



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



Kerova metrika sa primenama u astrofizici

- završni rad -

Mentor: dr Milan Pantić

Kandidat: Branislav Nikolić

Novi Sad, 2011

Zahvalnica

Izražavam veliku zahvalnost svom mentoru, dr Milanu Pantiću, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, zbog podrške koju mi je pružio tokom pisanja ovog rada, kao i vremena koje mi je posvetio tokom inspirativnih diskusija vezanih za temu rada. Takodje mu se zahvaljujem na pomoći oko nalaženja kvalitetne literature i korisnim sugestijama u vezi sa rukopisom i stručnim izrazima.

Sadržaj

Uvod.....	4
I DEO.....	5
1. Prostor-vreme i Ajnštajnovе jednačine polja.....	5
2. Pregled Švarcšildovog rešenja i pojam Crne rupe	10
2.1. Švarcšildova metrika: simetrije i održane veličine	10
2.2. Pojam horizonta događaja i singulariteta: Crna rupa.....	12
2.3. Primenljivost Švarcšildovog rešenja.....	15
3. Kerovo rešenje	16
3.1. Opšta forma metrike osno-simetričnog rotirajućeg prostor-vremena	16
3.2. Kerova metrika.....	19
3.3. Ravan prostor u elipsoidnim koordinatama sa uključenom rotacijom koordinatnog sistema.....	23
3.4. Kerova metrika u najočiglednijoj formi.....	26
3.5. Skica jednog alternativnog izvodenja Kerovog rešenja.....	28
4. Priroda Kerovog rešenja	42
4.1. Horizonti događaja i singularitet: rotirajuća Crna rupa.....	42
4.2. Lens-Tiringov efekat – efekat povlačenja metrike.....	46
4.3. Ergosfera i Penrose proces.....	49
4.4. Geodezijske jednačine u Kerovom prostor-vremenu	53
II DEO.....	62
5. Eksperimentalna potvrda postojanja Crnih rupa.....	62
5.1. Cygnus X-1 i binarni sistemi	62
5.2. Supermasivna Crna rupa u centru Mlečnog Puta.....	63
6. Akrecioni diskovi i džetovi naelektrisanih čestica AGN-a.....	66
6.1. Akrecioni disk.....	66
6.2. Uticaj gravitacionog polja rotirajuće Crne rupe na profil spektralne linije.....	68
6.3. Džetovi naelektrisanih čestica.....	75
7. Eksperimentalna potvrda frame-dragging efekta.....	79
8. Gravitacija i fundamentalna fizika.....	82
8.1. Hokingovo zračenje	82
8.2. Četiri zakona mehanike Crnih rupa	86
8.3. Unutrašnjost Crne rupe: Supergravitacija	88

Zaključak	93
Dodatak.....	95
D1. Kartanov metod ortonormiranih tetrađa.....	95
D2. Svodjenje opšte metrike na dijagonalnu formu.....	97
D3. Razne metričke forme korišćene u radu.....	101
D4. Vizuelizacija rotirajućeg prostora u četvrtoj dimenziji – uronjeni prostor	103
Literatura.....	106

Uvod

Danas opšteprihvaćena klasična teorija gravitacionog polja jeste Ajnštajnova (Albert Einstein) teorija gravitacije. U njenoj osnovi leže Ajnštajnovе jednačine. To je sistem nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda po metričkom tenzoru i ova činjenica je jedan od razloga zašto ne postoji njihovo opšte rešenje. S druge strane, prilikom traženja rešenja koja ih zadovoljavaju one pružaju izvesnu slobodu u sličnom smislu kao što Grinove (Green) funkcije pružaju slobodu u izboru oblika iste u teoriji rasejanja u kvantnoj mehanici. Ta sloboda uključuje postavljanje uslova na komponente metričkog tenzora u zavisnosti od problema koji je u pitanju, kao i biranje najviše četiri proizvoljnih funkcija koordinata koje mogu biti sadržane u metričkom tenzoru. Upravo zbog ovoga su Ajnštajnovе jednačine veoma moćno orudje pomoću kojeg se gravitaciono polje opisuje u terminima zakrivljenosti prostor-vremena u prisustvu materije/energije.

Uprkos svojoj složenosti, Ajnštajnovе jednačine poseduju nekoliko specijalnih, egzaktnih rešenja. Jedno takvo rešenje je Kerovo rešenje koje je Roj Patrik Ker (Roy Patric Kerr), novozelandski matematičar, dobio 1963. godine. Ono je u suštini rešenje koje opisuje prostor-vreme izvan rotirajućeg objekta koji se naziva rotirajuća Crna rupa i kao takvo predstavlja prostor-vremensku podlogu u astrofizici pri proučavanju ponašanja materije u blizini rotirajućih objekata (ne samo Crnih rupa). Pored toga, isto kao i Švarčšildovo (Karl Schwarzschild) rešenje (koje je takodje egzaktno), ono se može primeniti i pri proučavanju unutrašnjosti Crnih rupa, što je posebno zanimljiv aspekt Kerovog rešenja. Implikacije Kerovog i Švarčšildovog rešenja u kontekstu Crnih rupa su dalekosežne. Ovaj rad je svedočenje o lepoti i moći Kerovog rešenja Ajnštajnovih jednačina i njegovom značaju za astrofiziku i modernu fiziku.

