U N I V E R Z I T E T U N O V O M S A D U

P R I R O D N O M A T E M A T I Č K I F A K U L T E T

G R U P A : F I Z I K A

D I P L O M S K I R A D

Predmet: MATEMATIČKA FIZIKA

Tema: SINGULARNE INTEGRALNE JEDNAČINE SA SLOŽENIM JEZGROM I NEKE PRIMENE

Kandidat: SVETLANA RUKAVINA

Zahvaljujem svom mentoru Dr. Tošić Bratislavu na korisnim sugestijama i pomoći u izradi ovog rada.

S. Rukavina

S A D R Ž A J

PREDGOVOR

UVOD 1

I GLAVA

INTEGRAL KOŠI TIPA

- uslov Helder-a 9
- glavna vrednost integrala.....10
- osobine integrala Koši tipa 12

II GLAVA

RIMANOV GRANIČNI PROBLEM

-indeks funkcije 20
-homogeni Rimanov problem 21
-nehomogeni Rimanov problem 23
- singularna integralna jednačina i Rimanov problem ..25
- regularizacija 29

III GLAVA

INTEGRALNE JEDNAČINE SA MULTISINGULARNIM JEZGROM

- multisingularne jednačine sa konstantnim koeficijentima..33
- polinom kao koeficijent u multisingularnoj jednačini.....38
- singularne jednačine sa jezgrima tipa $\frac{1}{\tau-t}$ $\frac{1}{\tau+t}$ 42
- Koši-jeva jednačina sa dva singularna jezgra 46

ZAKLJUČAK 52

LITERATURA 53

P R E D G O V O R

Diplomski rad je posvećen problemu singularnih jednačina sa složenim (multisingularnim) jezgrom. Poznato je da su singularne jednačine sa običnim jezgrom našle veliku primenu u praksi; i to u kinetičkoj teoriji gasova, astronomiji i u novije vreme u raketnoj tehnici. Razvoj fizike i srodnih disciplina inicira istraživanje singularnih jednačina sa složenim jezgrom, jer se na ovakve jednačine svode mnodi problemi vezani za superfluidna stanja fizičkih i bioloških sistema. Osim toga, čitav niz problema klasične fizike i astronomije, koji su se svodili na komplikovane difirencijalne jednačine, može isto tako da se svede na multisingularne jednačine, koje je ponekad lakše rešiti.

UVOD

Matematički opis mnogih fizičkih procesa dovodi do linearnih diferencijalnih i integralnih jednačina,ili čak do integro-diferencijalnih jednačina.

Linearne diferencijalne jednačine drugog reda (na koje se uglavnom svode matematički formulisani fizički problemi) svrstavamo u tri grupe:

1. hiperbolički tip. Na primer jednačina oscilovanja

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = div(p\, grad\, u) - q u + F(x,t)$$

2. parabolički tip,kao što je jednačina difuzije

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = div(p\, grad u) - q u + F(x)$$

3. eliptički tip,kojem pripada jednačina stacionarnosti

$$-div(p\, grad u) + q u = F(x)$$

I N T E G R A L N E J E D N A Č I N E

<u>Definicija</u>: Jednačine u kojima se nepoznata funkcija nalazi pod znakom integrala,nazivaju se integralne jednačine,pri čemu u integralu nema takvih operacija,koje mogu ukinuti operaciju integraljenja.

F O R M I R A N J E

a.) iz diferencijalnih jednačina prvog reda sa datim početnim uslovima

$$y' = \varphi(x,y) \quad / \cdot \int_{x_0}^{x} \qquad x = x_0 \quad y(x_0) = y_0$$

$$\int_{x_0}^{x} y' dx = \int_{x_0}^{x} \varphi[t, y(t)]\, dt$$

$$y(x)\Big|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} \varphi[t, y(t)]\, dt$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} \varphi[t, y(t)]\, dt$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi[t, y(t)]\, dt$$

БИБЛИОТЕКА Природно-математичког факултета НОВИ САД

Diferencijalna jednačina prvog reda, sa datim početnim uslovima, svedena je na integralnu jednačinu. U opštem slučaju ovakve jednačine su:

1. linearne, jer je pod integralom linearna nepoznata funkcija

2. gornja granica integrala je promenljiva, što je posledica primene početnih uslova

3. podintegralna veličina ne zavisi od (x), već samo od integracione promenljive (t), što je posledica nastanka integralne jednačine, od diferencijalne jednačine prvog reda.

b.) iz diferencijalnih jednačina drugog reda sa datim početnim uslovima

$$y'' = f(x, y) \quad / \int_{x_0}^{x} \qquad x = x_0 \quad y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_0'$$

$$\int_{x_0}^{x} y'' dx = \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\, dt$$

$$y' \Big|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\, dt$$

$$y'(x) = y'(x_0) + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\, dt \quad / \int_{x_0}^{x}$$

$$\int_{x_0}^{x} y'(x)\, dx = (x - x_0)\, y_0' + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\, dt$$

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)\, y_0' + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\, dt$$

treba primeniti Diriclet-ovo pravilo za promenu granice integracije

$$\int_{\alpha}^{x} dt \int_{\alpha}^{t} F(x, t, \tau)\, d\tau = \int_{\alpha}^{x} d\tau \int_{\tau}^{x} F(x, t, \tau)\, d\tau$$

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)\, y_0' + \int_{x_0}^{x} dt \int_{t}^{x} f[t, y(t)]\, dx$$

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)\, y_0' + \int_{x_0}^{x} dt\, f[t, y(t)] \int_{t}^{x} dt$$

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)\, y_0' + \int_{x_0}^{x} (x - t)\, f[t, y(t)]\, dt$$

$$y(x) = C_1 + C_2 x + \int_{0}^{x} (x - t)\, f[t, y(t)]\, dt$$

Ova integralna jednačina se razlikuje od prethodne, jer izraz pod integralom zavisi i od (x) i od (t).

1. jednačina je nelinearna

2. gornja granica integrala je promenljiva, što je posledica primene početnih uslova.

c.) iz diferencijalnih jednačina drugog reda sa datim graničnim uslovima

$$y'' = f(x,y) \qquad y(0) = a \qquad y(l) = b \qquad C_1 = a$$

$$y(l) = a + C_2 l + \int_0^l (l-t)\, f[t, y(t)]\,dt \qquad C_2 = \frac{b-a}{l} - \frac{1}{l}\int_0^l (l-t)\, f[t, y(t)]\,dt$$

$$y(x) = a + \frac{b-a}{l}x + \int_0^l (x-t)\, f[t, y(t)]\,dt - \frac{x}{l}\int_0^l (l-t)\, f[t, y(t)]\,dt$$

$$y(x) = F(x) + \int_0^x \left(x - t - x + \frac{xt}{l}\right) f[t, y(t)]\,dt - \int_0^l \frac{x(l-t)}{l} f[t, y(t)]\,dt$$

$$y(x) = F(x) - \int_0^x \frac{t(l-x)}{l} f[t, y(t)]\,dt - \int_x^l \frac{x(l-t)}{l} f[t, y(t)]\,dt$$

Uvodimo prekidnu funkciju $K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t(l-x)}{l} & t \le x \\ \dfrac{x(l-t)}{l} & t \geq x \end{cases}$

$$y(x) = F(x) - \int_0^l K(x,t)\, f[t, y(t)]\,dt$$

Dobili smo nelinearnu integralnu jednačinu.

1. pod integralom se pojavljuju i (x) i (t)

2. gornja granica integrala je konstantna, što je posledica primene graničnih uslova.

d.) iz linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda sa datim graničnim uslovima

$$y'' = a(x) + b(x)\,y$$

$$f(x,y) = a(x) + b(x)\,y$$

$$f[t, y(t)] = a(t) + b(t)\,y(t)$$

$$y(x) = F(x) - \int_0^l K(x,t)\, a(t)\,dt - \int_0^l K(x,t)\, b(t)\, y(t)\,dt$$

$$y(x) = F_1(x) - \int_0^l K(x,t)\, b(t)\, y(t)\,dt \qquad F_1(x) = F(x) - \int_0^l K(x,t)\, a(t)\,dt$$

Ovo je linearna integralna jednačina. K(x,t)b(t) - jezgro linearne integralne jednačine.

Granica integrala je konstantna, što je posledica primene graničnih uslova.

K L A S I F I K A C I J A

1. jednačine Fredholm-ovskog tipa

a.)nehomogena Fredholmova jednačina druge vrste

$$u(x) - \int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt = f(x)$$

a,b - konstante

K(x,t) - jezgro

U(x) -nepoznata funkcija

f(x) - nezavisna funkcija

x,t - realne promenljive

Uslov da jednačina bude fredholmovska

$$\int_a^b\int_a^b dx\,dt\,|K(x,t)|^2 < \infty \qquad \int_a^b dx\,|f(x)|^2 < \infty \qquad a \leq x \leq b \quad a \leq t \leq b$$

Ovakva jednačina uvek ima rešenje.Uslov zavisi i od oblika jezgra K(x,t) i od granica.

b.) homogena Fredholmova jednačina druge vrste

$$u(x) - \int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt = 0$$

c.) nehomogena Fredholmova jednačina prve vrste

$$\int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt = f(x)$$

d.) homogena Fredholmova jednačina prve vrste

$$\int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt = 0$$

Ništa se ne menja ako je $x = \sum_i x_i$, $t = \sum_i t_i$, a granice integracije a,b postaju oblast Ω.

$$u(x) - \int_\Omega K(x,t)\,u(t)\,dt = f(x)$$

uslovi

$$\int_\Omega\int_\Omega dt\,dx\,|K(x,t)|^2 < \infty \qquad \int_\Omega |f(t)|^2 < \infty \qquad dt = dt_1\,dt_2 \ldots dt_N$$

2. jednačine Voltera-ovog tipa

su integralne jednačine sa promenljivom gornjom granicom.

a.) nehomogena jednačina druge vrste

$$u(x) - \int_a^x K(x,t)\,u(t)\,dt = f(x)$$

b.) homogena druge vrste

$$u(x) - \int_a^x K(x,t)\,u(t)\,dt = 0$$

c.) nehomogena jednačina prve vrste

$$\int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt = f(x)$$

d.) homogena jednačina prve vrste

$$\int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt = 0$$

Nema posebnih uslova da integralna jednačina bude Voltera--ovog tipa,nego se odredjuje prema tipu problema .Jednačine Voltera-ovog tipa prve vrste se obično rešavaju preko jednačina druge vrste.

3. Integralna jednačina sa slabim singularitetom

$$u(x) - \int_a^b \frac{A(x,t)}{|x-t|^{\alpha}}\, u(t)\, dt = f(x) \qquad a \leq x \leq b \qquad a \leq t \leq b$$

A(x,t) je ograničeno $\quad 0 < \alpha < 1$

4. Fredholmovski tip sa diferencnim jezgrom

$$a u(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\, u(t)\, dt = f(x)$$

5. Voltera-ov tip sa diferencnim jezgrom

a.) $$a u(x) - \int_0^x K(x-t)\, u(t)\, dt = f(x)$$

b.) $$a u(x) - \int_{-\infty}^x K(x-t)\, u(t)\, dt = f(x)$$

6. jednačine integralnih transformacija

a.) kompleksna Furije transformacija fredholmovske jednačine prve vrste

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, e^{-itx}\, dt = f(x)$$

b.) kosinusna transformacija

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} u(t) \cos tx\, dt = f(x)$$

c.) sinusna transformacija

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} u(t) \sin tx\, dt = f(x)$$

d.) Laplace-ova transformacija

$$\int_0^{\infty} u(t)\, e^{-tx}\, dt = f(x) \qquad x > 0$$

e.) Melin-ova transformacija

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} u(t)\, dt = f(x)$$

7. jednačina Viner-Hoff-a

$$u(x) - \int_0^{\infty} k(x-t)\, u(t)\, dt = f(x)$$

8. Abel -ova jednačina

$$\int_a^x \frac{u(t)\, dt}{(x-t)^{\alpha}} = f(x) \qquad 0<\alpha<1$$

9. singularne integralne jednačine

a.) opšta singularna integralna jednačina

$$a(t)u(t) - b(t)\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{u(\xi)}{\xi - t}\, d\xi + \int_L k(t,\xi)\, u(\xi)\, d\xi = f(t)$$

K(t,ξ) - jezgro fredholmovskog tipa

L - glatka zatvorena kriva u kompleksnoj ravni

b.) karakteristična singularna integralna jednačina

$$a(t)\, u(t) - b(t)\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{u(\xi)\, d\xi}{\xi - t}$$

10. nelinearne integralne jednačine

a.) Hamerstein - ova integralna jednačina

$$u(x) - \int_{\Omega} k(x,t)\, F[t, u(t)]\, dt = 0$$

b.) Urison - ova integralna jednačina

$$u(x) - \int_{\Omega} k(x,t,u(t))\, dt = 0$$

Pošto je tema ovog rada singularna integralna jednačina,prethodno je potrebno izneti neke pojmove iz teorije funkcija kompleksnih promenljivih,prvenstveno integrale Koši tipa i Riman- ov granični problem.

I N T E G R A L K O Š I T I P A

Košijeva teorema, integral analitičke funkcije po kompleksnoj ravni.

Pretpostavimo da je funkcija analitička u posmatranoj oblasti tj. da je u svakoj tački posmatrane oblasti funkcija definisana i diferencijabilna,odnosno u svakoj tački važe uslovi Koši-Rimana.

Imamo funkciju analitičku u oblasti D,koju možemo pretstaviti kao

$$f(z) = u + i\,v \qquad dz = dx + i\,dy$$

Uočimo u kompleksnoj ravni neku glatku,zatvorenu i orijentisanu krivu L i potražimo integral po toj konturi.

$$\oint_L f(z)\,dz = \oint u\,dx - v\,dy + i\oint u\,dy + v\,dx$$

Ako je za $\oint u\,dy + v\,dx$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$

imamo prvi uslov Koši-Rimana.

Ako je za $\oint u\,dx - v\,dy$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

to je drugi uslov Koši-Rimana.

Integral totalnog diferencijala ne zavisi od puta,a pošto je putanja zatvorena kriva,njen integral će biti jednak nuli.

$$\oint_L f(z)\,dz = 0$$

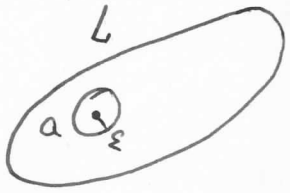
Ako je funkcija f(z) analitička u oblasti D,koja je obuhvaćena konturom L,i na samoj konturi,onda je i njen integral po toj konturi jednak nuli.

$$\oint_{L_1} f(z)\,dz = \oint_{L_2} f(z)\,dz$$

U oblasti analitičnosti funkcije f(z),možemo menjati konture i deformisati ih na proizvoljan način.

Košijeve formule

Prva Košijeva formula



Uočimo neku zatvorenu konturu L,i unutar obuhvaćene oblasti tačku a. Funkcija f(z) je analitička i izraz

$$\oint_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z-a} = 2\pi$$

je takodje analitička funkcija,izuzev možda tačke z=a.

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z)-f(a)+f(a)}{z-a}\,dz = \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz + \oint_{C_L} f(a)\,\frac{dz}{z-a}$$

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a) + \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz$$

Pustimo da se krug sužava tj. da poluprečnik teži nuli i potražimo moduo ovog integrala

$$\left|\oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz\right| \leq \oint_{C_\varepsilon} \frac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|}\,dz \leq \frac{\max\limits_{za\,C_\varepsilon} |f(z)-f(a)|}{\varepsilon}\,2\pi\varepsilon$$

kad poluprečnik teži nuli, tačka z se približava tački a , a funkcija f(z) teži f(a), pa ceo izraz postaje jednak nuli.

