Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
nastavna grupa: fizika

predmet: kvantna mehanika

predmetni nastavnik: Dr Bratislav Tošić

DIPLOMSKI RAD

tema:

O dekuplovanju temperaturskih Grinovih funkcija

Vesin Vinka

Novi Sad

1976.

Iskreno se zahvaljujem svom mentoru Dr Bratislavu Tošiću na pomoći ukazanoj pri izradi ovog diplomskog rada.

U V O D

Cilj ovog diplomskog rada je da se napravi pregled različitih tehnika u metodu Grinovih funkcija. Poznato je da Grinove funkcije predstavljaju za sada najefikasnije matematičke objekte, pomoću kojih se vrši analiza mnogočestičnih sistema.

U radu će biti izloženi osnovni pojmovi o Grinovoj funkciji slobodne čestice, zatim Fejnmanove ideje za Grinovu funkciju interagujućih čestica i na kraju različiti metodi dekuplovanja dvovremenskih temperaturskih funkcija Grina. Cilj rada je da se pronađe novi tačniji metod za dekuplovanje temperaturskih Grinovih funkcija.

I Glava

O GRINOVIM FUNKCIJAMA UOPŠTE

II. Grinova funkcija za slobodnu česticu

Svojstveni problem operatora energije sistema svodi se u koordinatnoj reprezentaciji na parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda, koju je ponekad nemoguće egzaktno rešiti. Zbog toga se pribegava približnim metodima, a jedan od ovih je prevođenje parcijalne diferencijalne jednačine u integralnu jednačinu koja se posle rešava metodom sukcesivnih aproksimacija sa željenom tačnošću. Ovakav postupak prvi put je primenjen u teoriji rasejanja i rešenje ekvivalentne integralne jednačine su poznate Bornove aproksimacije.

Prevođenje parcijalne diferencijalne jednačine u integralnu, vrši se pomoću Grinove funkcije za slobodnu česticu.

Za česticu koja se kreće u potencijalu $V(\vec{r})$, svojstveni problem operatora energije, svodi se na jednačinu:

$$(\Delta_{\vec{r}} + K^2)\Psi(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}V(\vec{r})\Psi(\vec{r}) \qquad (II.1.)$$

gde je

$$K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad (II.2.)$$

Jednačina (II.1.) može se prevesti u integralnu jednačinu uvođenjem Grinove funkcije $G(\vec{r}-\vec{r}\,') = G(\vec{r}\,'-\vec{r})$ i to na sledeći način:

$$(\Delta_{\vec r}+K^2)\,G(\vec r-\vec r\,')=\delta(\vec r-\vec r\,') \qquad (11.3.)$$

gde je $\delta(\vec r-\vec r\,')$ Dirakova δ-funkcija i ona određuje napred navedenu osobinu simetrije Grinove funkcije.

Prvo ćemo pokazati kako se jednačina (11.1.) pomoću funkcije G prevodi u integralnu jednačinu. Jednačinu (11.1.) pomnožićemo funkcijom G, posle čega dobijamo:

$$(\Delta_{\vec r}+K^2)G(\vec r-\vec r\,')\Psi(\vec r)\equiv\delta(\vec r-\vec r\,')\Psi(\vec r)=\frac{2m}{\hbar^2}V(\vec r)G(\vec r-\vec r\,')\Psi(\vec r)$$

Ako integralimo po celoj zapremini, dobićemo:

$$\int\delta(\vec r-\vec r\,')\Psi(\vec r)d^3\vec r=\varphi(\vec r\,')+\frac{2m}{\hbar^2}\int d^3\vec r\,G(\vec r-\vec r\,')V(\vec r)\Psi(\vec r)$$

tj.:

$$\Psi(\vec r\,')=\varphi(\vec r\,')+\frac{2m}{\hbar^2}\int d^3\vec r\,G(\vec r-\vec r\,')V(\vec r)\Psi(\vec r) \qquad (11.4.)$$

Funkcija $\varphi(\vec r\,')$ predstavlja integracionu konstantu, ali kao što to biva kod pretvaranja diferencijalne jednačine u integralnu, ona ne može biti proizvoljna, već mora ispunjavati izvesne uslove. Lako je pokazati da ako je $\varphi(\vec r\,')$ rešenje jednačine

$$(\Delta_{\vec r\,'}+K^2)\varphi(\vec r\,')=0$$

tj. ako je

$$\varphi(\vec r\,')=Ce^{i\vec K\vec r\,'}$$

onda su jednačine

$$\Psi(\vec r)=Ce^{i\vec K\vec r}+\frac{2m}{\hbar^2}\int d^3\vec r\,'\,G(\vec r-\vec r\,')V(\vec r\,')\Psi(\vec r\,') \qquad (11.5.)$$

i (11.1.) ekvivalentne. Jednačinu (11.5.) dalje možemo rešavati metodom sukcesivnih aproksimacija, ali je zato potrebno poznavanje Grinove funkcije, koju treba naći iz jednačine (II.3.).

U jednačini (II.3.) predstavićemo δ-funkciju na sledeći način:

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{q}\, e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}\,')} \qquad (II.6.)$$

pa je

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,')=(\Delta_{\vec{r}}+K^2)^{-1}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{q}\, e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}\,')}$$

Pošto je

$$(\Delta_{\vec{r}}+K^2)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\Delta_{\vec{r}}}{K^2}\right)^n\frac{1}{K^2}$$

dobijamo:

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{q}\,\frac{1}{K^2-q^2}\, e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}\,')} \qquad (II.7.)$$

Poredeći ovo sa definicijom Furije lika Grinove funkcije

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{q}\; G(\vec{q})\, e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}\,')} \qquad (II.8.)$$

vidimo da je Furije lik Grinove funkcije

$$G(\vec{q})=\frac{1}{K^2-q^2} \qquad (II.9.)$$

Pol ove funkcije (posle zamene k) dat je sa

$$E=\frac{\hbar^2q^2}{2m}$$

što znači da je ovo Grinova funkcija za česticu koja ima samo kinetičku energiju, tj. za slobodnu česticu.

Da bismo našli funkciju $G(\vec{r}-\vec{r}\,')$ rešavaćemo integral u jednačini (II.7) u sfernim koordinatama:

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\,\sin\theta\int_0^{\infty}dq\,q^2\,\frac{e^{iqx\cos\theta}}{K^2-q^2} \qquad (II.10)$$

$x=|\vec{r}-\vec{r}'|$

Rešavajući integrale, dobićemo

$$G(\vec{r}-\vec{r}')=\frac{1}{2\pi^2|\vec{r}-\vec{r}'|}\int_0^{\infty}\frac{q\sin qx}{K^2-q^2}\,dq \qquad (11.11.)$$

Ako bi q bila realna promenljiva, onda bi integral na desnoj strani jednačine (11.11.) imao tačno određenu vrednost, nezavisno od izbora putanje integracije. Matematički, do sada, to i treba očekivati. Međutim, iz fizičkih razloga po kojima i slobodna čestica ne može beskonačno da se prostire kao talas, nego ima slabo prigušenje u beskonačnosti, umesto realne promenljive q, uzećemo kompleksnu promenljivu Z. Tada integral zavisi od izbora konture.

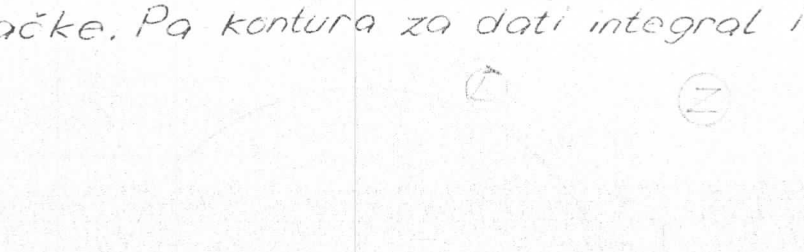
Prema tome:

$$\int_0^{\infty}\frac{q\sin qx}{K^2-q^2}\,dq \longrightarrow \int_0^{\infty}\frac{z\sin zx}{K^2-z^2}\,dz=\int_0^{\infty}\frac{z(e^{ixz}-e^{-ixz})\frac{1}{2i}}{K^2-z^2}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2i}\int_0^{\infty}\frac{ze^{ixz}dz}{K^2-z^2}-\frac{1}{2i}\underset{z\to -z}{\int_0^{\infty}\frac{ze^{-ixz}dz}{K^2-z^2}}=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{ixz}dz}{K^2-z^2}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\frac{1}{2i}\int_L\frac{ze^{ixz}dz}{K^2-z^2}$$

U teoriji rasejanja, obično se odabira kontura, koja daje sferni talas, koji divergira od date tačke. Pa kontura za dati integral ima oblik:



To znači da je:

$$J(k)=\frac{1}{2i}\int_L \frac{ze^{izx}dz}{k^2-z^2}=\frac{1}{2i}\,2\pi i \operatorname*{Res}_{z=k}\frac{ze^{ixz}}{k^2-z^2}=$$

$$=\pi\lim_{z\to k}\frac{ze^{ixz}}{(k-z)(k+z)}(z-k)=-\frac{\pi}{2}e^{ixk}=-\frac{\pi}{2}e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Zamenom ovog rezultata u (11.11.) dobićemo

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,')=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (11.12)$$

Zamenom (11.12.) u jednačini (11.5.) dobićemo integralnu jednačinu za talasnu funkciju, koja opisuje divergentan talas:

$$\Psi(\vec{r})=ce^{i\vec{k}\vec{r}}-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3\vec{r}\,\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}V(\vec{r}\,')\Psi(\vec{r}\,')$$

12. Grinova funkcija za slobodan elektron

U impulsnom prostoru, elektroni ispunjavaju prostornu strukturu, koja se naziva Fermi sfera. Sistem elektrona se nalazi u osnovnom stanju, ako su intenziteti impulsa svih elektrona u granicama $p\in(0,p_F)$ gde je p_F poluprečnik Fermi sfere. Ukoliko je $p>p_F$, sistem je u pobuđenom stanju.