Rad je podeljen u dva dela: prvi deo, koji obuhvata poglavlja **1** do **4**, bavi se teorijskim aspektom Kerovog rešenja. U poglavlju **1** je kratko diskutovan pojam prostor-vremena, kao i same Ajnštajnovе jednačine polja, prati ga pregled Švarčšildovog rešenja i osnovnih pojmova vezanih za Crne rupe u poglavlju **2**, zatim je u poglavlju **3** predstavljena diskusija vezana za izvodjenje Kerovog rešenja, kao i vezana za jedno alternativno izvodjenje istog sa autorove tačke gledišta, a u poglavlju **4** je diskutovano samo Kerovo rešenje; drugi deo obuhvata poglavlja **5** do **8** i bavi se nekim primenama Kerovog rešenja u astrofizici, kao i njegovim značajem za fiziku uopšte. U poglavlju **5** su data dva primera načina na koji se dokazuje postojanje Crnih rupa u astrofizici, zatim u poglavlju **6** sledi diskusija primene Kerove metrike na problem aktivnih galaktičkih jezgara (AGN¹). Poglavlje **7** bavi se nedavnom eksperimentalnom potvrdom Lens-Tiringovog (Josef Lense, Hans Thirring) efekta, a poglavlje **8** je rezervisano za implikacije Kerovog rešenja na fundamentalnu fiziku. Literatura je na kraju rada grupisana u odnosu na pomenuta dva dela rada.

¹ Active Galactic Nuclei

I DEO

1. Prostor-vreme i Ajnštajnovne jednačine polja

U svakoj tački neke četvorodimenzionalne mnogostrukosti M možemo definisati skup koordinatnih linija parametrizovanih pomoću parametra λ $t(\lambda), r(\lambda), \theta(\lambda), \varphi(\lambda)$ koje određuju mrežu koordinata *prostor-vremena*², tako da je parametar λ u tom slučaju sopstveno vreme τ ili jednostavno parametar s . U svakoj tački tog prostor-vremena tada možemo definisati *tangentni prostor*, takodje četvorodimenzionalan. Tangentni prostor je određen bazisom koji je skup jediničnih vektora³ $\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi$, a koji definišu odgovarajuće tangentne pravce na pomenutim koordinatnim linijama. Ovakav prostor predstavlja *koordinatni bazis* u kome sve veličine predstavljamo kao funkcije koordinata. Na primer, ako potražimo izvod neke funkcije f po parametru λ , imamo⁴:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

Pošto je funkcija f proizvoljna, možemo pisati:

$$\frac{d}{d\lambda}(f) = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f)$$

odakle se vidi da je:

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu \quad (1.1)$$

što možemo smatrati vektorom $d/d\lambda$ razvijenim po ort-vektorima ∂_μ , pri čemu su $dx^\mu/d\lambda$ njegove komponente u tom tangentnom prostoru. Stoga skup $\{\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi\}$ čini bazis tangentnog prostora. U tangentnom prostoru ovi vektori se nazivaju *kovarijantni*, a vektore predstavljamo preko *kontravarijantnih* komponenti:

$$v = v^\mu \partial_\mu$$

Ovo sledi iz činjenice da je delovanje tangetnog vektora na (recimo) komponente vektora položaja

$$\partial_\mu x^\nu = \delta_\mu^\nu$$

² Analogno kako se dvodimenzionalna površina Zemlje može opisati pomoću koordinatnih linija duž kojih merimo koordinate θ i φ koji predstavljaju mrežu meridijana i paralela.

³ ∂_μ su parcijalni izvodi po koordinatama x^μ .

⁴ Od sada pa na dalje, podrazumeva se Ajnštajnova konvencija o sumiranju: sumiranje po ponovljenim indeksima sa iste strane jednačine se podrazumeva.

Osim toga, postoje i odgovarajuće veličine u *kotangentnom prostoru* čiji je bazis određen skupom *1-formi* dx^μ , pa se i te veličine zovu *1-forme* i razvijaju se u ovom bazisu pomoću kontravarijantnih diferencijala koordinata, a komponente su kovarijantne:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu$$

Za tangentni i kotangentni prostor se kaže da su jedan drugom *dualni* ili *recipročni*.

U ravnom četvorodimenzionalnom prostor-vremenu, element luka je u koordinatnom bazisu u Dekartovim (René Descartes) koordinatama definisan metrikom Minkovskog (Herman Minkowski):

$$ds^2 = d(ct)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = d(ct)^2 - dl^2$$

koji se konciznije može napisati u tenzorskoj notaciji kao:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.2)$$

gde je $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ metrički tenzor ravnog prostor-vremena⁵, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ za vremensku i tri prostorne koordinate, redom.

Kvadrat prostor-vremenskog intervala može biti *vremenskog* ($ds^2 > 0 \Rightarrow d(ct)^2 > dl^2$), *prostornog*, ($ds^2 < 0 \Rightarrow d(ct)^2 < dl^2$), ili *svetlosnog* ("null") *tipa* ($ds^2 = 0 \Rightarrow d(ct)^2 = dl^2$)⁶. Sva tela koja poseduju masu kreću se kroz prostor-vreme putanjama vremenskog tipa, što je ekvivalentno tome da se kreću sporije od svetlosti i za njih je element luka realan. Putanje za koje je $ds^2 = 0$ su u suštini putanje fotona (ali i hipotetičnih gravitona).

Naglasimo da za *ravan prostor* važi da za telo koje miruje ($dl^2 = 0$) sledi da poseduje interval vremenskog tipa ($ds^2 > 0$).

