U N I V E R Z I T E T U N O V O M S A D U
Prirodno-matematički fakultet

D I P L O M S K I R A D

G R I N O V A F U N K C I J A J E D N O Č E S T I Č N O G H A M I L T O N I J A N A I NJ E N A P R I M E N A

Mentor
Dr. Bratislav Tošić

Kandidat
Andjelija Jovanović

N O V I S A D 1975

Zahvaljujem se najiskrenije profesoru Dr. Bratislavu Tošiću na pomoći pri izradi diplomskog rada.

UVOD

Kao što je poznato kompletne informacije o kvantnomehaničkim sistemima daje talasna funkcija ili vektor stanja sistema. Jednačina koja definiše prostorni deo talasne funkcije je parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda, oblika:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\vec{r}} + V(\vec{r}) - E\right]\Psi(\vec{r}) = 0$$

Zbog matematičkih teškoća koje mogu da nastupe pri rešavanju ove jednačine ponekad je zgodnije tražiti Grinovu funkciju sistema koja se odredjuje iz nehomogene jednačine:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\vec{r}} + V(\vec{r}) - E\right] G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Poznavanje Grinove funkcije sistema ekvivalentno je poznavanju talasne funkcije jer sve informacije koje sadrži talasna funkcija sadrži i Grinova funkcija.

Kao što je poznato realni deo pola Furije lika Grinove funkcije $G(\vec{r} - \vec{r}\,')$ daje nam energiju sistema a imaginarni deo pola daje recipročno vreme života elementarnog pobudjenja sistema.

U ovom diplomskom radu biće ispitivana Grinova funkcija za kompletan jednočestični Hamiltonijan za slučajeve različitih jednočestičnih potencijala. Pri ovome će biti korišćena činjenica da se recipročni operator:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\vec{r}} + V(\vec{r}) - E\right]^{-1}$$

može razviti u beskonačni operatorski red na dva različita načina. Ova dva različita načina daju mogućnost da se u dobroj aproksimaciji ispitaju dva granična tipa jednočestičnog sistema. Jedan tip sistema je onaj u kome je kinetička energija mnogo veća od potencijalne a drugi u kome je kinetička energija mnogo manja od potencijalne.

G L A V A I

G R I N O V A F U N K C I J A Z A K O M P L E T A N J E D N O Č E S T I Č N I H A M I L T O N I J A N

I.1 GRINOVA FUNKCIJA ZA SLOBODNU ČESTICU

Grinova funkcija sistema uvodi se kao $\hat{T}$ - produkt dva Hajzenbergova operatora. Ona opisuje promenu energije sistema ili čestice za odredjeno vreme.

$$G(\vec{r},t;\vec{r}',t') = -i\langle \hat{T}[\hat{\Psi}_H(\vec{r},t)\hat{\Psi}_H^+(\vec{r}',t')]\rangle \qquad \text{............(I.1.1)}$$

Stavimo da je $x = \vec{r}\ t$ i $x' = \vec{r}'\ t'$. Za homogen i izotropan sistem u prostoru i vremenu Grinova funkcija zavisi od razlike x i x' :

$$G(x-x') = -i\langle \hat{T}[\hat{\Psi}_H(x)\hat{\Psi}_H^+(x')]\rangle \qquad \text{.............(I.1.2)}$$

Napisaćemo Furije transform Grinove funkcije uvodeći pre toga četvoroimpuls $p = \vec{p},\omega$

$$G(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, G(p)\cdot e^{ip(x-x')} \qquad \text{............(I.1.3)}$$

U slučaju da je $x' = 0$ imamo :

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, G(p)\, e^{ipx} \Big/ \cdot \int e^{-ip'x} d^4x \qquad \text{..........(I.1.4)}$$

$$\int G(x)\cdot e^{-ip'x} d^4x = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, G(p)\int d^4x\cdot e^{ix(p-p')}$$

$$\int G(x)\cdot e^{-ip'x} d^4x = \int d^4p\, G(p)\cdot \delta(p-p')$$

$$\int G(x)\cdot e^{-ip'x}\cdot d^4x = G(p')$$

$$G(p) = \int G(x)\cdot e^{-ipx} d^4x \qquad \text{.............(I.1.5)}$$

Jednačina (I.1.5) predstavlja Furije lik Grinove funkcije G(x).

U reprezentaciji interakcije Grinova funkcija bi imala sledeći oblik:

$$G(\vec{r},t;\vec{r}',t') = -i\frac{\langle \hat{T}[\hat{\Psi}_y(\vec{r},t)\,\hat{\Psi}^+_y(\vec{r}',t')\,\hat{S}(\infty)]\rangle}{\langle \hat{S}(\infty)\rangle} \qquad \text{.............(I.1.6)}$$

ili

$$G(x-x') = -i\frac{\langle \hat{T}[\hat{\Psi}_y(x)\,\hat{\Psi}^+_y(x')\,\hat{S}(\infty)]\rangle}{\langle \hat{S}(\infty)\rangle} \qquad \text{.............(I.1.7)}$$

gde je

$$\hat{S}(\infty) = \hat{T}\, e^{i\int_{-\infty}^{\infty} dt'\,\hat{W}(t')}$$

$$\hat{W}(t') = e^{it\hat{H}_0}\,\hat{H}_{int}\,e^{-i\hat{H}_0 t}$$

Za slobodnu česticu zadovoljeni su sledeći uslovi:

$$\hat{H}_{int} = 0$$

$$\hat{W}(t') = 0$$

$$\hat{S}(\infty) = 1$$

Pod tim uslovima je G(x - x') nulta aproksimacija za funkciju Grina:

$$\overset{0}{G}(x-x') = -i\langle \hat{T}[\hat{\Psi}_H(x)\,\hat{\Psi}^+_H(x')]\rangle = -i\,\langle \hat{T}[\hat{\Psi}_y(x)\hat{\Psi}^+_y(x')]\rangle \qquad \text{.....(I.1.8)}$$

Za ovaj slučaj su Hajzenbergova slika i slika interakcije identične.

U reprezentaciji interakcije možemo pisati:

$$\hat{\Psi}_y(x) = \hat{\Psi}_y(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\vec{p}\; e^{i\vec{p}\vec{r} - i\varepsilon_{\vec{p}} t}\; a_{\vec{p}}$$

$$\hat{\Psi}^+_y(x') = \hat{\Psi}^+_y(\vec{r}',t') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\vec{p}'\; e^{-i\vec{p}'\vec{r}' + i\varepsilon_{\vec{p}} t'}\; a^+_{\vec{p}'}$$

Ako ove dve jednačine zamenimo u funkciju Grina dobijamo:

$$G^{\circ}(x-x') = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\, d^3\vec{p}\,'\, e^{i\vec{p}\vec{r}-i\vec{p}\,'\vec{r}\,'-i\varepsilon_{\vec{p}}t+i\varepsilon_{\vec{p}}t'} \langle \hat{T}[a_{\vec{p}}\, a^{+}_{\vec{p}\,'}]\rangle \quad \text{....(I.1.9)}$$

Kako $\hat{T}$ - produkt ima smisla samo za $\vec{p} = \vec{p}\,'$ jer je onda

$$\langle \hat{T}[a_{\vec{p}}\, a^{+}_{\vec{p}\,'}]\rangle = \langle \hat{T}[a_{\vec{p}}\, a^{+}_{\vec{p}}]\rangle\, \delta(\vec{p}-\vec{p}\,')$$

jednačina se može pisati u obliku:

$$G^{\circ}(x-x') = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\, e^{i\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}\,')-i\varepsilon_{\vec{p}}(t-t')} \langle \hat{T}[a_{\vec{p}}\, a^{+}_{\vec{p}}]\rangle \quad \text{......(I.1.10)}$$

Ako uzmemo da je $x' = 0$ i $t' = 0$ dobija se

$$G^{\circ}(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\, e^{i\vec{p}\vec{r}-i\varepsilon_{\vec{p}}t} \langle \hat{T}[a_{\vec{p}}\, a^{+}_{\vec{p}}]\rangle \quad \text{.......(I.1.11)}$$

Furije transform Grinove funkcije dobićemo množenjem sa $e^{-i\vec{p}\,'\vec{r}}$ i integraljenjem po zapremini:

$$\int G^{\circ}(\vec{r},t)\, e^{-i\vec{p}\,'\vec{r}}\, d^3\vec{r} = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\, \langle \hat{T}[a_{\vec{p}}\, a^{+}_{\vec{p}}]\rangle\, e^{-i\varepsilon_{\vec{p}}t}\int d^3\vec{r}\, e^{i(\vec{p}-\vec{p}\,')t}$$

$$\int G^{\circ}(\vec{r},t)\cdot e^{-i\vec{p}\,'\vec{r}}\, d^3\vec{r} = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\, \langle \hat{T}[a_{\vec{p}}\, a^{+}_{\vec{p}}]\rangle\, e^{-i\varepsilon_{\vec{p}}t}\cdot (2\pi)^3\cdot \delta(\vec{p}-\vec{p}\,')$$

Pri $\vec{p} = \vec{p}\,'$ Grinova funkcija za slobodnu česticu ima sledeći oblik:

$$G^{\circ}(\vec{p},t) = -i\langle \hat{T}[a_{\vec{p}}\, a^{+}_{\vec{p}}]\rangle\, e^{-i\varepsilon_{\vec{p}}t} \quad \text{.............(I.1.12)}$$

I.2 GRINOVA FUNKCIJA ZA KOMPLETAN HAMILTONIJAN

Da bi smo uveli Grinovu funkciju za kompletan Hamiltonijan podjimo od jednačine koja definiše svojstveni problem kompletnog Hamiltonijana. Ova jednačina glasi :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\vec{r}} + V(\vec{r})\right]\Psi(\vec{r}) = E\,\Psi(\vec{r}) \qquad \text{.............(I.2.1)}$$

Posle množenja sa $\left(-\frac{2m}{\hbar^2}\right)$ jednačina dobija sledeći oblik :

$$\left[\left(\Delta_{\vec{r}} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right) - \frac{2m\,V(\vec{r})}{\hbar^2}\right]\Psi(\vec{r}) = 0 \qquad \text{.............(I.2.2)}$$

Uvedimo sledeće operatore :

$$\hat{\Lambda} = \Delta_{\vec{r}} + K_0^2 \qquad K_0^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad \text{.............(I.2.3)}$$

$$\hat{V} = -\frac{2m\,V(\vec{r})}{\hbar^2} \qquad \text{.............(I.2.4)}$$

Uvodjenjem operatora jednačina (I.2.2) postaje :

$$(\hat{\Lambda} + \hat{V})\Psi = 0 \qquad \text{.............(I.2.5)}$$

Odavde sledi definicija Grinove funkcije za kompletan Hamiltonijan

$$(\hat{\Lambda} + \hat{V})\,G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Odnosno :

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,') = (\hat{\Lambda} + \hat{V})^{-1}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad \text{.............(I.2.6)}$$

Poznato je da se δ-funkcija predstavlja na sledeći način

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(x-x')k}\cdot dk = \lim_{\beta\to\infty}\int_{-\beta}^{\beta} e^{i2\pi(x-x')k}\,dk = \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{i2\pi(x-x')}\cdot e^{i2\pi(x-x')k}\Big|_{-\beta}^{+\beta}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi(x-x')k}\cdot dk = \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{i2\pi(x-x')}\left[e^{i2\pi(x-x')\beta} - e^{-i2\pi(x-x')\beta}\right] =$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}\frac{\sin 2\pi(x-x')\beta}{\pi(x-x')} = \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi \lim_{\beta\to\infty}\frac{\sin 2\pi(x-x')\beta}{2\pi(x-x')} =$$

$$= 2\pi \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin 2\pi(x-x')\beta}{2\pi(x-x')} = 2\pi\cdot\delta\left[2\pi(x-x')\right] = \delta(x-x')$$

to jest :

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \int d^3\vec{q}\, e^{i2\pi(\vec{r}-\vec{r}\,')\vec{q}} \qquad \text{..............(I.2.7)}$$

Ako ovako definisanu δ-funkciju uvrstimo u jednačinu (I.2.6) dobijamo Grinovu funkciju za kompletan Hamiltonijan u sledećem obliku :

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,') = (\hat{\Lambda}+\hat{V})^{-1}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = (\hat{\Lambda}+\hat{V})^{-1}\int d^3\vec{q}\cdot e^{i2\pi(\vec{r}-\vec{r}\,')\vec{q}} \qquad \text{..(I.2.8)}$$

I.3 DVE FORMULACIJE GRINOVE FUNKCIJE KOMPLETNOG JEDNOČESTIČNOG HAMILTONIJANA

U paragrafu I.2 videli smo da se Grinova funkcija kompletnog jednočestičnog Hamiltonijana predstavlja jednačinom (I.2.8).