Ako su elektroni u osnovnom stanju, tj. ako se nalaze unutar Fermi sfere,

za $0\le p\le p_F$ $\qquad n_{\vec{p}}=1$

za $p>p_F$ $\qquad n_{\vec{p}}=0$

Za ovakav sistem slobodnih elektrona, Grinova funkcija je

$$G^{(0)}(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t') = -i\langle \hat{T}[\hat{\Psi}_J(\vec{r}, t)\hat{\Psi}_J^+(\vec{r}\,', t')]\rangle \qquad (12.1.)$$

Pošto je

$$\hat{\Psi}_J(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\vec{k}\, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\varepsilon_{\vec{k}}t}\,\hat{a}_{\vec{k}}$$

$$\hat{\Psi}_J^+(\vec{r}\,', t') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\vec{k}'\, e^{-i\vec{k}'\vec{r}\,' + i\varepsilon_{\vec{k}'}t'}\,\hat{a}^+_{\vec{k}'} \qquad (12.2.)$$

dobija se zamenom (12.2.) u (12.1.)

$$G^{(0)}(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t') = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\, d^3\vec{k}'\, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\vec{k}'\vec{r}\,' - i\varepsilon_{\vec{k}}t + i\varepsilon_{\vec{k}'}t'}\,\hat{a}^{+*}_{\vec{k}'}$$

$$\times\langle \hat{T}[\hat{a}_{\vec{k}}(t)\,\hat{a}^+_{\vec{k}'}(t')]\rangle \qquad (12.3.)$$

Uzimamo $\vec{r}\,' = 0$

$t' = 0$

pri čemu (12.3.) postaje

$$G^{(0)}(\vec{r}, t) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\, d^3\vec{k}'\, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\varepsilon_{\vec{k}}t}\langle \hat{T}[\hat{a}_{\vec{k}}(t)\hat{a}^+_{\vec{k}'}(0)]\rangle \qquad (12.4)$$

$$\langle \hat{T}[\hat{a}_{\vec{k}}(t)\,\hat{a}^+_{\vec{k}'}(0)]\rangle = \langle \hat{T}[\hat{a}_{\vec{k}}(t)\hat{a}^+_{\vec{k}}(0)]\rangle\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

obzirom na to u jednačini (12.4.) ukida se integral po $\vec{k}'$

$$G^{(0)}(\vec{r}, t) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\varepsilon_{\vec{k}}t}\,\langle \hat{T}[\hat{a}_{\vec{k}}(t)\hat{a}^+_{\vec{k}}(0)]\rangle$$

Nad gornjim izrazom se izvrši Furije transformacija:

$$\int d^3\vec{r}\, e^{-i\vec{p}\vec{r}}\, G^{(0)}(\vec{r}, t) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\, e^{-i\varepsilon_{\vec{k}}t}\langle \hat{T}[\hat{a}_{\vec{k}}(t)\hat{a}^+_{\vec{k}}(0)]\rangle \times$$

$$\times\int d^3\vec{r}\, e^{-i\vec{r}(\vec{k}-\vec{p})}$$

$$\int d^3\vec{r}\, e^{-i\vec{r}(\vec{k}-\vec{p})} = (2\pi)^3\,\delta(\vec{k}-\vec{p})$$

$$\int d^3\vec{r}\, e^{-i\vec{p}\vec{r}}\, G^{(0)}(\vec{r}, t) = -i e^{-i\varepsilon_{\vec{p}}t}\langle \hat{T}[\hat{a}_{\vec{p}}(t)\,\hat{a}^+_{\vec{p}}(0)]\rangle \qquad (12.5)$$

Diskutovaćemo sada ovaj $\hat{T}$ produkt:

$$\langle \hat{T}[\hat{a}_{\vec{p}}(t)\hat{a}^+_{\vec{p}}(0)]\rangle = \begin{cases} t>0 \quad \langle \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^+_{\vec{p}}\rangle = \begin{cases} 0 & \text{ako je } p<p_F \\ 1 & \text{ako je } p>p_F \end{cases} \\[2ex] t<0 \quad -\langle \hat{a}^+_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}\rangle = \begin{cases} -1 & \text{ako je } p<p_F \\ 0 & \text{ako je } p>p_F \end{cases} \end{cases}$$

Sada jednačina (12.5.) postaje

$$\int d^3\vec{r}\, e^{-i\vec{p}\vec{r}} G^{(0)}(\vec{r},t) = \begin{cases} -ie^{-i\varepsilon_{\vec{p}}t} & \text{za } t>0,\ p>p_F \\ ie^{-i\varepsilon_{\vec{p}}t} & \text{za } t<0,\ p<p_F \end{cases} \qquad (12.6.)$$

Množenjem (12.6.) sa $e^{i\omega t}$ i integraljenjem po vremenu u granicama $(-\infty,+\infty)$ dobija se

$$\int d^3\vec{r}\, dt\, e^{-i\vec{p}\vec{r}+i\omega t} G^{(0)}(\vec{r},t) = -i\Big[\int_0^\infty dt\, e^{i(\omega-\varepsilon_{\vec{p}})t} + \int_{-\infty}^0 e^{i(\omega-\varepsilon_{\vec{p}})t} dt\Big]$$

$$\int d^3\vec{r}\, dt\, e^{-i\vec{p}\vec{r}+i\omega t} G^{(0)}(\vec{r},t) = G^{(0)}(\vec{p},\omega)$$

$$G^{(0)}(\vec{p},\omega) = -i\Big[\int_0^\infty dt\, e^{i(\omega-\varepsilon_{\vec{p}})t} + \int_{-\infty}^0 e^{i(\omega-\varepsilon_{\vec{p}})t} dt\Big] \qquad (12.7.)$$

Prvi integral na desnoj strani jednačine (12.7.) različit je od nule kada je $p>p_F$, a drugi je različit od nule za $p<p_F$.

Ova dva integrala divergiraju za realno ω. Ma koliko elektron bio slobodan, uvek postoji neka slaba interakcija zbog koje vreme života tog elektrona praktično ipak nije beskonačno dugo. Ova činjenica se koristi za prelaz $\omega \to \omega + i\delta$ gde $\delta \to +0$

$T \sim \frac{1}{\delta}$ - veoma dugo vreme života

U drugom integralu se vrši prelaz $\omega \to \omega - i\delta$ $\delta \to +0$ čime se izražava činjenica da sistem nije mogao uvek da bude slobodan. Sada je (12.7.):

$$G^{(0)}(\vec{p},\omega) = -i\int_0^\infty dt\, e^{i(\omega-\varepsilon_{\vec{p}}+i\delta)t} + i\int_{-\infty}^0 dt\, e^{i(\omega-\varepsilon_{\vec{p}}-i\delta)t}$$

$$-i\int_0^\infty dt\, e^{i(\omega-\varepsilon_{\vec{p}}+i\delta)t} = -i\,\frac{1}{i(\omega-\varepsilon_{\vec{p}}+i\delta)}\, e^{i(\omega-\varepsilon_{\vec{p}})t} e^{-\delta t}\Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{\omega-\varepsilon_{\vec{p}}+i\delta} \qquad p>p_F$$

$$\int_{-\infty}^{0} dt\, e^{i(\omega-\varepsilon_{\vec p}-i\delta)t} = i\,\frac{1}{i(\omega-\varepsilon_{\vec p}-i\delta)}\, e^{i(\omega-\varepsilon_{\vec p})t} e^{\delta t}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{\omega-\varepsilon_{\vec p}-i\delta}$$

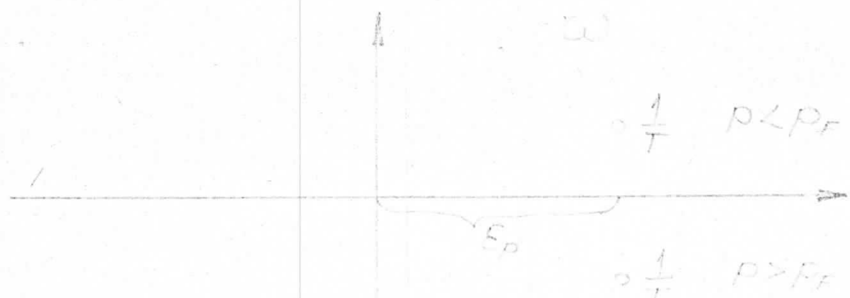
$p<p_F$

Sada je konačno Grinova funkcija za slobodne elektrone:

$$G^{(0)}(\vec p,\omega) = \frac{1}{\omega-\varepsilon_{\vec p}+i\delta\,\mathrm{sign}(p-p_F)} \qquad (12.8.)$$

$$\mathrm{sign}(p-p_F) = \begin{cases} +1 & p>p_F \\ -1 & p<p_F \end{cases}$$

Vidimo da Grinova funkcija ima drugačiji oblik za elektrone unutar Fermi sfere i za elektrone van Fermi sfere.



13. Grinova funkcija za sistem fermiona u prvoj aproksimaciji. Fejnmanovi dijagrami

Do sada smo analizirali Grinovu funkciju za slobodne (neinteragujuće) čestice. Metod Grinovih funkcija služi upravo za analizu sistema interagujućih čestica. Tada treba tražiti kompletnu Grinovu funkciju sistema, koja je definisana sa

$$G(x-x') = -i\langle \hat T[\hat\Psi_H(x)\hat\Psi_H^+(x')]\rangle = \frac{-i\langle \hat T[\hat\Psi_J(x)\hat\Psi_J^+(x')\hat S(\infty)]\rangle}{\langle \hat S(\infty)\rangle} \quad (13.1)$$

gde indeks H označava operator u Hajzenbergovoj interpretaciji a indeks J operator u reprezentaciji interakcije. Veličina $\hat{S}(\infty)$ predstavlja tzv. S-matricu sistema, koja je definisana izrazom

$$\hat{S}(\infty)=\hat{T}e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\,W(t_1)} \qquad (13.2.)$$

Veličina $W(t_1)$ predstavlja izraz za interakciju čestica u reprezentaciji interakcije, tj.

$$\hat{W}(t_1)=e^{i\hat{H}_0t_1}\hat{H}_{int}e^{-i\hat{H}_0t_1} \qquad (13.3.)$$

pri čemu je kompletan Hamiltonijan sistema dat sa

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_{int} \qquad (13.4.)$$

Ako imamo sistem elektrona sa dvočestičnim interakcijama, onda možemo pisati

$$\hat{H}_0=-\frac{\hbar^2}{2m}\int d^3\vec{r}\,\hat{\Psi}_s^+(\vec{r})\Delta_{\vec{r}}\hat{\Psi}_s(\vec{r}) \qquad (13.5.)$$

$$\hat{H}_{int}=\frac{1}{2}\int d^3\vec{r}_1d^3\vec{r}_2\,\hat{\Psi}_s^+(\vec{r}_1)\hat{\Psi}_s^+(\vec{r}_2)V(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\hat{\Psi}_s(\vec{r}_2)\hat{\Psi}_s(\vec{r}_1) \qquad (13.6.)$$

Da bismo mogli da formiramo kompletnu funkciju Grina za sistem interagujućih elektrona, potrebno je napisati $\hat{H}_{int}$ u reprezentaciji interakcije.

$$\hat{W}(t_1)=e^{i\hat{H}_0t_1}\hat{H}_{int}e^{-i\hat{H}_0t_1}=\frac{1}{2}\int d^3\vec{r}_1d^3\vec{r}_2\,V(\vec{r}_1-\vec{r}_2)e^{i\hat{H}_0t_1}\hat{\Psi}_s^+(\vec{r}_1)\times$$
$$\times\hat{\Psi}_s^+(\vec{r}_2)\hat{\Psi}_s(\vec{r}_2)\hat{\Psi}_s(\vec{r}_1)e^{-i\hat{H}_0t_1}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\int d^3\vec{r}_1d^3\vec{r}_2\,V(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times$$
$$\times\delta(t_1-t_2)e^{i\hat{H}_0t_1}\hat{\Psi}_s^+(\vec{r}_1)e^{-i\hat{H}_0t_1}e^{i\hat{H}_0t_2}\hat{\Psi}_s^+(\vec{r}_2)e^{-i\hat{H}_0t_2}e^{i\hat{H}_0t_2}\times$$
$$\times\hat{\Psi}_s(\vec{r}_2)e^{-i\hat{H}_0t_2}e^{i\hat{H}_0t_2}\hat{\Psi}_s(\vec{r}_1)e^{-i\hat{H}_0t_1}$$

Pošto je $e^{i\hat{H}_0t_1}\hat{\Psi}_s(\vec{r}_1)e^{-i\hat{H}_0t_1}=\hat{\Psi}_J(x_1)$; $x_1=\vec{r}_1,t_1$

možemo pisati:

$$\hat{W}(t_1)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\int d^3\vec{r}_1d^3\vec{r}_2\;U(x_1-x_2)\,\hat{\Psi}_J^+(x_1)\hat{\Psi}_J^+(x_2)\hat{\Psi}_J(x_2)\hat{\Psi}_J(x_1)$$

$$U(x_1-x_2)=V(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\delta(t_1-t_2) \qquad (13.6.)$$

Na osnovu formule (13.6.) eksponent $\hat{S}$-matrice ima oblik

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \hat{W}(t_1) = \int d^4x_1 d^4x_2\, U(x_1-x_2)\, \hat{\Psi}_J^+(x_1)\, \hat{\Psi}_J^+(x_2) \hat{\Psi}_J(x_2) \hat{\Psi}_J(x_1) \qquad (13.7.)$$

Dalje ćemo tražiti Grinovu funkciju za sistem elektrona u prvoj aproksimaciji po interakciji, a to znači, da ćemo $\hat{S}$-matricu razviti u red, sa tačnošću do prvog stepena interakcije $U(x_1-x_2)$. Treba paziti da i svuda u daljem računu zadržimo samo članove proporcionalne prvom stepenu $U(x_1-x_2)$.