U prisustvu mase, prostor-vreme više nije ravno, već postaje zakrivljeno i opisuje se opštijom relacijom od (1.2):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} dx^0 dx^0 + g_{01} dx^0 dx^1 + \dots + g_{10} dx^1 dx^0 + \dots + g_{33} dx^3 dx^3 \quad (1.3)$$

gde je $g_{\mu\nu}$ metrički tenzor opšteg prostor-vremena i može posedovati mešovite članove i koji je definisan kao skalarni proizvod odgovarajućih tangentnih vektora:

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu \cdot \partial_\nu \quad (1.4)$$

⁵ Postoji i konvencija $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, ali mi ćemo se držati one u tekstu.

⁶ Odgovarajući nazivi na engleskom su "time-like", "space-like" i "null interval".

U zakrivljenim prostor-vremenima metrički tenzor zavisi od koordinata, u opštem slučaju od sve četiri - $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$.

Za teorijsko otkriće da prostor-vreme nije ravno u prisustvu mase zaslužan je Albert Ajnštajn. On je 1916. godine objavio svoju Opštu teoriju relativnosti (OTR) koja je zapravo teorija gravitacije. Suština ove teorije jeste da i materija i energija svojim prisustvom zakrivljuju prostor-vreme, ili kako je to Džon Viler (John Archibald Wheeler) sročio “materija govori prostoru kako da se krivi, a prostor govori materiji kako da se kreće”. Pronaći *na koji način* prostor “govori” materiji kako da se kreće znači rešiti Ajnštajnovе jednačine polja (ovde date bez kosmološke konstante):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.5a)$$

i ekvivalentno:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (1.5b)$$

gde je $R_{\mu\nu}$ Ričijev (Gregorio Ricci-Curbastro) tenzor, R Ričijev skalar, $T_{\mu\nu}$ tenzor energije-impulsa, a T njegov trag. c je brzina svetlosti, a G univerzalna gravitaciona konstanta. Rešiti Ajnštajnovе jednačine znači rešiti ih po metričkom tenzoru $g_{\mu\nu}$.

Ričijev tenzor je definisan kao kontrakcija Rimanovog (Bernhard Riemann) tenzora $R^\alpha_{\mu\beta\nu}$ (koji je antisimetričan tenzor četvrtog ranga) po prvom i trećem indeksu:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = R^0_{\mu 0\nu} + R^1_{\mu 1\nu} + R^2_{\mu 2\nu} + R^3_{\mu 3\nu} \quad (1.6)$$

dok je Ričijev skalar definisan kao trag Ričijev tenzora:

$$R = R^\mu_{\mu} = R^0_0 + R^1_1 + R^2_2 + R^3_3 \quad (1.7)$$

Ukoliko je Ričijev skalar jednak nuli, radi se o lokalno ravnom prostor-vremenu. U suprotnom, prostor-vreme je zakrivljeno.

Jednačina (1.5a/b) je sistem od na prvi pogled 16 jednačina, ali njih i u najopštijem slučaju ima maksimalno 10, zbog toga što je metrički tenzor simetričan $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, a što je očigledno na osnovu (1.3), jer diferencijali koordinata komutiraju. Njihovo rešavanje je u opštem slučaju veoma komplikovano zbog toga što se radi o parcijalnim diferencijalnim jednačinama drugog reda i to nelinearnim.

U jednačinama (1.5a/b) leva strana predstavlja “geometrijski” deo, opisuje gravitaciono polje i naziva se Ajnštajnov tenzor, dok je desna strana izvor polja, u koji ulazi kako gustina energije mirovanja, tako i gustina energije samog kretanja, otud naziv tenzor “energije-impulsa”. Stoga i samo kretanje materije/energije predstavlja izvor gravitacionog polja (u principu svaki oblik

energije predstavlja izvor gravitacionog polja). Implikacije tenzorske jednačine (1.5a/b) su dalekosežne, iako se još uvek ne razume na koji se način ispoljava veza između prostora i materije/energije.

Veoma bitna činjenica sledi iz jednačina (1.5): kovarijantni izvod leve strane (Ajnshtajnovog tenzora) identički je jednak nuli,

$$D^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0$$

a bitna je iz dva razloga: prvi je taj što odavde sledi da kovarijantni izvod desne strane takodje mora biti jendak nuli, a to implicira zakon održanja energije-impulsa:

$$D^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

Ovo pokazuje da su zakon održanja impulsa i zakon održanja energije zapravo delovi jedinstvenog zakona održanja; drugi razlog je taj što postoje četiri takve jednačine (izvod po četiri koordinate) i one kao takve daju mogućnost da pri rešavanju Ajnshtajnovih jednačina biramo *proizvoljno* maksimalno četiri funkcije koordinata, što predstavlja kalibracionu slobodu. To demonstrira opštost i široku primenljivost Ajnshtajnovih jednačina.

Analogno gradijentu gravitacionog potencijala u Newton-ovoj gravitaciji, ovde izvodi metričkog tenzora po koordinatama predstavljaju silu koja uzrokuje ubrzano kretanje tela u gravitacionom polju. Izvodi metričkog tenzora se pojavljuju na levoj strani Ajnshtajnovih jednačina (1.5a) u Ričijevom tenzoru i Ričijevom skalaru.

