{\vec{k}} = B^+_{\vec{k}} - \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} B^+_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} B^+_{\vec{q}_1} B_{\vec{q}_2}$$

$$P_{\vec{k}} = B_{\vec{k}} - \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} B^+_{\vec{q}_2} B_{\vec{q}_1} B_{\vec{n}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} \qquad (II\ 2.7)$$

Ako su vektor polarizacije potona i vektor dipolnog momenta prelaza ortogonalni (približno) tada je $T_{\vec{k}}$ dato izrazom $(I\ 2.11)$, i važi relacija

$$T_{\vec{k}} \ll \Delta \qquad (II\ 2.8)$$

U tom slučaju možemo odbaciti sve anharmonijske delove poslednjeg hamiltonijana interakcije, pa će hamiltonijan sistema imati oblik

$$H_S = H_H + H_A \qquad (II\ 2.9)$$

gde je:

$$H_A = N \sum_{K_1 K_2 K_3 K_4} B^+_{\vec{K}_1} B^+_{\vec{K}_2} B_{\vec{K}_3} B_{\vec{K}_4} \delta_{\vec{K}_1+\vec{K}_2;\vec{K}_3+\vec{K}_4}$$

$$H_H=\sum_{\vec{k}} E_e(\vec{k}) B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} E_\phi(\vec{k}) \alpha^+_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} +$$

$$+\sum_{\vec{k}} T_{\vec{k}} (B^+_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + \alpha^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}} + B^+_{\vec{k}} \alpha^+_{-\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}} B_{\vec{k}}$$

Prelaskom sa eksitonske na polaritonske operatore $C_{1\vec{k}}$ i $C_{2\vec{k}}$ i ako u harmonijskom i anharmonijskom delu hamiltonijana zanemarimo popravke proporcionalne $T_{\vec{k}}$, a anharmonijski deo napišemo u polaritonskim operatorima, na osnovu relacija

$$B^+_{\vec{k}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(C^+_{1\vec{k}} + C^+_{2\vec{k}})$$

$$B_{\vec{k}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(C_{1\vec{k}} + C_{2\vec{k}}) \qquad (II\ 2.10)$$

dobijamo efektivni hamiltonijan sistema polaritona u obliku

$$H_{eff} = \sum_{\vec{k}} (\tilde{\Delta} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*})(C^+_{1\vec{k}} C_{1\vec{k}} + C^+_{2\vec{k}} C_{2\vec{k}}) +$$

$$+\frac{A}{4N}\sum \{ C^+_{1\vec{k}_1} C^+_{1\vec{k}_1} C_{1\vec{k}_3} C_{1\vec{k}_4} + C^+_{1\vec{k}_1} C^+_{1\vec{k}_2} C_{1\vec{k}_3} C_{1\vec{k}_4} +$$

$$+ C^+_{1\vec{k}_1} C^+_{2\vec{k}_2} C_{1\vec{k}_3} C_{1\vec{k}_4} + C^+_{1\vec{k}_1} C^+_{1\vec{k}_2} C_{2\vec{k}_3} C_{2\vec{k}_4} +$$

$$+ C^+_{1\vec{k}_1} C^+_{2\vec{k}_2} C_{1\vec{k}_3} C_{1\vec{k}_4} + C^+_{1\vec{k}_1} C_{2\vec{k}_2} C_{1\vec{k}_3} C_{2\vec{k}_4} + \qquad (II\ 2.11)$$

$$+ C^+_{1\vec{k}_1} C^+_{2\vec{k}_2} C_{2\vec{k}_3} C_{1\vec{k}_4} + C^+_{1\vec{k}_1} C^+_{2\vec{k}_2} C_{2\vec{k}_3} C_{2\vec{k}_4} +$$

$$+ C^+_{2\vec{k}_1} C^+_{1\vec{k}_2} C_{1\vec{k}_3} C_{1\vec{k}_4} + C^+_{2\vec{k}_1} C^+_{1\vec{k}_2} C_{1\vec{k}_3} C_{2\vec{k}_4} +$$

$$+ C^+_{2\vec{k}_1} C^+_{1\vec{k}_2} C_{2\vec{k}_3} C_{1\vec{k}_4} + C^+_{2\vec{k}_1} C^+_{1\vec{k}_2} C_{2\vec{k}_3} C_{2\vec{k}_4} +$$

$$+C^+_{2\vec{k}_1} C^+_{2\vec{k}_2} C_{1\vec{k}_3} C_{1\vec{k}_4} + C^+_{2\vec{k}_1} C^+_{2\vec{k}_2} C_{1\vec{k}_3} C_{2\vec{k}_4} +$$