Znači

$$\hat{S}(\infty) \cong 1 - i\hat{T}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \hat{W}(t_1); \quad \hat{S}^{-1}(\infty) \cong 1 + i\hat{T}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \hat{W}(t_1)$$

i dalje

$$G^{(1)}(x-x') = -i\left\{\langle \hat{T}[\hat{\Psi}_J(x)\hat{\Psi}_J^+(x')]\rangle - i\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle \hat{T}[\hat{\Psi}_J(x)\hat{\Psi}_J^+(x')\hat{W}(t_1)]\rangle\right\} \times$$
$$\times \left\{1 + i\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle \hat{T}\,\hat{W}(t_1)\rangle\right\}$$

Odbacujući članove kvadratne po interakciji $\hat{W}$ i ispisujući eksplicitno izraz za $\int dt_1 \hat{W}(t_1)$, dobijamo:

$$G^{(1)}(x-x') = -i\langle \hat{T}[\hat{\Psi}_J(x)\hat{\Psi}_J^+(x')]\rangle - \frac{1}{2}\int d^4x_1 d^4x_2\, U(x_1-x_2) \times$$
$$\times \langle \hat{T}[\hat{\Psi}_J(x)\hat{\Psi}_J^+(x_1)\hat{\Psi}_J^+(x_2)\hat{\Psi}_J(x_2)\hat{\Psi}_J(x_1)\hat{\Psi}_J^+(x')]\rangle +$$
$$+ \langle \hat{T}[\hat{\Psi}_J(x)\hat{\Psi}_J^+(x')]\rangle \frac{1}{2}\int d^4x_1 d^4x_2\, U(x_1-x_2) \times$$
$$\times \langle \hat{T}[\hat{\Psi}_J^+(x_1)\hat{\Psi}_J^+(x_2)\hat{\Psi}_J(x_2)\hat{\Psi}_J(x_1)]\rangle \qquad (13.8.)$$

Ako na $\hat{T}$ produkt u drugom članu primenimo Vikovu teoremu, dobićemo:

$$\langle \hat{T}[\hat{\Psi}_J(x)\hat{\Psi}_J^+(x_1)\hat{\Psi}_J^+(x_2)\hat{\Psi}_J(x_2)\hat{\Psi}_J(x_1)\hat{\Psi}_J^+(x')]\rangle =$$
$$= \langle \hat{T}[\hat{\Psi}_J(x)\hat{\Psi}_J^+(x')]\rangle \langle \hat{T}[\hat{\Psi}_J^+(x_1)\hat{\Psi}_J^+(x_2)\hat{\Psi}_J(x_2)\hat{\Psi}_J(x_1)]\rangle +$$
$$+ \langle \hat{T}[\hat{\Psi}_J(x)\hat{\Psi}_J^+(x_1)]\rangle \langle \hat{T}[\hat{\Psi}_J^+(x_2)\hat{\Psi}_J(x_2)\hat{\Psi}_J(x_1)\hat{\Psi}_J^+(x')]\rangle -$$

$$-\langle\hat{T}[\hat{\psi}_J(x)\hat{\psi}_J^+(x_2)]\rangle\langle\hat{T}[\hat{\psi}_J^+(x_1)\hat{\psi}_J(x_2)\hat{\psi}_J(x_1)\hat{\psi}_J^+(x')]\rangle$$

Lako se vidi, da se posle zamene dobijenog izraza u formuli (13.8.), poslednji član formule (13.8.) potire sa delom u kome imamo izdvojen $\hat{T}$ produkt operatora $\hat{\psi}_J(x)$ i $\hat{\psi}_J(x')$. Posle toga za funkciju Grina u prvoj aproksimaciji imamo izraz:

$$G^{(1)}(x-x')=G^{(0)}(x-x')-\frac{1}{2}\int d^4x_1d^4x_2\,U(x_1-x_2)\Big\{\langle\hat{T}[\hat{\psi}_J(x)\hat{\psi}_J^+(x_1)]\rangle\times$$
$$\times\langle\hat{T}[\hat{\psi}_J^+(x_2)\hat{\psi}_J(x_2)\hat{\psi}_J(x_1)\hat{\psi}_J^+(x')]\rangle-\langle\hat{T}[\hat{\psi}_J(x)\hat{\psi}_J^+(x_2)]\rangle\times$$
$$\times\langle\hat{T}[\hat{\psi}_J^+(x_1)\hat{\psi}_J(x_2)\hat{\psi}_J(x_1)\hat{\psi}_J^+(x')]\rangle\Big\}\qquad(13.9.)$$

Primenjujući Vikovu teoremu na produkte od četiri operatora i koristeći definiciju Grinove funkcije slobodne čestice, konačno dobijamo analitički izraz za Grinovu funkciju u prvoj aproksimaciji.

$$G^{(1)}(x-x')=G^{(0)}(x-x')+\frac{i}{2}\int d^4xd^4x_2\,U(x_1-x_2)\Big\{G^{(0)}(x-x_1)G^{(0)}(x_2-x_2)G^{(0)}(x_1-x')-$$
$$-G^{(0)}(x-x_1)G^{(0)}(x_1-x_2)G^{(0)}(x_2-x')-G^{(0)}(x-x_2)G^{(0)}(x_2-x_1)G^{(0)}(x_1-x')+$$
$$+G^{(0)}(x-x_2)G^{(0)}(x_1-x_1)G^{(0)}(x_2-x')\Big\}\qquad(13.10.)$$

Posle Furije transformacije

$$G^{(1)}(x-x')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int G^{(1)}(k)d^4k\,e^{ik(x-x')}$$

$$G^{(0)}(x-x')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int G^{(0)}(k)d^4k\,e^{ik(x-x')}$$

$$\text{i}\quad U(x_1-x_2)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,U(k)e^{ik(x_1-x_2)}\qquad k\equiv\vec{k},\omega$$

Jednačina (13.10.) svodi se na:

$$G^{(1)}(k)=G^{(0)}(k)+\frac{i}{(2\pi)^4}G^{(0)}(k)\Big\{\int d^4q\,G^{(0)}(q)[U(0)-U(k-q)]\Big\}G^{(0)}(k)$$

(13.11.)

Koristeći približnu formulu

$$1+x \cong \frac{1}{1-x} + O(x^2) \qquad (1.3.12.)$$

izraz (1.3.11.) možemo napisati kao

$$G^{(1)}(k) = \frac{1}{[G^{(0)}(k)]^{-1} - M(k)} \qquad (1.3.13.)$$

$$M(k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4q\, G^{(0)}(q) [U(0) - U(k-q)] \qquad (1.3.14.)$$

Izraz $M(k)$ naziva se maseni operator i predstavlja popravku na energiju slobodne čestice, koja dolazi usled interakcije čestice. To se lako vidi, ako imenilac izraza (1.3.13.) izjednačimo sa nulom. Izjednačujući imenilac sa nulom i koristeći formulu za Grinovu funkciju slobodne čestice nalazimo da je popravljena energija čestice

$$\omega = \varepsilon_{\vec{k}} + M(\vec{k}) \mp i\pi\delta \,\mathrm{sign}(k - k_F)$$

Za izračunavanje Grinovih funkcija, vrlo je zgodno koristiti grafički metod koji je predložio Ričard Fejnman. Grafički metod sadrži sledeća pravila za dešifrovanje:

1. kompletnoj Grinovoj funkciji u konfiguracionom prostoru, korespondira se debela linija, a Grinovoj funkciji slobodne čestice tanka linija.

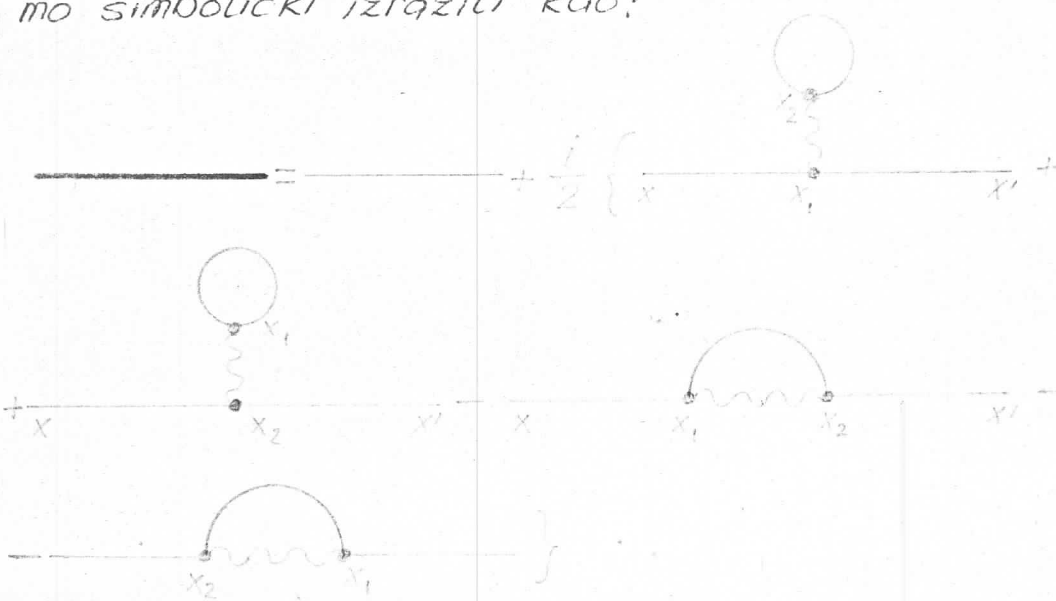
2. Svakoj interakciji korespondira se vijugava linija.

3. Spojne tačke dijagrama koje se nazivaju verteksi imaju svoje koordinate. Po koordinatama verteksa uvek se vrši integracija.

4. Znak dijagrama određuje se po broju zatvore-

nih petlji koje čini jedna linija. Ako je broj zatvorenih petlji n, onda je znak dijagrama $(-1)^{n+1}$.