Rimanov tenzor je dat sa:

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} = \partial_\beta \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\varepsilon} \Gamma^\varepsilon{}_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\varepsilon} \Gamma^\varepsilon{}_{\mu\beta}$$

i za njega važi Jakobijev (Carl Jacobi) identitet:

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} + R^\alpha{}_{\beta\nu\mu} + R^\alpha{}_{\nu\mu\beta} = 0 \quad (1.8)$$

i sledeće simetrije:

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} = g^{\alpha\gamma} R_{\gamma\mu\beta\nu} = g^{\alpha\gamma} R_{\beta\nu\gamma\mu} = -g^{\alpha\gamma} R_{\nu\beta\gamma\mu} = -g^{\alpha\gamma} R_{\beta\nu\mu\gamma} = -g^{\alpha\gamma} g_{\beta\rho} R^\rho{}_{\nu\mu\gamma} \quad (1.9)$$

a Ričijev tenzor će na osnovu (1.6) biti:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\varepsilon} \Gamma^\varepsilon{}_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\varepsilon} \Gamma^\varepsilon{}_{\mu\alpha} \quad (1.10)$$

gde su $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ Kristofelovi (Elwin Bruno Christoffel) simboli druge vrste dati sa:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\nu} g_{\mu\beta} + \partial_{\mu} g_{\beta\nu} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}) \quad (1.11)$$

Odavde vidimo da izvodi metričkog tenzora ulaze u Ričijev tenzor preko Kristofelovih simbola druge vrste. Prema tome, put ka Ajnštajnovim jednačinama bio bi da se prvo izračunaju odgovarajući izvodi metričkog tenzora, zatim se formiraju Kristofelovi ovi simboli druge vrste, a pomoću njih sledi računanje Ričijevog tenzora (1.10) i nakon toga, Ričijevog skalara (1.7).

Analogno Njutnovom (Isaac Newton) zakonu, i u OTR se pojavljuje sličan zakon – geodezijska jednačina - koji opisuje kretanje tela u zakrivljenom prostor-vremenu:

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0 \quad (1.12a)$$

ili

$$u^{\beta} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} u^{\beta} u^{\gamma} = u^{\beta} D_{\beta} u^{\alpha} = 0 \quad (1.12b)$$

gde je u^{α} kvadrivektor brzine, koji se može predstaviti u tangentnom bazu kao $u(s) = \dot{x}^0 \partial_0 + \dot{x}^1 \partial_1 + \dot{x}^2 \partial_2 + \dot{x}^3 \partial_3$, gde tačka iznad označava izvod po parametru.

Postupak traženja Kristofelovih simbola i potom Ričijevog tenzora nije nimalo lak, osim za neka specijalna rešenja koja poseduju par komponenti metričkog tenzora sa prostim funkcionalnim zavisnostima od jedne, eventualno dve koordianate. Na sreću, za nalaženje Rimanovog tenzora postoji jedan drugačiji metod, koji je znatno lakši i elegantniji, a koji nosi ime po svom pronalazaču – Kartanov (Élie Cartan) metod, koji je detaljnije opisan u dodatku **D1**.

U ovom radu će se koristiti Kartanov metod za nalaženje Rimanovog tenzora (odjeljak **3.5**), a interesovaće nas rešenje Ajnštajnovih jednačina za vakuum, dakle za $T_{\mu\nu} = 0$. Tada (1.4b) postaje:

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad R = 0 \quad (1.13)$$

Kerovo rešenje Ajnštajnovih jednačina spada u rešenja za vakuum, dakle rešenje koje zadovoljava jednačinu (1.13). Ono je nešto komplikovanije od Švarcšildovog rešenja, koje je takodje rešenje jednačina (1.13) i čiji će pregled biti dat u narednom poglavlju radi uvoda u opis opštije, Kerove metrike.

2. Pregled Švarcšildovog rešenja i pojam Crne rupe

Švarcšildovo rešenje je najjednostavnije rešenje Ajnštajnovih jednačina, koje je pronašao Karl Švarcšild 1916. godine. Ono je iskazano metrikom:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) d(ct)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

s tim što ćemo od sada pa na dalje izražavati jednačine u *prirodnim jedinicama* u kojima je $c = G = 1$, osim kada naglasimo drugačije. Ovakva konvencija je u neku ruku iritirajuća i zbunjujuća, jer se stiče utisak da se gubi suština i da jednačine dimenziono nemaju smisla. Medjutim, ispostavlja se da je ipak elegantnije pisati jednačine u teorijskim razmatranjima OTR po ovoj konvenciji, o čemu svedoči i Švarcšildova metrika zapisana u ovim jedinicama:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.1)$$

gde je M masa koja proizvodi gravitaciono polje opisano metrikom (2.1). Primetimo da je dimenzija elementa luka $[m]^2$. Stoga, vremenska koordinata u prirodnim jedinicama ima dimenzije dužine, a koeficijent ispred njenog diferencijala je bez dimenzije, iz čega sledi da je dimenzija mase M jednaka dimenziji dužine $[m]$. Ako želimo masu u jedinicama $[kg]$, prosto je pomnožimo faktorom G/c^2 .

Navedimo još i metrički tenzor u matričnom obliku i njegovu determinantu:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & \hat{0} \\ 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & -r^2 & 0 \\ & & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\det(g_{\mu\nu}) = -r^4 \sin^2 \theta \quad (2.3)$$

2.1. Švarcšildova metrika: simetrije i održane veličine

Koordinate u kojima je zadata metrika (2.1) su sferne koordinate (t, r, θ, φ) . Primetimo da komponente metričkog tenzora ne zavise ni od vremenske koordinate, ni od koordinate φ , pri čemu je dvodimenzionalni deo metrike

$$d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

koji oslikava sfernu simetriju očuvan. To je i bila Švarcšildova ideja – da pronadje *sferno-simetrično rešenje* Ajnštajnovih jednačina, stoga je on i krenuo od opšte metrike oblika:

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\mu} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

(gde su ν i μ funkcije od r), pretpostavljajući da je sferna simetrija očuvana, tj. da je *izotropija prostora očuvana* u gravitacionom polju. Dobivši rezultat (2.1), dokazao je da takvo rešenje zaista postoji.