$$+C^+_{2\vec{k}_1} C^+_{2\vec{k}_2} C_{2\vec{k}_3} C_{1\vec{k}_4} + C^+_{2\vec{k}_1} C^+_{2\vec{k}_2} C_{2\vec{k}_3} C_{2\vec{k}_4} \Big\} \times$$

$$\times \delta_{K_1+K_2+K_3+K_4}$$

Da bi se račun uprostio predpostavlja se da je broj eksitona u sistemu jednak broju molekula u kristalu. To znači da su svi atomi eksitirani. Pored ovoga uzima se da je u uslovima Boze kondenzacije

$$\begin{aligned} &C^+_{10} C_{10} = N_{10} \approx N \\ &C^+_{20} C_{20} = N_{20} = 0 \\ &C^+_{10} = C_{10} = \sqrt{N_{10}} \\ &\sum_{\vec{k}\neq 0} C^+_{1\vec{k}} C_{1\vec{k}} = N - N_0 \ll N_0 \end{aligned} \qquad (II\ 2.12)$$

U hamiltonijanu $(II\ 2.11)$ može se izvršiti razdvajanje delova sa impulsom jednakim nuli i impulsom različitim od nule prema relacijama $(II\ 2.12)$.

Efektivni hamiltonijan, koji se pri tome dobija, ima oblik:

$$H_{eff} = \Delta H_{10} + \sum_{K\neq 0} \frac{\hbar^2 K^2}{2m^*} C^+_{1\vec{k}} C_{1\vec{k}} +$$

$$+ \sum_{K\neq 0} \left(\tilde{\Delta} + \frac{\hbar^2 K^2}{2m^*}\right) C^+_{2\vec{k}} C_{2\vec{k}} + \frac{A}{4N} N_{10}^2 +$$

$$+ \frac{A N_{10}}{N} \sum_{\vec{k}=0} \Big[\frac{1}{4} \big(C^+_{1\vec{k}} C^+_{1-\vec{k}} + C_{1-\vec{k}} C_{1+\vec{k}} + C^+_{2\vec{k}} C^+_{2-\vec{k}} + C_{2-\vec{k}} C_{2\vec{k}} \big) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(C^+_{1\vec{k}}C^+_{2,-\vec{k}} + C_{2-\vec{k}}C_{1,\vec{k}}\right) +$$

$$+\left(C^+_{1\vec{k}}C_{1\vec{k}} + C^+_{1\vec{k}}C_{2\vec{k}} + C^+_{2\vec{k}}C_{1\vec{k}} + C^+_{2\vec{k}}C_{2\vec{k}}\right)\Big] \qquad (II\ 2.13)$$

Ako zanemarimo $\left(\sum_{k\neq 0} C^+_{1\vec{k}} C_{1\vec{k}}\right)^2$ i uzmemo približnu vrednost za N_{10}^2 tj.

$$N_{10}^2 \simeq \mathcal{N}^2 - 2\mathcal{N}\sum_{k\neq 0} C^+_{1\vec{k}} C_{1\vec{k}}$$

efektivni hamiltonijan biće:

$$H_{eff} = H_0 + H \qquad (II\ 2.14)$$

gde je:

$$H_0 = \mathcal{N}(\widetilde{\Delta} + \frac{1}{4}A) \qquad (II\ 2.15)$$

$$H = \sum_{\vec{k}\neq 0}\left(\frac{\hbar^2 K^2}{2m^*} + \frac{A}{2}\frac{\mathcal{N}}{N}\right)C^+_{1\vec{k}}C_{1\vec{k}} + \sum\Big(\frac{\hbar^2 K^2}{2m^*} +$$

$$+ \widetilde{\Delta} + \frac{\mathcal{N}}{N}A\Big)C^+_{2\vec{k}}C_{2\vec{k}} + \frac{\mathcal{N}}{N}A\sum_{k}\left(C^+_{1\vec{k}}C_{2\vec{k}} + C^+_{2\vec{k}}C_{1\vec{k}}\right) +$$

$$+\frac{\mathcal{N}}{N}\frac{A}{4}\sum_{k\neq 0}\Big\{C^+_{1\vec{k}}C^+_{1-\vec{k}} + C_{1,-\vec{k}}C_{1\vec{k}} + C^+_{2\vec{k}}C^+_{2-\vec{k}} +$$

$$+ C_{2-\vec{k}}C_{2\vec{k}} + 2C^+_{1\vec{k}}C^+_{2-\vec{k}} + 2C_{2-\vec{k}}C_{1\vec{k}}\Big\} \qquad (II\ 2.16)$$