Na bazi ovih pravila jednačinu (13.10.) možemo simbolički izraziti kao:



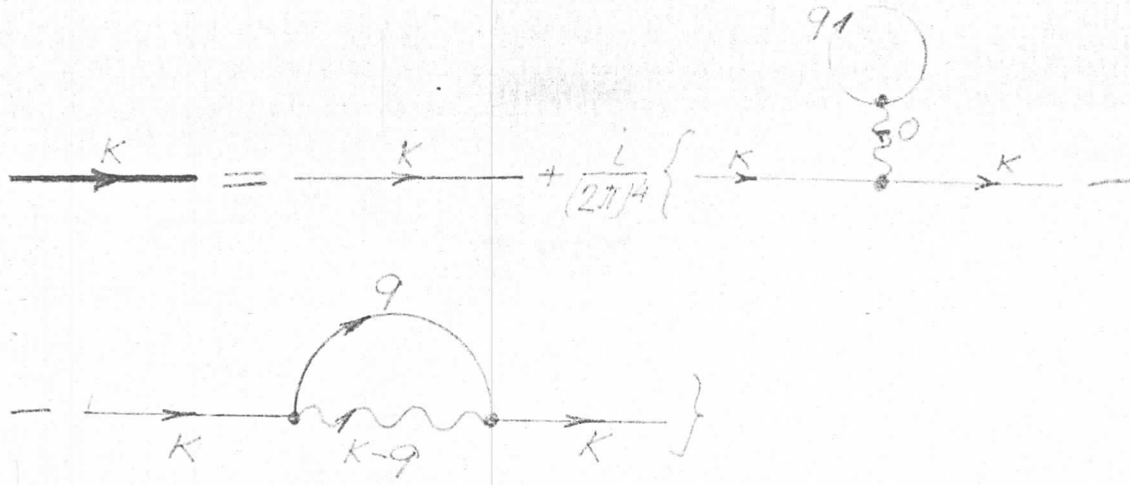
Navedenim pravilima za konfiguracioni prostor dodaju se sledeća pravila za impulsni prostor:

1. U impulsnom prostoru dijagrami zadržavaju potpuno istu formu kao i u konfiguracionom.

2. U svakom verteksu suma impulsa koji ulaze u verteks, jednaka je sumi impulsa koji izlaze iz verteksa.

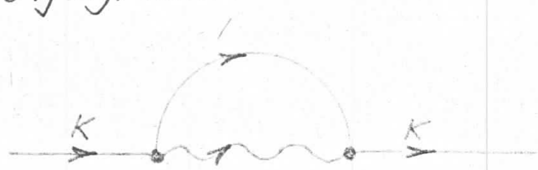
3. Integracija se vrši po svim unutrašnjim impulsima, a unutrašnji su oni impulsi koji su različiti od impulsa ulazne odnosno izlazne linije dijagrama.

4. Dijagram se množi faktorom $\frac{1}{(2\pi)^{4(m-1)}}$ gde je m-broj verteksa.



Ovoj slici odgovara formula (13.11.).

Fejnmanovi dijagrami pored simbolike koja olakšava račun, služe da se bolje shvati fizika procesa. Na primer fizički proces koji odgovara dijagramu



može se opisati rečima na sledeći način:

Slobodna čestica (ulazna linija k) odaje kvant interakcije (vijugava linija k−q) i sama se kreće sa impulsom q (tanka linija sa impulsom q). Posle nekog vremena čestici se vraća kvant interakcije i ona se dalje kreće sa impulsom k (izlazna tanka linija sa impulsom k).

14. Dvovremenske temperaturne funkcije Grina

Funkcija Grina za dva operatora $\hat{A}(\vec{r},t)$,

$\hat{B}(\vec{r}',t')$, definiše se na sledeći način:

$$\langle\langle \hat{A}(\vec{r},t) / \hat{B}(\vec{r}',t') \rangle\rangle \; \Theta(t-t') \langle [\hat{A}(\vec{r},t), \hat{B}(\vec{r}',t')] \rangle \quad (14.1.)$$

gde simbol $\langle\langle \ldots \rangle\rangle$ označava uređivanje operatora po vremenu i znaku srednje vrednosti po Gibsovom ansamblu tj.

$$\langle F \rangle = \frac{Sp \hat{F} e^{-\beta\hat{H}}}{Sp\, e^{-\beta\hat{H}}}$$

$\beta = K_B T$

$\hat{H}$ - Hamiltonijan sistema

$\Theta(t-t')$ - Hevisajdova funkcija, definisana na sledeći način:

$$\Theta(t-t') = \begin{cases} 1 & za \; t>t' \\ 0 & za \; t<t' \end{cases} \quad (14.2.)$$

Diferencirajući (14.1.) po t, a drugi put po t' i uzimajući u obzir da je izvod Hevisajdove funkcije δ- funkcija, dobijamo, respektivno:

$$\frac{d}{dt} \langle\langle \hat{A}(\vec{r},t) / \hat{B}(\vec{r}',t') \rangle\rangle = \delta(t-t') \langle [\hat{A}(\vec{r},t), \hat{B}(\vec{r}',t')] \rangle +$$
$$+ \Theta(t-t') \langle [\frac{d}{dt} \hat{A}(\vec{r},t), \hat{B}(\vec{r}',t')] \rangle$$

$$\frac{d}{dt'} \langle\langle \hat{A}(\vec{r},t) / \hat{B}(\vec{r}',t') \rangle\rangle = -\delta(t-t') \langle [\hat{A}(\vec{r},t), \hat{B}(\vec{r}',t')] \rangle +$$
$$+ \Theta(t-t') \langle [\hat{A}(\vec{r},t), \frac{d}{dt'} \hat{B}(\vec{r}',t')] \rangle$$

Na osnovu Hajzenbergovih jednačina kretanja, imamo:

$$i \frac{d\hat{A}(\vec{r},t)}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}]_t ; \quad i \frac{d\hat{B}(\vec{r}',t')}{dt'} = [\hat{B}, \hat{H}]_{t'}$$

pa se poslednje dve jednačine svode na:

$$i \frac{d}{dt} \langle\langle \hat{A}(\vec{r},t) / \hat{B}(\vec{r}',t') \rangle\rangle = i\delta(t-t') \langle [\hat{A}(\vec{r},t), \hat{B}(\vec{r}',t')] \rangle +$$
$$+ \Theta(t-t') \langle [[\hat{A}, \hat{H}]_t, \hat{B}(\vec{r}',t')] \rangle \quad (14.3.)$$

$$i\frac{d}{dt'}\langle\langle \hat{A}(\vec{r},t)|\hat{B}(\vec{r}';t')\rangle\rangle = -\delta(t-t')\langle[\hat{A}(\vec{r},t),\hat{B}(\vec{r}';t)]\rangle +$$
$$+\Theta(t-t')\langle[\hat{A}(\vec{r},t),[\hat{B},\hat{H}]_{t'}]\rangle \qquad (14.4.)$$

izrazi

$$\Theta(t-t')\langle[[\hat{A},\hat{H}]_t,\hat{B}(\vec{r}';t')]\rangle \qquad i$$

$$\Theta(t-t')\langle[A(\vec{r},t),[\hat{B},\hat{H}]_{t'}]\rangle$$

predstavljaju na osnovu polazne definicije (14.1.) neke nove funkcije Grina, tako da jednačina (14.3.) i (14.4.) glase:

$$i\frac{d}{dt}\langle\langle \hat{A}(\vec{r},t)|\hat{B}(\vec{r}';t')\rangle\rangle = i\delta(t-t')k(\vec{r}-\vec{r}')+$$
$$+\langle\langle[\hat{A},\hat{H}]_{\vec{r},t}|\hat{B}(\vec{r}';t')\rangle\rangle \qquad (14.5.)$$

$$i\frac{d}{dt'}\langle\langle \hat{A}(\vec{r},t)|\hat{B}(\vec{r}';t')\rangle\rangle = -i\delta(t-t')k(\vec{r}-\vec{r}')+$$
$$+\langle\langle \hat{A}(\vec{r},t)|[\hat{B},\hat{H}]_{\vec{r}';t'}\rangle\rangle \qquad (14.6.)$$

gde je

$$k(\vec{r}-\vec{r}') = \langle[\hat{A}(\vec{r},t),\hat{B}(\vec{r}';t)]\rangle \qquad (14.7.)$$

Ako izvršimo Furije transformacije:

$$\langle\langle \hat{A}(\vec{r},t)|\hat{B}(\vec{r}';t')\rangle\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3\vec{p}\, dE\, \langle\langle \hat{A}|\hat{B}\rangle\rangle_{E,\vec{p}}\, e^{i\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}')-iE(t-t')}$$

$$\langle\langle[\hat{A},\hat{H}]_{\vec{r},t}|B(\vec{r}';t')\rangle\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3\vec{p}\, dE\, \langle\langle[\hat{A},\hat{H}]|\hat{B}\rangle\rangle_{E,\vec{p}} \times$$
$$\times\, e^{i\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}')-iE(t-t')}$$

$$\langle\langle \hat{A}(\vec{r},t)|[\hat{B},\hat{H}]_{\vec{r}',t'}\rangle\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3\vec{p}\, dE\, \langle\langle \hat{A}|[\hat{B},\hat{H}]\rangle\rangle_{E,\vec{p}} \times$$
$$\times\, e^{i\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}')-iE(t-t')}$$

$$K(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\, k(\vec{p})\, e^{i\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}')}$$

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dE\, e^{iE(t-t')}$$

i ovo uvrstimo u (14.5.) i (14.6.) dobijamo osnovni sistem jednačina za funkcije Grina u obliku:

$$E\langle\langle \hat{A}|\hat{B}\rangle\rangle_{E,\vec{p}} = \frac{i}{2\pi}K(\vec{p}) + \langle\langle [\hat{A},\hat{H}]|\hat{B}\rangle\rangle_{E,\vec{p}} \qquad (1.4.8.)$$

$$E\langle\langle \hat{A}|\hat{B}\rangle\rangle_{E,\vec{p}} = \frac{i}{2\pi}K(\vec{p}) - \langle\langle \hat{A}|[\hat{B},\hat{H}]\rangle\rangle_{E,\vec{p}} \qquad (1.4.9.)$$

U ovim jednačinama $\vec{p}$ predstavlja impuls. U praksi se može koristiti ili jednačina (14.8.) ili jednačina (14.9.), a nekada je zgodno kombinovati obe. Sam način rešavanja sastoji se obično u tome da se funkcija Grina koja figuriše na desnoj strani jednačine (14.8.) nekom opravdanom aproksimacijom izrazi preko funkcije koja figuriše na levoj strani jednačine (14.8.) i da se na taj način u jednačini pojavi samo jedna funkcija Grina po kojoj se jednačina može rešiti.

Realni deo pola funkcije Grina $\langle\langle \hat{A}|\hat{B}\rangle\rangle_{E,\vec{p}}$ u E ravni predstavlja energiju elementarnih ekscitacija, a imaginarni deo pola u kompleksnoj ravni predstavlja recipročno vreme života elementarnih ekscitacija.