Prema tome dokazali smo da je integral po zatvorenoj konturi tipa

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a)$$

pri čemu je funkcija f(z) analitička po konturi L.

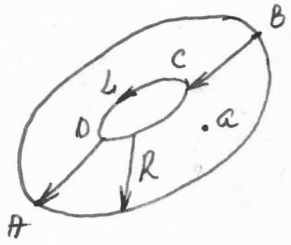
$$\oint_L \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a)$$ prva Košijeva formula

Iz prve Košijeve formule sledi

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{dz}{z-a} = \delta(z-a)$$

gde je $\frac{dz}{z-a}$ primenjeno kao operator.

Druga Košijeva formula



Imamo zatvorenu konturu L i funkcija f(z) je analitička van oblasti oivičene konturom. Centar kruga ne mora biti u oblasti L.

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

dopunski uslov $f(\infty)=0$. Za konturu DCBAD integral je jednak nuli, jer je funkcija svuda analitička.

$$\oint_{AB} + \int_{BC} + \oint_{CD} + \int_{DA} = 2\pi i f(a)$$

$$\int_{C_R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \oint_L \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a)$$

$$\left|\int_{C_R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz\right| \leq \oint_{C_R} \frac{|f(z)|}{|z-a|}\,dz \leq \oint_{C_R} \frac{|f(z)|}{|z|-|a|}\,dz = \frac{1}{R}\int \frac{f(z)}{1-\frac{|a|}{R}} \leq$$

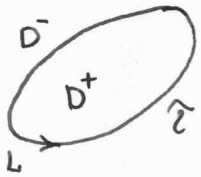
$$\leq \frac{1}{R}\,\frac{\max\limits_{C_R} f(z)}{1-\frac{|a|}{R}}\,2\pi R = \max f(\infty) = 0$$

Integral po konturi L, kad je funkcija van konture i iščezava u beskonačnosti.

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-a}\,dz = -2\pi i f(a)$$

Specijalni oblik druge Košijeve formule.

Opštiji oblik Košijeve formule



Imamo glatku zatvorenu, orijentisanu konturu L, kao na slici.

Ako je funkcija f(z) analitička u oblasti D^+ i neprekidna po konturi i u D^+, onda je za tačku z u D^+

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f(z) & u\ D^+ \\ 0 & u\ D^- \end{cases}$$

Ako je funkcija f(z) analitička u oblasti D^- i neprekidna, kako u D^- tako i na samoj konturi L, onda je:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f(\infty) & u\ D^+ \\ f(\infty)-f(z) & u\ D^- \end{cases}$$

Košijeve formule rešavaju granični problem analitičkih funkcija.

I N T E G R A L K O Š I T I P A

Integral oblika

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

nazivamo integralom Koši tipa.

$\varphi(\tau)$ - gustina

$\frac{1}{\tau - z}$ - jezgro integrala.

Integral Koši tipa $\phi(z)$ pretstavlja funkciju, koja je analitička u celoj oblasti kompleksne promenljive, izuzev tačaka same konture L.

Ako je L-otvorena kontura, $\phi(z)$ će biti analitička funkcija po celoj površini linija osobina L (dopunimo samu konturu do zatvorene).

Ako je L-zatvorena kontura, koja deli svu površinu na unutrašnju oblast D^+ i spoljašnju oblast D^- (podrazumevamo uobičajeni smer obilaska konture), tada se $\phi(z)$ raspada na dve samostalne funkcije $\phi^+(z)$ odredjenu u D^+ i $\phi^-(z)$ odredjenu u D^-. Funkcije $\phi^+(z)$ i $\phi^-(z)$, nazivaju se parcijalne analitičke funkcije.

Heleder-ov uslov

Uslov Heldera se koristi da bi se velik broj neprekidnih funkcija razbio na klase, u zavisnosti od reda veličine modula neprekidnosti. Nama je najvažnija klasa funkcija, čiji

je modul neprekidnosti stepena funkcija priraštaja argumenta.

Neka je L-glatka kriva, $\varphi(t)$-funkcija tačaka ove krive. Pretpostavimo da funkcija $\varphi(t)$ zadovoljava uslov Heldera za neke dve tačke krive.

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A\,|t_2 - t_1|^{\lambda} \qquad 1.$$

A, λ - moraju biti pozitivni brojevi. A-Helderova konstanta
λ - Helderov eksponent

Ako bi Helderov eksponent bio veći od jedinice, moralo bi biti $\varphi'(t)=0$ odnosno $\varphi(t)=\text{Const}$, zato mora biti

$$0<\lambda\leq 1$$

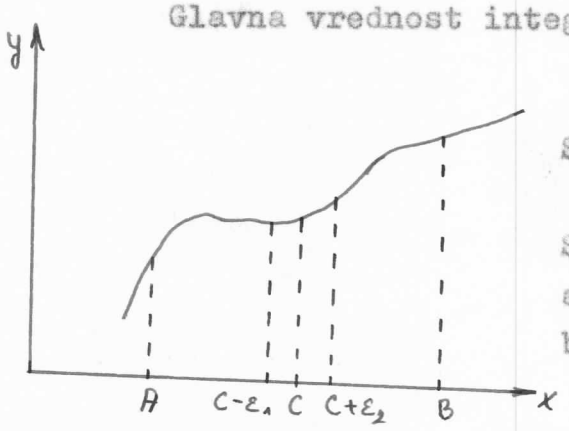
Ako je $\lambda=1$, uslov Heldera prelazi u uslov Lifšica. Ukoliko su t_1 i t_2 blizu, a uslov Heldera je ispunjen za neko λ_1, to će on biti ispunjen i za svako $\lambda<\lambda_1$. Obrnuto ne važi. Na ovaj način, manjem pripada šira klasa funkcija; najuža je klasa funkcija koje zadovoljavaju uslov Lifšica.

Ukoliko funkcije $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$ zadovoljavaju uslov Heldera (sa eksponentima λ_1 i λ_2), onda će i njihov zbir, proizvod i količnik (ukoliko je imenilac $\neq 0$ i ne teži nuli) zadovoljavati uslov Heldera sa eksponentom

$$\lambda=\min(\lambda_1, \lambda_2)$$

Dalje ćemo razmatrati slučaj kada je uslov Heldera ispunjen svuda na konturi, izuzev nekih datih tačaka. Smatraćemo da je uslov Heldera ispunjen u tom smislu da su isključene tačke na kraju konture.

Glavna vrednost integrala



$$S=\int_A^B f(x)\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left\{\int_A^{C-\varepsilon_1} f(x)dx+\int_{C+\varepsilon_2}^{B} f(x)dx\right\}$$

S-može biti:

a. konačno nesvojstven integral

b. beskonačno nesvojstven integral (nema smisla).

U tački C, naša podintegralna funkcija teži nuli, a tačka C se nalazi unutar intervala integracije. Isečemo okolinu tačke C i integralimo po ostatku, a zatim prelazimo na limes, kada dužina izrezanog intervala (ε_1 i ε_2) teži nuli.

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left\{\int_A^{C-\varepsilon_1} f(x)\,dx+\int_{C+\varepsilon_2}^{B} f(x)dx\right\}$$

Ako ovaj limes postoji,naziva se nesvojstvenim integralom neograničene funkcije f(x) po intervalu (A,B).Bitno je da se izrezana okolina bira sasvim proizvoljno,samo da njene razmere teže nuli.Znači da ε_1 i ε_2 teže nuli po bilo kakvom zakonu,nezavisno jedan od drugog.

Nesvojstveni integral postoji ako je

$$|f(x)| < \frac{n}{|x-c|^{\alpha}} \qquad \alpha < 1 \qquad *$$

Posmatrajmo funkciju specijalnog tipa $f(x)=\frac{1}{x-c}$ koja ne zadovoljava gornji uslov

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} \frac{dx}{x-c} \right\} = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \left\{ \ln\frac{-\varepsilon_1}{a-c} + \ln\frac{b-c}{\varepsilon_2} \right\} =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \left\{ \ln\frac{b-c}{c-a} + \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right\} = \ln\frac{b-c}{c-a} + \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

U opštem slučaju ε_1 i ε_2 su medjusobno nezavisni,integral je potpuno neodredjen.Odredjene vrednosti ćemo naći,ako imamo neku funkcionalnu zavisnost $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_2)$,koju možemo sami izabrati.Ako je $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$,onda je $\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=0$ i takvu vrednost integrala nazivamo glavna vrednost i obeležavamo sa $\mathcal{P}$, Γ

$$\mathcal{P}\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a}$$

Uzmimo opštiji slučaj $\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx$

gde je $\varphi(x)$-neka funkcija,koja zadovoljava uslov Heldera u intervalu (a,b) i potražimo glavnu vrednost ovog integrala.

$$\mathcal{P}\int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)+\varphi(c)}{x-c}\,dx = \mathcal{P}\int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}\,dx + \varphi(c)\,\mathcal{P}\int_a^b \frac{dx}{x-c}$$

Zbog uslova Heldera

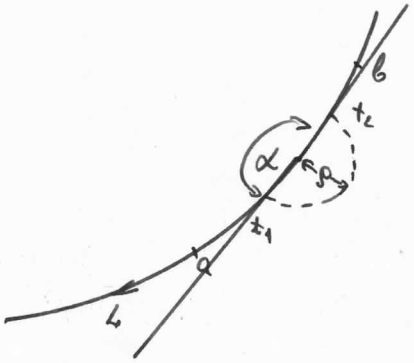
$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}\right| < \frac{A}{|x-c|^{1-\lambda}}$$

prvi integral na desnoj strani postoji kao nesvojstveni,a glavnu vrednost drugog smo već izračunali.Zbog uslova (*) mora biti $|1-\lambda|<1$ pa prvi integral na desnoj strani ima konačnu a ne glavnu vrednost.

$$\mathcal{P}\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}\,dx + \varphi(c)\,\mathcal{P}\int_a^b \frac{dx}{x-c}$$

$$\mathcal{P}\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}\,dx + \varphi(c)\ln\frac{b-c}{c-a}$$

Integral u kompleksnoj ravni



Imamo glatku, otvorenu krivu u kompleksnoj ravni i uočimo dve tačke t_1 i t_2. Pretpostavljamo da funkcija $\varphi(\tau)$ zadovoljava uslov Heldera na otsečku (a,b)

$$\mathcal{P}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau = \mathcal{P}\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau + \varphi(t)\,\mathcal{P}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}$$

Slično prethodnom, prvi integral na desnoj strani je konačan tj. nema glavnu vrednost.

$$\mathcal{P}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau = \lim_{\rho\to 0}\int_{L-l}\frac{d\tau}{\tau-t} = \lim_{\rho\to 0}\left\{\int_a^{t_1}\frac{d\tau}{\tau-t}+\int_{t_2}^{b}\frac{d\tau}{\tau-t}\right\} = \lim_{t_2\to t_1}\left\{\ln\frac{t_1-t}{a-t}+\ln\frac{b-t}{t_2-t}\right\} =$$

$$= \lim_{t_2\to t_1}\left\{\ln\frac{b-t}{a-t}+\ln\frac{t_1-t}{t_2-t}\right\} = \ln\frac{b-t}{a-t}+\lim_{t_2\to t_1}\ln\frac{t_1-t}{t_2-t}$$

$\frac{t_1-t}{t_2-t}$ -neki kompleksni broj

$$\frac{t_1-t}{t_2-t} = \left|\frac{t_1-t}{t_2-t}\right| e^{i\arg\frac{t_1-t}{t_2-t}} \qquad \ln\frac{t_1-t}{t_2-t} = \ln\frac{|t_1-t|}{|t_2-t|}+i\arg\frac{t_1-t}{t_2-t} = i\alpha$$

$$\mathcal{P}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau = \ln\frac{b-t}{a-t}+i\lim_{t_2\to t_1}\alpha = \ln\frac{b-t}{a-t}+i\pi$$

$$\mathcal{P}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau = \int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau+\varphi(t)\ln\frac{b-t}{a-t}+i\pi\,\varphi(t)$$

Ako je kontura L još i zatvorena tj. a=b, glavna vrednost integrala po zatvorenoj konturi će biti

$$\mathcal{P}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau = \oint_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau+i\pi\,\varphi(t)$$

Ovo je integral singulariteta prvog reda, gde je, u opštem slučaju, integral neodredjen ako singularitet izolujemo.

$$\mathcal{P}\oint_L \frac{d\tau}{\tau-t} = i\pi$$ glavna vrednost integrala, ako je $\varphi=1$

Osobine integrala Koši tipa

Integral Koši tipa poseduje osobine običnog integrala: integral zbira jednak je zbiru integrala, u proizvodu možemo konstantu izvući ispred integrala, kao i druge osobine o kojima ćemo nešto detaljnije reći.

Pravilo zamene promenljive

Ako funkcija $\tau=\alpha(\xi)$ ima neprekidan prvi izvod $\alpha'(\xi)$

nigde nije nula i preslikava konturu L u L′ uzajamno jednoznačno, biće

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = \int_{L'} \frac{\varphi[\alpha(\xi)]\,\alpha'(\xi)}{\alpha(\xi)-\alpha(\eta)}\,d\xi$$

gde je $t=\alpha(\eta)$

Integraljenje po delovima

Ako je $\varphi(\tau)$-neprekidna, diferencijabilna funkcija i tačka t ne pripada krajevima konture L (a i b), važi sledeća formula integracije po delovima.

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = \pm 2i\pi\,\varphi(t) + \varphi(b)\ln(b-t) - \varphi(a)\ln(a-t) - \int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau-t)\,d\tau$$

Za prvi član uzimamo znak +, ako je presek, koji spaja tačku t sa beskonačno udaljenom tačkom (pomoću kojeg se dobija jednoznačna grana $\ln(\tau-t)$) proveden sa desna od L, i znak - u suprotnom slučaju.

Granična vrednost integrala

Za analitičku funkciju, odredjenu integralom Koši tipa, kontura integracije je posebna linija. Važno je razmotriti ponašanje integrala Koši tipa na samoj (granici) konturi integracije. Videćemo da integral Koši tipa ima neprekidnu graničnu vrednost pri približavanju konturi sa svake njene strane, ali su ove granične vrednosti različite, pri prelazu preko konture nastaje skok. Važno je da pri tom gustina integrala zadovoljava uslov Heldera, kao potencijal dvojnog sloja, i neprekidna je.

Ako gustina $\varphi(\tau)$, zadovoljava uslov Heldera, i tačka t se ne podudara sa krajevima konture, tada će funkcija

$$\Psi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z}\,d\tau$$

pri prelazu kroz tačku (z=t) konture, prolaziti kao neprekidna funkcija tj. imaće odredjene granične vrednosti pri približavanju z ka t sa svake strane po svakom putu.

Postojanje granične vrednosti funkcije $\Psi(z)$ je lokalno svojstvo tj. zavisi od osobina gustine $\varphi(\tau)$ u okolini date tačke t. Pri dokazivanje smo neposredno procenjivali integral uzet po proizvoljno malom luku konture oko tačke t, za koji je ispunjen uslov Heldera. Za neprekidnost funkcije $\Psi(z)$ u tački t, nije potrebno da $\varphi(t)$ zadovoljava uslov Heldera i na ostalim delovima konture, tamo ona može biti prekidna ukoliko su zadovoljeni uslovi integracije.