Svaka kontinualna simetrija prostora u opštem slučaju, po teoremi Emi Neter (Emmy Noether), poseduje po jednu očuvanu veličinu. Geometrijski gledano, ako nijedna komponenta metričkog tenzora ne sadrži zavisnost od neke koordinate, onda postoji očuvana veličina u odnosu na kontinualnu promenu te koordinate. Naime, u Švarcšildovoj metrici (2.1) nijedan metrički koeficijent ne zavisi od koordinate φ . Stoga kretanje duž te koordinatne linije, definisano tangentnim vektorom ∂_φ u svakom trenutku, ostavlja jednu veličinu invarijantnom. To je upravo ona koja se očuvava zbog izotropije prostora - moment impulsa (ugaoni moment).

Takvi vektori, koji definišu pravce duž kojih je metrički tenzor invarijantan, nazivaju se Kilingovi (Wilhelm Killing) vektori i zadovoljavaju Kilingovu jednačinu:

$$\nabla_\mu \zeta_\nu + \nabla_\nu \zeta_\mu = 0 \quad (2.4)$$

i pomoću njih se mogu pronaći održane veličine. Naime, ako skalarni proizvod $u^\mu \zeta_\mu$ diferenciramo po parametru s , koristeći se (1.1), imamo:

$$\frac{d(u^\mu \zeta_\mu)}{ds} = \frac{dx^\alpha}{ds} \nabla_\alpha (u^\mu \zeta_\mu) = \zeta_\mu u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu + u^\alpha u^\mu \nabla_\alpha \zeta_\mu$$

Prvi od ovih sabiraka je jednak nuli kao posledica geodezijske jednačine (1.12b), a drugi je jednak nuli zbog toga što za Kilingove vektore važi (2.4), iz čega sledi da je $\nabla_\alpha \zeta_\mu$ antisimetrično, dok je $u^\alpha u^\mu$ simetričan tenzor. Skalarni proizvod simetričnog i antisimetričnog tenzora istog ranga jednak je nuli, pa je onda ceo gornji izraz jednak nuli:

$$\frac{d(u^\mu \zeta_\mu)}{ds} = 0$$

Odavde sledi da se veličina $u^\mu \zeta_\mu$ održava protokom sopstvenog vremena:

$$u^\mu \zeta_\mu = const. \quad (2.5)$$

Stoga je Kilingov vektor koji indukuje očuvanje ugaonog momenta:

$$\zeta_\mu^{(\varphi)} = (0,0,0,1) = \partial_\varphi$$

a iz metrike (2.1) i na osnovu relacije (1.4) sledi da je

$$|\partial_\varphi| = \sqrt{|g_{\varphi\varphi}|} = r \sin \theta$$

Na osnovu (2.5) za ovaj Kilingov vektor očuvana veličina je

$$u^\varphi \zeta_\varphi^{(\varphi)} = \dot{\varphi} \partial_\varphi \partial_\varphi = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{ds} = \text{const.} \equiv L \quad (2.6)$$

što je upravo ugaoni moment po jedinici mase (z-komponenta) u sfernim koordinatama.

Na sličan način se pokazuje da je i energija očuvana veličina, jer metrički tenzor ne zavisi od vremena t , te postoji još jedan Kilingov vektor $\zeta_\mu^{(t)} = (1,0,0,0) = \partial_t$:

$$|\partial_t| = \sqrt{|g_{tt}|} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$$

$$u^t \zeta_t^{(t)} = t \partial_t \partial_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{ds} = \text{const.} \equiv E \quad (2.7)$$

Ova veličina predstavlja energiju po jedinici mase i u prirodnim jedinicama nema dimenzije, a inače bi dimenzija bila $[\text{m}^2\text{s}^{-2}]$. Stoga energija kao očuvana veličina odgovara translaciji sistema u vremenu, definisanom Kilingovim vektorom $\zeta_\mu^{(t)} = \partial_t$.

Činjenica da metrički koeficijenti ne zavise od vremena odgovara osobini *stacionarnosti*. Sad, ispostavlja se još da bilo koje sferno-simetrično rešenje mora posedovati Kilingov vektor vremenskog tipa (kao na primer vektor ∂_t), te da mora biti stacionarno, i još koji je ortogonalan na bilo koju trodimenzionalnu hiperpovrš koja se može izgraditi od ostala tri tangenta vektora, tj. na one za koje je $t = \text{const.}$, i takvo rešenje nije samo stacionarno, već i *statično*. To za metriku znači da nema mešovite članove tipa $dt dx^i$, poput metrike (2.1).

2.2. Pojam horizonta događaja i singulariteta: Crna rupa

Primetimo jednu na prvi pogled kontradiktornu činjenicu: kažemo da je M masa objekta koji proizvodi gravitaciju, a Švarcšildovo rešenje jeste rešenje Ajnštajnovih jednačina za *vakuum*. Kontradikcija nestaje kada naglasimo da metrika (2.1) opisuje gravitaciono polje *izvan* objekta mase M . Vezano za to, postoji jedna zaista čudnovata posledica Ajnštajnovih jednačina koja postaje očigledna tek njihovim rešavanjem, a sa kojom ćemo se susresti i u Kerovoj metrici u kasnijim poglavljima.

Ipak, do sada nismo uopšte pomenuli prirodu tela čija je masa M i koje stvara oko sebe gravitaciono polje opisano metrikom (2.1), na primer od kakve materije se sastoji. Jedina informacija koja proizilazi iz (2.1) jeste da je to telo sferno simetrično i da poseduje masu M .