Od interesa je da se definiše spektralna intenzivnost funkcije Grina $\langle\langle \hat{A}|\hat{B}\rangle\rangle_{E,\vec{p}}$ i ona ima oblik:

$$J(\vec{p},E) = \frac{K(\vec{p})}{e^{E/\theta}-1}\,\delta(E-E_R)$$

gde je

$\theta = K_B T$

E_R - realni deo pola funkcije Grina

Preko spektralne intenzivnosti može se naći srednja vrednost proizvoda dva operatora po Gibsovom ansamblu i to na sledeći način:

$$\langle \hat{B}\,\hat{A} \rangle = \frac{Sp\,\hat{B}\hat{A}e^{-\beta\hat{H}}}{Sp\,e^{-\beta\hat{H}}} = \int_{-\infty}^{\infty} J(\vec{p},E)\,dE = \frac{k(\vec{p})}{e^{E_{\vec{p}}/\Theta}-1} \qquad (1.4.10.)$$

Formula (1.4.10.) omogućava nam da bilo kakav problem koji rešavamo metodom funkcije Grina, rešimo u zatvorenoj formi, tj. pored poznavanja energije elementarnih ekscitacija i njihovog vremena života, mi na osnovu formule (1.4.10.) regulišemo i pitanje statistike elementarnih ekscitacija.

II Glava

METODI DEKUPLOVANJA U PRIMENI NA HAJZENBERGOV FEROMAGNETIK

II 1. Dekuplovanje Tjablikova

Metod dvovremenskih temperaturskih funkcija Grina bio je uspešno korišćen u kvantnoj teoriji magnetizma. Ovim metodom dobijena je do danas najbolja formula za zavisnost magnetizacije od temperature. Ova formula nije potpuno egzaktna ni u oblasti niskih temperatura, niti daje potpuno dobru temperaturu prelaza, ali je zato jedina koja uz pomenute nedostatke može da pokrije ceo interval temperatura od 0 do T_c.

Metod ćemo demonstrirati na primeru feromagnetika sa spinom 1/2. Hamiltonijan feromagnetika u granicama Hajzenbergovog modela ima sledeći oblik:

$$H=-\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}{}' I_{\vec{n}\vec{m}}\vec{S}_{\vec{n}}\vec{S}_{\vec{m}} \qquad (II\ 1.1.)$$

gde su S spinski operatori a $I_{\vec{n}\vec{m}}$ tzv. integrali izmene koji su parne funkcije razlike vektora rešetke $\vec{n}-\vec{m}$. U slučaju spina $S=\frac{1}{2}$ od spinskih operatora može se preći na Pauli operatore P po sledećim formulama:

$$S^{+}=P\,;\quad S^{-}=P^{+}\,;\quad \frac{1}{2}-S_z=P^{+}P \qquad (II\ 1.2.)$$

Pauli operatori zadovoljavaju sledeće komutacione relacije:

$$[P_{\vec{n}}, P^+_{\vec{m}}] = (1-2P^+_{\vec{n}}P_{\vec{n}})\delta_{\vec{n}\vec{m}}; \quad [P_{\vec{n}}, P_{\vec{m}}] = [P^+_{\vec{n}}, P^+_{\vec{m}}] = 0$$
$$P^2_{\vec{n}} = P^{+2}_{\vec{n}} = 0; \quad P^+_{\vec{n}}P_{\vec{n}} = 0 \text{ ili } 1 \qquad (II\,1.3.)$$

Pomoću operatora P Hamiltonijan (II 1.1.) može se napisati u sledećem obliku:

$$H = \frac{1}{2}J_0\sum_{\vec{n}} P^+_{\vec{n}}P_{\vec{n}} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}{}' I_{\vec{n}\vec{m}}P^+_{\vec{n}}P_{\vec{m}} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}{}' I_{\vec{n}\vec{m}}P^+_{\vec{n}}P_{\vec{n}}P^+_{\vec{m}}P_{\vec{m}} \qquad (II\,1.4.)$$

gde je

$$J_0 = \sum_{\vec{n}} I_{\vec{n}0}$$

Sistem čiji Hamiltonijan ima oblik (II 1.4.) analiziraćemo pomoću Grinove funkcije

$$G(\vec{f}-\vec{g}) = \langle\langle P_{\vec{f}} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle \qquad (II\,1.5.)$$

Jednačina za ovu Grinovu funkciju glasi:

$$E\langle\langle P_{\vec{f}} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}\langle [P_{\vec{f}}, P^+_{\vec{g}}] \rangle + \langle\langle [P_{\vec{f}}, H] | P_{\vec{g}} \rangle\rangle \qquad (II\,1.6.)$$

Pošto je:

$$\langle [P_{\vec{f}}, P^+_{\vec{g}}] \rangle = (1-2\langle P^+_{\vec{f}}P_{\vec{f}}\rangle)\delta_{\vec{f}\vec{g}} \quad i$$

$$[P_{\vec{f}}, H] = \frac{1}{2}J_0 P_{\vec{f}} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{m}} I_{\vec{f}\vec{m}}P_{\vec{m}} + \sum_{\vec{m}} I_{\vec{f}\vec{m}}P^+_{\vec{f}}P_{\vec{f}}P_{\vec{m}} - \sum_{\vec{m}} I_{\vec{f}\vec{m}}P^+_{\vec{m}}P_{\vec{m}}P_{\vec{f}}$$

Ako ovo uvrstimo u jednačinu (II 1.6.) i uzmemo u obzir da su čvorovi identični, pa da prema tome srednja vrednost $\langle P^+_{\vec{f}}P_{\vec{f}}\rangle$ ne zavisi od indeksa čvora, dobijamo sledeće:

$$E\langle\langle P_{\vec{f}} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}\sigma\delta_{\vec{f}\vec{g}} + \frac{1}{2}J_0\langle\langle P_{\vec{f}} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle - \frac{1}{2}\sum_{\vec{m}} I_{\vec{f}\vec{m}}\langle\langle P_{\vec{m}} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle +$$
$$+ \sum_{\vec{m}} I_{\vec{f}\vec{m}}\langle\langle P^+_{\vec{f}}P_{\vec{f}}P_{\vec{m}} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle - \sum_{\vec{m}} I_{\vec{f}\vec{m}}\langle\langle P^+_{\vec{m}}P_{\vec{m}}P_{\vec{f}} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle \qquad (II\,1.7.)$$

gde je

$\sigma = 1 - 2\langle P^+P\rangle$ - relativna magnetizacija na jedan čvor rešetke.

Na ovom mestu, Tjablikov je izvršio sledeće dekuplovanje viših funkcija Grina

$$\langle\langle P_{\vec f}^{+} P_{\vec f} P_{\vec m} | P_{\vec g}^{+} \rangle\rangle \approx \langle P_{\vec f}^{+} P_{\vec f} \rangle \langle\langle P_{\vec m} | P_{\vec g}^{+} \rangle\rangle = \frac{1-\sigma}{2} \langle\langle P_{\vec m} | P_{\vec g}^{+} \rangle\rangle \quad (II\ 1.8)$$

$$\langle\langle P_{\vec m}^{+} P_{\vec m} P_{\vec f} | P_{\vec g} \rangle\rangle \approx \langle P_{\vec m}^{+} P_{\vec m} \rangle \langle\langle P_{\vec f} | P_{\vec g} \rangle\rangle = \frac{1-\sigma}{2} \langle\langle P_{\vec f} | P_{\vec g}^{+} \rangle\rangle \quad (II\ 1.9)$$

Fizički smisao ovakvog dekuplovanja viših funkcija Grina, znači da se proces rasejanja spinskih talasa na potencijalu $I_{\vec n \vec m}$ zamenjuje procesom preskoka spinskog talasa sa čvora na čvor u „umekšanom" potencijalu $\frac{1}{2}(1-\sigma) I_{\vec n \vec m}$.

Zamenom (II 1.8.) i (II 1.9.) u (II 1.7.) posle sredivanja dobijamo:

$$[E - \tfrac{1}{2}\sigma J_0] \langle\langle P_{\vec f} | P_{\vec g}^{+} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} \sigma \delta_{\vec f \vec g} - \frac{\sigma}{2} \sum_{\vec m} I_{\vec f \vec m} \langle\langle P_{\vec m} | P_{\vec g}^{+} \rangle\rangle \quad (II\ 1.10.)$$

Prelazeći na Furije likove Grinovih funkcija

$$\langle\langle P_{\vec f} | P_{\vec g}^{+} \rangle\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\vec k} \langle\langle P_{\vec k} | P_{\vec k}^{+} \rangle\rangle e^{i\vec k(\vec f - \vec g)}$$

gde je N broj čvorova u kristalu, a $\vec k$ talasni vektor, jednačinu (II 1.10.) svodimo na

$$\langle\langle P_{\vec k} | P_{\vec k}^{+} \rangle\rangle \frac{i}{2\pi} \frac{\sigma}{E - \frac{\sigma}{2}(J_0 - J_{\vec k})} \quad (II\ 1.11.)$$

gde je

$$J_{\vec k} = \frac{1}{N} \sum_{\vec f} I_{\vec f 0}\, e^{i\vec k \vec f} \quad (II\ 1.12.)$$

Za prostu kubnu strukturu u aproksimaciji najbližih suseda, možemo pisati

$$J_0 = \sigma I; \quad J_{\vec k} = 2I(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a) \quad (II\ 1.13.)$$

gde je I integral izmene za najbliže susede i a konstanta magnetne rešetke.

Pol funkcije Grina (II 1.11.) u E-ravni, daje za energiju spinskih talasa

$$E_{\vec{k}}=\frac{\sigma}{2}(J_0-J_{\vec{k}}) \qquad (II\ 1.14.)$$

Spektralna intenzivnost Grinove funkcije (II 1.11.) je

$$J(E,\vec{k})=\frac{\sigma}{e^{E/\theta}-1}\,\delta(E-E_{\vec{k}}) \qquad (II\ 1.15.)$$

i na osnovu ovoga srednji broj pauliona

$$\langle P^{+}_{\vec{k}}P_{\vec{k}}\rangle=\frac{\sigma}{e^{\frac{\sigma(J_0-J_{\vec{k}})}{2\theta}}-1} \qquad (II\ 1.16.)$$

na datom čvoru rešetke dat je izrazom:

$$\langle P^{+}P\rangle=\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}\langle P^{+}_{\vec{k}}P_{\vec{k}}\rangle=\frac{\sigma}{N}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{e^{\frac{\sigma(J_0-J_{\vec{k}})}{2\theta}}-1} \qquad (II\ 1.17)$$

• Koristeći formulu za magnetizaciju i formulu (II 1.17.) dobijamo:

$$\sigma=1-2\langle P^{+}P\rangle=1-\frac{2\sigma}{N}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{e^{\frac{\sigma(J_0-J_{\vec{k}})}{2\theta}}-1} \qquad (II\ 1.18.)$$

ili

$$\sigma=\frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}\operatorname{cotg\,hyp}\frac{\sigma(J_0-J_{\vec{k}})}{4\theta}} \qquad (II\ 1.19.)$$

koristeći činjenicu da je u okolini tačke prelaza $\sigma\approx 0$ možemo razviti u red eksponent i to na sledeći način:

$$\frac{1}{e^{x}-1}\cong\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-1}=\frac{1}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}}=$$

$$=\frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^2}{4}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{x}{12}$$

$$x=\frac{\sigma}{2\theta}(J_0-J_{\vec{k}})$$

Zamenom poslednjeg izraza u (II 1.18.) dobijamo:

$$\sigma=1-2\sigma\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}\frac{2\theta}{\sigma(J_0-J_{\vec{k}})}+2\sigma\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{2}-2\sigma\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}\frac{\sigma(J_0-J_{\vec{k}})}{12\theta}$$

Pošto je $\sum_{\vec{k}}J_{\vec{k}}=0$ možemo pisati

$$\sigma^2=\frac{12\theta}{J_0}\left(1-\frac{4\theta\gamma}{J_0}\right);\quad \gamma=\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{1-\frac{J_{\vec{k}}}{J_0}}$$

ili

$$\sigma=\sqrt{\frac{12\Theta}{J_0}}\sqrt{1-\frac{\Theta}{\Theta_c}}\,. \qquad (\text{II } 1.20)$$

$$\Theta_c=\frac{J_0}{4\gamma}$$

Ako stavimo $\sqrt{\frac{12\Theta}{J_0}}\approx\sqrt{2}$ dobijamo konačno

$$\sigma=\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{\Theta}{\Theta_c}}\,; \qquad (\text{II } 1.21.)$$

Izraz (II 1.21.) dobro aproksimira ponašanje magnetizacije u okolini temperature prelaza $T_c=\frac{\Theta_c}{k_B}$. Za prostu kubnu strukturu, strukturni faktor γ iznosi $\gamma=1{,}512$; tako da na osnovu formule (II 1. 21.) nalazimo:

$$\Theta_c=\frac{J_0}{4\gamma}=\frac{6I}{4\cdot 1{,}512}\approx I \qquad (\text{II } 1.\ 22.)$$

ili

$$T_c=\frac{I}{k_B} \qquad (\text{II } 1.23.)$$

Prema tome, metod Tjablikova daje da je temperatura prelaza u energetskim jedinicama za prostu kubnu rešetku jednaka integralu izmene za najbliže susede.