Operator $(\hat{\Lambda}+\hat{V})$ se može napisati na dva načina :

$$(\hat{\Lambda}+\hat{V}) = \hat{\Lambda}(1+\hat{\Lambda}^{-1}\hat{V})$$

$$(\hat{\Lambda}+\hat{V}) = \hat{V}(1+\hat{V}^{-1}\hat{\Lambda})$$

Isto tako se i operator $(\hat{\Lambda}+\hat{V})^{-1}$ koji se javlja u jednačini (I.2.8) može izraziti na dva načina:

a) $$(\hat{\Lambda}+\hat{V})^{-1} = (1+\hat{\Lambda}^{-1}\hat{V})^{-1}\hat{\Lambda}^{-1} \qquad \text{..............(I.3.1)}$$

Posle razvoja u red člana $(1+\hat{\Lambda}^{-1}\hat{V})$ dobijamo :

$$(\hat{\Lambda}+\hat{V})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\hat{\Lambda}^{-1}\hat{V})^n\hat{\Lambda}^{-1} \qquad \text{.............(I.3.2)}$$

Te je Grinova funkcija za ovaj slučaj data kao

$$G_A \equiv G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\hat{\Lambda}^{-1}\hat{V})^n\hat{\Lambda}^{-1}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad \text{......(I.3.3)}$$

b) $$(\hat{\Lambda}+\hat{V})^{-1} = (1+\hat{V}^{-1}\hat{\Lambda})^{-1}\hat{V}^{-1} \qquad \text{..............(I.3.4)}$$

Posle razvoja u red člana $(1+\hat{V}^{-1}\hat{\Lambda})$ dobijamo :

$$(\hat{\Lambda}+\hat{V})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\hat{V}^{-1}\hat{\Lambda})^n\hat{V}^{-1} \qquad \text{............(I.3.5)}$$

Grinova funkcija u ovom slučaju je :

$$G_B \equiv G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\hat{V}^{-1}\hat{\Lambda})^n\hat{V}^{-1}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad \text{..(I.3.6)}$$

Tako smo formulisali Grinovu funkciju kompletnog jednočestičnog Hamiltonijana na dva načina.

$$G_A \equiv G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\hat{\Lambda}^{-1}\hat{V})^n \hat{\Lambda}^{-1} \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$$G_B \equiv G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\hat{V}^{-1}\hat{\Lambda})^n \hat{V}^{-1} \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Činjenica da operator $(\hat{\Lambda}+\hat{V})^{-1}$ može da se izrazi na dva načina ne znači da je Grinova funkcije nejednoznačno definisana. Bez obzira koji razvoj upotrebili, ako Grinovu funkciju tačno nadjemo i na jedan i na drugi način dobićemo jedan te isti rezultat.

Ovo ćemo pokazati na primeru kada je V = const. i kada Grinovu funkciju možemo tačno da nadjemo i na jedan i na drugi način.

Ako koristimo razvoj (a) dobijamo :

$$G_A(\vec{K}) = \frac{1}{K_0^2 - 4\pi^2 K^2 + V} \qquad \text{.............(I.3.7)}$$

U slučaju da koristimo razvoj (b) nalazimo :

$$G_B(\vec{K}) = \frac{1}{K_0^2 - (2\pi q)^2 + V} \qquad \text{.............(I.3.8)}$$

Ovim je dokazana gornja tvrdnja da pri tačnom rešavanju oba razvoja daju isti rezultat.

U slučaju kada je potencijal funkcija koordinata Grinovu funkciju možemo naći samo približno i tada je korisno imati dva različita razvoja za inverzni operator $(\hat{\Lambda}+\hat{V})^{-1}$.

Razvoj (a) treba koristiti kada je kinetička energija veća od potencijalne ($E_K \gg V$) jer red brže konvergira.

U slučaju da je kinetička energija manja od potencijalne treba koristiti razvoj (b).

G L A V A II

S L U Č A J J A K I H I N T E R A K C I J A

II.1 OPŠTA FORMULACIJA GRINOVE FUNKCIJE U I APROKSIMACIJI

Za slučaj jakih interakcija koje će biti obradjene u ovoj glavi koristi se Grinova funkcija definisana jednačinom (I.3.6)

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,')=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\hat{V}^{-1}\hat{\Lambda})^m\hat{V}^{-1}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

gde je $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ data jednačinom (I.2.7)

Za izračunavanje Grinove funkcije u I aproksimaciji operator $(\hat{\Lambda}+\hat{V})^{-1}$ se razvija u red do drugog člana

$$(\hat{\Lambda}+\hat{V})^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\hat{V}^{-1}\hat{\Lambda})^m\hat{V}^{-1}=\hat{V}^{-1}-\hat{V}^{-1}\hat{\Lambda}\hat{V}^{-1}\;\ldots\ldots(II.1.1)$$

Uvedimo recipročni operator potencijala

$$\hat{V}^{-1}=\hat{U}\;;\quad\hat{U}(\vec{r})=\int d^3\vec{K}_1\,\hat{U}(\vec{K}_1)e^{i2\pi\vec{K}_1\vec{r}}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II.1.2)$$

Izraz za Grinovu funkciju u I aproksimaciji postaje

$$G_I(\vec{r}-\vec{r}\,')=\hat{U}\int d^3\vec{q}\,e^{i2\pi\vec{q}\vec{r}-i2\pi\vec{q}\vec{r}\,'}-\hat{U}\int d^3\vec{q}\,d^3\vec{K}_1\,\hat{U}(\vec{K}_1)(\Delta_{\vec{r}}+K_0^2)\cdot e^{i2\pi\vec{r}(\vec{K}_1+\vec{q})-i2\pi\vec{q}\vec{r}\,'}=$$

$$=\hat{U}\int d^3\vec{q}\,e^{i2\pi\vec{q}\vec{r}-i2\pi\vec{q}\vec{r}\,'}-\hat{U}\int d^3\vec{K}_1\,d^3\vec{q}\left\{K_0^2-[2\pi(\vec{K}_1+\vec{q})]^2\right\}\hat{U}(\vec{K}_1)\cdot e^{i2\pi\vec{r}(\vec{K}_1+\vec{q})-i2\pi\vec{q}\vec{r}\,'}\;\ldots\ldots\ldots(II.1.3)$$

Iskoristimo činjenicu da je: $G_I(\vec{r}-\vec{r}\,')=\int d^3\vec{q}\;G(\vec{q})\cdot e^{i2\pi\vec{r}\vec{q}-i2\pi\vec{r}\,'\vec{q}}$

$$\int d^3\vec{q}\;G(\vec{q})\cdot e^{i2\pi\vec{r}\vec{q}-i2\pi\vec{r}\,'\vec{q}}=\int d^3\vec{K}_1\,d^3\vec{q}\;\hat{U}(\vec{K}_1)\cdot e^{i2\pi\vec{r}(\vec{q}+\vec{K}_1)-i2\pi\vec{r}\,'\vec{q}}\;-$$

$$-\int d^3\vec{K}_2\,d^3\vec{K}_1\,d^3\vec{q}\left\{K_0^2-[2\pi(\vec{K}_1+\vec{q})]^2\right\}\hat{U}(\vec{K}_2)\hat{U}(\vec{K}_1)\cdot e^{i2\pi\vec{r}(\vec{K}_2+\vec{K}_1+\vec{q})-i2\pi\vec{r}\,'\vec{q}}\;\ldots\ldots\ldots(II.1.4)$$

Potražimo Furije lik Grinove funkcije. Pomnožićemo poslednji izraz sa $e^{-i2\pi\vec{r}\vec{K}+i2\pi\vec{r}\,'\vec{p}}$ i integralićemo ga po zapremini.

Dobija se

$$G(\vec{k})\,\delta(\vec{k}-\vec{p}) = \hat{U}(\vec{k}-\vec{p}) - \int d^3\vec{k}_2\, \hat{U}(\vec{k}_2)\, \hat{U}(\vec{k}-\vec{k}_2-\vec{p})\left\{k_0^2 - [2\pi(\vec{k}-\vec{k}_2)]^2\right\}$$

Posle integracije po $\vec{p}$ i zamene $\vec{k}_2 = \vec{q}$ nalazimo :

$$G(\vec{k}) = \int d^3\vec{p}\,\hat{U}(\vec{k}-\vec{p}) + \int d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\left\{[2\pi(\vec{k}-\vec{q})]^2 - k_0^2\right\}\hat{U}(q)\,\hat{U}(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})$$

Zamenimo sumacione indekse

$$\vec{k}-\vec{p} = \vec{k}_1 \;;\quad \vec{k}-\vec{p}-\vec{q} = \vec{k}_1-\vec{q} \;;\quad \vec{k}-\vec{q} \equiv \vec{k}-\vec{q}$$

$$G(\vec{k}) = \int\limits_{\vec{k}_1 \equiv \vec{p}} d^3\vec{k}_1\,\hat{U}(\vec{k}_1) + \int d^3\vec{k}_1\, d^3\vec{q}\left\{[2\pi(\vec{k}-\vec{q})]^2 - k_0^2\right\}\hat{U}(\vec{q})\,\hat{U}(\vec{k}_1-\vec{q})$$

$$G(\vec{k}) = \int d^3\vec{p}\,\hat{U}(\vec{p}) + \int d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\left\{[2\pi(\vec{k}-\vec{q})]^2 - k_0^2\right\}\hat{U}(q)\,\hat{U}(\vec{p}-\vec{q})$$

Odnosno :

$$G(\vec{k}) = \int d^3\vec{p}\,\hat{U}(\vec{p})\left\{1 + \frac{\int d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\left\{[2\pi[\vec{k}-\vec{q})]^2 - k_0^2\right\}\hat{U}(\vec{q})\,\hat{U}(\vec{p}-\vec{q})}{\int d^3\vec{p}\,\hat{U}(\vec{p})}\right\}$$

$$G(\vec{k}) = \frac{\int d^3\vec{p}\,\hat{U}(\vec{p})}{1 - \dfrac{\int d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\left\{[2\pi(\vec{k}-\vec{q})]^2 - k_0^2\right\}\hat{U}(\vec{q})\,\hat{U}(\vec{p}-\vec{q})}{\int d^3\vec{p}\,\hat{U}(\vec{p})}}$$

$$G(\vec{k}) = \frac{\left[\int d^3\vec{p}\,\hat{U}(\vec{p})\right]^2}{\int d^3\vec{p}\,\hat{U}(\vec{p}) - \iint d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\left\{[2\pi(\vec{k}-\vec{q})]^2 - k_0^2\right\}\hat{U}(\vec{q})\,\hat{U}(\vec{p}-\vec{q})} \quad \ldots\ldots(\mathrm{II}.1.5)$$

Pol Furije lika Grinove funkcije nalazimo upravo iz ovoga izraza

$$\iint d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\, \{[2\pi(\vec{k}-\vec{q})]^2 - k_0^2\}\, \hat{u}(\vec{q})\, \hat{u}(\vec{p}-\vec{q}) = \int d^3\vec{p}\, \hat{u}(\vec{p})$$

Sledi da je

$$k_0^2 = -\frac{\int d^3\vec{p}\, \hat{u}(\vec{p})}{\iint d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\, \hat{u}(\vec{q})\, \hat{u}(\vec{p}-\vec{q})} + \frac{\iint d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\, [2\pi(\vec{k}-\vec{q})]^2\, \hat{u}(\vec{q})\, \hat{u}(\vec{p}-\vec{q})}{\iint d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\, \hat{u}(\vec{q})\, \hat{u}(\vec{p}-\vec{q})} \quad \ldots.(II.1.6)$$