Diferenciranje integrala

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$$

Pored same funkcije i njen izvod mora da zadovoljava uslov Heldera. Ukoliko i funkcija i njen n-ti izvod zadovoljavaju uslov Heldera biće

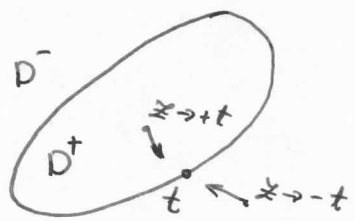
$$\frac{d^n}{dt^n}\phi(t) = \frac{d^n}{dt^n}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(n)}(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = i\pi\,\varphi(t) - \varphi(b)\ln(b-t) - \varphi(a)\ln(a-t) - \int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau - t)\,d\tau$$

Ako je kriva zatvorena biće

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = i\pi\,\varphi(t) - \int_L \varphi'(t)\ln(\tau - t)\,d\tau$$

Formule Sahockog



Kontura L može biti i otvorena, tada je dopunimo bilo kakvom krivom pri čemu je na dopunjenom delu $\varphi(\tau)=0$

Posmatramo integral Koši tipa

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

pri čemu funkcija $\varphi(t)$ zadovoljava uslov Heldera.

$$|\varphi(\tau) - \varphi(t)| < A|\tau - t|^{\lambda} \qquad 0 < \lambda \leq 1$$

Za ispitivanje graničnih vrednosti $\phi(z)$ u nekoj tački konture t, uzećemo već poznatu funkciju

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z}d\tau$$

i uvesti oznake

$\psi^+(z) = \lim_{z\to +t}\psi(z)$ $\qquad$ $\phi^+(z) = \lim_{z\to +t}\phi(z)$

$\psi^-(z) = \lim_{z\to -t}\psi(z)$ $\qquad$ $\phi^-(z) = \lim_{z\to -t}\phi(z)$

Funkcija $\psi(z)$ ne trpi skok pri prelasku tačke z, kroz bilo koju tačku konture.

$$\psi^+(t) = \psi^-(t) = \psi(t)$$

dokaz:

$$\left|\frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\right| < A|\tau - t|^{\lambda - 1}$$

pustimo da $\tau \to t$ $\qquad$ $|\varphi'(t)| < \infty$ za svaku tačku konture

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\oint_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \phi(z) - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\oint_L \frac{d\tau}{\tau - z}$$

pri čemu poslednji integral na desnoj strani shvatamo u smislu glavne vrednosti.

1. pustimo da z teži +t

$$\psi^{+}(t) = \phi^{+}(t) - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \lim_{z \to +t} \oint_L \frac{d\tau}{\tau - z}$$

dok z teži +t, tačka je u oblasti D^+ i možemo primeniti Košijeve formule

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 1 & z \in D^+ \\ 0 & z \in D^- \end{cases} \qquad \psi^{+}(t) = \phi^{+}(t) - \varphi(t)$$

2. pustimo da z teži -t

$$\psi^{-}(t) = \phi^{-}(t) - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \lim_{z \to -t} \oint_L \frac{d\tau}{\tau - z}$$

pošto je tačka u oblasti D^- koristimo drugu Košijevu formulu

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} f(\infty) = 1 & z \in D^+ \\ f(\infty) - f(z) = 0 & z \in D^- \end{cases} \qquad \psi^{-}(t) = \phi^{-}(t)$$

3. jednostavno zamenimo

$$\psi(t) = \phi(t) - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \oint_L \frac{d\tau}{\tau - t} \qquad \oint_L \frac{d\tau}{\tau - t} = 2\pi i$$

$$\psi(t) = \phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t)$$

$\psi^{+}(t) = \psi^{-}(t) = \psi(t) = \phi^{-}(t)$ uključujući i rezultate pod 1., 2. i 3. dobijamo

$$\phi^{+}(t) - \varphi(t) = \phi^{-}(t) \qquad \phi(t) - 1/2\,\varphi(t) = \phi^{-}(t)$$

i dobijamo prvi oblik formula Sahockog.

$$\text{I} \quad \phi^{+}(t) - \phi^{-}(t) = \varphi(t)$$

pri prolasku tačke z kroz tačku t na konturi, iz D^+ u D^-, integral Koši tipa trpi skok, koji je jednak njegovoj gustini u toj tački (t).

$$\text{II} \quad \phi^{+}(t) + \phi^{-}(t) = 2\,\phi(t) = \frac{1}{\pi i} \oint_L \frac{d\tau}{\tau - t}$$

Formule Sahockog se koriste i u drugom obliku

$$\phi^{+}(t) = 1/2\,\varphi(t) + \phi(t) \qquad \phi^{-}(t) = -1/2\,\varphi(t) + \phi(t)$$

Ako je L-glatka kontura (zatvorena ili otvorena) i $\varphi(\tau)$-funkcija tačaka ove konture, koja zadovoljava uslov Heldera, tada integral Koši tipa

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau$$

ima granične vrednosti $\phi^{+}(t)$ i $\phi^{-}(t)$ u svim tačkama konture (osim krajeva) prilikom približavanja konturi sa leva ili sa desna po nekom putu. Ove granične vrednosti se izražavaju preko integrala $\phi(t)$ i njegove gustine $\varphi(t)$, u skladu sa navede-

nim formulama Sahockog.

Sahocki je ove formule formulisao 1873 godine samo za zatvorenu glatku krivu. 1935 godine je Trivalov ove formule primenio na bilo koju glatku krivu, pod već pomenutim uslovima.

Formula Poenkare-Bertran-a

Promena reda integracije u dvostrukom singularnom integralu.

Pretpostavljamo da je L-glatka, zatvorena ili otvorena kontura. Neka je dvostruki integral I (jedan običan, drugi singularan).

$$I = \int_L \omega(\tau, z)\, d\tau \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\, d\tau_1$$

gde funkcija $\varphi(\tau, \tau_1)$ zadovoljava uslov Heldera po obe promenljive, a funkcija $\omega(\tau, z)$ je integrabilna po τ za svako z.

Označimo integral dobijen posle zamene reda integracije sa I'

$$I' = \int_L d\tau_1 \int_L \frac{\omega(\tau, z)\, \varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\, d\tau$$

Pri navedenoj pretpostavci (u odnosu na funkciju φ, ω i konturu L), integral I dopušta izmenu reda integracije

$$\int_L \omega(\tau, z)\, d\tau \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\, d\tau_1 = \int_L d\tau_1 \int_L \frac{\omega(\tau, z)\, \varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\, d\tau$$

Posmatrajmo par dvostrukih singularnih integrala, koji imaju različite redove integracije

$$I(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\, d\tau_1$$

$$I_1'(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L d\tau_1 \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)}\, d\tau$$

Oba integrala su singularna i integrabilna. Razložimo funkciju iz drugog integrala na proste faktore

$$\frac{1}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)} = \frac{A}{\tau - t} + \frac{B}{\tau_1 - \tau} = \frac{A\tau_1 - A\tau + B\tau + Bt}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)}$$

$$B - A = 0 \qquad A = B = \frac{1}{\tau_1 - t}$$

$$I_1(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t} \frac{1}{\pi i} \left\{ \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - t}\, d\tau - \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - \tau_1}\, d\tau \right\}$$

Pošto po pretpostavci, funkcije $\varphi(\tau, \tau_1)$ zadovoljavaju uslov Heldera, integral I_1 postoji kao nesvojstveni. Ovakvo rasudjivanje važi za sve tačke, koje pripadaju konturi, osim

krajnjih tačaka, čije ponašanje bi trebalo posebno ispitati.

Integrali I i I_1 se ne razlikuju samo po redu integracije, već nisu jednaki.

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - t}\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau = \varphi(t,t) + \frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}\,d\tau$$

Da bi to dokazali obrazujmo I(z) i $I_1(z)$, zamenjujući u integralima I(t) i $I_1(t)$ promenljivu t sa z, koja se menja po celoj površini. Pošto tačka z ne pripada konturi L, integrali I(z) i $I_1(z)$ će biti

$$I(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - z}\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1$$

$$I_1(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{(\tau-z)(\tau_1-\tau)}\,d\tau$$

Oni nisu singularni i možemo menjati njihov red integracije odnosno

$$I(z) = I_1(z)$$

Ukoliko pustimo da z teži t iznutra, a zatim spolja, i granične vrednosti ova dva integrala će biti jednake, odnosno

$$I^+(t) = I_1^+(t) \qquad I^-(t) = I_1^-(t)$$

Koristeći drugu formulu (prvi oblik) formula Sahockog dobijamo

$$2I(t) = I^+(t) + I^-(t) \implies I(t) = 1/2\left\{I^+(t) + I^-(t)\right\}$$

$$I_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\psi(z,\tau_1)}{\tau_1 - z}\,d\tau_1$$

gde je $\psi(z,\tau_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau - z}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau-\tau_1}\,d\tau$

Sada na osnovu formula Sahockog tražimo $I_1^+(t)$ i $I_1^-(t)$

$$I_1^+(t) = \psi^+(t,t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\psi^+(z,\tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1$$

$$I_1^-(t) = -\psi^-(t,t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\psi^-(z,\tau_1)}{\tau_1-t}\,d\tau_1 \qquad \Big/ +$$

Prvo t u indeksu se javlja zbog $\lim\limits_{z\to t}$, a drugo što τ zamenjujemo sa t

$$I(t) = \frac{1}{2}\psi^+(t,t)_{\substack{z\to t\\ \tau\to t}} - \frac{1}{2}\psi^-(t,t)_{\substack{z\to -t\\ \tau_1\to t}} + \frac{2}{2\pi i}\int_L \frac{\psi^+(\tau,\tau_1)_{z\to +t} + \psi^-(t,\tau_1)_{z\to -t}}{\tau_1 - t}\,d\tau_1$$

Sada na funkcije pod 1. i 2. (ψ) primenjujemo formule Sahockog i dobijamo

$$1.\ \psi^+(t,t)_{\substack{z\to +t\\ \tau\to t}} = \varphi(t,t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\varphi(\tau,t)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\varphi(\tau,t)}{\tau-t}\,d\tau = \varphi(t,t)$$

2. $$\underset{\substack{z\to -t\\ \tau_1\to t}}{\varphi^-(t,t)} = -\varphi(t,t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\varphi(\tau,t)}{\tau-t}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\varphi(\tau,t)}{\tau-t}\,d\tau = -\varphi(t,t)$$

$$I(t) = \varphi(t,t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^+_{z\to+t}(t,\tau_1) + \varphi^-_{z\to-t}(t,\tau_1)}{\tau_1-t}\,d\tau$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{z\to+t}{\varphi^+(t,\tau_1)} &= \varphi(t,\tau_1) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau-t}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau-\tau_1}\,d\tau \\ \underset{z\to-t}{\varphi^-(t,\tau_1)} &= -\varphi(t,\tau_1) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau-t}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau-\tau_1}\,d\tau \end{aligned}\right\} +$$

$$\underset{z\to+t}{\varphi^+(t,\tau_1)} + \underset{z\to-t}{\varphi^-(t,\tau_1)} = \frac{1}{\pi i}\int_L 2\varphi(\tau,\tau_1)\left\{\frac{1}{\tau-t} - \frac{1}{\tau-\tau_1}\right\}d\tau$$

$$\frac{1}{\tau-t} - \frac{1}{\tau-\tau_1} = (\tau_1-t)\frac{1}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}$$

$$I(t) = \varphi(t,t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau_1}{\cancel{\tau_1-t}}\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}\,(\cancel{\tau_1-t})\,d\tau$$

$$I(t) = \varphi(t,t) + \frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}\,d\tau$$

$I(t) = \varphi(t,t) + I_1(t)$ formula Poenkare-Bertrana

ili u razvijenom obliku, kad podintegralna funkcija zavisi samo od jednog argumenta

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-t}\,d\tau_1 = \varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}\,d\tau\,\frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1 =$$

$$= \varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \varphi(\tau_1)\,d\tau_1\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}$$

pošto je $\dfrac{1}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)} = \dfrac{A}{\tau-t} + \dfrac{B}{\tau_1-\tau}$ $\quad A = B = \dfrac{1}{\tau_1-t}$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-t}\,d\tau_1 = \varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-t}\,d\tau_1\,\frac{1}{\pi i}\int_L \left(\frac{1}{\tau-t} - \frac{1}{\tau-\tau_1}\right)d\tau$$

$$\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{d\tau}{\tau-t}\,\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1 = \varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-t}\,d\tau_1\,\frac{1}{\pi i}\left\{\oint_L \frac{d\tau}{\tau-t} - \oint_L \frac{d\tau}{\tau-\tau_1}\right\}$$

$$\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{d\tau}{\tau-t}\,\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1 = \varphi(t)$$

Formula Poenkare-Bertrana, kad funkcija zavisi samo od jednog argumenta.

Ako sa $\hat{S}$ obeležimo operator

$$\hat{S} = \frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{d\tau}{\tau-t}$$

tada je

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{d\tau}{\tau-t}\,\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{d\tau_1}{\tau_1-\tau} = 1$$

ili rečima: kvadrat singularnog integrala je operator,što je posledica formule Poenkare-Bertrana.

primer:

Imamo integralnu jednačinu,koju treba rešiti

$$\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1 = f(\tau) \qquad \varphi(t) = ?$$

Celu jednačinu pomnožimo sa $\hat{S}$

$$\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{d\tau}{\tau-t}\,\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1 = \frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{f(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$$

$\tau_1 \to t$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{f(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$$

R I M A N O V G R A N I Č N I P R O B L E M

Indeks funkcije

Ako je L-glatka,zatvorena kontura i G(t) funkcija njenih tačaka,koja je neprekidna i nigde ne teži nuli,indeksom funkcije G(t),po konturi L,nazivamo priraštaj njenog argumenta (pri ophodu konture u pozitivnom pravcu) podeljen sa 2π

$$\varkappa = \mathrm{Ind}\ G(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg G(t)\right]_L$$

Indeks funkcije možemo izraziti preko logaritma

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln G(t)\right]_L$$

kao i preko integrala

$$\varkappa = \mathrm{Ind}\ G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_L d\arg G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L d\ln G(t)$$

Na osnovu neprekidnosti G(t),priraštaj argumenta pri ophodu konture mora biti deljiv sa 2π

Osobine:

1. Indeks funkcije,neprekidne po zatvorenoj konturi, koja nije nigde nula,biće ili ceo broj ili nula.

2. Indeks proizvoda funkcija jednak je zbiru indeksa faktora.Indeks količnika funkcija jednak je razlici indeksa brojioca i imenioca.

3. Ako je G(t) granična vrednost funkcija (analitičke unutar ili van konture),njen indeks će biti jednak broju nula unutar konture ili broju nula van konture sa negativnim znakom.

4. Ako je funkcija G(z) analitička unutar konture,sa isključenjem konačnog broja tačaka (u kojima može imati pol) tada broj nula zamenjujemo razlikom broja nula i broja polova.

Izračunavanje indeksa

U opštem slučaju,izračunavanje uindeksa se može izvršiti preko formule

$$\varkappa = \mathrm{Ind}\ G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_L d\arg G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L d\ln G(t)$$

uvrstivši $d\arg G(t) = d\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\eta(s)}{\mu(s)}$

gde su η i μ parametarske jednačine neke zatvorene krive

$$G(t) = G\left[t_1(s) + i\,t_2(s)\right] = \mu(s) + i\,\eta(s)$$

Za neke jednostavnije slučajeve postoji algoritam za izračunavanje indeksa.

Primetimo da,ako je G(t) granična vrednost analitičke funkcije,konturu L možemo menjati ne menjajući veličinu

indeksa. Indeks će se svakako menjati kada se kontura deformiše prolazi kroz nuli ili pol G(z).