Uvedimo oznake:

$$\alpha_1(k) \equiv \frac{\hbar^2 K^2}{2m^*} + \frac{A'}{2} \qquad \alpha_2(\vec{k}) \equiv \frac{\hbar^2 K^2}{2m^*} + \Delta + A'$$

$$\beta \equiv \frac{A'}{2} \qquad A' = \frac{\mathcal{N}}{N} \qquad (II\ 2.17)$$

Hamiltonijan $(II\ 2.16)$ možemo napisati u obliku

$$H=\sum_{\vec{k}\neq 0}\alpha_1(\vec{k})C_{1\vec{k}}^{+}C_{1\vec{k}}+\sum_{\vec{k}\neq 0}\frac{1}{2}\beta(C_{1\vec{k}}^{+}C_{1-\vec{k}}^{+}+C_{1-\vec{k}}C_{1\vec{k}})+$$

$$+\sum_{\vec{k}\neq 0}\alpha_2(\vec{k})C_{2\vec{k}}^{+}C_{2\vec{k}}+\sum_{\vec{k}\neq 0}\frac{1}{2}\beta(C_{2\vec{k}}^{+}C_{2-\vec{k}}^{+}+C_{2-\vec{k}}C_{2\vec{k}})+ \qquad (II\ 2.18)$$

$$+2\beta\sum_{\vec{k}\neq 0}(C_{1\vec{k}}^{+}C_{2\vec{k}}+C_{2\vec{k}}^{+}C_{1\vec{k}})+\beta\sum(C_{1\vec{k}}^{+}C_{2-k}^{+}+C_{2\vec{k}}C_{1-\vec{k}})$$

odnosno

$$H=H_{11}+H_{22}+H_{21} \qquad (II\ 2.19)$$

gde je:

$$H_{11}=\sum_{\vec{k}\neq 0}\alpha_1(\vec{k})C_{1\vec{k}}^{+}C_{1\vec{k}}+\sum_{\vec{k}\neq 0}\frac{1}{2}\beta(C_{1\vec{k}}^{+}C_{1-\vec{k}}^{+}+C_{1-\vec{k}}C_{1\vec{k}})$$

$$H_{22}=\sum_{\vec{k}\neq 0}\alpha_2(\vec{k})C_{2\vec{k}}^{+}C_{2\vec{k}}+\sum_{\vec{k}\neq 0}\frac{1}{2}\beta(C_{2k}^{+}C_{2-\vec{k}}^{+}+C_{2-\vec{k}}C_{2\vec{k}})$$

$$H_{21}=2\beta\sum_{\vec{k}\neq 0}(C_{1\vec{k}}^{+}C_{2\vec{k}}+C_{2\vec{k}}^{+}C_{1\vec{k}})+\beta\sum(C_{1\vec{k}}^{+}C_{2-\vec{k}}^{+}+C_{2\vec{k}}C_{1-\vec{k}})$$

Polaritonski spektar u uslovima Boze kondenzacije potražićemo metodom dvovremenskih temperaturskih Green-ovih funkcija, koju je razvio Tjablikov (vidi prilog).
S obzirom da u sistemu polaritona postoji interakcija izmedju kondenzatnih i nadkondenzatnih eksitacija, od kojih ćemo uzeti u obzir samo procese kretanja dva nadkondenzatna polaritona na račun anihilacije dva kondenzatna, i obrnuto

$$0+0\longrightarrow\vec{k}+(-\vec{k})$$

Za ovaj slučaj treba rešiti sledeći sistem jednačina za Grinove funkcije.

$$
\begin{aligned}
&\tilde{E}\langle\langle C_{1K} | C_{1K}^{+}\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} + \langle\langle [C_{1K}, H] | C_{1K}^{+}\rangle\rangle \\
&\tilde{E}\langle\langle C_{1-K}^{+} | C_{1K}\rangle\rangle = \langle\langle [C_{1-K}^{+}, H] | C_{1K}^{+}\rangle\rangle \\
&\tilde{E}\langle\langle C_{2K} | C_{1K}^{+}\rangle\rangle = \langle\langle [C_{2-K}, H] | C_{1K}^{+}\rangle\rangle \\
&\tilde{E}\langle\langle C_{2-K}^{+} | C_{1K}^{+}\rangle\rangle = \langle\langle [C_{2-K}^{+}, H] | C_{1K}^{+}\rangle\rangle
\end{aligned}
\qquad (\text{II } 2.20)
$$