Ovaj se izraz može dalje rešavati izračunavanjem članova koji u njemu figurišu

$$\hat{u}(\vec{p}) = \int d^3\vec{r}\, e^{-i2\pi\vec{p}\vec{r}}\, \hat{u}(\vec{r}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots.(II.1.7)$$

Dalje se nalazi da je

$$\int d^3\vec{p}\, \hat{u}(\vec{p}) = \iint d^3\vec{p}\, d^3\vec{r}\, \hat{u}(\vec{r})\, e^{-i2\pi\vec{p}\vec{r}} = \int d^3\vec{r}\, \hat{u}(\vec{r}) \int d^3\vec{p} \cdot e^{-i2\pi\vec{p}\vec{r}}$$

$$\int d^3\vec{p}\, \hat{u}(\vec{p}) = \int d^3\vec{r}\, \hat{u}(\vec{r})\, \delta(\vec{r}) = \hat{u}(0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots.(II.1.8)$$

Imenitelj razlomka u jednačini (II.1.6) možemo napisati kao:

$$\iint d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\, \hat{u}(\vec{q})\, \hat{u}(\vec{p}-\vec{q}) = \int d^3\vec{p}\, d^3\vec{q} \int d^3\vec{r}\, \hat{u}(\vec{r}) \cdot e^{-i2\pi\vec{q}\vec{r}} \int d^3\vec{r}\,'\, \hat{u}(\vec{r}\,') \cdot e^{-i2\pi\vec{r}\,'(\vec{p}-\vec{q})} =$$

$$= \int d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}\,'\, \hat{u}(\vec{r})\, \hat{u}(\vec{r}\,') \int d^3\vec{q}\, e^{i2\pi\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}\,')} \int d^3\vec{p}\, e^{-i2\pi\vec{p}\vec{r}\,'} =$$

$$= \int d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}\,'\, \hat{u}(\vec{r})\, \hat{u}(\vec{r}\,')\, \delta(\vec{r}\,')\, \delta(\vec{r}\,'-\vec{r}) = \hat{u}^2(0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots.(II.1.9)$$

Transformišimo brojitelj drugog razlomka u jednačini (II.1.6)

$$\int d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\, [2\pi(\vec{k}-\vec{q})]^2\, \hat{u}(\vec{q})\, \hat{u}(\vec{p}-\vec{q}) = (2\pi\vec{k})^2 \int d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\, \hat{u}(\vec{q})\, \hat{u}(\vec{p}-\vec{q}) -$$

$$-8\pi^2 \int d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\, \vec{k}\cdot\vec{q}\, \hat{u}(\vec{q})\, \hat{u}(\vec{p}-\vec{q}) + (2\pi)^2 \int d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\, \vec{q}^{\,2}\, \hat{u}(\vec{q})\, \hat{u}(\vec{p}-\vec{q}) \quad ..(II.1.10)$$

Izračunaćemo svaki član u ovom izrazu .Prvi član je:

$$(2\pi\vec{k})^2\int d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\, \hat{U}(\vec{q})\,\hat{U}(\vec{p}-\vec{q}) = (2\pi\vec{k})^2\,\hat{U}^2(0) \qquad \text{.............(II.1.11)}$$

drugi član je:

$$-8\pi^2\int d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\;\vec{k}\cdot\vec{q}\;\hat{U}(\vec{q})\,\hat{U}(\vec{p}-\vec{q}) =$$

$$= -8\pi^2\int d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}'\;\hat{U}(\vec{r})\hat{U}(\vec{r}')\int d^3\vec{q}\, d^3\vec{p}\;\vec{k}\cdot\vec{q}\; e^{-i2\pi\vec{r}(\vec{p}-\vec{q})-i2\pi\vec{r}'\vec{q}} =$$

$$= -8\pi^2\int d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}'\;\hat{U}(\vec{r})\,\hat{U}(\vec{r}')\int d^3\vec{q}\;\vec{k}\vec{q}\cdot e^{i2\pi\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')}\int d^3\vec{p}\cdot e^{-i2\pi\vec{r}\vec{p}} =$$

$$= -8\pi^2\int d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}'\;\hat{U}(\vec{r})\,\hat{U}(\vec{r}')\int d^3\vec{q}\;\vec{k}\vec{q}\cdot e^{i2\pi\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')}\cdot\delta(\vec{r}) =$$

$$= -8\pi^2\,\hat{U}(0)\int d^3\vec{q}\;\vec{k}\vec{q}\int d^3\vec{r}'\,\hat{U}(\vec{r}')\,e^{-i2\pi\vec{q}\vec{r}'} = -8\pi^2\,\hat{U}(0)\int d^3\vec{q}\;\vec{k}\cdot\vec{q}\;\hat{U}(\vec{q}) \text{..(II.1.12}$$

Treći član je:

$$(2\pi)^2\int d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\;\hat{U}(\vec{q})\,\hat{U}(\vec{p}-\vec{q}) =$$

$$= (2\pi)^2\int d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\;\vec{q}^2\int d^3\vec{r}\;\hat{U}(\vec{r})\cdot e^{-i2\pi\vec{r}(\vec{p}-\vec{q})}\cdot\int d^3\vec{r}'\,\hat{U}(\vec{r}')\,e^{-i2\pi\vec{r}'\vec{q}} =$$

$$= (2\pi)^2\int d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}'\;\hat{U}(\vec{r})\,\hat{U}(\vec{r}')\int d^3\vec{p}\cdot e^{-i2\pi\vec{r}\vec{p}}\int d^3\vec{q}\; e^{-i2\pi\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')}\,\vec{q}^2 =$$

$$= (2\pi)^2\int d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}'\;\hat{U}(\vec{r})\,\hat{U}(\vec{r}')\int d^3\vec{q}\;\vec{q}^2\, e^{-i2\pi\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')}\cdot\delta(\vec{r}) =$$

$$= (2\pi)^2\,\hat{U}(0)\int d^3\vec{r}'\, d^3\vec{q}\;\hat{U}(\vec{r}')\,\vec{q}^2\, e^{-i2\pi\vec{q}\vec{r}} = (2\pi)^2\,\hat{U}(0)\int d^3\vec{q}\;\vec{q}^2\,\hat{U}(\vec{q}) \text{.....(II.1.13)}$$

Jednačinu (II.1.6) možemo sada pisati u obliku:

$$K_0^2 = -\frac{1}{\hat{u}(0)} + (2\pi\vec{k})^2 - \frac{8\pi^2}{\hat{u}(0)} \int d^3\vec{q}\, \vec{k}\cdot\vec{q}\, \hat{u}(\vec{q}) + \frac{1}{\hat{u}(0)} \int d^3\vec{q}\, (2\pi\vec{q})^2\, \hat{u}(\vec{q}) \quad \ldots\ldots (II.1.14)$$

Ova jednačina predstavlja pol Furije lika Grinove funkcije

II.2 PRIMER POMERENOG OSCILATORA

Kod pomerenog oscilatora potencijal je oblika :

$$V(x)=V_0(x^2+x_0^2) \qquad \text{.............(II.2.1)}$$

Iz jednačine (I.2.4) dobijamo da je operator potencijala slede-ćeg oblika :

$$\hat{V}(x)=-\frac{2mV_0}{\hbar^2}(x^2+x_0^2) \qquad \text{.............(II.2.2)}$$

Recipročna vrednost operatora $\hat{V}$ (x) je :

$$\hat{U}(x)=-\frac{\hbar^2}{2mV_0}\frac{1}{x^2+x_0^2} \quad ; \quad \hat{U}(0)=-\frac{\hbar^2}{2mV_0}\frac{1}{x_0^2} \qquad \text{...........(II.2.3)}$$

Potražimo Furije transform za veličinu $\hat{U}$ (x). Dobijamo :

$$\hat{U}(q)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\cdot e^{-i2\pi xq}\,\hat{U}(x)=-\frac{\hbar^2}{2mV_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i2\pi qx}}{x^2+x_0^2}\,dx \qquad \text{....(II.2.4)}$$

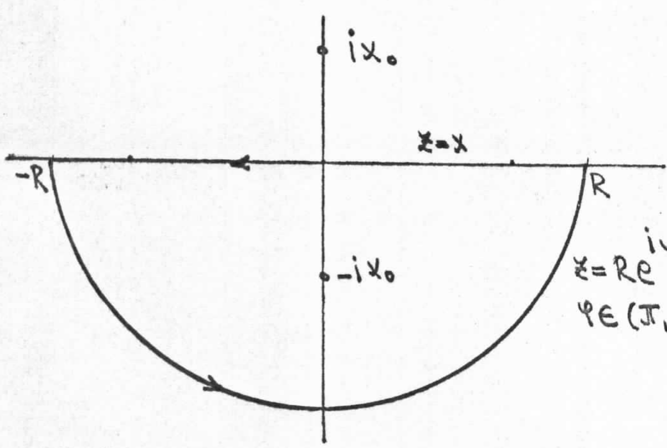
$$q\in(-\infty,\infty)$$

Integral koji se pojavio rešićemo za dva slučaja :

a) $q>0$

b) $q<0$

Za slučaj pod(a) posmatraćemo kompleksni integral $\oint_L \frac{e^{-i2\pi qz}}{z^2+x_0^2}dz$ pri čemu se kontura L zatvara u donjoj poluravni



Rešimo kompleksni integral

$$\oint_L\frac{e^{-i2\pi qz}}{z^2+x_0^2}dz=\int_{+R}^{-R}\frac{e^{-i2\pi qx}}{x^2+x_0^2}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{-i2\pi qR(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\cdot iRe^{i\varphi}\cdot d\varphi}{R^2e^{2i\varphi}+x_0^2}=$$

$$=\operatorname*{Res}_{z=-ix_0}\frac{e^{-i2\pi qz}}{z^2+x_0^2}\cdot 2\pi i$$

Analizirajmo oba dobijena integrala. Za slučaj da $R \to \infty$ dobijamo :

$$\int_{R}^{-R} \frac{e^{-i2\pi q x}}{x^2+x_0^2}\,dx = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{-i2\pi q x}}{x^2+x_0^2}\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi q x}}{x^2+x_0^2}\,dx$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-i2\pi q R(\cos\varphi + i\sin\varphi)}}{R^2 e^{2i\varphi}+x_0^2}\cdot iRe^{i\varphi}\,d\varphi \leqslant \left| \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-i2\pi q R(\cos\varphi+i\sin\varphi)}}{R^2 e^{2i\varphi}+x_0^2}\cdot iRe^{i\varphi}\,d\varphi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|i||e^{i\varphi}||e^{-i2\pi R q\cos\varphi}|\,|R\cdot e^{2\pi R q \sin\varphi}|\,d\varphi}{|R^2 e^{2i\varphi}+x_0^2|} = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{R e^{2\pi q R \sin\varphi}\,d\varphi}{\sqrt{(R^2\cos 2\varphi + x_0^2)^2 + R^2\sin^2 2\varphi}} \to 0$$

$$R \to \infty \;;\; \sin\varphi < 0 \;;\; \varphi \in (\pi, 2\pi)$$

znači

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi q x}}{x^2+x_0^2}\,dx = \operatorname*{Res}_{z=-ix_0} \frac{e^{-i2\pi q z}}{z^2+x_0^2}\cdot 2\pi i = \lim_{z=-ix_0} \frac{(z+ix_0)\cdot e^{-i2\pi q z}}{(z+ix_0)(z-ix_0)} = -\frac{e^{-2\pi q x_0}\cdot 2\pi i}{2ix_0}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi q x}}{x^2+x_0^2}\,dx = \frac{\pi}{x_0}\, e^{-2\pi q x_0} \quad ; \quad q>0$$

Za slučaj pod (b) posmatra se isti kompleksni integral samo se kontura zatvara u gornjoj poluravni i potpuno analogno nalazimo :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi q x}}{x^2+x_0^2}\,dx = \frac{\pi}{x_0}\, e^{2\pi q x_0} \quad ; \quad q<0$$