U oblasti niskih temperatura, ovaj prilaz Tjablikova daje popravke magnetizaciji koje su proporcionalne trećem stepenu apsolutne temperature i dolaze usled rasejanja spinskih talasa. Ova popravka usporava pad magnetizacije i predstavlja grešku, koja dolazi kao posledica nedovoljno tačnog dekuplovanja (II 1.8.) i (II 1.9.). Tačnije dekuplovanje na bazi Vikove teoreme, dalo bi pravilan rezultat za niske temperature, a to je da popravka magnetizacije usled rasejanja spinskih talasa, mora da bude proporcionalna četvrtom stepenu T i da smanjuje magnetizaciju.

II 2. Dekuplovanje po istom vremenu, uz primenu Vikove teoreme

U prethodnom paragrafu smo videli, da dekuplovanje Tjablikova unosi grešku reda T^3 u izrazu za magnetizaciju na niskim temperaturama. Ovde ćemo pokušati sa jednim boljim dekuplovanjem, koje se sastoji u primeni Vikove teoreme, na produkte operatora, koji deluju u istim trenucima vremena. Pošto za Pauli operatore i njihove Furije likove (Furije likovi Pauli operatora nisu Pauli operatori) ne postoji do danas formulisana Vikova teorema, Pauli operatore ćemo zameniti Boze operatorima i na ove primeniti Vikovu teoremu.

Startovaćemo od jednačine za funkciju Grina iz prethodnog paragrafa

$$E\langle\langle P_{\vec{f}} | P^{+}_{\vec{g}} \rangle\rangle = \frac{i\sigma}{2\pi}\delta_{\vec{f}\vec{g}} + \langle\langle \Omega_{\vec{f}} | P^{+}_{\vec{g}} \rangle\rangle \qquad \text{(II 2. 1.)}$$

gde je

$$\Omega_{\vec f} = \frac{1}{2} J_0 P_{\vec f} - \frac{1}{2}\sum_{\vec m} I_{\vec f \vec m} P_{\vec m} + \sum_{\vec m} I_{\vec f \vec m} P^+_{\vec f} P_{\vec f} P_{\vec m} -$$
$$- \sum_{\vec m} I_{\vec f \vec m} P^+_{\vec m} P_{\vec m} P_{\vec f} . \qquad (II\ 2.2.)$$

Posle Furije transformacija

$$P_{\vec f} = \frac{1}{\sqrt N}\sum_{\vec k} P_{\vec k} e^{i\vec k \vec f} ; \quad \Omega_{\vec f} = \frac{1}{\sqrt N}\sum_{\vec k} \Omega_{\vec k} e^{i\vec k \vec f}$$
$$I_{\vec f \vec m} = \frac{1}{N}\sum_{\vec k} J_{\vec k} e^{i\vec k(\vec f - \vec m)} ; \quad \delta_{\vec f \vec g} = \frac{1}{N}\sum_{\vec k} e^{i\vec k(\vec f - \vec g)} \qquad (II\ 2.3.)$$

jednačina (II 2.1.) u impulsnom prostoru glasi:

$$[E - \frac{1}{2}(J_0 + J_{\vec k})\langle\langle P_{\vec k} | P^+_{\vec k}\rangle\rangle = \frac{i\sigma}{2\pi} + \frac{1}{N}\sum_{\vec q_1, \vec q_2}[J_{\vec k - \vec q_1 + \vec q_2} - J_{\vec q_1 - \vec q_2}] \times$$
$$\times \langle\langle P^+_{\vec q_2} P_{\vec q_1} P_{\vec k - \vec q_1 + \vec q_2} | P^+_{\vec k}\rangle\rangle \qquad (II\ 2.4.)$$

U jednačini (II 2.4.) figurišu Furije likovi Pauli operatora. Ako višu funkciju Grina na desnoj strani jednačine dekuplujemo koristeći Vikovu teoremu, smatrajući da ona važi za Furije likove Pauli operatora kao i za Boze operatore (što nije tačno) dobićemo:

$$\langle\langle P^+_{\vec q_2} P_{\vec q_1} P_{\vec k - \vec q_1 + \vec q_2} | P^+_{\vec k}\rangle\rangle \approx \langle P^+_{\vec q_2} P_{\vec q_2}\rangle_0 \delta_{\vec q_2 \vec q_1} \langle\langle P_{\vec k} | P^+_{\vec k}\rangle\rangle +$$
$$+ \langle P^+_{\vec q_2} P_{\vec q_2}\rangle_0 \delta_{\vec k, \vec q_1} \langle\langle P_{\vec k} | P^+_{\vec k}\rangle\rangle = \langle P^+_{\vec q_2} P_{\vec q_2}\rangle_0 \langle\langle P_{\vec k} | P^+_{\vec k}\rangle\rangle \times$$
$$\times (\delta_{\vec q_1, \vec q_2} + \delta_{\vec q_1, \vec k}) \qquad (II\ 2.5.)$$

Zamenom (II 2.5.) u (II 2.4.) posle sređivanja dobijamo

$$(E - E^{(1)}_{\vec k}]\langle\langle P_{\vec k} | P^+_{\vec k}\rangle\rangle = \frac{i\sigma}{2\pi} \qquad (II\ 2.6.)$$

gde je

$$E^{(1)}_{\vec k} = \frac{1}{2}(J_0 - J_{\vec k}) + \frac{1}{N}\sum_{\vec q}\langle P^+_{\vec q} P_{\vec q}\rangle_0 [J_{\vec k} + J_{\vec q} - J_0 - J_{\vec k - \vec q}] \quad (II\ 2.7.)$$

Na osnovu spektralne intenzivnosti Grinove funkcije $\langle\langle P_{\vec k} | P^+_{\vec k}\rangle\rangle$ date jednačinom (II 2.6.) nalazimo da je srednji broj pauliona

$$\langle P_{\vec{k}}^{+} P_{\vec{k}} \rangle = \frac{\sigma}{e^{E_{\vec{k}}^{III}/\theta}-1}; \quad \sigma = 1 - 2\langle P_{\vec{f}}^{+} P_{\vec{f}} \rangle \qquad (II\ 2.8)$$

i ovaj rezultat daje grešku reda T^3 u izrazu za magnetizaciju σ. Ovaj pogrešan rezultat je posledica primene Vikove teoreme na Furije likove Pauli operatora, za koje ona ne važi u istoj onoj formi u kojoj važi za Boze operatore.

Zbog toga ćemo, koristeći egzaktne formule za prelaz od Pauli operatora na Boze operatore

$$P_{\vec{f}} = \Big[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2)^{\nu}}{(1+\nu)!} B_{\vec{f}}^{+\nu} B_{\vec{f}}^{\nu}\Big]^{1/2} B_{\vec{f}} \approx B_{\vec{f}} - B_{\vec{f}}^{+} B_{\vec{f}} B_{\vec{f}}$$

$$P_{\vec{f}}^{+} = B_{\vec{f}}^{+}\Big[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2)^{\nu}}{(1+\nu)!} B_{\vec{f}}^{+\nu} B_{\vec{f}}^{\nu}\Big]^{1/2} \approx B_{\vec{f}}^{+} + B_{\vec{f}}^{+} B_{\vec{f}}^{+} B_{\vec{f}} \qquad (II\ 2.9.)$$

$$P_{\vec{f}}^{+} P_{\vec{f}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2)^{\nu}}{(1+\nu)!} B_{\vec{f}}^{+\,\nu+1} B_{\vec{f}}^{\nu+1} \approx B_{\vec{f}}^{+} B_{\vec{f}} - B_{\vec{f}}^{+} B_{\vec{f}}^{+} B_{\vec{f}} B_{\vec{f}}$$

jednačinu (II 2.4.) izraziti preko Boze operatora. Pošto u jednačini (II 2.4.) figurišu Furije likovi Pauli operatora, mi ćemo u jednačinama (II 2.9.) preći na Furije likove Pauli i Boze operatora

$$P_{\vec{f}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} P_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{f}}; \quad B_{\vec{f}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{f}}$$

posle čega dobijamo

$$P_{\vec{k}} = B_{\vec{k}} - \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} B_{\vec{q}_2}^{+} B_{\vec{q}_1} B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}$$

$$P_{\vec{k}}^{+} = B_{\vec{k}}^{+} - \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}^{+} B_{\vec{q}_1}^{+} B_{\vec{q}_2} \qquad (II\ 2.10.)$$

Ako (II 2.10.) zamenimo u (II 2.4.) i pri tome zadržimo Grinove funkcije koje sadrže maksimalno četiri Boze operatora, dobićemo

$$\Big[E - \frac{1}{2}(J_0 - J_{\vec{k}})\Big]\Big\{\langle\langle B_{\vec{k}} | B_{\vec{k}}^{+} \rangle\rangle - \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} \langle\langle B_{\vec{q}_2}^{+} B_{\vec{q}_1} B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} | B_{\vec{k}}^{+} \rangle\rangle -$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}B^+_{\vec{q}_1}B_{\vec{q}_2}\rangle\rangle=\frac{i\sigma}{2\pi}+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}(J_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}-J_{\vec{q}_1-\vec{q}_2})\langle\langle B^+_{\vec{q}_2}B_{\vec{q}_1}B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}|B^+_{\vec{k}}\rangle\rangle \quad (II\ 2.11)$$