Sada se pomoću sledećih komutacionih relacija

$$[C_{i\vec{k}}, C_{j\vec{q}}^{+}] = \delta_{ij}\,\delta_{\vec{k}\vec{q}}$$

$$[C_{i\vec{k}}, C_{j\vec{q}}] = [C_{i\vec{k}}^{+}, C_{j\vec{q}}^{+}] = 0$$

i na osnovu hamiltonijana $(\text{II } 2.19)$ mogu izračunati komutatori koji figurišu u Grinovoj funkciji

$$[C_{1\vec{k}} H] = [C_{1\vec{k}}, H_{11}] + [C_{1\vec{k}}, H_{22}] + [C_{1\vec{k}}, H_{21}] =$$

$$= \alpha_1(\vec{k})\,C_{1\vec{k}} + \beta\, C_{1-\vec{k}}^{+} + 2\beta\, C_{2\vec{k}} + \beta\, C_{2-\vec{k}}^{+}$$

$$[C_{1-\vec{k}}^{+} H] = [C_{1-\vec{k}}^{+}, H_{11}] + [C_{1-\vec{k}}^{+}, H_{22}] + [C_{1-\vec{k}}^{+}, H_{21}] =$$

$$= -\alpha_1(\vec{k})\,C_{1-\vec{k}}^{+} - 2\beta C_{2-\vec{k}} - \beta C_{1\vec{k}} - \beta C_{2\vec{k}}$$

$$[C_{2\vec{k}}, H] = [C_{2k}, H_{11}] + [C_{2k}, H_{22}] + [C_{2k}, H] =$$

$$= \alpha_2(\vec{k}) C_{2\vec{k}} + \beta C^{+}_{2-\vec{k}} + 2\beta C_{1\vec{k}} + \beta C^{+}_{1-\vec{k}}$$

$$[C^{+}_{2-\vec{k}}, H] = [C_{2-k}, H] + [C_{2-\vec{k}}, H_{22}] + [C_{2-\vec{k}}, H] =$$

$$= -\alpha(\vec{k}) C^{+}_{2-\vec{k}} - \beta C_{2\vec{k}} - 2\beta C^{+}_{1-k} - \beta C_{1\vec{k}} \qquad (II\ 2.21)$$

Zamenom ovako izračunatih komutacija u izraze $(II\ 2.20)$ dobiće se sistem jednačina za Grinove funkcije

$$\tilde{E}\langle\langle C_{1\vec{k}} | C^{+}_{1\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} + \alpha_1(\vec{k}) \langle\langle C^{+}_{1\vec{k}} | C^{+}_{1\vec{k}} \rangle\rangle + \beta \langle\langle C^{+}_{1-\vec{k}} | C^{+}_{1-\vec{k}} | C^{+}_{1\vec{k}} \rangle\rangle$$

$$+ 2\beta \langle\langle C_{2\vec{k}} | C^{+}_{1\vec{k}} \rangle\rangle + \beta \langle\langle C^{+}_{2-\vec{k}} | C^{+}_{1\vec{k}} \rangle\rangle$$

$$\tilde{E}\langle\langle C_{2\vec{k}} | C^{+}_{1\vec{k}} \rangle\rangle = -\alpha(\vec{k}) \langle\langle C^{+}_{1-\vec{k}} | C^{+}_{1\vec{k}} \rangle\rangle - 2\beta \langle\langle C^{+}_{2-\vec{k}} | C^{+}_{1\vec{k}} \rangle\rangle -$$

$$- \beta \langle\langle C_{1\vec{k}} | C^{+}_{1\vec{k}} \rangle\rangle - \beta \langle\langle C_{2\vec{k}} | C^{+}_{1\vec{k}} \rangle\rangle$$

$$\tilde{E}\langle\langle C_{2\vec{k}} | C^{+}_{1\vec{k}} \rangle\rangle = \alpha_2(\vec{k}) \langle\langle C_{2\vec{k}} | C^{+}_{1\vec{k}} \rangle\rangle + \beta \langle\langle C^{+}_{2-\vec{k}} | C^{+}_{1\vec{k}} \rangle\rangle +$$

$$+ 2\beta \langle\langle C_{1\vec{k}} | C^{+}_{1\vec{k}} \rangle\rangle + \beta \langle\langle C^{+}_{1-\vec{k}} | C^{+}_{1\vec{k}} \rangle\rangle$$

$$\tilde{E}\langle\langle C_{2-\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle = -\alpha_2(\vec K)\langle\langle C^{+}_{2-\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle - \beta\langle\langle C_{2\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle -$$

$$-2\beta\langle\langle C^{+}_{1-\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle - \beta\langle\langle C_{1\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle \qquad (II\ 2.22)$$