Rimanov problem za jednostruko povezanu oblast

Data glatka, zatvorena kontura L, deli oblast kompleksne promenljive na unutrašnju D^+ i spoljašnju D^-. Date su dve funkcije tačak konture G(t) i g(t), koje zadovoljavaju uslov Heldera, pri čemu G(t) ne teži nuli. Treba naći dve funkcije (ili jednu parcijalnu analitičku funkciju $\emptyset(z)$): $\emptyset^+(z)$-analitičku u D^+, i $\emptyset^-(z)$-analitičku u D^- (uključujući $z=\infty$), koje na konturi zadovoljavaju linearni uslov

$$\emptyset^+(t) = G(t)\,\emptyset^-(t) \qquad \text{nomogeni problem}$$

$$\emptyset^+(t) = G(t)\,\emptyset^-(t) + g(t) \qquad \text{nehomogeni problem}$$

G(t)-koeficijent Rimanovog problema
g(t)-slobodni član Rimanovod problema

Nalaženje parcijalne analitičke funkcije ako je dat skok na granici

Funkcija G(t) na zatvorenoj konturi L je data i zadovoljava uslov Heldera. Treba da nadjemo parcijalnu analitičku funkciju $\emptyset(z)$, koja iščezava u beskonačnosti i pri prelazu kroz konturu L trpi skok $\varphi(t)$, odnosno zadovoljava uslov

$$\emptyset^+(t) - \emptyset^-(t) = \varphi(t)$$

Na osnovu formula Sahockog, rešenje problema daje funkcija

$$\emptyset(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

Možemo zaključiti: Proizvoljna funkcija $\varphi(t)$, data na zatvorenoj konturi, koja zadovoljava uslov Heldera, može se pretstaviti kao razlika funkcija $\emptyset^+(t)$ i $\emptyset^-(t)$, koje su granične vrednosti funkcija $\emptyset^+(z)$ i $\emptyset^-(z)$ uz dopunski uslov $\emptyset^-(\infty) = 0$.

Ako odbacimo dopunski uslov $\emptyset^-(\infty) = 0$, rešenje će biti

$$\emptyset(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + C$$

Rešavanje homogenog problema

Pretpostavimo da je homogeni problem

$$\emptyset^+(t) = G(t)\,\emptyset^-(t)$$

moguće rešiti,i da su funkcije $\phi^+(z)$ i $\phi^-(z)$ njegova rešenja. Označimo broj nula funkcija $\phi^+(z)$ i $\phi^-(z)$ u odgovarajućim oblastima D^+, D^- sa N^+ i N^-.Ako uzmemo indeks obeju strana gornje jednačine dobijamo

$$N^+ + N^- = \mathrm{Ind}\, G(t) = \varkappa$$

Indeks koeficijenta Rimanovog problema nazvaćemo indeks problema.Pošto je na levoj strani negativan broj,mogu nastupiti sledeći slučajevi:

1. Da bi Rimanov problem bio rešiv,potrebno je da indeks problema ($\varkappa < 0$) bude negativan,pri čemu funkcije $\phi^+(z)$ i $\phi^-(z)$ po uslovu zadatka nemaju polova.

2. Ako je $\varkappa >$ rešenja problema, funkcije $\phi^+(z)$ i $\phi^-(z)$, imaju ukupno $\varkappa$ nula.

3. Ako je $\varkappa = 0$ rešenje problema nemaju nula.

1. Ako je $\varkappa < 0$ homogeni Rimanov problem je nerešiv. Rešenje zahteva za tražene funkcije $\phi^+(z)$ i $\phi^-(z)$ još $\varkappa + 1$ nezavisnih uslova,za odredjivanje integracionih konstanti.

2. Ukoliko je $\varkappa > 0$,pretpostavimo da koordinatni početak leži u D^+ i uzmimo dopunski uslov $\phi^-(\infty) = 0$ pa će opšte rešenje problema imati oblik

$$\phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} P_\varkappa(z) \qquad \phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)} z^{-\varkappa} P_\varkappa(z)$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{-\varkappa} G(\tau)]}{\tau - z} d\tau$$

Znači,ako je indeks problema pozitivan,imaćemo $\varkappa + 1$ linearno nezavisnih rešenja

$$\phi_k^+(z) = z^k e^{\Gamma^+(z)} \qquad \phi_K^-(z) = z^{k-\varkappa} e^{\Gamma^-(z)} \qquad k=0,1,\dots \varkappa$$

Gore navedeno opšte rešenje sadrži $\varkappa + 1$ proizvoljnih konstanti.

3. $\varkappa = 0$. U ovom slučaju $\ln G(t)$ je jednoznačna funkcija,a $\ln \phi^+(z)$ i $\ln \phi^-(z)$ su analitičke funkcije.Uz dopunski uslov $\phi^-(\infty) = 1$ imaćemo opšta rešenja

$$\phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} \qquad \phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)}$$

Ako odbacimo dopunski uslov $\phi^-(\infty) = 1$ javiće se proizvoljne konstante i rešenje će imati oblik

$$\phi^+(z) = A\, e^{\Gamma^+(z)} \qquad \phi^-(z) = A\, e^{\Gamma^-(z)}$$

Ukoliko je $\phi^-(\infty) = 0$ tada je i $A = 0$ pa problem ima trivijalno

rešenje,nulu.

Možemo zaključiti: Data proizvoljna funkcija G(t) na konturi L (G(t) zadovoljava uslov Heldera),koja ima indeks nula,može se pretstaviti preko odnosa funkcija $\phi^+(t)$ i $\phi^-(t)$, koje su granične vrednosti funkcija analitičkih u oblastima D^+ i D^- i nemaju nula u tim oblastima.Ove funkcije su odredjene do na proizvoljnu konstantu A.

Kanonička funkcija

Kanoničkom funkcijom homogenog Rimanovog problema nazivamo parcijalnu analitičku funkciju,koja zadovoljava granični uslov

$$\phi^+(t) = G(t)\,\phi^-(t)$$

i ima nulti red,svuda u konačnom delu prostora.U beskonačno udaljenoj tački njen red će biti $\varkappa$ .Pri $\varkappa \geqslant 0$ kanonička funkcija nema polova i pretstavlja rešenje graničnog problema - kanoničko rešenje.Pri $\varkappa < 0$ kanonička funkcija ima pol u beskonačnosti i nije rešenje homogenog problema.

Napišimo granične uslove Rimanovog problema u obliku

$$\phi^+(t) = t^{\varkappa}\left[t^{-\varkappa}G(t)\right]\ \phi^-(t)$$

pri svakom $\varkappa$,kanonička funkcija X(z) će biti

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} \qquad X^-(z) = z^{-\varkappa}\, e^{\Gamma^-(z)}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln\left[\tau^{-\varkappa}G(\tau)\right]}{\tau - z}\,d\tau$$

Pri $\varkappa \geqslant 0$,opšte rešenje homogenog problema izraženo preko kanoničke funkcije će biti

$$\phi(z) = X(z)\,P_{\varkappa}(z)$$

Rešenje nehomogenog problema

$$\phi^+(t) = G(t)\,\phi^-(t) + g(t)$$

Zamenimo koeficijent G(t) količnikom graničnih vrednosti kanoničke funkcije homogenog problema

$$G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}$$

$$\frac{\phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}$$

poslednji član na desnoj strani takodje zadovoljava uslov Heldera. Odredimo li ga prema formuli za odredjivanje parcijalne analitičke funkcije po datom skoku, imaćemo

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} = \psi^+(t) - \psi^-(t) \qquad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z}$$

granični uslov je tada

$$\frac{\phi^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{\phi^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t)$$

diskusija:

1. Ako je $\varkappa \geqslant 0$, funkcija $\frac{\phi^-(z)}{X^-(z)}$ ima u beskonačnosti pol reda $\varkappa$, tada

$$\frac{\phi^+(z)}{X^+(z)} - \psi^+(z) = \frac{\phi^-(z)}{X^-(z)} - \psi^-(z) = P_\varkappa(z)$$

odakle imamo rešenje

$$\phi(z) = X(z)\left[\psi(z) + P_\varkappa(z)\right]$$

$$X(z) = e^{\Gamma(z)} \qquad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z}$$

$P_\varkappa$ -polinom stepena $\varkappa$ sa proizvoljnim koeficijentima. Vidimo da ovo rešenje sadrži i opšte rešenje homogenog problema.

2. $\varkappa < 0$ funkcija $\frac{\phi^-(z)}{X^-(z)}$ ima u beskonačnosti nulu reda $-\varkappa$, odnosno jednako je nuli.

$$\frac{\phi^+(z)}{X^+(z)} - \psi^+(z) = \frac{\phi^-(z)}{X^-(z)} - \psi^-(z) = 0$$

$$\phi(z) = X(z)\,\psi(z)$$

U izrazu za funkciju $\phi^-(z)$ prvi faktor ima u beskonačnosti pol reda $-\varkappa$, a drugi kao integral Koši tipa ima u beskonačnosti nulu prvog reda; odnosno $\phi^-(z)$ ima u beskonačnosti pol reda ne većeg od $-\varkappa-1$. Znači ako je $\varkappa < -1$, nehomogeni problem je nerešiv, može se rešiti samo ako slobodni član zadovoljava neke dopunske uslove

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0 \qquad k=1,2,\dots -\varkappa-1$$

kojih ima $-\varkappa-1$. Ukoliko su ti dopunski uslovi ispunjeni jedinstveno rešenje problema će biti

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z)\, P_{\varkappa}(z) \qquad *$$

gde je potrebno staviti $P(z) = 0$.

Ako uzmemo dopunski uslov, da rešenje teži nuli u beskonačno udaljenoj tački, tada moramo uzeti polinom stepena $\varkappa-1$ a ne $\varkappa$. Rešenje pri $\varkappa \geqslant 0$ će biti

$$\phi(z) = X(z)\left[\psi(z) + P_{\varkappa-1}(z)\right] \qquad \text{pri } \varkappa=0 \quad P(z)=0$$

Ako je $\varkappa < 0$ rešenje će biti dato formulom (*) gde je $P(z) = 0$ pri ispunjenju $-\varkappa$ uslova rešivosti

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0 \qquad k = 1,2,\dots -\varkappa$$

Postoji i Rimanov problem za višestruko povezanu oblast, koji može biti takodje homogen i nehomogen, ali ga nećemo posebno razmatrati.

Singularna integralna jednačina i Rimanov problem

Kao što je prethodno navedeno, opšta singularna integralna jednačina je

$$\hat{K}\varphi = a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L k(t,\tau)\,\varphi(\tau)\, d\tau = f(t)$$

koja je homogena ukoliko je $f(t) = 0$, i nehomogena ako je $f(t) \neq 0$. Izraz

$$\hat{K}^0\varphi = a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

je karakterističan deo, a $\int_L k(t,\tau)\,\varphi(\tau) d\tau$ -regularan deo.

Karakteristična jednačina će biti

$$\hat{K}^0\varphi = a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t)$$

$\hat{K}^0$ - karakterističan operator. Ako regularan deo označimo sa

$$\hat{k}\varphi = \int_L k(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

možemo opštu singularnu jednačinu operatorski napisati kao

$$\hat{K}\varphi = \hat{K}^{o}\varphi + \hat{k}\varphi = f(t)$$

Transponovana jednačina će biti

$$\hat{K}'\psi = a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L k(\tau,t)\psi(\tau)\,d\tau = 0$$

$\hat{K}'$- je transponovan operatoru $\hat{K}$

$$\hat{K}o'\psi = a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)}{\tau - t}\,\psi(\tau)\,d\tau = 0$$

$$\hat{K}'^{o}\psi = a(t)\psi(t) - \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$$

Svodjenje karakteristične jednačine na Rimanov problem

Karakteristična singularna integralna jednačina je jednostavnija za rešavanje od opšte,i zato ćemo prvo nju da rešimo.

$$\hat{K}^{o}\varphi = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t) \qquad 1.$$

Uvedimo parcijalnu analitičku funkciju,datu integralom Koši tipa,čija gustina je traženo rešenje karakteristične jednačine.

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

Prema formulama Sahockog biće

$$\varphi(t) = \phi^{+}(t) - \phi^{-}(t)$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \phi^{+}(t) + \phi^{-}(t)$$

što uvrstimo u polaznu jednačinu (1) i rešimo je po $\phi^{+}(t)$.Dobijemo da je parcijalna analitička funkcija $\phi(z)$ rešenje Rimanovog graničnog problema

$$\phi^{+}(t) = G(t)\phi^{-}(t) + g(t) \qquad 2.$$

gde je

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} \qquad g(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}$$

Pošto je tražena funkcija $\phi(z)$ pretstavljena integralom Koši

tipa, ona mora zadovoljavati dopunski uslov $\phi^-(\infty) = 0$

$$\mathrm{Ind}\,\frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} = \text{indeks integralne jednačine}$$

Vidimo da je preobražaj jednačine 1 u 2 jednoznačan, što znači da je rešenje karakteristične jednačine (1) i rešenje Rimanovog problema (2) i obratno.

Razmotrićemo slučaj kada G(t) ne teži nuli, ili beskonačnosti, što za jednačinu 1 odgovara uslovu

$$a(t) \pm b(t) \neq 0$$

Smatraćemo da koeficijenti jednačine 1 zadovoljavaju uslov

$$a^2(t) - b^2(t) = 1$$

Možemo lako sastaviti singularnu integralnu jednačinu ako u granične uslove

$$\phi^+(t) = G(t)\,\phi^-(t) + g(t)$$

uvrstimo

$$\phi^+(t) = 1/2\,\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$$

$$\phi^-(t) = -1/2\,\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$$

dobijamo karakterističnu singularnu integralnu jednačinu

$$\frac{1}{2}\left[1 + G(t)\right]\varphi(t) + \frac{1 - G(t)}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = g(t) \qquad *$$

Sa druge strane rešavajući ovu jednačinu po formuli

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

dobijamo rešenje Rimanovog graničnog problema. Gornja jednačina (*) se može shvatiti kao formula po kojoj se lako postavlja karakteristična singularna integralna jednačina, koja odgovara datom Rimanovom graničnom problemu.

Rešavanje karakteristične jednačine

Ako prema formulama Sahockog izračunamo granične vrednosti odgovarajućih funkcija

$$\phi^+(t) = X^+(t)\left\{\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)} + \Psi(t) - \frac{1}{2}\,P_{\varkappa-1}(t)\right\}$$

$$\phi^-(t) = X^-(t)\left\{-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)} + \Psi(t) - \frac{1}{2}\,P_{\varkappa-1}(t)\right\}$$

gde je $\Psi(t)$ singularni integral

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$-\frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)$ -proizvoljni polinom

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{X^-(t)}{X^+(t)}\right\}g(t) + X^+(t)\left\{1 - \frac{X^-(t)}{X^+(t)}\right\}\left\{\Psi(t) - \frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)\right\}$$

Ako uvrstimo $\frac{X^-(t)}{X^+(t)} = \frac{1}{G(t)}$ i $\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-t}$

dobijamo

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{G(t)}\right\}g(t) + X^+(t)\left\{1 - \frac{1}{G(t)}\right\}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-t} - \frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)\right\}$$

treba još uvrstiti

a.) $X^+(t) = e^{\Gamma(t)}\sqrt{\frac{G(t)}{t^{\varkappa}\Pi(t)}}$

$\Gamma(t)$ -glavna vrednost integrala $\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{\tau-z}\ln\left\{\tau^{-\varkappa}\prod_{k=1}^{m}(\tau-z_k)^{\varkappa}G(\tau)\right\}d\tau$

$\Pi(t) = \prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\varkappa_k}$

b.) $G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}$

c.) $g(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}$

pa dobijamo rešenje

$$\varphi(t) = a(t)\,f(t) - \frac{b(t)\,Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-t} + b(t)\,Z(t)\,P_{\varkappa-1}(t)$$

$$Z(t) = \left\{a(t) + b(t)\right\}X^+(t) = \left\{a(t) - b(t)\right\}X^-(t) = \frac{e^{\Gamma(t)}}{\sqrt{t^{\varkappa}\Pi(t)}}$$

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{\tau-t}\ln\left\{\tau^{-\varkappa}\Pi(\tau)\frac{a(\tau)-b(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)}\right\}d\tau$$

$$\Pi(t) = \prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\varkappa_k}$$

$\frac{b(t)\,Z(t)}{\pi i Z(\tau)(\tau - t)}$ - rezolventa, a njene svojstvene funkcije će biti

$$\varphi_k(t) = b(t)\,Z(t)\,t^{k-1} \qquad k=1,2,\dots\varkappa$$

Možemo uzeti da je

$$\hat{R}\,f = a(t)\,f(t) - \frac{b(t)\,Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - t}$$

tada je opšte rešenje

$$\varphi(t) = \hat{R}\,f + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_k\,\varphi_k(t)$$

Diskusija rešenja

1. Ako je $\varkappa > 0$ homogena jednačina $K^0\varphi = 0$ ima $\varkappa$ linearno nezavisnih rešenja

$$\varphi_k(t) = b(t)\,Z(t)\,t^{k-1} \qquad k = 1,2,\dots\varkappa$$

2. Ako je $\varkappa \leq 0$ homogena jednačina je nerešiva, imamo nulu kao trivijalno rešenje.

3. Ako je $\varkappa \geq 0$ nehomogena jednačina je rešiva pri svakoj vrednosti desne strane $f(t)$ i njeno opšte rešenje zavisi od $\varkappa$ proizvoljnih konstanti.