Sad, znamo da možemo polje izvan sferno-simetričnog objekta opisati kao da potiče od tačkaste mase, ali takodje znamo da je to samo model. Medjutim, iz (2.1) svaka koordinata je merena u prostoru izvan objekta, uključujući i koordinatu r , tako da bi to značilo da (2.1) opisuje gravitaciono polje koje *zaista* potiče od tačkaste mase, tj. to bi značilo da je sva masa *zaista* skoncentrisana u koordinatnom pocetku $r = 0$. Što je vrlo čudno.

Medjutim, ispostavlja se da mi to nikako ne možemo proveriti eksperimentalno. Eksperimentalna provera bi se sastojala u tome da pridjemo toliko blizu tom telu (ma koje dimenzije imalo) i da “vidimo” razmere tog tela, tj. da na neki način dobijemo informaciju o tome.

To je nemoguće zbog toga što koeficijent g_{rr} postaje beskonačan na jednom odredjenom rastojanju $r = 2M$. To znači da Švarcšildovo rešenje poseduje singularitet. Medjutim, ovaj singularitet je *koordinatni singularitet*, što znači da je on defekt-posledica izbora koordinatnog sistema. Računajući za Švarcšildovu metriku jednu od skalarnih invarijanti Rimanovog tenzora koja je ista u svim koordinatnim sistemima (pošto je skalar, pa time invarijanta) dobija se:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48M^2}{r^6} \quad (2.8)$$

odakle se vidi da se za $r = 2M$ ne dešava ništa posebno, te je dovoljno samo da napravimo transformaciju koordinata koja je pogodna da otkloni prividan singularitet u $r = 2M$. Medjutim, sfera $r = 2M$ jeste specifična, zbog toga što je g_{00} jednak nuli na toj sferi. Ovakve površi nazivaju se “null surfaces”, ili u slobodnom prevodu *svetlosne površi*.

Da bismo objasnili šta se dešava na toj sferi, pogledajmo metriku (2.1) za svetlost koja je sa te površine puštena u radijalnom pravcu ka udaljenom posmatraču koji se koristi metrikom (2.1). U (2.1) tada stavljamo da je $ds^2 = 0$, jer posmatramo kretanje svetlosti, i $d\theta^2 = d\varphi^2 = 0$ jer posmatramo svetlost puštenu u radijalnom pravcu. Tada (2.1) postaje

$$0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2$$

odakle sledi

$$\frac{dr}{dt} = 1 - \frac{2M}{r}$$

što za $r = 2M$ daje

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

Gornji rezultat predstavlja radijalnu i jedinu komponentu brzine svetlosti, stoga odavde sledi da je brzina svetlosti jednaka nuli! Drugim rečima, daleki posmatrač u svojim koordinatama (u kojima je i data metrika (2.1)) neće nikad videti svetlost koja je krenula sa svetlosne površi – za

njega svetlost *stoji*. Za vrednosti $r < 2M$, brzina svetlosti postaje čak i negativna, što bi značilo da čak i kada je puštena duž rastuće koordinate r , dalje od objekta, ona će svoje kretanje nastaviti ka koordinatnom početku. Stoga ništa što se nalazi unutar sfere prečnika $r = 2M$ spoljni posmatrač ne može detektovati – na njega događaji iz unutrašnjosti te sfere nemaju apsolutno nikakvog uticaja. Zbog toga se ova površ naziva *horizont događaja*, a rastojanje koje je poluprečnik ove sferne površi, tj. rastojanje horizonta događaja od koordinatnog početka se naziva *Švarcšildov poluprečnik*, a nekad i *gravitacioni poluprečnik ili radijus*.

Spomenimo da kada bi sva masa Sunca bila sabijena unutar njenog Švarcšildovog radijusa, Crna rupa koja bi nastala tom prilikom imala bi poluprečnik od oko 1.5 km.

Za trenutak ćemo vratiti konstante c i G i pogledati šta sledi eksplicitno iz $g_{00} = 0$.

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{rc^2} = 0,$$

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

ovaj izraz je onaj isti koji se na osnovu Njutnove teorije dobija za drugu kosmičku brzinu. Za $r > 2GM/c^2$, pa stoga i $g_{00} > 0$, izraz sa desne strane je uvek manji od brzine svetlosti, tj. tela koja se nalaze na tim rastojanjima mogu razviti takvu početnu brzinu da mogu pobeći gravitacionom polju objekta mase M . Sad druge strane, sva tela koja se nadju na rastojanju manjem od $2GM/c^2$, kada je $g_{00} < 0$, moraju imati brzinu veću od brzine svetlosti, jer desna strana postaje veća od c , ali pošto je to nemoguće, ona su osudjena da završe u koordinatnom početku i ne postoji način na koji bi se suprotstavili gravitacionom polju tog objekta.

Ovaj objekat radijusa jednak Švarcšildovom radijusu se stoga naziva *Crna rupa*, s punim pravom, zahvaljujući Vileru, koji je skovao taj termin 1967. godine.

Medjutim, koncept Crne rupe se pojavio još u 18. veku, pre OTR, kada je Džon Mičel (John Mitchell) 1783. god. tvrdio da svetlost mora biti privučena gravitacijom kao i ostali objekti, te da bi svetlost puštena sa dovoljno masivnog i kompaktnog tela morala da se vrati na njega. Nešto kasnije, 1795. god., je Laplas (Pierre-Simon Laplace) došao do sličnog zaključka, verovatno nezavisno od Mičela, izjavivši da su najsjajnija tela u Univerzumu upravo zbog toga i nevidljiva (jer je sjaj proporcionalan masi).