Ovo je sistem od četiri jednačine sa četiri nepoznate veličine, koji, radi lakšeg rešavanja, možemo napisati u obliku:

$$(E-\alpha_1(\vec K)\langle\langle C_{1\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle - \beta\langle\langle C^{+}_{1-\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle -$$

$$-2\beta\langle\langle C_{2\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle - \beta\langle\langle C^{+}_{2-\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}$$

$$\beta\langle\langle C_{1\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle + (E+\alpha_1(\vec K)\langle\langle C^{+}_{1-\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle +$$

$$+\beta\langle\langle C_{2\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle + 2\beta\langle\langle C^{+}_{2-\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle = 0$$

$$-2\beta\langle\langle C_{1\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle - \beta\langle\langle C^{+}_{1-\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle +$$

$$+(E-\alpha_2(\vec K)\langle\langle C_{2\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle - \beta\langle\langle C^{+}_{2-\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle = 0$$

$$\beta\langle\langle C_{1\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle + 2\beta\langle\langle C^{+}_{1-\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle +$$

$$+\beta\langle\langle C_{2\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle + (E+\alpha_2(\vec K)\langle\langle C_{2-\vec K}|C^{+}_{1\vec K}\rangle\rangle = 0 \qquad (II\ 2.23)$$

Rešavanjem determinante ovog sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} E-\alpha_1 & -\beta & -2\beta & -\beta \\ \beta & E+\alpha_1 & \beta & 2\beta \\ -2\beta & -\beta & E-\alpha_2 & -\beta \\ \beta & 2\beta & \beta & E+\alpha_2 \end{vmatrix}$$

dobija se bikvadratna jednačina

$$E^4 - E^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 4\beta^2) + \alpha_1^2\alpha_2^2 + 8\beta^3\alpha_1 +$$

$$+ 8\beta^3\alpha_2 - 10\beta^2\alpha_1\alpha_2 - \beta^2\alpha_1^2 - \beta^2\alpha_2^2 = 0 \qquad (\text{II } 2.24)$$

koja se može napisati u obliku

$$E^4 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2Z^2 - 4\beta^2)E^2 + [(Z^2 - \alpha_1\alpha_2)^2 -$$

$$-(\alpha_1 + \alpha_2 - 2Z)^2\beta^2] = 0$$

gde je:

$$\alpha_1 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + \frac{A'}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + \widetilde{\Delta} + A'$$

$$\beta = \frac{A'}{2} \qquad Z = 2\beta = A'$$

Da bi analizirali energije elementarnih eksitacija uzmimo da je:

$$\frac{\hbar^2 K_m^2}{2m^*}\mathcal{H}^2 = \mathcal{E}\mathcal{H}^2$$

GDE JE: $\frac{\hbar^2 K_m^2}{2m^*} = \mathcal{E}$ i $0 < \mathcal{H} < 1$

Sada će rešenje jednačine (II 2.25) biti:

$$\mathcal{E}_{1/2} = \Big\{ \varepsilon^2 \mathcal{H}^4 + (\Delta + 3\beta)\varepsilon \mathcal{H}^2 + \frac{\Delta}{2}(\Delta + 4\beta) \pm \Big[\Big[\varepsilon^2 \mathcal{H}^4 + (\Delta + 3\beta)\varepsilon \mathcal{H}^2 + \frac{\Delta}{2}(\Delta + 4\beta)\Big]^2 + \beta^2 (4\varepsilon^2\beta^4 + 4\Delta\mathcal{H}^2 + \Delta^2) - (\varepsilon^2\mathcal{H}^4 + (\Delta + 3\beta)\varepsilon\mathcal{H}^2 + \beta\Delta)^2 \Big]^{1/2} \Big\}^{1/2} \qquad (\text{II } 2.26)$$

Posle sredjivanja dobijamo:

$$\mathcal{E}_{1/2} = \Big\{ \varepsilon^2 \mathcal{H}^4 + (\Delta + 3\beta)\varepsilon \mathcal{H}^2 + \frac{\Delta}{2}(\Delta + 4\beta) \pm \Big[\Delta(\Delta + 2\beta)\varepsilon^2 \mathcal{H}^4 + \Delta^2(\Delta + 5\beta)\varepsilon \mathcal{H}^2 + \frac{\Delta}{4}(\Delta + 4\beta)^2 \Big]^{1/2} \Big\}^{1/2}$$