Bozonske funkcije Grina sa četiri operatora dekuplovaćemo primenjujući Vikovu teoremu za Boze operatore. Tako dobijamo:

$$\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}\langle\langle B^+_{\vec{q}_2}B_{\vec{q}_1}B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}|B^+_{\vec{k}}\rangle\rangle=\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}}\rangle\rangle\frac{1}{N}\times$$

$$\times\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}\langle B^+_{\vec{q}_2}B_{\vec{q}_2}\rangle_0(\delta_{\vec{q}_1\vec{q}_2}+\delta_{\vec{q}_1\vec{k}})=\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}}\rangle\frac{2}{N}\sum_{\vec{q}}\langle B^+_{\vec{q}}B_{\vec{q}}\rangle_0=$$

$$=2C_0\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}}\rangle\rangle \quad (II\ 2.12.)$$

$$\langle B^+_{\vec{f}}B_{\vec{f}}\rangle_0=C_0=\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}\langle B^+_{\vec{q}}B_{\vec{q}}\rangle_0=\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}\frac{1}{e^{\frac{J_0-J_{\vec{k}}}{2\theta}}-1} \quad (II\ 2.13.)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}B^+_{\vec{q}_1}B_{\vec{q}_2}\rangle\rangle=\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}\{\langle B^+_{\vec{q}_2}B_{\vec{q}_2}\rangle\delta_{\vec{q}_1\vec{q}_2}\times$$

$$\times\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}}\rangle\rangle+\langle B^+_{\vec{q}_2}B_{\vec{q}_2}\rangle\delta_{\vec{q}_1\vec{k}}\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}}\rangle\rangle=$$

$$=2C_0\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}}\rangle\rangle \quad (II\ 2.14.)$$

Ako još uzmemo

$$\sigma=1-2\langle P^+_{\vec{f}}P_{\vec{f}}\rangle=1-2\langle B^+_{\vec{f}}B_{\vec{f}}\rangle+2\langle B^+_{\vec{f}}B^+_{\vec{f}}B_{\vec{f}}B_{\vec{f}}\rangle=$$

$$=1-2\langle B^+_{\vec{f}}B_{\vec{f}}\rangle+4\langle B^+_{f}B_{f}\rangle^2_0=1-2C_0+4C_0^2 \quad (II\ 2.15.)$$

Jednačinu (II 2.11.) možemo napisati, zanemarujući kvadrate srednjeg broja bozona $\langle B^+_{\vec{f}}B_{\vec{f}}\rangle^2$

$$(1-4C_0)[E-\tfrac{1}{2}(J_0-J_{\vec{k}})]\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}}\rangle\rangle=\frac{i}{2\pi}(1-2C_0)+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}(J_{\vec{k}}+J_{\vec{q}}-J_0-J_{\vec{k}-\vec{q}})\langle B^+_{\vec{q}}B_{\vec{q}}\rangle_0$$

Posle delenja sa $1-4C_0$ pri čemu

$$\frac{1}{1-4C_0}\approx 1+4C_0+O(C_0^2)$$

dobijamo konačno:

$$\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}}\rangle\rangle=\frac{i}{2\pi}\frac{1+2C_0}{E-E^{(1)}_{\vec{k}}} \quad (II\ 2.16.)$$

$$E^{(1)}_{\vec{k}}=\frac{1}{2}(J_0-J_{\vec{k}})+\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}(J_{\vec{k}}+J_{\vec{q}}-J_0-J_{\vec{k}-\vec{q}})\langle B^+_{\vec{q}}B_{\vec{q}}\rangle_0$$

Na osnovu spektralne intenzivnosti Grinove funkcije (II 2.16.), dobijamo srednji broj bozona u prvoj aproksimaciji

$$\langle B_{\vec{k}}^{+} B_{\vec{k}} \rangle_1 = \frac{1+2C_0}{e^{E_{\vec{k}}^{(1)}/\theta}-1} \qquad \text{(II 2.17.)}$$

Ako ovo zamenimo u formuli (II 2.15.) za magnetizaciju, dobićemo:

$$\sigma = 1-2\langle P_{\vec{f}}^{+} P_{\vec{f}} \rangle = 1-2\langle B_{\vec{f}}^{+} B_{\vec{f}} \rangle + 4\langle B_{\vec{f}}^{+} B_{\vec{f}} \rangle_0^2 =$$

$$= 1-\frac{2}{N}\sum_{\vec{k}} \frac{1+2C_0}{e^{E_{\vec{k}}^{(1)}/\theta}-1} + 4C_0^2 = 1-\frac{2}{N}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{E_{\vec{k}}^{(1)}/\theta}-1} - 4C_0 \frac{1}{N} \times$$

$$\times \sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{E_{\vec{k}}^{(1)}/\theta}-1} + 4C_0^2$$

Sada u trećem članu možemo uzeti približno

$$\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{E_{\vec{k}}^{(1)}/\theta}-1} \approx C_0$$

pa sledi

$$\sigma = 1-\frac{2}{N}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{E_{\vec{k}}^{(1)}/\theta}-1} - 4C_0^2 + 4C_0^2 \quad \text{tj.}$$

$$\sigma = 1-\frac{2}{N}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{E_{\vec{k}}^{(1)}/\theta}-1} \qquad \text{(II 2.18.)}$$

Ova formula za magnetizaciju, za razliku od formule preko Tjablikova

$$\sigma_T = 1-\frac{2\sigma}{N}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{E_{\vec{k}}^{(1)}/\theta}-1} \qquad \text{(II 2.19.)}$$

daje tačan izraz za magnetizaciju, u kome je prva anharmonijska korekcija za magnetizaciju proporcionalna sa T^4.

II 3. Dekuplovanje po oba vremena

U prethodnom paragrafu vršili smo dekuplovanje bozonskih funkcija Grina, ali samo po istom vremenu. Ovde ćemo izvesti potpuno tačan račun, dekuplujući više funkcije Grina, pomoću Vikove teoreme primenjene na sve operatore, nezavisno od toga u kome trenutku vremena deluju. Ovakav postupak je u skladu sa Macubara dijagramskom tehnikom za Grinove funkcije na temperaturi $T \neq 0$.

Napisaćemo jednačinu za funkciju Grina para Pauli operatora, ali u vremenskoj reprezentaciji. Ova jednačina glasi:

$$\frac{d}{dt}\langle\langle P_{\vec f}(t)|P^+_{\vec g}(0)\rangle\rangle = \delta(t)\langle[P_{\vec f}(0), P^+_{\vec g}(0)]\rangle + \frac{1}{i}\langle\langle \Omega_{\vec f}(t)|P^+_{\vec g}(0)\rangle\rangle \qquad (II\ 3.\ 1.)$$

Ako izvršimo Furije transformaciju prostor-impuls

$$\langle\langle P_{\vec f}(t)|P^+_{\vec g}(0)\rangle\rangle = \frac{1}{N}\sum_{\vec k}\langle\langle P_{\vec k}(t)|P^+_{\vec k}(0)\rangle\rangle e^{i\vec k(\vec f-\vec g)}$$

$$\langle\langle \Omega_{\vec f}(t)|P^+_{\vec g}(0)\rangle\rangle = \frac{1}{N}\sum_{\vec k}\langle\langle \Omega_{\vec k}(t)|P^+_{\vec k}(0)\rangle\rangle e^{i\vec k(\vec f-\vec g)}$$

$$[P_{\vec f}(0), P^+_{\vec g}(0)] = (1-2\langle P^+_{\vec f}(0)P_{\vec f}(0)\rangle)\delta_{\vec f\vec g} =$$

$$= \frac{1-2\langle P^+_{\vec f}(0)P_{\vec f}(0)\rangle}{N}\sum_{\vec k} e^{i\vec k(\vec f-\vec g)}$$

dobićemo jednačinu

$$\frac{d}{dt}\langle\langle P_{\vec k}(t)|P^+_{\vec k}(0)\rangle\rangle = \sigma\delta(t) + \frac{1}{i}\langle\langle \Omega_{\vec k}(t)|P^+_{\vec k}(0)\rangle\rangle \qquad (II\ 3.2.)$$

gde je

$$\sigma = 1-2\langle P^+_{\vec f}(0)\, P_{\vec f}(0)\rangle \qquad (II\ 3.\ 3.)$$

$$\Omega_{\vec k}(t) = \frac{1}{2}(J_0 - J_{\vec k})P_{\vec k}(t) + \frac{1}{N}\sum_{\vec q_1 \vec q_2}(J_{\vec k-\vec q_1+\vec q_2} - J_{\vec q_1-\vec q_2}) \times$$

$$\times\, P^+_{\vec q_2}(t)\, P_{\vec q_1}(t)\, P_{\vec k-\vec q_1+\vec q_2}(t) \qquad (II\ 3.\ 4.)$$

U jednačini (II 3.2.) izvršićemo prelaz na bozonske operatore:

$$P_{\vec{k}}(t)=B_{\vec{k}}(t)-\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}B^+_{\vec{q}_2}(t)B_{\vec{q}_1}(t)B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}(t) \qquad (II\ 3.5.)$$

$$P^+_{\vec{k}}(0)=B^+_{\vec{k}}(0)-\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}B^+_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}(0)B^+_{\vec{q}_1}(0)B_{\vec{q}_2}(0) \qquad (II\ 3.6.)$$

i izvršiti sledeće dekuplovanje:

$$\langle\langle P_{\vec{k}}(t)|P^+_{\vec{k}}(0)\rangle\rangle=\langle\langle B_{\vec{k}}(t)|B^+_{\vec{k}}(0)\rangle\rangle-$$
$$-\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}\langle\langle B_{\vec{k}}(t)|B^+_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}(0)B^+_{\vec{q}_1}(0)B_{\vec{q}_2}(0)\rangle\rangle-$$
$$-\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}\langle\langle B^+_{\vec{k}}(0)|B^+_{\vec{q}_2}(t)B_{\vec{q}_1}(t)B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}(t)\rangle\rangle+$$
$$+\frac{1}{N^2}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2\vec{q}_3\vec{q}_4}\langle\langle B^+_{\vec{q}_2}(t)B_{\vec{q}_1}(t)B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}(t)|B^+_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}(0)\times$$
$$\times B^+_{\vec{q}_1}(0)B_{\vec{q}_2}(0)\rangle\rangle=\Big(1-\frac{4}{N}\sum_{\vec{q}}\bar{N}_{\vec{q}}\Big)G_{\vec{k}}(t)+$$
$$+\frac{2}{N^2}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}G_{\vec{q}_1}(t)D_{\vec{q}_2}(t)G_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}(t) \qquad (II\ 3.7.)$$

gde je

$$G_{\vec{k}}(t)=\langle\langle B_{\vec{k}}(t)|B^+_{\vec{k}}(0)\rangle\rangle;\ D_{\vec{q}}(t)=\langle\langle B^+_{\vec{k}}(t)|B_{\vec{k}}(0)\rangle\rangle$$

$$\bar{N}_{\vec{q}}=\langle B^+_{\vec{q}}(0)B_{\vec{q}}(0)\rangle=\langle B^+_{\vec{q}}(t)B_{\vec{q}}(t)\rangle$$

$$\frac{\partial\bar{N}_{\vec{q}}}{\partial t}=0 \qquad (II\ 3.8.)$$

Kao što vidimo sparivanje po različitim vremenima daje Grinovu funkciju, a sparivanje po istim vremenima daje srednji broj koji ne zavisi od vremena. Ako na isti način dekuplujemo i Grinovu funkciju na desnoj strani (II 3.4.), dobijamo sledeću jednačinu za bozonsku Grinovu funkciju $G_{\vec{k}}(t)$:

$$\Big[\frac{d}{dt}-\frac{1}{2i}(J_0-J_{\vec{k}})\Big]\Big[(1-4C_0)G_{\vec{k}}(t)+\frac{2}{N^2}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}G_{\vec{q}_1}(t)D_{\vec{q}_2}(t)G_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}(t)\Big]=$$
$$=(1-2C_0)\delta(t)+\frac{1}{iN}\sum_{\vec{q}}(J_{\vec{k}}+J_{\vec{q}}-J_0-J_{\vec{k}-\vec{q}})\bar{N}_{\vec{q}}G_{\vec{k}}(t)-$$
$$-\frac{2}{iN^2}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}(J_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}-J_{\vec{q}_1-\vec{q}_2})G_{\vec{q}_1}(t)D_{\vec{q}_2}(t)G_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}(t) \qquad (II\ 3.9.)$$

gde je

$$C_0 = \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \bar{N}_{\vec{q}} \qquad (II\ 3.10.)$$