Takodje, metrika (2.1) poseduje i *pravi singularitet* u koordinatnom početku $r = 0$, što se vidi na osnovu (2.6) i njega je nemoguće otkloniti. U $r = 0$ zakrivljenost prostor-vremena, okarakterisana sa (2.6), postaje beskonačna. Ovo je fizički besmisleno, pogotovo zato što bi još u tom istom singularitetu trebalo da se nalazi sva masa M , što bi onda značilo da je i gustina u toj tački beskonačna. Ovo je “zaglavljani zupčanik” opšte teorije relativnosti. U Prirodi uopšte ne bi trebalo da postoje fizički singulariteti (barem se tako smatra), a i na neki način, singularitet u Crnoj rupi za nas ne postoji, jer nikakve informacije ne možemo dobiti iz unutrašnjosti horizonta događaja, stoga nikako ne možemo proveriti da li se unutra zaista nalazi singularitet i da li je

celokupna masa skoncentrisana u jednoj jedinjoj tački u $r = 0$. Pravo je iznenadjenje da moćna teorija poput OTR ima svoju primenu od zvezda, pa do celokupnog Univerzuma, a pri tom predvidja i fizičke besmislice poput singulariteta u $r = 0$.

Postoje koordinate koje mogu preciznije opisati unutrašnjost Crne rupe na osnovu transformacije (2.1), kao što su Kruskal-Sekereš (Martin David Kruskal, György Szekeres) koordinate, ali se njima ovde nećemo baviti.

Na osnovu rešenog možemo zaključiti da Švarcšildovo rešenje egzaktno opisuje prostor-vreme izvan objekta mase M , koji se naziva *nerotirajuća Crna rupa*, ili *statična Crna rupa*, ili *mrtva Crna rupa*, ili *Švarcšildova Crna rupa*.

2.3. Primenljivost Švarcšildovog rešenja

Uprkos tome što Švarcšildovo rešenje opisuje prostor-vreme nerotirajuće Crne rupe, metrika (2.1) se može iskoristiti i za proučavanje drugih objekata, koji poseduju sfernu simetriju ili približno sfernu simetriju – zvezde i planete.

Ono što metriku (2.1) čini primenljivom na Sunce, ostale zvezde i planete je sferna simetrija. Medjutim, činjenica da su sva pomenuta tela mnogo veža od svojih gravitacionog radijusa, pa se stoga celokupna masa ne nalazi unutar istih, već i izvan, govori da metrika (2.1) mora biti modifikovana, konkretno, masa M mora zavisiti od rastojanja r , sve dok r ne dostigne poluprečnik objekta koji je kod zvezda i planeta (kod tela koja nisu Crna rupa) uvek veći od $2M$. Stoga zaključujemo da metrika (2.1) *egzaktno* opisuje prostor-vreme *izvan* planeta i zvezda, dok se za opisivanje njene unutrašnjosti metrika (2.1) mora nadograditi uključivanjem modela mase koja zavisi od rastojanja.

Kao takva se koristi i u astrofizici, primenjena na pomenuta tela. Upravo je metriku (2.1) Einstein iskoristio da bi teorijski objasnio precesiju Merkurove orbite oko Sunca, prvu potvrdu Opšte teorije relativnosti. Slaganje i sa današnjim posmatranjima je, moglo bi se reći, savršeno.

Medjutim, ono što treba naglasiti jeste da je pretpostavka da sva ta tela na koja je metrika (2.1) primenljiva *ne rotiraju*, ili *rotiraju sporo*. Pri “sporoj” rotaciji se podrazumeva da je njen kvadrupolni gravitacioni moment (koji se obično obeležava sa J_2) različit od nule⁷, ali približno jednak nuli, što znači da je telo *skoro* sferno-simetrično - malo je izduženo na ekvatoru u odnosu na polove. Naravno, *ne postoji* telo u Univerzumu koje ne rotira, pa time ne postoji ni savršeno sferno simetrično telo. Zbog toga je Švarcšildovo rešenje samo *aproksimacija* jednog opštijeg rešenja koje opisuje prostor-vreme izvan objekata koji rotiraju – **Kerovo rešenje**. Medjutim, dovoljan argument koji opravdava traganje za metrikom rotirajućeg tela jeste taj što telo koje rotira poseduje i energiju rotacije, a energija, u kojem god obliku bila, pa time i rotaciona energija, utiče na geometriju prostor-vremena.

⁷ Gravitacioni potencijal nekog tela se najčešće modelira pomoću sfernih harmonika, koji slede iz rešavanja Laplasove jednačine po Njutnovoju gravitaciji – u razvoju po sfernim harnonicima, koeficijenti koji predstavljaju njihove odgovarajuće amplitude se nekad nazivaju gravitacioni momenti.