Za $m > 0$ razvijanjem u red i sredjivanjem dobija se:

za $K \approx 0$

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{\Delta(\Delta + 4\beta) + (2\Delta + 4\beta)\varepsilon\mathcal{H}^2 + A\mathcal{H}^4} \simeq$$

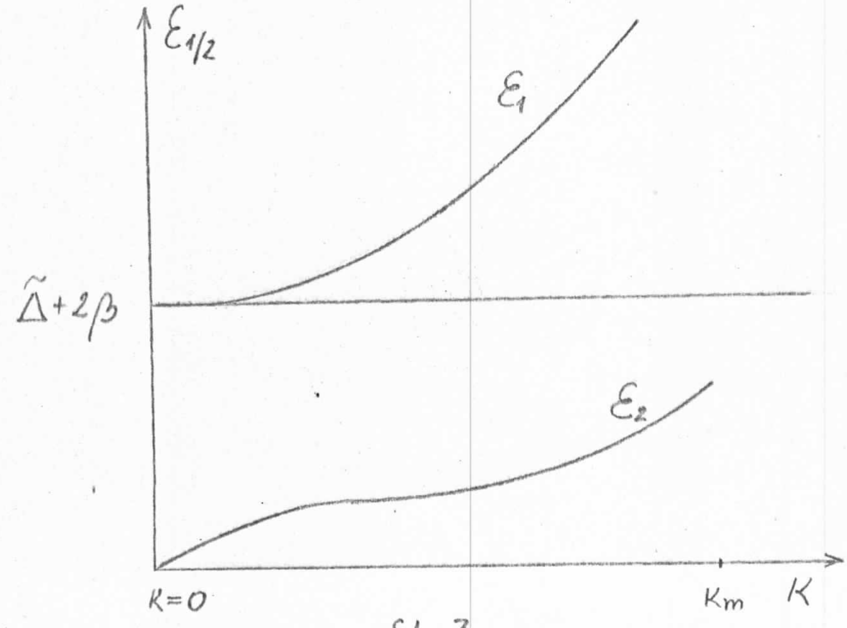
$$\simeq \Delta + 2\beta + \varepsilon \mathcal{H}^2$$

$$\mathcal{E}_2 = \sqrt{\beta \frac{\hbar^2}{2m}}\, K = V \cdot K$$

za $K \to K_m$

$$\mathcal{E}_2 = \sqrt{2\beta \frac{\hbar^2}{2m} K^2 + A^2 K^4} \simeq A K^2 + B$$

što se grafički može predstaviti (sl. 3)



SL. 3

U ovom slučaju donja grana zadovoljava uslov superfluidnosti, naime,

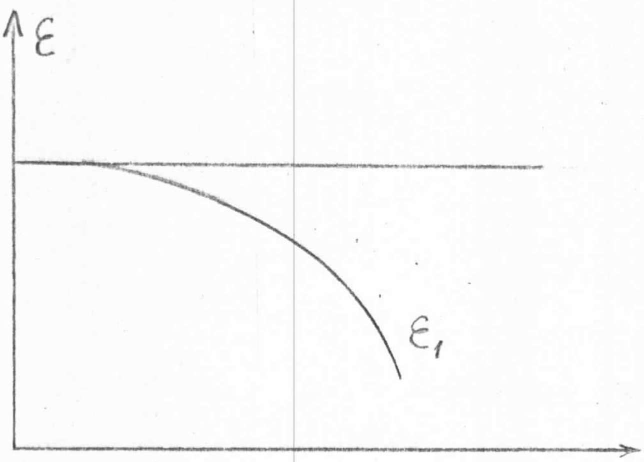
$$\min \frac{\mathcal{E}_2(P)}{P} = \min \sqrt{\frac{2\beta}{2m} + \frac{A^2K^2}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2\beta}{2m}} > 0$$

i pošto je populacija te grane veća možemo konstatovati da se u sistemu polaritona pojavljuje superfluidnost.

Za $m<0$ uslov superfluidnosti nije ispunjen. Jedno rešenje za energiju je imaginarno, što znači da se ta grana prigušuje, dok za drugu granu dobijamo:

$$\mathcal{E}_1 \simeq \tilde{\Delta} + 2\beta - C\mathcal{E}\mathcal{H}^2$$

što se grafički može predstaviti(Sl. 4)



SL. 4

Ovaj slučaj ($m<0$) interesantniji je kada je eksiton foton interakcija velika (reda veličine širine eksitonske zone) jer je tada moguća pojava superfluidnosti u sistemu polaritona kao što je spomenuto u monografiji (Agranovič [1]). Taj slučaj, medjutim, ovde neće biti razmatran.