4. Ako je $\varkappa < 0$, nehomogena jednačina je rešiva samo tada, ako je desna strana $f(t)$ zadovoljila $-\varkappa$ uslova

$$\int_L \psi_k(t)\,f(t)\,dt = 0 \qquad \psi_k(t) = \frac{1}{Z(t)}\,t^{k-1}$$

Regularizacija

U opštem slučaju, rešenje singularnih integralnih jednačina može se dobiti svodjenjem na regularnu integralnu jednačinu (Fredholmovog tipa).

Regularizacija je proces svodjenja singularne na regularnu (Fredholmovu) integralnu jednačinu.

Regularizacija se obično sastoji u tome da se na singularni operator primeni drugi, specijalno odabran singularni operator.

Neka su $\hat{K}_1$ i $\hat{K}_2$ singularni operatori

$$\hat{K}_1\varphi = a_1(t)\,\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_1(t,\tau)}{\tau - t}\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

$$\hat{K}_2\omega = a_2(t)\,\omega(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_2(t,\tau)}{\tau - t}\,\omega(\tau)\,d\tau$$

Neka je operator $\hat{K}$ dat kao

$$\hat{K}\varphi = \hat{K}_2(\hat{K}_1\varphi)$$

Koristeći formulu promene reda integracije razmotrićemo karakteristični deo ove jednačine,pa konačno možemo pisati

$$\hat{K}_1\varphi = a_1(t)\,\varphi(t) + \frac{b_1(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L k_1(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

$$\hat{K}_2\omega = a_2(t)\,\omega(t) + \frac{b_2(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L k_2(t,\tau)\,\omega(\tau)\,d\tau$$

pa će koeficijenti karakterističnog dela a(t) i b(t) operatora $\hat{K} = \hat{K}_2\hat{K}_1$ biti izraženi kao

$$a(t) = a_2(t)\,a_1(t) + b_2(t)\,b_1(t)$$

$$b(t) = a_2(t)\,b_1(t) + b_2(t)\,a_1(t)$$

odnosno,karakteristični deo $\hat{K}$ ne zavisi od regularnog dela i poretka operatora $\hat{K}_2\hat{K}_1 = \hat{K}_1\hat{K}_2$.

Izračunajmo koeficijent Rimanovog problema,koji odgovara operatoru $(\hat{K}_2\hat{K}_1)^o$

$$G(t) = G_2(t)\,G_1(t)$$

$$G_1(t) = \frac{a_1(t) - b_1(t)}{a_1(t) + b_1(t)} \qquad G_2(t) = \frac{a_2(t) - b_2(t)}{a_2(t) + b_2(t)}$$

što znači da je indeks $\hat{K}^o$ jednak sumi indeksa K_1^o i K_2^o

$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$$

ili u razvijenom obliku

$$\hat{K}_2(\hat{K}_1\varphi) = a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L k(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

Regularizujući operator

Ako je singularni operator $\hat{K}_2$ takav,da je operator $\hat{K}_2\hat{K}_1$ regularan (u njemu nema singularnog integrala b(t)=0), nazvaćemo ga regularizujućim operatorom ili regularizatorom.

Opšti oblik regularizatora

$$\tilde{K}\omega = u(t)\, a(t)\omega(t) - \frac{U(t)\, b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \int_L \tilde{k}(t,\tau)\,\omega(\tau)\, d\tau$$

Ukoliko nema nikakvih posebnih uslova možemo dobiti jednostavnije regularizatore, ako u gornju jednačinu uvrstimo

1.) $U(t) = 1 \qquad \tilde{k}(t,\tau) = 0$

$$\tilde{K}\omega = \hat{K}'^{o}\omega = a(t)\,\omega(t) - \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$$

2.) $U(t) = 1 \qquad \tilde{k}(t,\tau) = -\frac{1}{\pi i}\,\frac{b(\tau) - b(t)}{\tau - t}$

$$\tilde{K}\omega = \hat{K}^{o\prime}\omega = a(t)\,\omega(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)\,\omega(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$$

najčešće se i upotrebljavaju ovakvi operatori $\hat{K}^{o\prime}$ i $\hat{K}'^{o}$

Pošto je

$$\tilde{K}\omega = U(t)\, a(t)\,\omega(t) - \frac{U(t)\, b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \int_L \tilde{k}(t,\tau)\,\omega(\tau)\, d\tau$$

$$K\varphi = a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \int_L k(t,\tau)\,\varphi(\tau)\, d\tau$$

pa operatori $\tilde{K}$ i K ne komutiraju, regularizacija se može izvršiti sa desne i sa leve strane.

Neka je data opšta singularna integralna jednačina

$$\hat{K}\varphi = a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \int_L k(t,\tau)\,\varphi(\tau)\, d\tau = f(t) \qquad 3.$$

rešićemo je regularizacijom.

1. Regularizacija sa leva

Uzećemo regularizator u opštem obliku

$$\tilde{K}\omega = U(t)\, a(t)\,\omega(t) - \frac{U(t)\, b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \int_L \tilde{k}(t,\tau)\,\omega(\tau)\, d\tau$$

i zamenimo $\omega = \hat{K}\varphi - f$

$$\tilde{K}(\hat{K}\varphi - f) = \tilde{K}\hat{K}\varphi - \tilde{K} f \qquad \tilde{K}\hat{K}\varphi = \tilde{K} f \qquad 4.$$

Po definiciji operator $\tilde{K}\hat{K}$ je regularan, znači regularizovali smo jednačinu 3., gde je $\varphi(t)$ - nepoznata funkcija. To možemo pisati i operatorski. Početna jednačina (3) je

$$\hat{K}\varphi = f \qquad 3'$$

a regularna

$$\tilde{K}\hat{K}\varphi = \tilde{K} f \qquad 4'$$

Pošto je operator $\tilde{K}$ homogen, svako rešenje jednačine 3' zadovoljava takodje i jednačinu 4'. Regularizacija sa leva ne dovodi do gubitka rešenja.

2. Regularizacija sa desna

Početna singularna integralna jednačina je 3. Ako u nju umesto tražene funkcije $\varphi(t)$ uvrstimo $\tilde{K}\omega$, gde je $\omega = \omega(t)$ neka nova nepoznata funkcija, dobićemo integralnu jednačinu.

$$\hat{K}\tilde{K}\omega = f \qquad 4''$$

$$\varphi(t) = \tilde{K}\omega \qquad 3''$$

koja je takodje regularna. Kad rešimo jednačinu 4'' po formuli 3'' imamo rešenje početne jednačine 3. Potrebno je samo izračunati dvostruki integral, gde je jedan običan a jedan singularan. Regularizacija sa desna može dovesti do gubljenja rešenja i samo u slučaju $\varkappa \leq 0$ je ovakva jednačina rešiva.

3. Ekvivalentna regularizacija

Regularizacija, uopšteno govoreći, može dovesti do jednačine, koja nije ekvivalentna početnoj. Može doći do zastranjivanja (pri regularizaciji sa leva) ili do gubljenja rešenja (pri regularizaciji sa desna). Zato se posebno razmatra pri kakvim uslovima singularna jednačina može biti svedena na ekvivalentnu regularnu.

Neka je nehomogena singularna integralna jednačina

$$\hat{K}\varphi = f \qquad 1''$$

rešiva, tada je ona ekvivalentna jednačini

$$\hat{K}''\hat{K}\varphi = \hat{K}'' f \qquad 2''$$

$$\hat{K}''\psi'' = \overline{a(s)}\psi''(s) + \int_0^l \overline{k(\sigma,s)\, t'(s)}\, \psi''(\sigma)\, d\sigma$$

σ - lučna apscisa $s \to t$; $\sigma \to t$ (obična zamena)

Postoji funkcija $\varphi_1(t)$ koja zadovoljava jednačinu 1'' i ona će (zbog homogenosti $\hat{K}''$) biti rešenje i jednačine 2''

Operator $\hat{K}''$ uopšteno govoreći, biće regularizator operatora $\hat{K}$, samo ako je $\hat{K}$ realan, znači jednačina 2'' neće biti regularna.

INTEGRALNE JEDNAČINE SA MULTISINGULARNIM JEZGROM

U mnogim problemima fizike i astronomije pojavljuju se integralne jednačine sa dva ili više singularnih jezgara. Takvi su, na primer, neki problemi oscilovanja elastičnih membrana, problemi koji se pojavljuju u kinetičkoj teoriji gasova, a u modernoj fizici proračuni energetskih "pragova" u teoriji superprovodljivosti i u teoriji kvazičestičnih konglomerata, moramo upotrebljavati jednačine sa multisingularnim jezgrom. U astronomiji se proračuni kretanja kometa svode na diferencijalne jednačine Matje-a i Hila, koje se opet mogu povezati sa singularnim jednačinama, koje sadrže više singularnih jezgara.

Ovde neće biti analizirani konkretni fizički ili astronomski problemi, koji dovode do integralnih jednačina sa multisingularnim jezgrom, već će biti predloženo neki metodi za rešavanje ovakvih jednačina.

1. Multisingularna jednačina sa konstantnim koeficijentima

Posmatraćemo jednačinu po realnoj osi

$$\gamma\varphi(t) + \alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-(t-a)} + \beta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-(t-b)} = f(t) \qquad 1.$$

t-realna varijabla, α, β, γ, a i b -realne konstante.

Pošto jednačina ima dva jezgra $\frac{1}{\tau-t_1}$ i $\frac{1}{\tau-t_2}$ gde je $t_1=t-a$ i $t_2=t-b$, ne možemo je rešavati svodjenjem na Rimanov granični problem, jer takav metod za ovu jednačinu (1) nije primenljiv i ne postoji u literaturi. Pokušaćemo da je rešimo koristeći Furije transformacije.

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\,\tilde{\varphi}(y)\,e^{ity} \qquad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\,\tilde{f}(y)\,e^{ity}$$

$$\frac{1}{\tau-t+a} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\,\psi_a\,e^{iz(\tau-t)} \qquad \frac{1}{\tau-t+b} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\,\psi_b(z)\,a^{iz(\tau-t)} \qquad 2.$$

Zamenom jednačine (2) u (1) dobijamo

$$\gamma\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,\tilde{\varphi}(y)\,e^{ity} + \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,dz\,\tilde{\varphi}(y)\psi_a(z)\,e^{-itz}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\,e^{i\tau(z+y)} +$$

$$+\beta\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,dz\,\tilde{\varphi}(y)\psi_b(z)\,e^{-itz}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\,e^{i\tau(z+y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\,\tilde{f}(y)\,e^{ity} \qquad 3.$$

Pošto je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\,e^{i\tau(z+y)} = 2\pi\,\delta(z+y) \qquad 4.$$

jednačina (3) postaje

$$\gamma\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \tilde{\varphi}(y)\, e^{ity} + 2\pi\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \psi_a(-y)\, \tilde{\varphi}(y)\, e^{ity} + 2\pi\beta\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \psi_b(-y)\, \tilde{\varphi}(y)\, e^{ity} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \tilde{f}(y)\, e^{ity} \qquad 5.$$

Jednačinu (5) pomnožićemo sa e^{-itx} i integraliti po t,u granicama od $-\infty$ do $+\infty$ .Koristeći činjenicu da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{it(y-x)} = 2\pi\delta(y-x)$$

jednačinu (5) prevodimo u algebarsku jednačinu

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{\tilde{f}(x)}{\gamma + 2\pi[\alpha\psi_a(-x) + \beta\psi_b(-x)]} \qquad 6.$$

pa je rešenje jednačine (1) dato sa

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\tilde{f}(x)}{\gamma + 2\pi[\alpha\psi_a(-x) + \beta\psi_b(-x)]}\, e^{itx} \qquad 7.$$

Treba pronaći i funkcije $\psi_a(x)$ i $\psi_b(x)$ da bi kompletirali rešenje. Ako izvršimo zamenu $\tau - t = \omega$, u relaciji

$$\frac{1}{\tau - t - a} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, \psi_a(z)\, e^{iz(\tau - t)}$$

dobijamo

$$\frac{1}{\omega + a} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, \psi_a(z)\, e^{iz\omega}$$

Množeći ovu jednačinu sa $e^{-i\omega x}$ i integraleći je po ω od $-\infty$ do $+\infty$ dobijamo

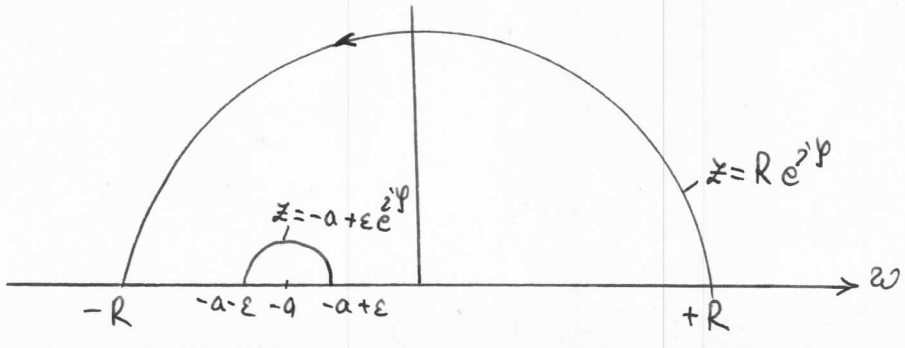
$$\psi_a(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\omega + a}\, d\omega \qquad 8.$$

Pošto se x menja od $-\infty$ do $+\infty$,očigledno je da će $\psi_a(x)$ biti prekidna funkcija promenljive x.