Vidimo da je veličina $\hat{U}$ (q) prekidna funkcija :

$$\hat{U}(q) = -\frac{\hbar^2\pi}{2mV_0x_0}\begin{cases} e^{-2\pi q x_0} & ; \quad q>0 \\ e^{2\pi q x_0} & ; \quad q<0 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(II.2.5)$$

Da bismo našli pol Furije lika Grinove funkcije koristićemo jednačinu (II.1.14)

Da bi smo rešili navedenu jednačinu potrebno je izračunati sledeći integral :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq\, kq\, \hat{U}(q) = K\left\{\int_0^{\infty} -\frac{\hbar^2}{2mV_0x_0}\, e^{-2\pi q x_0} q\, dq + \int_{-\infty}^{0} -\frac{\hbar^2}{2mV_0x_0}\, e^{2\pi q x_0} q\, dq\right\} =$$

$$= -\frac{\hbar^2\pi K}{2mV_0x_0}\left\{\int_0^{\infty} q\cdot e^{-2\pi q x_0}\cdot dq + \int_{-\infty}^{0} q\cdot e^{2\pi q x_0}\cdot dq\right\} \qquad \text{(II.2.6)}$$

Integrale koji su se ovde pojavili nalazimo parcijalno integracijom. Oni imaju sledeće vrednosti :

$$\int_0^{\infty} q\cdot e^{-2\pi q x_0}\cdot dq = \frac{1}{(2\pi x_0)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} q\cdot e^{-2\pi q x_0}\cdot dq = -\frac{1}{(2\pi x_0)^2}$$

Vidi se da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq\cdot k\cdot q\, \hat{U}(q) = 0 \qquad \text{(II.2.7)}$$

Da bi smo rešili jednačinu (II.1.14) moramo naći poslednji član u ovoj jednačini

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq\, 4\pi^2 q^2\, \hat{U}(q) = 4\pi^2\left\{\int_{-\infty}^{0} q^2\left(-\frac{\hbar^2}{2mV_0x_0}\right)\cdot e^{2\pi q x_0}\cdot dq + \int_0^{\infty} q^2\left(-\frac{\hbar^2}{2mV_0x_0}\right) e^{-2\pi q x_0}\cdot dq\right\} =$$

$$= -\frac{2\pi^2\hbar^2}{mV_0x_0}\left\{\int_0^{\infty} q^2 e^{-2\pi q x_0}\, dq + \int_{-\infty}^{0} q^2 e^{2\pi q x_0}\, dq\right\} \qquad \text{(II.2.8)}$$

Posle parcijalne integracije dobijamo

$$\int_0^{\infty} q^2\cdot e^{-2\pi q x_0}\cdot dq = \frac{2}{(2\pi x_0)^3}$$

$$\int_{-\infty}^{0} q^2\cdot e^{2\pi q x_0}\, dq = \frac{2}{(2\pi x_0)^3}$$

Znači izračunali smo da je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq\, 4\pi^2 q^2\, \hat{U}(q) = -\frac{\hbar^2}{\pi m V_0}\frac{1}{x_0^4} \qquad \text{............(II.2.9)}$$

Na osnovu jednačine (II.1.14) dobijamo pol Furije lika Grinove funkcije:

$$K_0^2 = \frac{2m}{\hbar^2}V_0 x_0^2 + (2\pi k)^2 + \frac{2}{\pi}\frac{1}{x_0^2} \qquad \text{.............(II.2.10)}$$

Kako je $K_0^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ možemo izraziti energiju pomerenog oscilatora :

$$E = V_0 x_0^2 + \frac{\hbar^2}{2m}(2\pi k)^2 + \frac{1}{\pi m}\left(\frac{\hbar}{x_0}\right)^2 \qquad \text{............(II.2.11)}$$

Napravimo poredjenje sa tačnim rešenjem.

Svojstveni problem pomerenog oscilatora glasi:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2mV_0}{\hbar^2}x_0^2 - \frac{2mV_0}{\hbar^2}x^2\right]\psi = 0 \quad \text{...........(II.2.12)}$$

Svojstveni problem nepomerenog oscilatora glasi:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\right]\psi = 0 \qquad \text{.............(II.2.13)}$$

Za nepomereni oscilator na osnovu standardne teorije sledi:

$$\frac{\frac{2mE}{\hbar^2}}{\frac{m\omega}{\hbar}} = 2n+1 \qquad E = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad \text{...........(II.2.14)}$$

$$n = 0, 1, 2 \ldots$$

Po analogiji za pomereni oscilator imamo:

$$\frac{\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2mV_0}{\hbar^2}x_0^2}{\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}} = 2n+1$$

Iz poslednje jednakosti sledi tačno rešenje za energiju pomerenog oscilatora ona iznosi:

$$E = V_0 x_0^2 + (2n+1)\hbar\sqrt{\frac{V_0}{2m}} \qquad \text{............(II.2.15)}$$

$$n = 0, 1, 2 \ldots$$

Izvršimo poredjenje ovog tačnog rešenja sa približnim rešenjem za energiju pomerenog oscilatora, koje je dato jednačinom (II.2.11)

$$E = V_0 x_0^2 + \frac{\hbar^2}{2m}(2\pi K)^2 + \frac{1}{\pi m}\left(\frac{\hbar}{x_0}\right)^2$$

Prvi i najveći članovi su isti u oba izraza, dok grešku usled aproksimacije predstavlja sledeća razlika:

$$(2n+1)\hbar\sqrt{\frac{V_0}{2m}} - \left[\frac{\hbar^2(2\pi K)}{2m} + \frac{\hbar^2}{\pi m x_0^2}\right] \qquad \text{.............(II.2.16)}$$

Pogodnim odabiranjem vrednosti za n, K, V_0, x_0 razlika se može učiniti minimalnom i na taj način naći onaj slučaj gde se u prvoj aproksimaciji dobija zadovoljavajući rezultat.

II.3 OPŠTA ANALIZA TRODIMENZIONALNOG SLUČAJA U CENTRALNOM POLJU

Centralno simetrični potencijal je oblik potencijala koji se vrlo često koristi u fizici. Za ovaj potencijal možemo pisati :

$$\hat{U}(\vec{r}) = \hat{U}(|\vec{r}|) = \hat{U}(r) \qquad \text{...........(II.3.1)}$$

Furije transform ovog operatora je :

$$\hat{U}(\vec{q}) = \int d^3\vec{r}\, \hat{U}(\vec{r})\, e^{-i2\pi \vec{r}\vec{q}} \qquad \text{...........(II.3.2)}$$

U slučaju centralno simetričnog potencijala imamo :

$$\hat{U}(\vec{q}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} dr\, r^2\, \hat{U}(\vec{r})\, e^{-i2\pi \vec{q}\vec{r}} =$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} dr\, r^2\, \hat{U}(r) \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, e^{-i2\pi r q \cos\theta} =$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} dr\, r^2\, \hat{U}(r) \int_{-1}^{1} dx \cdot e^{-i2\pi r q x} =$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} dr\, r^2\, \hat{U}(r)\, \frac{e^{-i2\pi r q} - e^{i2\pi r q}}{-i2\pi r q} =$$

$$= \frac{2}{q} \int_0^{\infty} dr\, \hat{U}(r)\, r \sin 2\pi q r \qquad \text{...........(II.3.3)}$$

Na osnovu jednačine (II.3.1) možemo pisati

$$\hat{U}(\vec{q}) \equiv \hat{U}(q)$$

$$\hat{U}(q) = \frac{2}{q} \int_0^{\infty} dr\, \hat{U}(r)\, r \sin 2\pi q r$$

Za nalaženj pola Furije lika Grinove funkcije iskoristićemo jednačinu (II.1.14) :

$$K_0^2 = -\frac{1}{\hat{U}(0)} + 4\pi^2 k^2 - \frac{8\pi^2}{\hat{U}(0)}\int d^3\vec{q}\,\vec{k}\cdot\vec{q}\,\hat{U}(q) + \frac{4\pi^2}{\hat{U}(0)}\int d^3\vec{q}\,q^2\hat{U}(q)$$

Izračunajmo član

$$\int d^3\vec{q}\,\vec{k}\cdot\vec{q}\,\hat{U}(q) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dq\, q^2\,\hat{U}(q)\int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta\,\vec{k}\vec{q} =$$

$$= k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dq\, q^3\,\hat{U}(q)\int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta\cos\theta = 0$$

Ovaj izraz jednak je nuli zato što je :

$$\int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\theta\,\sin 2\theta = 0$$

Ostaje nam sledeći izraz :

$$K_0^2 = 4\pi^2 k^2 + \frac{1}{\hat{U}(0)}\left\{4\pi^2\int d^3\vec{q}\,q^2\,\hat{U}(q) - 1\right\} \quad \text{............(II.3.4)}$$

Ova jednačina predstavlja pol Furije lika Grinove funkcije.

II. 4 PRIMER RECIPROČNOG GAUSOVOG POTENCIJALA I RECIPROČNOG BRAJT - VIGNEROVOG POTENCIJALA

Recipročni Gausov potencijal ima sledeći oblik:

$$V(\vec{r}) = V_0 \cdot e^{\frac{r^2}{R^2}} \qquad \text{............(II.4.1)}$$

Operator potencijala uvodi se po jednačini (I.2.4) kao:

$$\hat{V}(\vec{r}) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} e^{\frac{r^2}{R^2}} \qquad \text{............(II.4.2)}$$

Recipročna vrednost operatora $\hat{V}$ (r) iznosi:

$$\hat{U}(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2mV_0} e^{-\frac{r^2}{R^2}} \qquad \text{............(II.4.3)}$$

Potražimo Furije transform ovog operatora koristeći se jednačinom (II.3.3)

$$\hat{U}(q) = -\frac{\hbar^2}{mqV_0} \int_0^\infty dr\, e^{-\frac{r^2}{R^2}} r \sin 2\pi q r \qquad \text{............(II.4.4)}$$

Integral ćemo izračunati parcijalnom integracijom koristeći sledeću smenu

$$\sin 2\pi q r = u \qquad r \cdot e^{-\frac{r^2}{R^2}} \cdot dr = dv$$

$$2\pi q \cos 2\pi q r\, dr = du \qquad -\frac{R^2}{2} \cdot e^{-\frac{r^2}{R^2}} = v$$

$$\int_0^\infty dr \cdot r \cdot e^{-\frac{r^2}{R^2}} \sin 2\pi q r = -\frac{R^2}{2} \cdot e^{-\frac{r^2}{R^2}} \sin 2\pi q r \Big|_0^\infty + \int_0^\infty R^2 \pi q \cdot e^{-\frac{r^2}{R^2}} \cdot \cos 2\pi q r\, dr =$$

$$= \frac{R^2 \pi q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dr \cdot e^{-\frac{r^2}{R^2}} \cdot \cos 2\pi q r = \frac{R^2 \pi q}{4} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dr \cdot e^{-\frac{r^2}{R^2} + i 2\pi q r} + \int_{-\infty}^{\infty} dr \cdot e^{-\frac{r^2}{R^2} - i 2\pi q r} \right\}$$

$$\int_0^\infty dr \cdot r \cdot e^{-\frac{r^2}{R^2}} \sin 2\pi q r = \frac{R^2 \pi q}{4} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dr \cdot e^{-\frac{r^2}{R^2} + i 2\pi q r} + \int_{-\infty}^{\infty} dr \cdot e^{-\frac{r^2}{R^2} - i 2\pi q r} \right\}$$

Izraze u eksponentima podintegralnih veličina možemo pisati na sledeći način

$$-\frac{r^2}{R^2} + i2\pi q r = -\frac{1}{R^2}\left(r - i\pi q R^2\right)^2 - \pi^2 q^2 R^2$$

$$-\frac{r^2}{R^2} - i2\pi q r = -\frac{1}{R^2}\left(r + i\pi q R^2\right)^2 - \pi^2 q^2 R^2$$

Dalje dobijamo da je:

$$\int_0^\infty dr.r.e^{-\frac{r^2}{R^2}} \sin 2\pi q r =$$

$$= \frac{R^2\pi q}{4} \cdot e^{-\pi^2 q^2 R^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{R^2}(r - i\pi q R^2)^2} \cdot dr + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{R^2}(r + i\pi q R^2)^2} \cdot dr \right\}$$