Z A K L J U Č A K

Rezultate ovog rada možemo rezimirati na sledeći način:

U uslovima slabe eksiton foton interakcije Boze kondenzacija u sistemu polaritona je moguća, slično kao i kod Frenkelovih eksitona. Spektar elementarnih eksitacija u uslovima Boze kondenzacija je superfluidan u slučaju kada je efektivna masa eksitona pozitivna, odnosno kada minimum eksitonske zone odgovara vrednosti inpulsa k = o .

U suprotnom slučaju ($m^* < 0$) jedna eksitonska grana postaje nestabilna (prigušuje se) dok spektar druge grane ne zadovoljava uslov superfluidnosti. Ovaj slučaj bi trebalo ispitati u uslovima jake eksiton foton interakcije, ali to nije predmet ovog rada.

DODATAK

DVOVREMENSKA TEMPERATURSKA GRINOVA FUNKCIJA

Za dva operatora $\hat{A}(\vec{r},t)$ i $\hat{B}(\vec{r}',t')\rangle\rangle$ retardovana funkcija Grina definiše se na sledeći način

$$\hat{G}^{R}_{AB}(\vec{r},\vec{r}',t,t') \equiv \langle\langle A(\vec{r},t) | B(\vec{r}',t')\rangle\rangle =$$

$$= \theta(t-t') \langle [A(\vec{r},t); B(\vec{r}',t')] \rangle \qquad (1)$$

gde simbol $[\cdot \cdots]$ označava komutator operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$ a znak srednje vrednosti $\langle \cdots \rangle$ označava usrednjenje po Gibsovom ansamblu, tj.

$$\langle A \rangle = \frac{Sp\, e^{-\beta H} A}{Sp\, e^{-\beta H}} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{K_B T} \qquad (2)$$

je Hevisajdova funkcija data sa:

$$\theta(t-t') = \begin{cases} 1 \; ; & t > t' \\ 0 \; ; & t < t' \end{cases} \qquad (3)$$

Izvedimo sada tzv. jednačinu kretanja. Izraz (1) proširimo sa imaginarnom jedinicom, a zatim diferencirajmo po t

$$i \frac{d}{dt} \langle\langle A(\vec{r},t) | B(\vec{r}',t')\rangle\rangle = i\delta(t-t') \langle [A(\vec{r},t); B(\vec{r}',t')] \rangle +$$

$$+ i\theta(t-t') \langle [\mathring{A}(\vec{r},t); B(\vec{r}',t')] \rangle \qquad (4)$$

Prema Hajzenbergovoj jednačini kretanja

$$i \frac{d}{dt} \hat{A}(\vec{r},t) = [A, H]_t \qquad (5)$$

dobija se:

$$i\frac{d}{dt}\langle\langle A(\vec{r},t)|B(\vec{r}',t')\rangle\rangle = i\delta(t-t')\langle[A(\vec{r},t);B(\vec{r}',t')]\rangle +$$

$$+\langle\langle[A(\vec{r},t);H]|B(\vec{r},t')\rangle\rangle \qquad (6)$$

Izvršimo Furije transformacije

$$\langle\langle A(\vec{r},t)|B(\vec{r}',t')\rangle\rangle = \int d^3k\, dE\, \langle\langle A|B\rangle\rangle_{\vec{k}E}\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')-iE(t-t')}$$

$$\langle[A(\vec{r},t);B(\vec{r}',t')]\rangle = \int d^3k\, K(\vec{k})\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} \qquad (7)$$

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int dE\, e^{-iE(t-t')}$$

i zamenimo ih u (6). Dobićemo sistem jednačina za funkcije Grina u obliku:

$$E\langle\langle A|B\rangle\rangle_{\vec{k},E} = \frac{i}{2\pi}K(\vec{k}) + \langle\langle[A;H]|B\rangle\rangle_{\vec{k},E} \qquad (8)$$

Raalan deo pola Grinove funkcije predstavlja energiju elementarnih eksipacija, a imaginarni deo pola u kompleksnoj ravni predstavlja recipročno vreme života elementarnih eksitacija.

Ukoliko se izraz (1) diferencira po vremenu t', jednačina za retardovanu Grinovu funkciju dobija se u obliku

$$E\langle\langle A|B\rangle\rangle_{\vec{k},E} = \frac{i}{2\pi}K(\vec{k}) \quad \langle\langle[A|[B,H]\rangle\rangle_{E,\vec{k}} \qquad (9)$$

Za odredjivanje srednjih vrednosti proizvoda operatora koristi se spektralna intenzivnost, koju možemo definisati na sledeći način.