Za $x < 0$ posmatraćemo u kompleksnoj Z ravni integral

$$\oint_L \frac{e^{-ixz}}{z + a}\, dz$$

pri čemu kontura L ima sledeći oblik



Za datu konturu možemo pisati:

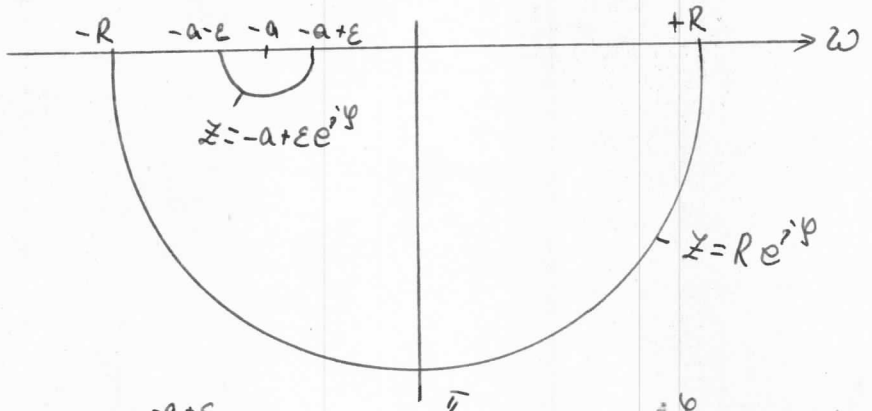
$$\oint_L dz\,\frac{e^{-ixz}}{z+a} = 0 = \int_{-R}^{-a-\varepsilon}\frac{e^{-ix\omega}}{\omega+a}\,d\omega + \int_{-a+\varepsilon}^{R}\frac{e^{-ix\omega}}{\omega+a}\,d\omega + \int_{\pi}^{0}\frac{e^{-ix(-a+\varepsilon e^{i\varphi})}\,i\varepsilon e^{i\varphi}}{-a+\varepsilon e^{i\varphi}+a}\,d\varphi$$

$$+\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{-ixR\cos\varphi}\,e^{xR\sin\varphi}\,iR\,e^{i\varphi}}{R\,e^{i\varphi}+a}\,d\varphi$$

Za $R\to\infty$ integral po velikom polukrugu postaje jednak nuli, jer je $x<0$, i za $\varphi\in(0,\pi)$ je $\sin\varphi>0$. Ako još uzmemo da $\varepsilon\to 0$ dobijamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{\omega+a}\,d\omega = i\pi e^{iax} \qquad 9.$$

Ako je $x>0$ onda biramo konturu



pa je

$$\oint_L \frac{e^{-izx}}{z+a}\,dz = 0 = \int_{R}^{-a+\varepsilon}\frac{e^{-ix\omega}}{\omega+a}\,d\omega + \int_{2\pi}^{\pi}\frac{e^{-ix(-a+\varepsilon e^{i\varphi})}\,i\varepsilon e^{i\varphi}}{-a+\varepsilon e^{i\varphi}+a}\,d\varphi + \int_{-a-\varepsilon}^{-R}\frac{e^{-ix\omega}}{\omega+a}\,d\omega +$$

$$+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{-ixR\cos\varphi}\,e^{xR\sin\varphi}\,iR\,e^{i\varphi}}{R\,e^{i\varphi}+a}\,d\varphi$$

Kada $R\to\infty$ integral po velikom krugu postaje jednak nuli, jer je $x>0$ i $\sin\varphi<0$ za $\varphi\in(\pi,2\pi)$. Puštajući da $\varepsilon\to 0$ dobijamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix\omega}}{\omega+a}\,d\omega = -i\pi e^{iax} \qquad x>0 \qquad 10.$$

Na osnovu (8), (9) i (10) možemo pisati

$$\psi_a(x) = \begin{cases} -\frac{i}{2}e^{iax} & x>0 \\ +\frac{i}{2}e^{iax} & x<0 \end{cases} \qquad 11.$$

$$\psi_b(x) = \begin{cases} -\frac{i}{2}e^{ibx} & x>0 \\ +\frac{i}{2}e^{ibx} & x<0 \end{cases} \qquad 12.$$

Dobijene rezultate (11) i (12) možemo proveriti na sledeći način:

$$\psi_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi_a(x)\,e^{itx} = \frac{i}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0}dx\,e^{ix(t+a)} + \int_{0}^{+\infty}dx\,e^{ix(t+a)}\right\} =$$

$$= \frac{i}{2}\left\{ \int_{-\infty}^{0} dx\, e^{ix(t+a-i\delta)}_{\delta\to+0} - \int_{0}^{+\infty} dx\, e^{ix(t+a+i\delta)}_{\delta\to+0} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{t+a-i\delta} e^{ix(t+a)} e^{x\delta}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{t+a+i\delta} e^{ix(t+a)} e^{-x\delta}\Big|_{0}^{+\infty} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{t+a-i\delta} + \frac{1}{t+a+i\delta} \right\} = \frac{1}{2}\,\frac{2(t+a)}{(t+a)^2+\delta^2} = \frac{1}{t+a}$$

Znači.ako stavimo $t \to \tau - t$ dobićemo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi_a(x)\, e^{i(\tau-t)x} = \frac{1}{\tau - t + a}$$

što je i trebalo dokazati.

U rešenju (7),figurišu funkcije $\psi_a(-x)$ i $\psi_b(-x)$.Pošto su u pitanju prekidne funkcije treba biti oprezan,jer se prilikom zamene $x \to -x$, menjaju i intervali promene varijable x. Prema tome

$$\psi_a(-x) = \begin{cases} -\frac{i}{2} e^{-iax} & x < 0 \\ +\frac{i}{2} e^{-iax} & x > 0 \end{cases} \qquad 13.$$

$$\psi_b(-x) = \begin{cases} -\frac{i}{2} e^{-ibx} & x < 0 \\ +\frac{i}{2} e^{ibx} & x > 0 \end{cases} \qquad 14.$$

Uzevši u obzir (13) i (14),rešenje (7) se može napisati

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{0} dx\, \frac{\tilde{f}(x)\, e^{itx}}{\gamma - i\pi(\alpha e^{-iax} + \beta e^{-ibx})} + \int_{0}^{\infty} dx\, \frac{\tilde{f}(x)\, e^{itx}}{\gamma + i\pi(\alpha e^{-iax} + \beta e^{-ibx})}$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t)\, e^{-itx} \qquad 16.$$

Uzmimo jedan konkretan primer.Neka je $\alpha = \frac{1}{2\pi}$, $\beta = -\frac{1}{2\pi}$, $\gamma = 0$, $b = -a$ i $f(t) = e^{ict}$ $c > 0$.Tada je

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{it(c-x)} = \delta(x-c)$$

pa na osnovu jednačine (15) dobijamo

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{0} dx\, \frac{e^{itx}\,\delta(x-c)}{-\frac{i}{2}(e^{-iax} - e^{iax})} + \int_{0}^{\infty} dx\, \frac{e^{itx}\,\delta(x-c)}{\frac{i}{2}(e^{-iax} - e^{iax})}$$

Pošto je u prvom integralu $x < 0$ i $c > 0$,očigledno je $\delta(x-c)$ u njemu jednako nuli pa sledi da je

$$\varphi(t) = \frac{e^{ict}}{\sin ac} \qquad 17.$$

rešenje jednačine

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-(t-a)} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-(t+a)} = e^{ict} \qquad c>0 \qquad 18.$$

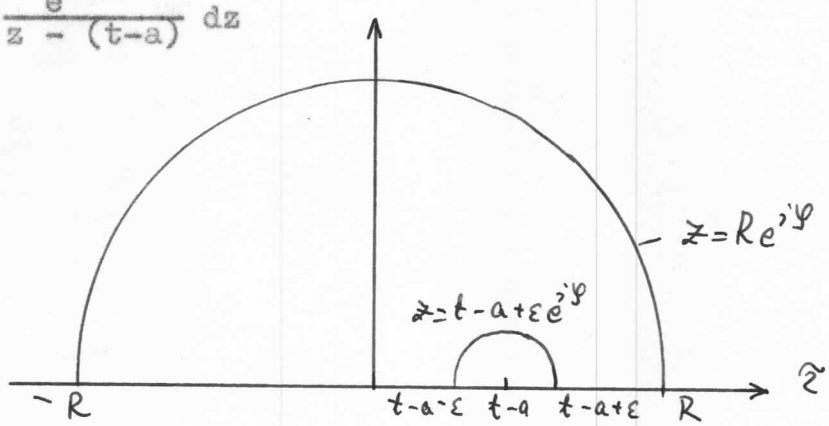
Dokaz izvodimo zamenom jednačine (17) u (18), i dobijamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ic\tau}}{\tau-(t-a)}\,d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ic\tau}\,d\tau}{\tau-(t+a)} = 2\pi e^{ict}\sin ac \qquad c>0 \qquad 19.$$

Pošto je $c>0$, posmatraćemo konturni integral

$$\oint_L \frac{e^{icz}}{z-(t-a)}\,dz$$

po konturi



Tada je

$$\oint_L \frac{dz\, e^{icz}}{z-(t-a)} = 0 = \int_{-R}^{t-a-\varepsilon}\frac{d\tau\, e^{ic\tau}}{\tau-(t-a)} + \int_{t-a+\varepsilon}^{R}\frac{d\tau\, e^{ic\tau}}{\tau-(t-a)} + \int_{\pi}^{0}\frac{e^{ic(t-a+\varepsilon e^{i\varphi})}\, i\varepsilon e^{i\varphi}}{t-a+\varepsilon e^{i\varphi}-(t-a)}\,d\varphi +$$

$$+\int_{0}^{\pi}\frac{e^{icR\cos\varphi}\, e^{-icR\sin\varphi}\, iR\, e^{i\varphi}}{R\, e^{i\varphi}-(t-a)}\,d\varphi$$

Pošto je $c>0$ integral po velikom polukrugu postaje jednak nuli, kada $R\to\infty$, jer je za $\varphi\in(0,\pi)$, $\sin\varphi>0$. Ako pustimo da $\varepsilon\to 0$ imamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ic\tau}}{\tau-(t-a)}\,d\tau = i\pi e^{ic(t-a)} \qquad 20.$$

Na osnovu ovog jednačina (19) postaje

$$i\pi e^{ic(t-a)} - i\pi e^{ic(t+a)} = 2\pi e^{ict}\sin ac$$

i konačno

$$2\pi e^{ict}\sin ac = 2\pi e^{ict}\sin ac$$

Ukoliko je jednačina (1) homogena $f(t)=0$, onda nam ovaj postupak ne daje vrednost tražene funkcije, nego samo one vrednosti $x-a$ za koje jednačina (1) ima netrivijalna rešenja $\varphi(t)\neq 0$ Na osnovu (6) možemo pisati:

$$\tilde{\varphi}(x)\left\{\gamma + 2\pi\left[\alpha\psi_a(-x) + \beta\psi_b(-x)\right]\right\} = \tilde{f}(x)$$

Kada je $f(t)=0$, onda je i $f(x)=0$, pa kao uslov da jednačina (1) ima netrivijalna rešenja dobijamo

$$\gamma + 2\pi\left[\alpha\psi_a(-x) + \beta\psi_b(-x)\right] = 0$$

što se posle zamene $\Psi_a(x)$ i $\Psi_b(x)$ svodi na dva uslova

$$\alpha e^{-iax} + \beta e^{-ibx} = \frac{\gamma}{i\pi} \qquad x < 0 \qquad 21.$$

i

$$\alpha e^{-iax} + \beta e^{-ibx} = -\frac{\gamma}{i\pi} \qquad x > 0 \qquad 22.$$

Ako se zadržimo na primeru uradjenom na str. 36.i uzmemo f(t)=0, za razliku od prethodnog slučaja,onda se oba uslova (21) i (22) svode samo na jedan uslov: sin ax = 0.Odavde sledi da,samo za

$$x = n\frac{\pi}{a} \qquad n = 0 \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$$

jednačina od koje smo pošli (1) može imati netrivijalna rešenja.

Možemo generatlisati dosadašnju analizu.Očigledno je da se procedurom,kako je upravo izloženo,može naći rešenje jednačine

$$\gamma\varphi(t) + \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-(t-a)}\, d\tau = f(t)$$

u obliku

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\tilde{f}(x)\, e^{itx}}{\gamma - i\pi\sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu e^{-ia_\nu x}}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{\tilde{f}(x)\, e^{itx}}{\gamma + i\pi\sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu e^{-ia_\nu x}}\, dx \qquad 23$$

2. Polinom kao koeficijent u multisingularnoj jednačini

Prvo ćemo analizirati jednačinu

$$(At+B)\varphi(t) + \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-(t-a)}\, d\tau + \beta\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-(t-b)}\, d\tau = f(t) \qquad 24.$$

gde je $A \neq 0$,a zatim ćemo rezultat uopštiti na slučaj kada uz funkciju $\varphi(t)$,kao koeficijent,stoji polinom stepena n.

Pre nego što izvršimo Furije transformacije u jednačini (24),ispitaćemo kako se može izvršiti Furije transformacija izraza $t\varphi(t)$.Kao što znamo

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \tilde{\varphi}(x)\, e^{itx} \qquad \tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \varphi(t)\, e^{-itx} \qquad 25.$$

Pretpostavićemo da je $\tilde{\varphi}(\pm\infty)=0$,što je moguća pretpostavka,pošto se radi o singularnoj jednačini,čija su rešenja integrali Koši tipa.

Posmatraćemo sledeći integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{d\tilde{\varphi}(x)}{dx} \, e^{itx}$$

Ako izvršimo parcijalnu integraciju

$$u=e^{itx} \qquad du=it\, e^{itx} \qquad dv=\frac{d\tilde{\varphi}(x)}{dx}\, dx \qquad v=\tilde{\varphi}(x)$$

dobijamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{d\tilde{\varphi}(x)}{dx} \, e^{itx} = \tilde{\varphi}(x)\, e^{itx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - it \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \tilde{\varphi}(x)\, e^{itx}$$

a, uzimajući u obzir pretpostavku $\tilde{\varphi}(\pm\infty)=0$ i formulu (25) imamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{d\tilde{\varphi}(x)}{dx} \, e^{itx} = -it\, \varphi(t) \quad \text{tj} \quad i\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{d\tilde{\varphi}(x)}{dx} \, e^{itx} = t\varphi(t) \qquad 26.$$

Koristeći formulu (26) i Furije transformacije, jednačinu (24) možemo napisati kao

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \left[iA\, \frac{d\tilde{\varphi}(y)}{dy} + B\tilde{\varphi}(y)\right] e^{ity} + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, dz\, \tilde{\varphi}(y)\psi_a(z)\, e^{-itz} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, e^{i\tau(z+y)} +$$

$$+\beta \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, dz\, \tilde{\varphi}(y)\psi_b(z)\, e^{-itz} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, e^{i\tau(z+y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \tilde{f}(y) e^{ity}$$

Ova jednačina se na osnovu

$$2\pi\, \delta(z+y) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, e^{i\tau(z+y)}$$

i posle inverzne Furije transformacije svodi na

$$iA\, \frac{d\tilde{\varphi}(x)}{dx} + \left\{ B + 2\pi\left[\alpha\psi_a(-x) + \beta\psi_b(-x)\right]\right\} \tilde{\varphi}(x) = \tilde{f}(x) \qquad 27.$$

Ako iskoristimo formule (13) i (14) vidimo da se (27) raspada na dve nehomogene linearne diferencijalne jednačine prvog reda:

$$\frac{d\tilde{\varphi}^+(x)}{dx} + \left[\frac{B}{A\, i} + \frac{\pi}{A}(\alpha\, e^{-iax} + \beta\, e^{-ibx})\right]\tilde{\varphi}^+(x) = \tilde{f}(x) \quad x > 0$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}^-(x)}{dx} + \left[\frac{B}{A\, i} - \frac{\pi}{A}(\alpha\, e^{-iax} + \beta\, e^{-ibx})\right]\tilde{\varphi}^-(x) = \tilde{f}(x) \quad x < 0 \qquad 28.$$

Ove jednačine se lako rešavaju. Njihova rešenja su:

$$\tilde{\varphi}^+(x) = e^{-\frac{Bx}{Ai} + \frac{\pi}{Ai}\left(\frac{\alpha}{a} e^{-iax} + \frac{\beta}{b} e^{-ibx}\right)} \left\{ C^+ + \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \tilde{f}(x) e^{\frac{Bx}{Ai} - \frac{\pi}{Ai}\left(\frac{\alpha}{a} e^{-iax} + \frac{\beta}{b} e^{-ibx}\right)} \right\} \qquad 29.$$

$$\tilde{\varphi}^-(x)=e^{-\frac{Bx}{Ai}-\frac{\bar{\nu}}{Ai}\left(\frac{\alpha}{a}e^{-iax}+\frac{\beta}{b}e^{-ibx}\right)}\left\{C^- + \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\, e^{\frac{Bx}{Ai}+\frac{\bar{\nu}}{Ai}\left(\frac{\alpha}{a}e^{-iax}+\frac{\beta}{b}e^{-ibx}\right)}\right\} \qquad 30.$$

Znači rešenje jednačine (24) treba tražiti u obliku

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{0} dx\, \tilde{\varphi}^-(x,C^-)\, e^{itx} + \int_{0}^{+\infty} dx\, \tilde{\varphi}^+(x,C^+)\, e^{itx} \qquad 31.$$

pri čemu konstante C^+ i C^- treba odrediti tako da (24) bude identički zadovoljena,što se postiže neposrednim računom posle zamene (31) u (24).