Uvedimo sledeću smenu

$$r \pm i\pi q R^2 = t$$

$$dr = dt$$

Gornji integrali postaju

$$\int_0^\infty dr.r.e^{-\frac{r^2}{R^2}} \cdot \sin 2\pi q r = \frac{R^2\pi q}{4} \cdot e^{-\pi^2 q^2 R^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{R}\right)^2} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{R}\right)^2} \cdot dt \right\}$$

Stavimo

$$\frac{t}{R} = x \; ; \; dt = R\,dx \; ; \; \int_0^\infty dr.r.e^{-\frac{r^2}{R^2}} \cdot \sin 2\pi q r = \frac{R^3\pi^{3/2} q}{2} \cdot e^{-R^2\pi^2 q^2}$$

Našli smo sledeće

$$\hat{U}(q) = -\frac{\hbar^2 R^3 \pi^{3/2}}{2mV_0} e^{-R^2\pi^2 q^2} \qquad \text{.............(II.4.5)}$$

Da bi smo mogli da izračunamo energiju po jednačini (II.3.4) moramo izračunati predhodno sledeće izraze:

$$\int d^3\vec{q}\; \hat{U}(q)\, q^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^\infty dq\, q^2 \cdot q^2 \cdot \hat{U}(q) = -\frac{2\hbar^2 R^3 \pi^{5/2}}{mV_0} \int_0^\infty dq\, q^4 e^{-R^2\pi^2 q^2} \quad \text{...(II.4.6)}$$

Da bi smo rešili integral $\int_0^\infty dq\cdot q^4\cdot e^{-R^2\pi^2q^2}$ uvedimo smenu:

$R\pi q = x \quad , \quad dq = \frac{1}{R\pi}dx$

Integral postaje

$$\int d^3q\, \hat{U}(q)\, q^2 = -\frac{2\hbar^2}{R^2\pi^{5/2} m V_0}\int_0^\infty dx\cdot x^4\cdot e^{-x^2}$$

Ovaj poslednji integral se rešava parcijalno.Nalazi se da je

$$\int_0^\infty dx\cdot x^4\cdot e^{-x^2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$$

$$\int d^3q\, \hat{U}(q)\, q^2 = -\left(\frac{\hbar}{2\pi R}\right)^2\frac{3}{mV_0} \qquad \text{.............(II.4.7)}$$

Iskoristimo jednačinu (II.3.4), dobijamo

$$K_0^2 = 4\pi^2K^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\frac{3}{m}\left(\frac{\hbar}{R}\right)^2 \qquad \text{.............(II.4.8)}$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = 4\pi^2K^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\frac{3}{m}\left(\frac{\hbar}{R}\right)^2$$

$$E = V_0 + \frac{(2\pi\hbar K)^2}{2m} + \frac{3}{m}\left(\frac{\hbar}{R}\right)^2 \qquad \text{.............(II.4.9)}$$

Posmatrajmo sledeći slučaj:

$V_0 = -A$; $A > 0$ Izraz za energiju postaje

$$E = \frac{(2\pi\hbar K)^2}{2m} + \frac{3\hbar^2}{mR^2} - A$$

Za slučaj: $A = \frac{3\hbar^2}{mR^2}$ $\qquad R = \frac{\sqrt{3}\hbar}{\sqrt{mA}}$

Znači ako je potencijal oblika:

$$V(\vec{r}) = -A\cdot e^{\frac{r^2}{\frac{3\hbar^2}{mA}}} \qquad \text{.............(II.4.10)}$$

čestica izleće iz jame i ponaša se kao slobodna čestica sa energijom $E = \frac{(2\pi K\hbar)^2}{2m}$ .Ako je potencijal tipa (II.4.10) vidi se da u datoj aproksimaciji čestica ima samo kinetičku energiju što znači da postaje slobodna.

Pošto analitički oblik nuklearnih potencijala ne poznajemo već smo prinudjeni da uzimamo ovaj ili onaj model, račun koji je ovde izveden navodi na pomisao da se nuklearni potencijal α - radioaktivnih jezgri može predstaviti modelnim potencijalom čiji je analitički oblik dat jednačinom (II.4.10).

Recipročni Brajt-Vignerov potencijal je oblika :

$$V(\vec{r}) = V(r) = V_0\,(r^4 + R^4) \qquad \text{.............(II.4.11)}$$

Operator potencijala uvodi se po jednačini (I.2.4)

$$\hat{V}(r) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}(r^4+R^4) \qquad \text{.............(II.4.12)}$$

Recipročna vrednost operatora je $\hat{V}$ (r) iznosi :

$$\hat{U}(r) = -\frac{\hbar^2}{2mV_0}\,\frac{1}{r^4+R^4}\ ; \quad \hat{U}(0) = -\frac{\hbar^2}{2mV_0}\,\frac{1}{R^4} \qquad \text{.............(II.4.13)}$$

Da bi smo izračunali energiju koristićemo jednačinu (II.3.4), tj.:

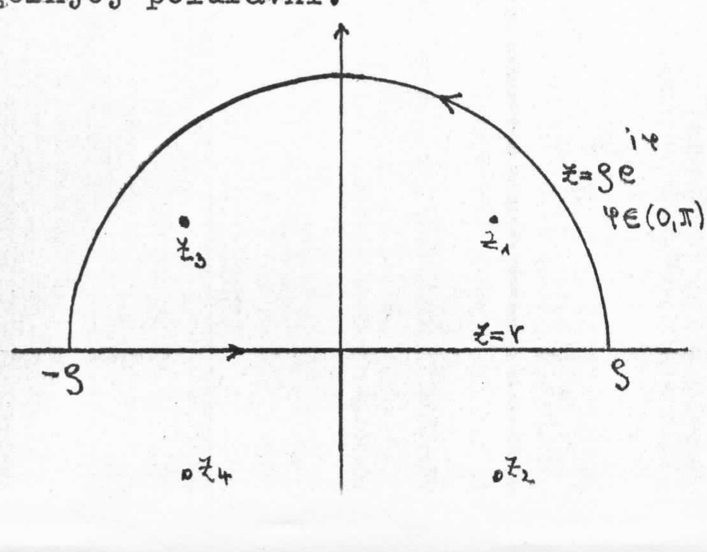
$$K_0^2 = \frac{2m}{\hbar^2}V_0R^4 + 4\pi^2K^2 - \frac{8\pi^2V_0R^4m}{\hbar^2}\int d^3\vec{q}\; q^2\,\hat{U}(q)$$

Prvo moramo naći Furije transform operatora $\hat{U}$ (r) po jednačini (II.3.3)

$$\hat{U}(q) = \frac{2}{q}\int_0^\infty dr\,\hat{U}(r)\,r\cdot\sin 2\pi q r = -\frac{2}{q}\,\frac{\hbar^2}{2mV_0}\int_0^\infty dr\,\frac{r\cdot\sin 2\pi q r}{r^4+R^4} =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{mV_0 q}\int_0^\infty \frac{r\cdot\sin 2\pi q r}{r^4+R^4}\,dr \qquad \text{.............(II.4.14)}$$

Da bi smo izračunali integral $\int_0^\infty \frac{r\cdot\sin 2\pi q r}{r^4+R^4}dr$ posmatraćemo kompletni integral $\oint_C \frac{z\cdot e^{i2\pi q z}}{z^4+R^4}\cdot dz$ za $q=|\vec{q}|>0$ i konturu ćemo zatvoriti u gornjoj poluravni.



Nadjimo polove funkcije:

$$z^4+R^4=0$$

$$(z^2+R^2)^2-(zR\sqrt{2})^2=0$$

$$z_{1,2}=\frac{R\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$$

$$z_{3,4}=\frac{R\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$$

Pri tome su z_1 i z_3 u gornjoj poluravni a z_2 i z_4 u donjoj poluravni. Dalje rešavamo integral

$$\oint_L \frac{z\cdot e^{i2\pi qz}}{z^4+R^4}dz=\int_{-\varrho}^{\varrho}\frac{r\cdot e^{i2\pi qr}}{r^4+R^4}dr+\int_0^{\pi}\frac{\varrho\cdot e^{i\varphi}\cdot i\varrho\cdot e^{i\varphi}\cdot e^{i2\pi q\varrho\cos\varphi-2\pi q\varrho\sin\varphi}\cdot d\varphi}{\varrho^4 e^{4i\varphi}+R^4}=$$

$$=2\pi i\left\{\operatorname*{Res}_{z=\frac{R\sqrt{2}}{2}(1+i)}\frac{z\cdot e^{i2\pi qz}}{z^4+R^4}+\operatorname*{Res}_{z=\frac{R\sqrt{2}}{2}(-1+i)}\frac{z\cdot e^{i2\pi qz}}{z^4+R^4}\right\}$$

Kada $\varrho\to\infty$ imamo :

$$\int_{-\varrho}^{\varrho}\frac{r\cdot e^{i2\pi qr}}{r^4+R^4}dr=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r\cdot e^{i2\pi qr}}{r^4+R^4}\cdot dr\ ;\ \int_0^{\pi}\frac{\varrho\cdot e^{i\varphi}\cdot i\varrho\cdot e^{i\varphi}\cdot e^{i2\pi q\varrho\cos\varphi-2\pi q\varrho\sin\varphi}\cdot d\varphi}{\varrho^4 e^{4i\varphi}+R^4}=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r\cdot e^{i2\pi qr}}{r^4+R^4}dr=2\pi i\left\{\operatorname*{Res}_{z=\frac{R}{\sqrt{2}}(1+i)}\frac{z e^{i2\pi qz}}{z^4+R^4}+\operatorname*{Res}_{z=\frac{R}{\sqrt{2}}(-1+i)}\frac{z e^{i2\pi qz}}{z^4+R^4}\right\}$$

$$\operatorname*{Res}_{z_1=\frac{R}{\sqrt{2}}(1+i)}\frac{z e^{i2\pi qz}}{z^4+R^4}=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{z\cdot e^{i2\pi qz}}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}=\frac{z_1 e^{i2\pi qz_1}}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1=\frac{R}{\sqrt{2}}(1+i)}\frac{z\cdot e^{i2\pi qz}}{z^4+R^4}=\frac{1}{4iR^2}e^{-2\pi q\frac{R}{\sqrt{2}}}\cdot e^{2\pi iq\frac{R}{\sqrt{2}}}$$

Sada nadjimo i $\operatorname{Res}\frac{z\cdot e^{i2\pi qz}}{z^4+R^4}$ za $z=z_3=\frac{R}{\sqrt{2}}(-1+i)$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_3=\frac{R}{\sqrt{2}}(-1+i)}\frac{z e^{i2\pi qz}}{z^4+R^4}=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{z\cdot e^{i2\pi qz}}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_3=\frac{R}{\sqrt{2}}(-1+i)} \frac{z\cdot e^{i2\pi qz}}{z^4+R^4} = \frac{z_3\cdot e^{i2\pi q z_3}}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)}$$

$$\operatorname*{Res}_{z_3=\frac{R}{\sqrt{2}}(-1+i)} \frac{z\cdot e^{i2\pi qz}}{z^4+R^4} = -\frac{1}{4iR^2} e^{-i2\pi q\frac{R}{\sqrt{2}}}\cdot e^{-2\pi q\frac{R}{\sqrt{2}}}$$

Sada konačno možemo izračunati

$$\oint_L \frac{z\cdot e^{2i\pi qz}}{z^4+R^4} = 2\pi i\left\{\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{z\cdot e^{i2\pi qz}}{z^4+R^4} + \operatorname*{Res}_{z=z_3}\frac{z\cdot e^{i2\pi qz}}{z^4+R^4}\right\}$$

$$2\pi i\left\{\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{z\cdot e^{i2\pi qz}}{z^4+R^4} + \operatorname*{Res}_{z=z_3}\frac{z\cdot e^{i2\pi qz}}{z^4+R^4}\right\} = i\frac{\pi}{R^2} e^{-2\pi q\frac{R}{\sqrt{2}}}\cdot \sin 2\pi q\frac{R}{\sqrt{2}}$$