Ako korelacionu funkciju, koja predstavlja statističku srednju vrednost proizvoda operatora A i B .

$$F_{AB}(t-t')=\langle A(t)\,B(t')\rangle \tag{10}$$

izrazimo pomoću Furije integrala relacijama:

$$\langle B(t')\,A(t)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} I_{AB}(\omega)\,e^{-i\omega(t-t')}\,d\omega$$

$$\langle A(t)\,B(t')\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} I_{AB}(\omega)\,e^{\beta\omega}\,e^{-i\omega(t-t')}\,d\omega \tag{11}$$

tada Furije komponenta $I_{AB}(\omega)$ predstavlja spektralnu intenzivnost. Za $t=t'=0$ poslednje dve relacije daju običnu srednju vrednost proizvoda operatora, preko spektralne intenzivnosti

$$\begin{aligned}\langle B(0)\,A(0)\rangle&=\int_{-\infty}^{\infty} I_{AB}(\omega)\,d\omega\\ \langle A(0)\,B(0)\rangle&=\int_{-\infty}^{\infty} I_{AB}(\omega)\,e^{\omega\beta}\,d\omega\end{aligned} \tag{12}$$

Ako se retardovana funkcija Grina $\tilde{G}^{R}(t)$ izrazi preko spektralne intenzivnosti, onda se iz te relacije, poznavajući Grinovu funkciju, može odrediti spektralna intenzivnost. Polazeći od retardovane Grinove funkcije, na osnovu relacija (11) dobija se:

$$\tilde{G}^{R}_{AB}(t)=\Theta(t)\int_{-\infty}^{\infty}(1-e^{-\beta\omega'})\,I_{AB}(\omega')\,e^{-i\omega' t}\,\frac{d\omega'}{2\pi} \tag{13}$$

a prelaskom na Furije lik, biće

$$\tilde{G}^{R}_{AB}(\omega)=i\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-\beta\omega'}-1)\,\frac{I_{AB}}{\omega-\omega'+i\delta}\,\frac{d\omega'}{2\pi} \tag{14}$$

Realan i imaginaran deo Grinove funkcije može se odrediti pomoću relacija 26.16 (С.В. ТЯБЛИКОВ „МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МАГНЕТИЗМА" 1956) [2]

Iz realnog dela Grinove funkcije

$$\mathrm{Re}\,\tilde{G}^{R}_{AB}=-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-\beta\omega'}-1)I_{AB}\,i\pi\delta(\omega-\omega')=$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-\beta\omega}-1)I_{AB}(\omega) \qquad (15)$$

odredjuje se spektralna intenzivnost

$$I_{AB}=\frac{2\,\mathrm{Re}\,\tilde{G}^{R}_{AB}}{e^{-\beta\omega}-1} \qquad \text{ZA} \quad \omega\neq 0 \qquad (16)$$

Spektralna intenzivnost dobija jednostavniji oblik kada se sistem nalazi na apsolutnoj nuli ($T=0$, $\beta\to\infty$, $e^{-\beta\omega}\to 0$)

$$I_{AB}=-2\,\mathrm{Re}\,\tilde{G}^{R}_{AB} \qquad (17)$$

Ako retardovanu funkciju Grina definišemo na sledeći način:

$$G^{R}(t)=-i\tilde{G}^{R}(t)=-i\,\Theta(t-t')\langle[A(\vec{r},t),B(\vec{r}',t')]\rangle \qquad (18)$$

spektralnu intenzivnost nalazimo istim postupkom kao i za predhodnu funkciju, samo što se sada razmatra imaginarni deo Grinove funkcije.

Za spektralnu intenzivnost u ovom slučaju se dobija

$$I_{AB}(\omega)=-\frac{2}{1-e^{-\beta\omega}}\,\mathrm{Im}\,G^{R}_{AB}(\omega) \qquad \text{ZA} \quad \omega\neq 0 \qquad (19)$$

Ako se posmatrani sistem nalazi na apsolutnoj nuli predhodni izraz dobija prostiji oblik.

$$I_{AB}=-2\,\mathrm{Im}\,G^{R}_{AB}(\omega) \qquad (20)$$

LITERATURA

[1] В.М. АГРАНОВИЧ „ТЕОРИЯ ЭКСИТОНОВ" МОСКВА (1968)

[2] С.В. ТЯБЛИКОВ „МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МАГНЕТИЗМА" (1965)

[3] А.С. ДАВЫДОВ „ТЕОРИЯ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ЕКСИТОНОВ" (1968)