Razmotrimo konkretan primer.Neka je u (24):$f(t)=0$, $B=0, \alpha=1/2\pi i, \beta=1/2\pi i, A=1/a$ i $b=-a$.To znači da jednačina ima sledeći oblik:

$$\frac{1}{a}\, t\, \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-(t-a)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-(t-b)}\, d\tau = 0 \qquad 32.$$

a njena rešenja su na osnovu (29) i (30)

$$\tilde{\varphi}^+(x) = C^+ e^{i \sin ax - \delta x} \qquad \tilde{\varphi}^-(x) = C^- e^{-i \sin ax + \delta x} \qquad 33.$$

i

$$\varphi(t)=C^-\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{i(tx-\sin ax - i\delta x)} + C^+\int_{0}^{+\infty} dx\, e^{i(tx+\sin ax + i\delta x)} \qquad 34.$$

Sada možemo uopštiti dosadašnja razmatranja na jednačinu

$$P_n(t)\,\varphi(t) + \sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau-(t-a_\nu)} = f(t) \qquad 35.$$

gde je $P_n(t)$ polinom n-tog stepena po t,tj

$$P_n(t) = \sum_{\mu=0}^{n} A_\mu t^\mu \qquad 36.$$

Pretpostavićemo da je funkcija $\tilde{\varphi}(x)$,takva da su joj izvodi jednaki nuli do n-1 -vog.

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \varphi(t)\, e^{-itx} \qquad \left[\frac{d^\mu}{dx^\mu}\tilde{\varphi}(x)\right]_{x=\pm\infty} = 0 \quad \mu=0,1,2..n-1 \qquad 37.$$

Posmatrajmo integral

$$I_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{d^\mu}{dx^\mu}\tilde{\varphi}(x)\, e^{itx} \qquad I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \tilde{\varphi}(x)\, e^{itx} = \varphi(t) \qquad 38.$$

Parcijalnom integracijom $u=e^{itx}$, $dv=dx\,\frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}\varphi(x)$

i korišćenjem pretpostavke (37) dobijamo

$$I_{\mu} = -it\, I_{\mu-1}$$

Pošto je $I_{\mu-1} = -it\, I_{\mu-2}$ itd. konačno dobijamo

$$I_{\mu} = (-it)^{\mu}\, I_{o} = (-i)^{\mu}\, t^{\mu}\, \varphi(t)$$

pa se izraz $t^{\mu}\,\varphi(t)$ može napisati u obliku:

$$t^{\mu}\,\varphi(t) = i^{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}\tilde{\varphi}(x)\, e^{itx} \qquad 39.$$

Na osnovu ovog imamo:

$$P_n(t)\,\varphi(t) = \sum_{\mu=0}^{n} i^{\mu} A_{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}\tilde{\varphi}(x)\, e^{itx} \qquad 40.$$

Ako uvrstimo (40) u (35), i izvršimo odgovarajuće Furije transformacije, dobićemo posle inverzne Furije transformacije

$$\sum_{\mu=0}^{n} i^{\mu} A_{\mu} \frac{d^{\mu}\tilde{\varphi}(x)}{dx^{\mu}} + 2\pi \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_{\nu}\, \psi_{a_{\nu}}(-x)\, \tilde{\varphi}(x) = \tilde{f}(x) \qquad 41.$$

gde su funkcije $\psi_{a_{\nu}}(-x)$, na osnovu (13) i (14) već date, pa se jednačina (41) raspada na dve obične diferencijalne jednačine n-tog reda:

$$\sum_{\mu=0}^{n} i^{\mu} A_{\mu} \frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}\tilde{\varphi}^{+}(x) + i\pi \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_{\nu}\, e^{-ia_{\nu}x}\, \tilde{\varphi}^{+}(x) = \tilde{f}(x) \quad x > 0 \qquad 42.$$

$$\sum_{\mu=0}^{n} i^{\mu} A_{\mu} \frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}\tilde{\varphi}^{-}(x) - i\pi \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_{\nu}\, e^{-ia_{\nu}x}\, \tilde{\varphi}^{-}(x) = \tilde{f}(x) \quad x < 0 \qquad 43.$$

Ako je rešenje (42): $\tilde{\varphi}^{+}(x, C_1^{+}, C_2^{+} \ldots\ldots C_n^{+})$

i rešenje (43) $\tilde{\varphi}^{-}(x, C_1^{+}, C_2^{+}, \ldots\ldots C_n^{+})$

onda se rešenje jednačine (35) može tražiti u obliku:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{0} dx\, e^{itx}\, \tilde{\varphi}^{-}(x, C_1^{+}, C_2^{+} \ldots C_n^{+}) + \int_{0}^{\infty} dx\, e^{itx}\, \tilde{\varphi}^{+}(x, C_1^{+}, C_2^{+} \ldots C_n^{+}) \qquad 44.$$

pri čemu se 2n integracionih konstanti $C_1^{+}, \ldots C_n^{+}, C_1^{-}, \ldots C_n^{-}$ odredjuju posle zamene (44) u (35), tako da ova poslednja bude identički zadovoljena.

Uzećemo konkretan slučaj jednačine (35), koji može da ima primenu u astronomiji i u teoriji oscilacija. Neka je u jednačini (35)

$n=2$, $N=2$, $A_1=0$, $A_2, A_0 \neq 0$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$, $a_1=-a_2=2$ i $f(t)=0$

tada ona postaje

$$\left(t^2+\frac{A_0}{A_2}\right)\varphi(t)+\frac{\alpha}{A_2}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t+2}\,d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t-2}\,d\tau\right\}=0 \qquad 45.$$

jednačine (42) i (43) sada postaju

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}^+(x)}{dx^2}+(\lambda-2h^2+\cos 2x)\tilde{\varphi}^+(x)=0 \qquad 46.$$

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}^-(x)}{dx^2}+(\lambda-2h^2-\cos 2x)\tilde{\varphi}^-(x)=0 \qquad 47.$$

$$\lambda=-\frac{A_0}{A_2}\,;\quad h_+^2=\frac{i\pi\alpha}{A_2}\,;\quad h_-^2=-\frac{i\pi\alpha}{A_2}$$

Dobijene jednačine su Matje-ove diferencijalne jednačine,koje su vezane za probleme oscilovanja eliptičnih membrana,a u astronomiji,za problem ponašanja perihela Mesečeve putanje.

3. Singularne jednačine sa jezgrima tipa $\frac{1}{\tau-t}$ i $\frac{1}{\tau+t}$

Posmatraćemo jednačine

$$(\alpha t^2+\beta)\varphi(t)+\gamma\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau+t}\,d\tau\right\}=0 \qquad 48.$$

$$(\alpha t^2+\beta)\varphi(t)+\gamma\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau+t}\,d\tau\right\}=0 \qquad 49.$$

Ako jednačinu (48) napišemo u obliku:

$$\varphi(t)=-\frac{\gamma}{\alpha t^2+\beta}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau+t}\,d\tau\right\} \qquad 50.$$

i izvršimo prelaz $t \to -t$, iz (50) sledi:

$$\varphi(-t)=-\frac{\gamma}{\alpha t^2+\beta}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau+t}\,d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\right\}=\varphi(+t)$$

što znači da je rešenje jednačine (48) uvek parna funkcija

$$\varphi(-t)=\varphi(t) \qquad 51.$$

Iz jednačine (49) sledi

$$\varphi(t)=-\frac{\gamma}{\alpha t^2+\beta}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau+t}\,d\tau\right\} \qquad 52.$$

pa ako izvršimo prelaz $t \to -t$, dobijamo

$$\varphi(-t) = -\frac{\gamma}{\alpha t^2+\beta}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau+t}\,d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\right\} = -\varphi(t)$$

što znači da rešenje jednačine (49) mora biti neparna funkcija

$$-\varphi(-t) = \varphi(t) \qquad 53.$$

Ako je $\varphi(t)$ parna funkcija, kakve posledice to ima za njen Furije lik

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ \varphi(t)\ e^{-itx} \qquad \tilde{\varphi}(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ \varphi(t)\ e^{itx}$$

Izvršimo li u poslednjem integralu zamenu $t \to -t$, onda sledi

$$\tilde{\varphi}(-x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty} dt\ \varphi(-t)\ e^{-itx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ \varphi(t)\ e^{itx}$$

na osnovu čega zaključujemo da je Furije lik parne funkcije takodje parna funkcija, odnosno:

$$\tilde{\varphi}(-x) = \tilde{\varphi}(x) \qquad 54.$$

Analogno se lako može pokazati da je Furije lik neparne funkcije, takodje neparna funkcija, odnosno

$$-\tilde{\varphi}(-x) = \tilde{\varphi}(x) \qquad 55.$$

Sada ćemo izvršiti Furiješ transformacije u jednačinama (48) i (49).

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\ \tilde{\varphi}(y)\ e^{ity}\ ; \quad \frac{1}{\tau-t} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\ \psi^-(z)\ e^{iz(\tau-t)}$$

$$\frac{1}{\tau+t} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\ \psi^+(z)\ e^{iz(\tau+t)} \qquad 56.$$

Posle ovog jednačina (48) postaje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\left\{-\alpha\frac{d^2\tilde{\varphi}(y)}{dy^2} + \beta\tilde{\varphi}(y)\right\}e^{ity} + \gamma\int_{-\infty}^{+\infty} dy\ dz\ \tilde{\varphi}(y)\,\psi^-(z)\ e^{-itz}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\ e^{i\tau(}$$
$$e^{(z+y)} + \gamma\int_{-\infty}^{+\infty} dy\ dz\ \tilde{\varphi}(y)\,\psi^+(z)\ e^{izt}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\ e^{i\tau(z+y)} = 0$$

tako da posle inverzne Furije transformacije dobijamo

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}(x)}{dx^2} - \frac{\beta}{\alpha}\tilde{\varphi}(x) - \frac{2\pi\gamma}{\alpha}\psi^-(-x)\,\tilde{\varphi}(x) - \frac{2\pi\gamma}{\alpha}\psi^+(x)\,\tilde{\varphi}(-x) = 0 \qquad 57.$$

Potpuno istom procedurom jednačina (49) se svodi na:

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}(x)}{dx^2} - \frac{\beta}{\alpha}\tilde{\varphi}(x) - \frac{2\pi\gamma}{\alpha}\psi^-(-x)\tilde{\varphi}(x) + \frac{2\pi\gamma}{\alpha}\psi^+(x)\tilde{\varphi}(-x) = 0 \qquad 58.$$

Pošto je u (57) $\tilde{\varphi}(-x) = \tilde{\varphi}(x)$; a u (58) $\tilde{\varphi}(-x) = -\tilde{\varphi}(x)$ zaključujemo da su Furije likovi jednačina (48) i (49) identični.tj da se svode na jednu jedinu jednačinu

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}(x)}{dx^2} - \left\{\frac{\beta}{\alpha} + \frac{2\pi\gamma}{\alpha}\left[\psi^-(-x) + \psi^+(x)\right]\right\}\tilde{\varphi}(x) = 0 \qquad 59.$$

Treba naglasiti,da ako rešavamo jednačinu (48) moramo koristiti samo parno rešenje jednačine (59),dok ako rešavamo jednačinu (48) koristimo samo neparno rešenje (59).

Furije likove

$$\psi^-(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\theta\, e^{-ix\theta}}{\theta} \qquad \psi^+(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda\, e^{-ix\lambda}}{\lambda} \qquad 60.$$

$$\theta = \tau - t \qquad \lambda = \tau + t$$

očigledno možemo dobiti iz formula (11) i (12) stavljajući a=0 Znači

$$\psi^+(x) = \psi^-(x) = \begin{cases} -\frac{i}{2} & x > 0 \\ +\frac{i}{2} & x < 0 \end{cases} \qquad 61$$

a odavde sledi

$$\psi^+(-x) = \psi^-(-x) = \begin{cases} -\frac{i}{2} & x < 0 \\ +\frac{i}{2} & x > 0 \end{cases} \qquad 62.$$

Pre dalje analize jednačine (59),dokazaćemo ispravnost rezultata (61).Za funkciju $\psi^+(x)$ neka imamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^+(x)\, e^{ix(\tau+t)} = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{ix(\tau+t)} - \frac{i}{2}\int_{0}^{\infty} dx\, e^{ix(\tau+t)} =$$

$$= \frac{i}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{ix(\tau+t-i\delta)} - \int_{0}^{\infty} dx\, e^{ix(\tau+t+i\delta)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\tau+t-i\delta}\, e^{ix(\tau+t)} e^{x\delta}\Big|_{-\infty}^{0} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\tau+t+i\delta}\, e^{ix(\tau+t)} e^{-x\delta}\Big|_{0}^{\infty}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\tau+t-i\delta} + \frac{1}{\tau+t+i\delta}\right\} = \frac{1}{2}\,\frac{2(\tau+t)}{(\tau+t)^2+\delta^2} = \frac{1}{\tau+t}$$

čime je dokazana ispravnost rezultata(61).

Na osnovu (61) i (62) zaključujemo da je:

za $x > 0$ $\psi^-(-x) = \frac{i}{2}$; $\psi^+(x) = -\frac{i}{2}$ pa je $\psi^-(-x) + \psi^+(x) = 0$

za $x<0$ $\mathcal{Y}^-(-x) = -\frac{i}{2}$; $\mathcal{Y}^+(x) = \frac{i}{2}$ pa je $\mathcal{Y}^-(-x) + \mathcal{Y}^+(x) = 0$

pa se jednačina (59) svodi na:

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}(x)}{dx^2} - \frac{\beta}{\alpha}\tilde{\varphi}(x) = 0 \qquad 63.$$

Jednačina (63) ima za $\frac{\beta}{\alpha}<0$ periodična rešenja

$$\cos x\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} \qquad \text{i} \qquad \sin x\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}$$

i samo ova rešenja dopuštaju inverznu Furije transformaciju. Za $\frac{\beta}{\alpha}>0$ rešenja su

$$\operatorname{ch} x\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} \qquad \text{i} \qquad \operatorname{sh} x\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}$$

a inverzne Furije transformacije ovih funkcija su beskonačne tj. ne postoje.

Na osnovu ovog zaključujemo da se opisanim metodom jednačine (48) i (49) ne mogu uvek rešiti,već samo ako su konstante α i β različitog znaka.