Kako se $\oint \frac{z\cdot e^{i2\pi qz}}{z^4+R^4}\cdot dz$ svodi na $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r e^{i2\pi qr}}{r^4+R^4}\cdot dr$ možemo pisati:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r\cdot e^{i2\pi qr}}{r^4+R^4}\,dr = i\frac{\pi}{R^2} e^{-2\pi q\frac{R}{\sqrt{2}}}\cdot \sin 2\pi q\frac{R}{\sqrt{2}}$$

To jest;

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r\cos 2\pi qr}{r^4+R^4}\,dr + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r\sin 2\pi qr}{r^4+R^4}\,dr = i\frac{\pi}{R^2} e^{-2\pi q\frac{R}{\sqrt{2}}}\cdot \sin 2\pi q\frac{R}{\sqrt{2}}$$

Prvi integral otpada iz razloga što imamo parnu funkciju u simetričnim granicama. Za drugi integral možemo pisati

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r\sin 2\pi qr}{r^4+R^4}\,dr = 2\int_{0}^{\infty}\frac{r\sin 2\pi qr}{r^4+R^4}\cdot dr$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{r\sin 2\pi qr}{r^4+R^4}\cdot dr = \frac{\pi}{2R^2} e^{-2\pi q\frac{R}{\sqrt{2}}}\cdot \sin 2\pi q\frac{R}{\sqrt{2}}$$

dobijamo da je $\hat{U}(q)$ jednako:

$$\hat{U}(q) = -\frac{\pi R^2}{2mV_0R^2}\,\frac{1}{q}\cdot e^{-2\pi q\frac{R}{\sqrt{2}}}\cdot \sin 2\pi q\frac{R}{\sqrt{2}} \qquad \text{...........(II.4.15)}$$

Na osnovu jednačine (II.34) nalazimo:

$$k_0^2 = \frac{2m}{\hbar^2} V_0 R^4 + 4\pi^2 k^2 + 8\pi^3 R^2 \int_0^\infty dq\, q^3 \cdot e^{-\frac{2\pi R}{\sqrt{2}} \cdot q} \cdot \sin \frac{2\pi R}{\sqrt{2}} q$$

Da bi smo rešili integral uvedimo sledeću smenu:

$$\frac{2\pi R}{\sqrt{2}} q = x \implies q = \frac{1}{\pi R \sqrt{2}} x \quad ; \quad q^3 dq = \frac{1}{\pi^4 R^4 4} x^3 dx$$

dobijamo

$$k_0^2 = \frac{2m}{\hbar^2} V_0 R^4 + 4\pi^2 k^2 + \frac{2}{\pi R^2} \int_0^\infty dx \cdot x^3 \cdot e^{-x} \sin x \quad \text{...........(II.4.16)}$$

Lako je pokazati da je integral koji smo dobili smenom jednak nuli. Sada za energiju čestice možemo pisati

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2m}{\hbar^2} V_0 R^4 + 4\pi^2 k^2$$

$$E = V_0 R^4 + \frac{\hbar^2}{2m} (2\pi k)^2 \quad \text{...........(II.4.17)}$$

Kao što vidimo kod recipročnog Brajt - Vignerovog potencijala ne postoji mogućnost da se za neke vrednosti parametra V_0 čestica ponaša kao slobodna, tj. da ima samo kinetičku energiju kao što je to moguće kod recipročnog Gausovog potencijala.

S tim u vezi (a imajući u vidu diskusiju u vezi sa Gausovim recipročnim potencijalom) očigledno je da recipročni Brajt-Vignerov potencijal odgovara stabilnim jezgrima jer ne postoji mogućnost oslobadjanja čestice.

G L A V A III

S L U Č A J S L A B I H I N T E R A K C I J A

III.1 OPŠTA FORMULACIJA GRINOVE FUNKCIJE U I APROKSIMACIJI

U članu I.3 rečeno je da se u slučaju slabe interakcije za formulisanje Grinove funkcije koristi razvoj operatora $(\hat{\Lambda}+\hat{V})^{-1}$ dat jednačinom (I.3.2). Grinova funkcija se predstavlja u ovom slučaju na sledeći način:

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,')=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\hat{\Lambda}^{-1}\hat{V})^n\hat{\Lambda}^{-1}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad \text{..............(III.1.1)}$$

$$\hat{\Lambda}=\Delta_{\vec{r}}+K_0^2=K_0^2\left(1+\frac{\Delta_{\vec{r}}}{K_0^2}\right)$$

$$\hat{\Lambda}^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\Delta_{\vec{r}}}{K_0^2}\right)^n\frac{1}{K_0^2} \qquad \text{.............(III.1.2)}$$

Za Grinovu funkciju u I aproksimaciji možemo pisati:

$$G_I(\vec{r}-\vec{r}\,')=\hat{\Lambda}^{-1}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')-\hat{\Lambda}^{-1}\hat{V}\hat{\Lambda}^{-1}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad \text{..........(III.1.3)}$$

Pri tome se koristi definicija za $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ data jednačinom (I.2.7). Izračunajmo prvi član u jednačini (III.1.3) :

$$\hat{\Lambda}^{-1}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\Delta_{\vec{r}}}{K_0^2}\right)^n\frac{1}{K_0^2}\int d^3\vec{q}\; e^{i2\pi\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}\,')}=$$

$$=\frac{1}{K_0^2}\int d^3\vec{q}\left\{1-\frac{\Delta_{\vec{r}}}{K_0^2}+\frac{\Delta_{\vec{r}}\Delta_{\vec{r}}}{K_0^4}-\cdots\right\}e^{i2\pi\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}\,')}=$$

$$=\frac{1}{K_0^2}\int d^3\vec{q}\left\{1+\frac{(2\pi\vec{q})^2}{K_0^2}+\frac{(2\pi\vec{q})^4}{K_0^4}+\cdots\right\}e^{i2\pi\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}\,')}=$$

$$=\int d^3\vec{q}\;\frac{1}{K_0^2}\;\frac{1}{1-\frac{(2\pi\vec{q})^2}{K_0^2}}\;e^{i2\pi\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}\,')}=$$

$$=\int d^3\vec{q}\;\frac{e^{i2\pi\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}\,')}}{K_0^2-(2\pi\vec{q})^2} \qquad \text{..............(III.1.4)}$$

Uvrstimo dobijenu vrednost u jednačinu (III.1.3)

$$G_I(\vec{r}-\vec{r}') = \int d^3\vec{q}\,\frac{e^{i2\pi\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')}}{k_o^2-(2\pi\vec{q})^2} - \hat{\Lambda}^{-1}\hat{V}\int d^3\vec{q}\,\frac{e^{i2\pi\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')}}{k_o^2-(2\pi\vec{q})^2}$$

$$\hat{V} = \int d^3\vec{k}_1\,\hat{V}(\vec{k}_1)\,e^{i2\pi\vec{k}_1\vec{r}}$$

Dalje možemo pisati

$$G_I(\vec{r}-\vec{r}') = \int d^3\vec{q}\,\frac{e^{i2\pi\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')}}{k_o^2-(2\pi\vec{q})^2} - \hat{\Lambda}\int d^3\vec{q}\,d^3\vec{k}_1\,\hat{V}(\vec{k}_1)\frac{e^{i2\pi\vec{r}(\vec{q}+\vec{k}_1)-i2\pi\vec{q}\vec{r}'}}{k_o^2-(2\pi\vec{q})^2} \quad \text{.....(III.1.5)}$$

Sa druge strane znamo da je

$$G_I(\vec{r}-\vec{r}') = \int d^3\vec{q}\,G(\vec{q})\,e^{i2\pi\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')} \quad \text{..........(III.1.6)}$$

Sledi:

$$\int d^3\vec{q}\,G(\vec{q})\cdot e^{i2\pi\vec{q}\vec{r}-i2\pi\vec{q}\vec{r}'} = \int d^3\vec{q}\,\frac{e^{i2\pi\vec{q}\vec{r}-i2\pi\vec{q}\vec{r}'}}{k_o^2-(2\pi\vec{q})^2} -$$

$$- \int d^3\vec{q}\,d^3\vec{k}_1\,\frac{1}{k_o^2-(2\pi\vec{q})^2}\,\frac{\hat{V}(\vec{k}_1)}{k_o^2-[2\pi(\vec{q}+\vec{k}_1)]^2}\cdot e^{i2\pi\vec{r}(\vec{q}+\vec{k}_1)-i2\pi\vec{q}\vec{r}'} \quad \text{.........(III.1.7)}$$

Pomnožimo dobijeni izraz sa $e^{-i2\pi\vec{k}\vec{r}\,+\,i2\pi\vec{p}\vec{r}'}$ i integralimo ga. Stavimo u gornji izraz $\vec{q} + \vec{k}_1 = \vec{k}$; $\vec{k}_1 = \vec{p}$

$$G(\vec{k})\,\delta(\vec{k}-\vec{p}) = \frac{\delta(\vec{k}-\vec{p})}{k_o^2-(2\pi\vec{k})^2} - \frac{1}{k_o^2-(2\pi\vec{k})^2}\,\frac{\hat{V}(\vec{p})}{k_o^2-[2\pi(\vec{k}-\vec{p})]^2}$$

Posle integracije po p dobijamo:

$$G(\vec{k}) = \frac{1}{k_o^2-(2\pi\vec{k})^2}\left\{1 - \int\frac{d^3\vec{p}\,\hat{V}(\vec{p})}{k_o^2-[2\pi(\vec{k}-\vec{p})]^2}\right\}$$

Uvedimo $\vec{k} - \vec{p} = \vec{q}$; $\vec{p} = \vec{k} - \vec{q}$
Dobijamo

$$G(\vec{k}) = \frac{1}{k_0^2 - (2\pi\vec{k})^2} \left\{ 1 - \int d^3\vec{q} \, \frac{\hat{V}(\vec{k}-\vec{q})}{k_0^2 - (2\pi\vec{q})^2} \right\}$$

Ili možemo pisati

$$G(\vec{k}) = \frac{1}{k_0^2 - (2\pi\vec{k})^2} \; \frac{1}{1 + \int d^3\vec{q} \, \frac{\hat{V}(\vec{k}-\vec{q})}{k_0^2 - (2\pi\vec{q})^2}} \qquad \text{..........(III.1.8)}$$

Jedan pol Grinove funkcije jednak je:

$$k_0^2 = (2\pi\vec{k})^2 \qquad \text{..............................(III.1.9)}$$

Ovaj pol daje energiju slobodne čestice $E = \frac{(2\hbar\pi\vec{k})^2}{2m}$
Drugi pol je dopunski i dobija se iz jednačine:

$$\int d^3\vec{q} \, \frac{\hat{V}(\vec{k}-\vec{q})}{(2\pi\vec{q})^2 - k_0^2} = 1 \qquad \text{..........(III.1.10)}$$

III.2 PRIMER DELTA POTENCIJALA

Ovaj potencijal je sledećeg oblika

$$V(\vec{r}) = V_0\, \delta(\vec{r}-\vec{R}) \qquad \text{.........(III.2.1)}$$

Uvedimo operator potencijala

$$\hat{V}(\vec{r}) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\delta(\vec{r}-\vec{R}) \qquad \text{.........(III.2.2)}$$

Potražimo Furije transform ovog operatora

$$\hat{V}(\vec{p}) = \int d^3\vec{r}\; \hat{V}(\vec{r})\cdot e^{-i2\pi\vec{p}\vec{r}} \qquad \text{.........(III.2.3)}$$

Nadjimo operator koji figuriše u jednačini za pol Grinove funkcije. Po analogiji sa operatorom $\hat{V}(p)$ imamo:

$$\hat{V}(\vec{k}-\vec{q}) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\, e^{i2\pi\vec{R}(\vec{k}-\vec{q})} \qquad \text{.........(III.2.4)}$$

Uvrštavanjem operatora $\hat{V}(\vec{k}-\vec{q})$ u jednačinu (III.1.10) sledi:

$$\int d^3\vec{q}\; \frac{e^{i2\pi\vec{R}(\vec{k}-\vec{q})}}{(2\pi\vec{q})^2-K_0^2} = -\frac{\hbar^2}{2mV_0}$$

$$\int d^3\vec{q}\; \frac{e^{-i2\pi\vec{R}\vec{q}}}{(2\pi\vec{q})^2-K_0^2} = -\frac{\hbar^2}{2mV_0}\, e^{-i2\pi\vec{R}\vec{k}} \qquad \text{.........(III.2.5)}$$