Ovde ćemo izvršiti Furije transformaciju vreme-energija.

$$G_{\vec{k}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\vec{k}}(E) e^{-iEt}\, dE \qquad (II\ 3.11.)$$

$$D_{\vec{k}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} D_{\vec{k}}(E) e^{-iEt}\, dE\,; \quad D_{\vec{k}}(E) = G_{\vec{k}}(-E) \qquad (II\ 3.12.)$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dE\, e^{-iEt} \qquad (II\ 3.13.)$$

Jednačina (II 3.9.) postaje

$$\Big\{ E - \frac{1}{2}(J_0 - J_{\vec{k}}) - \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} (J_{\vec{k}} + J_{\vec{q}} - J_0 - J_{\vec{k}-\vec{q}})\, \bar{N}^{(0)}_{\vec{q}} \Big\} G_{\vec{k}}(E) =$$
$$= \frac{i}{2\pi}(1+2C_0) - \frac{1+4C_0}{N^2}\int_{-\infty}^{\infty} dE'\, dE'' \Big[\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2} \Big[E - \frac{1}{2}(J_0 - J_{\vec{k}}) +$$
$$+ J_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} - J_{\vec{q}_1-\vec{q}_2} \Big] G_{\vec{q}_2}(E'')\, G_{\vec{q}_1}(E')\, G_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}(E+E''-E') \Big]$$

(II 3.14.)

Ako odbacimo drugi član na desnoj strani jednačine (II 3.14.), ova jednačina se svodi na jednačinu (II 2.16.) koju smo dobili, primenom Vikove teoreme na produkte operatora, koji deluju u istom trenutku vremena. Drugi član u jednačini (II 3.14.) predstavlja popravku koja je došla zbog sparivanja operatora i po različitim vremenima.

Ako popravku koja sadrži tri Grinove funkcije shvatimo kao malu, onda jednačinu (II 3.14.) možemo pisati u obliku:

$$G^{(1)}_{\vec{k}}(E) = \frac{G^{(0)}_{\vec{k}}(E)}{1 - \frac{1+8C_0}{(2\pi N)^2}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}\int_{-\infty}^{\infty} dE''\, dE' \frac{E - E^{(0)}_{\vec{k}} + J_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} - J_{\vec{q}_1-\vec{q}_2}}{(E'' - E^{(1)}_{\vec{q}_2} + i\delta)(E' - E^{(1)}_{\vec{q}_1} + i\delta)(E + E'' - E' - E^{(1)}_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} + i\delta)}}$$

$$\delta \to +0 \qquad (II\ 3.15.)$$

gde je $G^{(0)}_{\vec{k}} = \frac{i}{2\pi}\,\frac{1+2C_0}{E-E^{(1)}_{\vec{k}}}$

$E^{(0)}_{\vec{k}} = \frac{1}{2}(J_0 - J_{\vec{k}})$

$$E^{(1)}_{\vec{k}} = \frac{1}{2}(J_0 - J_{\vec{k}}) + \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}(J_{\vec{k}} + J_{\vec{q}} - J_0 - J_{\vec{k}-\vec{q}})\bar{N}_{\vec{q}} \qquad (II\ 3.16.)$$

Kao što vidimo, pored pola Grinove funkcije $G^{(0)}_{\vec{k}}$ koja daje standardnu energiju spinskih talasa, pojavljuje se i dopunski pol koji dobijamo kada imenilac u izrazu (II 3.15.) izjednačimo sa nulom. Ako iskoristimo činjenicu da je pod znakom integrala

$$\frac{1}{E-\mathcal{E}+i\delta} = \frac{1}{E-\mathcal{E}} - i\pi\delta(E-\mathcal{E}) \qquad (II\ 3.17.)$$

i izjednačimo imenilac sa nulom, dobićemo sledeća dva uslova za određivanje dopunskog pola:

$$\sum_{\vec{\mu}\vec{\nu}} \frac{\mathcal{E}_{\vec{k}} - \mathcal{E}_{\vec{k}-\vec{\mu}} + \mathcal{E}_{\vec{\nu}-\vec{\mu}/2} - \mathcal{E}_{\vec{\nu}+\vec{\mu}/2} + J_{\vec{\mu}} - J_{\vec{k}-\vec{\mu}}}{E + \mathcal{E}_{\vec{\nu}-\vec{\mu}/2} - \mathcal{E}_{\vec{\nu}+\vec{\mu}/2} - \mathcal{E}_{\vec{k}-\vec{\mu}}} = 3N^2 \qquad (II\ 3.18.)$$

i

$$\sum_{\vec{\mu}\vec{\nu}} (\mathcal{E}_{\vec{\nu}+\vec{\mu}/2} - \mathcal{E}_{\vec{\nu}-\vec{\mu}/2} + \mathcal{E}_{\vec{k}-\vec{\mu}} - \mathcal{E}_{\vec{k}} + J_{\vec{k}-\vec{\mu}} - J_{\vec{\mu}})\,\delta(E + \mathcal{E}_{\vec{\nu}-\vec{\mu}/2} - \mathcal{E}_{\vec{\nu}+\vec{\mu}/2} - \mathcal{E}_{\vec{k}-\vec{\mu}}) = 0 \qquad (II\ 3.19.)$$

Treba napomenuti da je prilikom dobijanja uslova (II 3.18.) i (II 3.19.) korišćena aproksimacija

$$E^{(1)}_{\vec{k}} \to E^{(0)}_{\vec{k}} = \mathcal{E}_{\vec{k}} = \frac{1}{2}(J_0 - J_{\vec{k}})^2 \qquad (II\ 3.20.)$$

Elementaran ali dug račun, pokazuje da je uslov (II 3.19.) zadovoljen identički, a to znači da nam ovaj uslov ne daje nikakav dopunski pol.

Iz uslova (II 3.18.) dobijamo sledeći izraz za energiju:

$$\mathcal{E}_{1,2}=\frac{\hbar^2\mu_0^2}{12m}\pm\frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{k^4+\frac{11}{9}\mu_0^2k^2-\frac{\mu_0^4}{45}}$$

Kao što vidimo tačnije dekuplovanje koje je izvršeno ovde, pokazuje da u sistemu spinskih talasa, pored magnona, čija je energija $E=E_k^{(1)}$ postoje i dopunska pobuđenja sa energijama $\mathcal{E}_{1,2}$. Ova pobuđenja su lokalizovana jer imaju visok gep $\Delta=\frac{\hbar^2\mu_0^2}{12m}\sim$ $\sim 0{,}1$ eV.

Zbog visokog gepa, ova pobuđenja na niskim temperaturama daju eksponencijalno male popravke u magnetizaciji, koje se mogu zanemariti, tako da se na niskim temperaturama magnetizacija može računati isključivo sa zakonom disperzije $E=E_k^{(1)}$ što daje poznati Dajsonov rezultat. Ovakva lokalna pobuđenja, predvideo je Dajson u svom fundamentalnom radu, ali nije našao izraz za njihovu energiju. On je samo predvideo da ovakva pobuđenja zanemarljivo malo menjaju magnetizaciju na niskim temperaturama.

Na visokim temperaturama bliskim Kirijevoj temperaturi doprinosi od ovih lokalnih stanja nisu zanemarljivi i očigledno je da ona snižavaju temperaturu prelaza. Ovde ćemo koristeći prisustvo dopunskih ekscitacija oceniti kako one menjaju temperaturu prelaza u odnosu na onaj rezultat koji daje metod molekularnog polja.

U metodu molekularnog polja za energiju magnona u feromagnetiku sa spinom 1/2 i proste kubne strukture uzima se $E_M = 3\sigma I$ i onda je temperatura prelaza θ_c data izrazom:

$$\theta_c = \frac{3}{2} I = 1.5 I \qquad (II\ 3.24.)$$

Ako broj elementarnih ekscitacija sa energijom $3\sigma I$ označimo sa N_M onda za N_M imamo izraz:

$$N_M = \frac{1}{e^{3\sigma I/\theta} + 1} \qquad (II\ 3.25.)$$

Po analogiji sa metodom molekularnog polja, energiju lokalnih pobuđenja izrazićemo približno

$$E_L = \sigma \frac{I \mu_0^2 a^2}{12} \approx 3\sigma I \qquad (II\ 3.26.)$$

pa je broj elementarnih ekscitacija ovog tipa

$$N_L = \frac{1}{e^{3\sigma I/\theta} + 1} \approx N_M \qquad (II\ 3.27.)$$

Magnetizaciju ćemo računati po formuli

$$\sigma = 1 - 2(N_M + N_L) \qquad (II\ 3.28.)$$

što u oblasti visokih temperatura za temperaturu prelaza daje

$$\tilde{\theta}_c = \sqrt{\frac{3}{2}}\, I \approx 1.25 I$$

ZAKLJUČAK

U radu je predložen novi način dekuplovanja paulionskih funkcija Grina, pri čemu je kao model za analizu rezultata iskorišćen Hajzenbergov feromagnetik sa spinom 1/2. Metod se sastoji u tome, što se paulionske Grinove funkcije zamenjuju ekvivalentnim nizom bozonskih Grinovih funkcija uz korišćenje egzaktne bozonske reprezentacije za Pauli operatore. Više bozonske funkcije Grina dekupluju se na bazi Vikove teoreme, pri čemu se sparivanje operatora vrši i po istim i po različitim vremenima. Ovakav postupak pokazuje da u Hajzenbergovom feromagnetiku postoje dve vrste ekscitacija i to Dajsonovi idealni spinski talasi koji daju pravilan izraz za magnetizaciju na niskim temperaturama i lokalizovana pobuđenja sa visokim gepom, čiji doprinos magnetizaciji može da bude značajan samo u okolini temperature prelaza.

Osnovni rezultat ovde izvršenih analiza je pronađeni zakon disperzije za lokalizovana pobuđenja. Ova pobuđenja je Dajson predvideo ali nije dao analitički izraz za njihov energetski spektar.

U oblasti visokih temperatura izvršena je ocena uticaja lokalizovanih pobuđenja na temperaturu prelaza i to u odnosu na rezultat koji daje metod molekularnog polja. Pokazano je da se temperatura prelaza snižava za 17 %.

Literatura

1. С.В. Тябликов, Методы квантовой теории магнетизма, Изд. „Наука" Москва, 1965.

2. В.М. Агранович, Б.С. Тошич, ЖЭТФ, 53, 149 (1967.)

3. А.А. Абрикосов, Л.П. Горков, И.Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Физматгиз, Москва, 1962.

4. А.С. Давидов, Квантовая механика, Изд. ФМ Москва 1963.

5. F.J. Dyson, Phys. rev. 102, 1217 (1956.)

Sadržaj