Ako rešavamo jednačinu (48),gde su $\varphi(t)$ i $\tilde{\varphi}(x)$ parne funkcije,onda kao rešenje (63) moramo uzeti parno partikularno rešenje:

$$\tilde{\varphi}(x) = \cos x\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}};\quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{itx}\cos x\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{1}{2}\left\{\delta\left(t+\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\right)+\delta\left(t-\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\right)\right\} \qquad 64.$$

Ako rešavamo jednačinu (49),gde su $\varphi(t)$ i $\tilde{\varphi}(x)$ neparne funkcije,onda kao rešenje (63) moramo uzeti neparnu funkciju tj.

$$\tilde{\varphi}(x) = \sin x\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}};\quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{itx}\sin x\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{1}{2i}\left\{\delta\left(t+\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\right)-\delta\left(t-\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\right)\right\} \qquad 65.$$

Dokaz da je (64) rešenje jednačine (48).

$$(\alpha t^2+\beta)\delta(t+\sqrt{-\beta/\alpha})+(\alpha t^2+\beta)\delta(t-\sqrt{-\beta/\alpha}) + \gamma\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(\tau+\sqrt{-\beta/\alpha})}{\tau-t}\,d\tau +$$
$$+\gamma\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(\tau-\sqrt{-\beta/\alpha})}{\tau-t}\,d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(\tau+\sqrt{-\beta/\alpha})}{\tau+t}\,d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(\tau-\sqrt{-\beta/\alpha})}{\tau+t}\,d\tau = 0$$

Prva dva člana u poslednjoj jednačini su jednaka nuli,jer su za $t \neq \pm\sqrt{-\beta/\alpha}$ jednake nuli delta funkcije.Za $t=\pm\sqrt{-\beta/\alpha}$ postaje jednak nuli izraz $\alpha t^2+\beta$ .Pošto su prva dva člana jednaka nuli,treba dokazati

$$\frac{1}{-\sqrt{-\beta/\alpha}-t} + \frac{1}{\sqrt{-\beta/\alpha}-t} + \frac{1}{-\sqrt{-\beta/\alpha}+t} + \frac{1}{\sqrt{-\beta/\alpha}+t} = 0 \qquad 0\equiv 0$$

Sada ćemo dokazati da (65) zadovoljava (49).

$$(\alpha t^2+\beta)\,\delta(t+\sqrt{-\beta/\alpha}) - (\alpha t^2+\beta)\,\delta(t-\sqrt{-\beta/\alpha}) + \gamma\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(\tau+\sqrt{-\beta/\alpha})}{\tau-t}\,d\tau -$$

$$-\gamma\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(\tau-\sqrt{-\beta/\alpha})}{\tau-t}\,d\tau - \gamma\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(\tau+\sqrt{-\beta/\alpha})}{\tau+t}\,d\tau + \gamma\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(\tau-\sqrt{-\beta/\alpha})}{\tau+t}\,d\tau = 0$$

Prva dva člana daju nulu na osnovu istog rezonovanja, kao maločas, pa ostaje

$$\frac{1}{-\sqrt{-\beta/\alpha}-t} - \frac{1}{\sqrt{-\beta/\alpha}-t} - \frac{1}{-\sqrt{-\beta/\alpha}+t} + \frac{1}{\sqrt{-\beta/\alpha}+t} = 0 \qquad 0\equiv 0$$

Ovakvom istom procedurom mogu se rešavati i nehomogene jednačine ovog tipa, s tim što u (48) na desnoj strani mora stajati parna funkcija $f_s(t)$; a u (49) neparna funkcija $f_a(t)$. Tada jednačina (63) za Furije likove postaje:

$$\alpha\frac{d^2\tilde{\varphi}(x)}{dx^2} - \beta\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases}\tilde{f}_s(x) & \text{za jednačinu (48)} \quad 66.\\ \tilde{f}_a(x) & \text{za jednačinu (49)} \quad 67.\end{cases}$$

$$\tilde{f}_s(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f_s(t)\, e^{-itx}\ ;\ \tilde{f}_a(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f_a(t)\, e^{-itx} \qquad 68.$$

4. Koši-jeva jednačina sa dva singularna jezgra

Posmatraćemo jednačinu

$$\frac{A}{i\pi}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\zeta}\,d\tau + \frac{B}{i\pi}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = f(\zeta,t) \qquad 69.$$

gde je L-glatka zatvorena kontura u kompleksnoj ravni, A i B su konstante, a ζ i t tačke sa konture L. Funkcije φ i f zadovoljavaju uslov Heldera.

Koristeći formulu Poenkare-Bertran-a, po kojoj je kvadrat singularnog operatora po zatvorenoj konturi jedinični operator, odnosno

$$\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{d\tau}{\tau-t}\ \frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{d\tau_1}{\tau_1-\tau}\,\varphi(\tau) = \varphi(t) \qquad 70.$$

Transformisaćemo jednačinu (69) primenjujući na nju sa leva operator

$$\hat{S} = \frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{d\zeta}{\zeta-t} \qquad 71.$$

Tada je

$$\frac{1}{i\pi}\oint_L \frac{d\zeta}{\zeta-t}\ \frac{1}{i\pi}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\zeta}\,d\tau = \varphi(t) \qquad 72.$$

i

$$\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{d\xi}{\xi - t} \quad \frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \qquad 73.$$

pošto su tačke ξ i t na konturi L; sledi:

$$\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{d\xi}{\xi - t} = 1 \qquad 74.$$

Što znači da se jednačina (69) svodi na karakterističnu singularnu jednačinu:

$$A\,\varphi(t) + \frac{B}{\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = F(t)$$

$$F(t) = \frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{f(\xi, t)}{\xi - t}\, d\xi \qquad 75.$$

Ako uvedemo funkciju $\emptyset(z)$ datu integralom Koši tipa

$$\emptyset(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \qquad 76.$$

onda na osnovu formula Sahockog možemo pisati:

$$\emptyset^+(t) - \emptyset^-(t) = \varphi(t) \qquad 1/2\left[\emptyset^+(t) + \emptyset^-(t)\right] = \emptyset(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \qquad 77.$$

zamenom (77) u (75) dobijamo

$$A\left[\emptyset^+(t) - \emptyset^-(t)\right] + B\left[\emptyset^+(t) + \emptyset^-(t)\right] = F(t)$$

ili

$$\emptyset^+(t) = G(t)\,\emptyset^-(t) + g(t)$$

$$G(t) = \frac{A - B}{A + B} \qquad g(t) = \frac{F(t)}{A+B} \qquad 78.$$

čime smo jednačinu (75) sveli na Rimanov granični problem sa nultim indeksom. Dalje ćemo pretpostavljati da je $A \neq B$. Tada je indeks funkcije $G(t) = \text{Const}$, jednak

$$\text{Ind } G(t) = n\ G(t) = 0 \qquad n\text{-broj nula u } D^+$$

što je istovremeno i indeks Rimanovog problema.

Rešićemo prvo odgovarajući homogen problem (78) odnosno $g(t)=0$.

$$\emptyset^+(t) = G(t)\,\emptyset^-(t) \qquad (80)$$

Logaritmujući (80) nalazimo

$$\ln G(t) = \ln \emptyset^+(t) - \ln \emptyset^-(t) \qquad 81.$$

Ako uvedemo funkciju

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau \qquad 82.$$

onda na osnovu formula Sahockog (77) sledi:

$$\ln G(t) = \Gamma^+(t) - \Gamma^-(t) \qquad 83.$$

Poredjenjem (81) i (83) zaključujemo da se u najopštijem slučaju može pisati:

$$\phi^+(t) = C\, e^{\Gamma^+(t)} \qquad \phi^-(t) = C\, e^{\Gamma^-(t)}$$

$$\phi^-(z) = C\, e^{\Gamma(z)} = \begin{cases} C\, e^{\Gamma^+(z)} & z \in D^+ \\ C\, e^{\Gamma^-(z)} & z \in D^- \end{cases} \qquad 84.$$

Znači da homogeni problem možemo pretstaviti, kako je već navedeno u prethodnoj glavi, u obliku

$$\frac{\phi^+(t)}{e^{\Gamma^+(t)}} = \frac{\phi^-(t)}{e^{\Gamma^-(t)}} = C \qquad 85.$$

što je razumljivo i iz drugih razloga. Pošto je $\Gamma(z)$ dato integralom Koši tipa, a $\phi(z)$ je prema uslovima problema analitička i u D^+ i u D^-, onda je

$\phi^+(z)\, e^{-\Gamma^+(z)}$ analitička funkcija u D^+

a $\phi^-(z)\, e^{-\Gamma^-(z)}$ analitička funkcija u D^-

što je moguće samo ako je svaka od ovih funkcija jednaka nekoj konstanti C.

Vratimo se na nehomogeni problem

$$\phi^+(t) = G(t)\, \phi^-(t) + g(t)$$

Koristeći relaciju

$$G(t) = \frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}}$$

nehomogeni problem možemo napisati kao

$$\frac{\phi^+(t)}{e^{\Gamma^+(t)}} = \frac{\phi^-(t)}{e^{\Gamma^-(t)}} + \frac{g(t)}{e^{\Gamma^+(t)}} \qquad 86.$$

Ako uvedemo funkciju

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{g(\tau)}{e^{\Gamma^+(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - z} \qquad 87.$$

onda na osnovu formula Sahockog možemo pisati:

$$\frac{g(t)}{e^{\Gamma^+(t)}} = \psi^+(t) - \psi^-(t) \qquad 88.$$

pa se jednačina (86) svodi na

$$\frac{\phi^+(t)}{e^{\Gamma^+(t)}} - \psi^+(t) = \frac{\phi^-(t)}{e^{\Gamma^-(t)}} - \psi^-(t) = C_o \qquad 89.$$

Pojava konstante C_o je razumljiva na osnovu rezonovanja sličnog malopredjašnjem. Pošto su funkcije $\Gamma(z)$ i $\psi(z)$ date integralima Koši tipa, a funkcija $\phi(z)$ prema uslovima zadatka mora biti analitička i u D^+ i u D^-, to znači da funkcija

$$\phi^+(z)\, e^{-\Gamma^+(z)} - \psi^+(z) \quad \text{analitička u } D^+$$

$$\phi^-(z)\, e^{-\Gamma^-(z)} - \psi^-(z) \quad \text{analitička u } D^-$$

što je moguće samo kad su obe funkcije jednake nekoj konstanti.

Na osnovu (89) nalazimo

$$\phi^+(t) = e^{\Gamma^+(t)} \left[C_o + \psi^+(t)\right]; \quad \phi^-(t) = e^{\Gamma^-(t)} \left[C_o + \psi^-(t)\right]$$

$$\phi(z) = e^{\Gamma(z)} \left[C_o + \psi(z)\right] = \begin{cases} e^{\Gamma^+(z)} \left[C_o + \psi^+(z)\right] & z \in D^+ \\ e^{\Gamma^-(z)} \left[C_o + \psi^-(z)\right] & z \in D^- \end{cases} \qquad 90.$$

U našem slučaju (jednačina 78.), funkcija $\phi(z)$ je data integralom Koši tipa (76), pa mora biti $\phi^-(\infty)=0$, što znači da je u ovom slučaju $C_o=0$, pa su rešenja (78) data sa:

$$\phi^+(t) = e^{\Gamma^+(t)} \psi^+(t) \; ; \qquad \phi^-(t) = e^{\Gamma^-(t)} \psi^-(t) \qquad 91.$$

Pošto je $G(t) = \frac{A-B}{A+B}$ dobijamo

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \ln \frac{A-B}{A+B} \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} \ln \frac{A-B}{A+B} & z \in D^+ \\ 0 & z \in D^- \end{cases}$$

pa je

$$\Gamma^+(t) = \ln \frac{A-B}{A+B}$$

$\Gamma^-(t) = 0$

$$e^{\Gamma^+(t)} = \frac{A-B}{A+B} \qquad e^{\Gamma^-(t)} = 1 \qquad 92.$$

tada na osnovu (87) sledi:

$$\Psi(z) = \frac{A+B}{A-B}\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{g(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

$$\Psi^+(t) = \frac{A+B}{A-B}\Omega^+(t) \qquad \Psi^-(t) = \frac{A+B}{A-B}\Omega^-(t)$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{g(\tau)}{\tau - z}\,d\tau \qquad 93.$$

pa na osnovu (93) i (91) nalazimo

$$\phi^+(t) = \Omega^+(t) \qquad \phi^-(t) = \frac{A+B}{A-B}\Omega^-(t) \qquad 94.$$

i konačno

$$\varphi(t) = \Omega^+(t) - \frac{A+B}{A-B}\Omega^-(t)$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{F(\tau)}{A+B}\frac{d\tau}{\tau - z} \qquad 95.$$

Rezimirajući izloženo, možemo zaključiti:

Rešenje jednačine

$$\frac{A}{\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \xi}\,d\tau + \frac{B}{\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(\xi, t) \qquad A \neq B \qquad 96.$$

je funkcija

$$\varphi(t) = \Omega^+(t) - \frac{A+B}{A-B}\Omega^-(t) \qquad 96'$$

gde je

$$\Omega(z) = \frac{1}{A+B}\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{d\tau}{\tau - z}\left\{\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{f(\xi,\tau)}{\xi - \tau}\,d\xi\right\} \qquad 98.$$

Na jednom jednostavnijem primeru dokazaćemo ispravnost dobijenog rezultata. Uzmimo da je

$$f(\xi, t) = C = \text{Const} \qquad 99.$$

Tada je

$$\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{f(\xi,\tau)}{\xi - \tau}\,d\xi = C\,\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{d\tau}{\xi - \tau} = C \qquad 100.$$

pri čemu se tačke ξ, τ nalaze na konturi L. Na osnovu ovog imamo

$$\Omega(z) = \frac{1}{A+B}\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{C\,d\tau}{\tau - z} = \frac{C}{A+B}\oint_L \frac{1}{2\pi i}\,\frac{d\tau}{\tau - z}$$

odnosno

$$\Omega^+(z) = \frac{C}{A+B} \qquad \Omega^-(z) = 0 \qquad 101.$$

što znači da su:

$$\Omega^{+}(t) = \frac{C}{A+B} \qquad \Omega^{-}(t) = 0 \tag{102}$$

pa je prema formuli (97)

$$\varphi(t) = \Omega^{+}(t) - \frac{A+B}{A-B}\,\Omega^{-}(t) = \Omega^{+}(t) = \frac{C}{A+B} \tag{103}$$

Dokaz da (103) zadovoljava (96) dobićemo zamenom (103) u (96), odnosno

$$\frac{AC}{A+B}\,\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{d\tau}{\tau-\zeta} + \frac{BC}{A+B}\,\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{d\tau}{\tau-t} = C \tag{104}$$

ili

$$\frac{AC}{A+B} + \frac{BC}{A+B} = C \qquad \frac{C\,(A+B)}{A+B} = C$$

što se svodi na

$$C=C$$

Z A K L J U Č A K

U radu su analizirane neke singularne jednačine sa složenim jezgrom. Koliko je autoru poznato, ovi pokušaji, koji su uslovljeni izvesnim problemima fizike i astronomije, prvi su u svojoj vrsti do danas. Diplomski rad ne pretenduje na kompletnost u smislu rešavanja gornjih problema, ali u svakom slučaju načinje jednu temu, koja se razvitkom primenjene matematike nameće kao imperativ.

L I T E R A T U R A :

1. Ф. Д. Гахов
„Краевые задачи"
Г.И.Ф.М. МОСКВА 1958

2. В.С. Владимиров
„Уравнения математической физики"
„НАУКА" МОСКВА 1971

3. П.П. Заврейко и остали
„Интегральные уравнения"
„НАУКА" МОСКВА 1968

4. Н.И. Мусхелишвили
„Сингулярние интегральные уравнения"
„НАУКА" МОСКВА 1968

БИБЛИОТЕКА Природно-математичког факултета НОВИ САД