Rešimo integral na levoj strani poslednje relacije

$$\int d^3\vec{q}\, \frac{e^{-i2\pi\vec{R}\vec{q}}}{(2\pi\vec{q})^2-K_0^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} \frac{dq\, q^2 \cdot e^{-i2\pi Rq\cos\theta}}{(2\pi\vec{q})^2-K_0^2} =$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{dq\, q^2}{4\pi^2 q^2-K_0^2} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cdot e^{-i2\pi Rq\cos\theta} \quad ; \quad \cos\theta = x \; ; \; -\sin\theta\, d\theta = dx$$

$$\int d^3\vec{q}\, \frac{e^{-i2\pi\vec{R}\vec{q}}}{(2\pi\vec{q})^2-K_0^2} = 2\pi\int_0^{\infty} \frac{dq\, q^2}{4\pi^2 q^2-K_0^2}\int_{-1}^{1} dx\cdot e^{-i2\pi Rqx} = \frac{2}{R}\int_0^{\infty} dq\cdot \frac{q\sin 2\pi Rq}{4\pi^2 q^2-K_0^2}$$

$$\frac{2}{R}\int_0^\infty \frac{dq\, q\sin 2\pi Rq}{4\pi^2 q^2 - K_0^2} = \frac{1}{2\pi^2 R}\int_0^\infty \frac{q\sin 2\pi qR}{q^2-\left(\frac{K_0}{2\pi}\right)^2}\,dq \quad ; \quad \left(\frac{K_0}{2\pi}\right)^2 = x^2$$

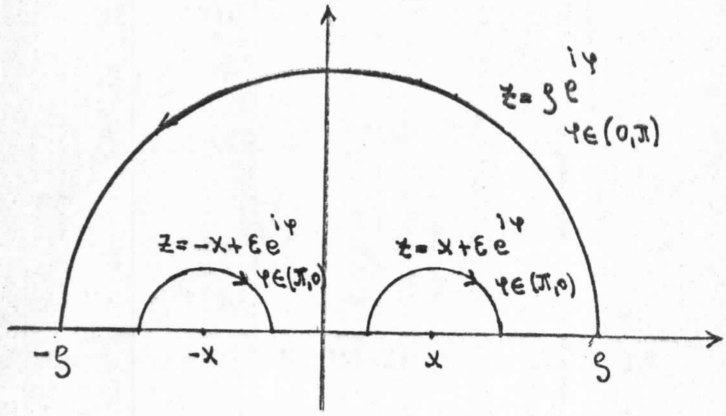
$$\int d^3\vec{q}\,\frac{e^{-i2\pi\vec{R}\vec{q}}}{(2\pi\vec{q})^2-K_0^2} = \frac{1}{2\pi^2 R}\int_0^\infty \frac{q\sin 2\pi qR}{q^2-x^2}\,dq \qquad \text{..............(III.2.6)}$$

Sada jednačina (III.2.5) dobija sledeći oblik

$$\int_0^\infty \frac{q\sin 2\pi qR}{q^2-x^2}\,dq = -\frac{\pi^2\hbar^2 R}{mV_0}\cdot e^{-i2\pi\vec{R}\vec{k}} \qquad \text{..............(III.2.7)}$$

Integral $\int_0^\infty \frac{q\sin 2\pi qR}{q^2-x^2}\,dq$ ćemo rešiti pomoću integrala $\oint_L \frac{z\cdot e^{i2\pi Rz}}{z^2-x^2}\,dz = 0$

Pri rešavanju integrala odaberimo sledeću konturu:



$$\oint_L \frac{z\cdot e^{i2\pi Rz}}{z^2-x^2} = \int_0^\pi \frac{\rho e^{i\varphi}\cdot e^{i2\pi R\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}}{\rho^2 e^{2i\varphi}-x^2}\cdot i\rho e^{i\varphi}\,d\varphi + \int_{-\rho}^{-x-\varepsilon}\frac{\rho\cdot e^{i2\pi Rq}}{q^2-x^2}\,dq +$$

$$+\int_\pi^0 \frac{(-x+\varepsilon e^{i\varphi})\cdot e^{i2\pi R(-x+\varepsilon e^{i\varphi})}}{(-x+\varepsilon e^{i\varphi}-x)\,(-x+\varepsilon e^{i\varphi}+x)}\cdot i\varepsilon e^{i\varphi}\,d\varphi + \int_{-x+\varepsilon}^{x-\varepsilon}\frac{q\cdot e^{i2\pi Rq}}{q^2-x^2}\,dq +$$

$$+\int_\pi^0 \frac{(x+\varepsilon e^{i\varphi})\,e^{i2\pi R(x+\varepsilon e^{i\varphi})}}{(x+\varepsilon e^{i\varphi}-x)\,(x+\varepsilon e^{i\varphi}+x)}\cdot i\varepsilon e^{i\varphi}\,d\varphi + \int_{x+\varepsilon}^{\rho}\frac{q\cdot e^{i2\pi Rq}}{q^2-x^2}\,dq = 0$$

Za slučaj da $\varepsilon \to 0$ i $\delta \to 0$ dobijamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq\, q \cdot e^{i2\pi Rq}}{q^2 - x^2} + \frac{i}{2}\int_{\pi}^{0} e^{-i2\pi Rx}\, d\varphi + \frac{i}{2}\int_{\pi}^{0} e^{i2\pi Rx}\, d\varphi = 0$$

Dalje imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq \cdot q \cdot e^{i2\pi Rq}}{q^2 - x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq\, q \cos 2\pi Rq}{q^2 - x^2} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq\, q \sin 2\pi Rq}{q^2 - x^2}$$

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq\; q \sin 2\pi Rq}{q^2 - x^2} = i\pi \cos 2\pi Rx$$

Integral koji nama treba iznosi:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dq\; q \sin 2\pi Rq}{q^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \cos 2\pi Rx \qquad \text{...............(III.2.8)}$$

A po jednačini (III.2.7) imamo

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dq\; q \sin 2\pi Rq}{q^2 - x^2} = -\frac{\pi^2 k^2 R\, e^{-i2\pi \vec{R}\vec{K}}}{mV_0}$$

Iz poslednjih dveju relacija se vidi:

$$\cos 2\pi Rx = -\frac{2 k^2 \pi R\, e^{-i2\pi \vec{R}\vec{K}}}{mV_0}$$

Odavde je

$$x = \frac{1}{2\pi R} \arccos \left\{ -\frac{2\pi R k^2}{mV_0} e^{-i2\pi \vec{R}\vec{K}} \right\}$$

tj:

$$x = \frac{1}{2\pi R} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi R k^2}{mV_0} e^{-i2\pi \vec{R}\vec{K}} \right\}$$

$$x = \frac{1}{4R} + \frac{k^2}{mV_0} e^{-i2\pi \vec{R}\vec{K}} \qquad \text{...............(III.2.9)}$$

Kako smo veličinu x^2 uveli smenom $x^2 = \left(\frac{K_0}{2\pi}\right)^2$ iz sledeće relacije možemo naći izraz za energiju

$$\frac{K_0^2}{4\pi^2} = \frac{1}{16R^2} + \frac{\hbar^2}{2mV_0R}\, e^{-i2\pi\vec{R}\vec{K}} \quad ; \quad K_0^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Izraz za energiju glasi

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{8mR^2} + \frac{\hbar^4\pi^2}{m^2V_0R} \cdot e^{-i2\pi\vec{R}\vec{K}} \qquad \text{..............(III.2.10)}$$

Izrazimo realni i imaginarni deo energije

$$R_e E = \frac{\hbar^2\pi^2}{8mR^2} + \frac{\hbar^4\pi^2}{m^2V_0R} \cos 2\pi\vec{R}\vec{K} \qquad \text{..............(III.2.11)}$$

$$I_m E = -\frac{\hbar^4\pi^2}{m^2V_0R} \sin 2\pi\vec{R}\vec{K} \qquad \text{..............(III.2.12)}$$

Kao što se vidi čestica koja se kreće u δ-potencijalu ima u opštem slučaju kompleksnu energiju.

Drugim rečima δ - potencijal dovodi do toga da čestica ima konačno vreme života. Ovo treba shvatiti uslovno jer čestica koja se kreće u potencijalu menja svoje osobine (obučena čestica) i ovo konačno vreme života odnosi se na "obučenu česticu" ili kvazičesticu.

Ako se čestica kreće normalno na pravac koji spaja koordinatni početak sa tačkom singulariteta ($\vec{R}$) onda je njeno vreme života beskonačno dugo ($I_m E = 0$) realni deo energije više ne zavisi od $\vec{K}$ što znači da se ona lokalizuje.

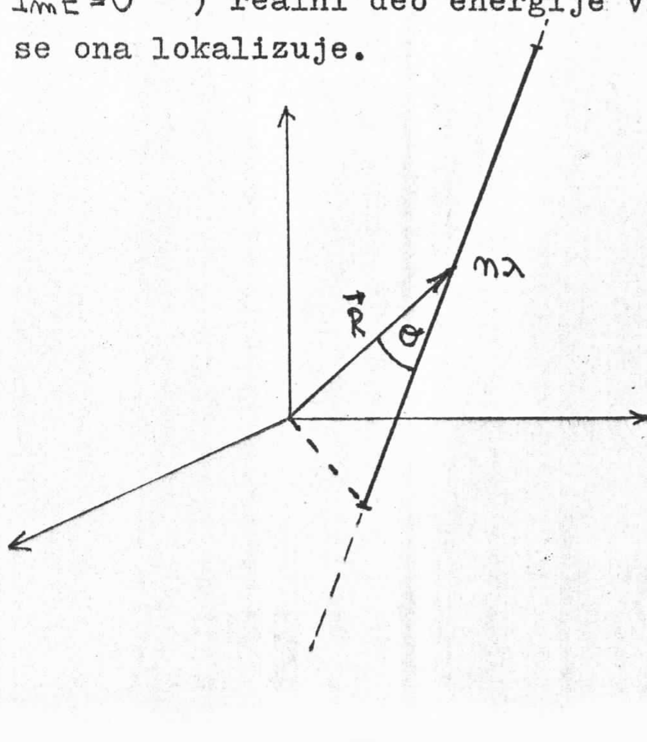
$$2\pi\vec{R}\vec{K} = n\pi$$

$$\vec{R}\vec{K} = \frac{n}{2}$$

$$RK\cos\theta = \frac{n}{2}$$

$$\frac{R\cos\theta}{\lambda} = \frac{n}{2}$$

$$n\lambda = 2R\cos\theta$$



Čestica u δ-potencijalu ima odredjene osobine. Razvimo u red $\cos 2\pi \vec{R}\vec{K}$ koji se javlja u jednačini za realni deo energije.

$$R_eE = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mR^2} + \frac{\pi^2 \hbar^4}{m^2 V_0 R}\left[1 - \frac{1}{2}(2\pi RK\cos\theta)^2\right]$$

$$R_eE = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mR^2} + \frac{\pi^2 \hbar^4}{m^2 V_0 R}\left[1 - 2\pi^2 R^2 K^2 \cos^2\theta\right]$$

$$R_eE = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8mR^2}\left[1 + \frac{8R\hbar^2}{mV_0}\right] - \frac{\hbar^2 K^2}{\frac{m^2 V_0}{2\pi^4 \hbar^2 R\cos\theta}}$$

Ovde je Laplasov operator dat sledećim izrazom

$$\Delta = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8mR^2}\left[1 + \frac{8R\hbar^2}{mV_0}\right] \qquad \text{.............(III.2.13)}$$

a efektivna masa relacijom

$$\mu = -\frac{\hbar^2 K^2}{\frac{m^2 V_0}{2\pi^4 \hbar^2 R\cos\theta}} \qquad \text{.............(III.2.14)}$$

Sada jednačina koja daje realni deo energije postaje:

$$R_eE = \Delta + \frac{\hbar^2 K^2}{2\mu} \qquad \text{..............(III.2.15)}$$

Kretanje čestice u pravcu vektora R nije moguće jer bi energija čestice imala samo imaginarni deo a to znači da ona izčezava iz sistema. Ovo isčezavanje ne treba shvatiti bukvalno već tako da čestica bitno menja osobine koje bi trebalo da ima na osnovu gornjih proračuna izvedenih za δ- potencijal.

III.3 PRIMER PERIODIČNOG POTENCIJALA

Posmatrajmo periodični potencijal cosinusoidalnog tipa:

$$V(\vec{r}) = V_0 \cos 2\pi \vec{Q}\vec{r} \qquad \text{(III.3.1)}$$

Operator ovog potencijala uvodi se po jednačini (I.2.4)

$$\hat{V}(\vec{r}) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} \cos 2\pi\vec{Q}\vec{r} \qquad \text{(III.3.2)}$$

Potražimo Furije transform ovog operatora

$$\hat{V}(\vec{p}) = \int d^3\vec{r}\, \hat{V}(\vec{r}) \cdot e^{-i2\pi\vec{p}\vec{r}} = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\int d^3\vec{r}\, e^{-i2\pi\vec{p}\vec{r}} \cdot \cos 2\pi\vec{Q}\vec{r} =$$

$$= -\frac{mV_0}{\hbar^2}\left\{\int d^3\vec{r}\, e^{i2\pi\vec{r}(\vec{Q}-\vec{p})} + \int d^3\vec{r}\, e^{-i2\pi\vec{r}(\vec{Q}+\vec{p})}\right\} =$$

$$= -\frac{mV_0}{\hbar^2}\left\{\delta(\vec{Q}-\vec{p}) + \delta(\vec{Q}+\vec{p})\right\} \qquad \text{(III.3.3)}$$

Nadjimo analogno operator koji figuriše u jednačini za pol Grinove funkcije (III.1.10). Taj operator je :

$$\hat{V}(\vec{k}-\vec{q}) = -\frac{mV_0}{\hbar^2}\left\{\delta(\vec{Q}-\vec{k}+\vec{q}) + \delta(\vec{Q}+\vec{k}-\vec{q})\right\} \qquad \text{(III.3.4)}$$

Ako ovaj operator uvrstimo u jednačinu (III.1.10) dobijamo sledeće:

$$\int d^3\vec{q}\, \frac{\delta[\vec{q}-(\vec{k}-\vec{Q})]}{(2\pi\vec{q})^2 - k_0^2} + \int d^3\vec{q}\, \frac{\delta[\vec{q}-(\vec{k}+\vec{Q})]}{(2\pi\vec{q})^2 - k_0^2} = -\frac{\hbar^2}{mV_0} \qquad \text{(III.3.5)}$$

$$\frac{1}{4\pi^2(\vec{k}-\vec{Q})^2 - k_0^2} + \frac{1}{4\pi^2(\vec{k}+\vec{Q})^2 - k_0^2} = -\frac{\hbar^2}{mV_0}$$

Daljim matematičkim sredjivanjem poslednjeg izraza dobijamo sledeću relaciju:

$$K_0^4 - K_0^2\left\{\frac{2mV_0}{\hbar^2} + 8\pi^2(K^2+Q^2)\right\} + 16\pi^4(K^2-Q^2)^2 + \frac{8\pi^2 mV_0}{\hbar^2}(K^2+Q^2) = 0$$

Kada se ova jednačina reši dobija se

$$K_0^2 = \frac{mV_0}{\hbar^2} + 4\pi^2(K^2+Q^2) \pm \sqrt{\left(\frac{mV_0}{\hbar^2}\right)^2 + (8\pi^2 KQ)^2} \qquad \text{................(III.3.6)}$$

Za slučaj rezonance $Q \to K$ izraz (III.3.6) postaje

$$K_0^2 = \frac{mV_0}{\hbar^2} + 8\pi^2K^2 \pm \sqrt{\left(\frac{mV_0}{\hbar^2}\right)^2 + (8\pi^2K^2)^2} \qquad \text{..........(III.3.7)}$$

Odavde nalazimo izraz za energiju

$$E_{1,2} = \frac{V_0}{2} + \frac{2\pi\hbar^2(Q^2+K^2)}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{mV_0}{\hbar^2}\right)^2 + (8\pi^2KQ)^2}\cdot\frac{\hbar^2}{2m} \qquad \text{..........(III.3.8)}$$

U slučaju rezonance $Q \to K$ izraz za energiju postaje

$$E_{1,2} = \frac{V_0}{2} + \frac{(2\pi\hbar K)^2}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{mV_0}{\hbar^2}\right)^2 + (8\pi^2K^2)^2}\cdot\frac{\hbar^2}{2m} \qquad \text{..........(III.3.9)}$$

Vidi se da čestica kod periodičnog potencijala kosinusoidalnog tipa ima gep u slučaju kada $K \to 0$.

Uzmimo sada slučaj kada je potencijal takodje periodičan ali sinusoidalnog tipa

$$V(\vec{r}) = V_0 \sin 2\pi\vec{Q}\vec{r} \qquad \text{.........(III.3.10)}$$

Operator potencijala po jednačini (I.2.4) je

$$\hat{V}(\vec{r}) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\sin 2\pi\vec{Q}\vec{r} \qquad \text{.........(III.3.11)}$$

Analogno kao kod kosinusoidalnog potencijala nadjimo Furije transform operatora potencijala

$$\hat{V}(\vec{p}) = \int d^3\vec{r}\,\hat{V}(\vec{r})\,e^{-i2\pi\vec{p}\vec{r}} = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\int d^3\vec{r}\cdot e^{-i2\pi\vec{p}\vec{r}}\cdot\sin 2\pi\vec{Q}\vec{r} =$$

$$= -\frac{mV_0}{i\hbar^2}\left\{\int d^3\vec{r}\,e^{i2\pi\vec{r}(\vec{Q}-\vec{p})} - \int d^3\vec{r}\,e^{-i2\pi\vec{r}(\vec{Q}+\vec{p})}\right\} =$$

$$= -\frac{mV_0}{i\hbar^2}\left\{\delta(\vec{Q}-\vec{p}) + \delta(\vec{Q}+\vec{p})\right\} \qquad \text{..........(III.3.12)}$$

Za izračunavanje pola korišćenjem jednačine (III.1.10) potreban nam je operator

$$\hat{V}(\vec{k}-\vec{q}) = -\frac{mV_0}{i\hbar^2}\left\{\delta(\vec{Q}-\vec{k}+\vec{q})-\delta(\vec{Q}+\vec{k}-\vec{q})\right\}$$

Uvrstimo ovu vrednost u jednačinu (III.1.10)

$$\int d^3\vec{q}\,\frac{\delta[\vec{q}-(\vec{k}-\vec{Q})]}{(2\pi\vec{q})^2-K_0^2}-\int d^3\vec{q}\,\frac{\delta[\vec{q}-(\vec{k}+\vec{Q})]}{(2\pi\vec{q})^2-K_0^2}=-\frac{i\hbar^2}{mV_0} \qquad \text{......(III.3.13)}$$

$$\frac{1}{4\pi^2(\vec{k}-\vec{Q})^2-K_0^2}-\frac{1}{4\pi^2(\vec{k}+\vec{Q})^2-K_0^2}=-\frac{i\hbar}{mV_0}$$

Posle sredjivanja dobijamo

$$K_0^2 = 4\pi^2(k^2+Q^2)\pm 4\pi\sqrt{(2\pi kQ)^2-\frac{kQmV_0}{i\hbar}} \qquad \text{......(III.3.14)}$$

U slučaju rezonance $Q\to K$ predhodna jednačina postaje

$$K_0^2 = 8\pi^2k^2 \pm 4\pi\sqrt{(2\pi k^2)^2-\frac{k^2mV_0}{i\hbar}} \qquad \text{......(III.3.15)}$$

Energiju nalazimo iz veze $K_0^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$

$$E_{1,2}=\frac{2\pi^2\hbar^2}{m}(k^2+Q^2)\pm\frac{2\pi\hbar^2}{m}\sqrt{(2\pi kQ)^2-\frac{kQmV_0}{i\hbar}} \qquad \text{......(III.3.16)}$$

U slučaju rezonance $Q\to K$ izraz za energiju postaje

$$E_{1,2}=\frac{4\pi^2\hbar^2k^2}{m}\pm\frac{2\pi\hbar^2}{m}\sqrt{(2\pi k^2)^2-\frac{k^2mV_0}{i\hbar}} \qquad \text{......(III.3.17)}$$

Iz relacije za energiju vidi se da čestica u sinusoidalnom potencijalu ima zakon disperzije koji teži nuli kada $K\to 0$

U slučaju periodičnog potencijala kada dolazi do rezonance ($Q\to K$) čestica ima takav zakon disperzije da se u njemu uvek pojavljuje jedan član koji formalno ima oblik kinetičke energije ali ne sa stvarnom masom čestice (m) nego sa efektivnom masom (m^*) koja je oko sto puta manja od stvarne mase (manja je za $8\pi^2$ puta).

Iz ovoga sledi opšti zaključak da čestice koje se kreću u periodičnom potencijalu zbog rezonance koja može da nastupi povećavaju svoju brzinu za oko sto puta.

Z A K LJ U Č A K

Rezultati diplomskog rada mogu se rezimirati na sledeći način:

a) Nadjen je opšti izraz za Grinovu funkciju kompletnog jednočestičnog Hamiltonijana u I aproksimaciji po malom parametru teorije koji u jednom slučaju predstavlja odnos potencijalne i kinetičke energije a u drugom recipročnu vrednost ovog odnosa.

b) U slučaju kada kada je potencijalna energija mnogo veća od kinetičke kao primeri ispitani su recipročni Gausov i recipročni Brajt - Vignerov potencijal. Opšti zaključak ovih razmatranja je da recipročan Gausov može da posluži kao dobar model za nestabilna jezgra, dok recipročan Brajt-Vignerov potencijal dobro modelira stabilna jezgra.

c) U slučaju kada je kinetička energija mnogo veća od potencijalne ispitivani su dopunski nivoi, tj. kvazičestična stanja koja nastaju kao rezultat deformacije osobina slobodne čestice prilikom njenog ulaska u polje sila.

Za δ - potencijal pokazano je da kvazičestica ima kompleksnu energiju i da njene osobine bitno zavise od pravca njenog prostiranja.

Takodje je ispitano ponašanje čestice u periodičnim potencijalima sinusoidalnog i cosinusoidalnog tipa.
Kod cosinusoidnog potencijala čestica ima gep dok kod sinusoidalnog potencijala njen zakon disperzije teži nuli kada $K \rightarrow 0$. Ovde je naročito interesantan slučaj rezonance tj. slučaj kada se period oscilacije ravnog talasa (slobodne čestice) poklapa sa periodom potencijala. Osnovna posledica ove rezonance je da brzina čestice poraste za oko sto puta.

Na kraju treba naglasiti da su svi računi izvedeni samo u prvoj aproksimaciji i da dalje uopštavanje teorije može dati i neke efekte koji se u prvoj aproksimaciji ne osećaju. U tom smislu bilo bi interesantno izvršiti analizu izraza koji daju članovi višeg reda u razvoju operatora.

Takodje treba napomenuti da su ovde ispitivani samo neki specijalni potencijali pa bi ceo prilaz i u ovom smislu trebalo proširiti ispitujući i druge tipove potencijala koji su fizički interesantni.

LITERATURA

$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = e\,\delta(x_i)$

1. В.И. СМИРНОВ
   КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
   „ГИТЛ" МОСКВА 1956

2. В.С. ВЛАДИМИРОВ
   УРАВНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
   „НАУКА" МОСКВА 1971.

3. А.С. ДАВЫДОВ
   КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА
   „ГИФМЛ" МОСКВА 1963.

4. Л.Д. ЛАНДАУ ; Е.М. ЛИФШИЦ
   КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА
   „ФИЗМАТГИЗ" МОСКВА 1963.

5. А.А. АБРИКОСОВ ; Л.П. ГОРКОВ ; И.Е. ДЕЯЛОТИНСКИЙ
   МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
   „ФИЗМАТГИЗ" МОСКВА 1962.

S A D R Ž A J