3. Kerovo rešenje

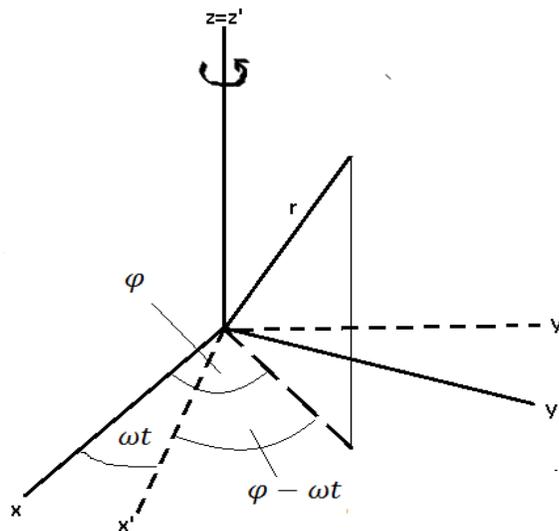
Pošto smo konstatovali da Švarcšildovo rešenje nije adekvatno za opis rotirajućih objekata, upuštamo se u potragu za metrikom koja to jeste. Istorijski gledano, ova potraga je trajala skoro 50 godina od objavljivanja Ajnštajnovih jednačina 1916. godine i otkrića Lens-Tiringovog efekta koji predviđa uticaj rotacije na metriku prostor-vremena – tek je 1963. godine Roj Patrik Ker, novozelandski matematičar, otkrio ovo rešenje, koje po njemu i nosi naziv. Sama činjenica da je trebalo da prođe toliko vremena dok se nije došlo do rešenja ukazuje na kompleksnost rešavanja Ajnštajnovih jednačina za prostor-vremena sa manjom simetrijom u odnosu na Švarcšildovo rešenje koje je sferno-simetrično. Ipak, videćemo da postoje neke forme Kerovog rešenja koje su samo nešto drugačije napisane, ali zato otkrivaju pravu lepotu i dubinu samog Kerovog rešenja.

Način na koji je Ker originalno došao do svog rešenja zahteva uvođenje novog matematičkog aparata, koji je dosta komplikovan, a koji se koristi nezavisno od fizičkih argumenata i nerešavajući Ajnštajnovu jednačinu na klasičan način. U ovom poglavlju će diskusija biti bazirana na skici jednog alternativnog izvodjenja Kerovog rešenja sa autorove tačke gledišta.

3.1. Opšta forma metrike osno-simetričnog rotirajućeg prostor-vremena

Kako metrika za kojom tragamo treba da opisuje tela koja rotiraju oko jedne svoje ose (recimo oko z -ose), najpogodnije je da iskoristimo sferni koordinatni sistem (r, θ, φ) . Pošto koordinatni sistem rotira u vremenu u odnosu na posmatrača u inercijalnom sistemu reference u odnosu na koji zadajemo metriku, infinitezimalni pomeraj ugla $d\varphi$ će biti korigovan za vrednost $-\omega dt$ (uzimamo pozitivan matematički smer), gde ω ima smisao ugaone brzine (Slika 1): $d\varphi \rightarrow d\varphi - \omega dt$. Stoga će metrika (1.2) u sfernim koordinatama imati opštu formu:

$$ds^2 = g'_{tt} dt^2 + g'_{\varphi\varphi} (d\varphi - \omega dt)^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 \quad (3.1)$$



Slika 1: Rotacija koordinatnog sistema oko z -ose.

Pošto je metrička forma promenjena zbog rotacije, prave komponente metričkog tenzora osno-simetričnog prostor-vremena zadatim u sfernim koordinatama postaju očigledne tek nakon kvadriranja promenjene koordinate $d\varphi$ u zagadi i grupisanja uz odgovarajuće diferencijale:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 \quad (3.2)$$

gde je ugaona brzina apsorbovana u odgovarajuće komponente metričkog tenzora. U matričnom obliku, metrički tenzor izgleda ovako⁸:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\varphi} & 0 & 0 \\ g_{\varphi t} & g_{\varphi\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

Očigledno je da rotacija koordinatnog sistema u vremenu indukuje pojavljivanje mešovitog člana $g_{t\varphi}dtd\varphi$. Smisao ovog mešovitog člana jeste taj da je forma (3.1) invarijantna u odnosu na *istovremenu* promenu znaka vremenske koordinate $dt \rightarrow -dt$ i uglovne koordinate $d\varphi \rightarrow -d\varphi$. Ovo znači da promenom smeru vremena dobijamo koordinatni sistem koji rotira u suprotnom smeru, ali ništa se suštinski ne menja, te metrika ostaje ista, što bi i odgovaralo realnoj fizičkoj situaciji.

Ova osobina se naziva *stacionarnost* i razlikuje se od pojma *statičnosti* koji smo sreli kod Švarcšildove metrike – ovde koordinatni sistem ne miruje (nije statičan), ali metrička forma ostaje invarijantna u vremenu, pa komponente metričkog tenzora *ne zavise od vremena*, tj. sistem *ravnomerno rotira i pritom zadržava svoju simetriju - stacionaran* je.

S druge strane, pošto tragamo za osno-simetričnim prostor-vremenom, metrička forma mora biti invarijantna i u odnosu na kontinualnu promenu koordinate φ – dakle, posmatrač u inercijalnom sistemu reference neće uočiti promene prostor-vremena dok objekat rotira, što je i karakteristika osne simetrije.

Na taj način, slično kao kod Švarcšildovog rešenja, imaćemo dve očuvane veličine: energiju rotirajućeg objekta, koja će se pojaviti kao posledica očuvanja metrike prilikom translacije u vremenu; i moment impulsa (ugaoni moment), koji se pojavljuje kao posledica očuvanja metrike prilikom kontinualne promene ugla φ , tj. očuvanja u odnosu na rotaciju. (Detaljnije o simetrijama u odeljku 4.4)

Do zaključka da metrika osno-simetričnog prostor-vremena mora sadržati samo $g_{t\varphi}$ od mešovitih komponenti metričkog tenzora smo mogli doći razmišljajući u obrnutom smeru: uzimajući u obzir samo osobine *stacionarnosti* i *osne simetrije*, za metriku treba da važi da je:

$$g_{tr} = g_{t\theta} = g_{r\theta} = g_{r\varphi} = g_{\theta\varphi} = 0$$

⁸ Raspored komponenta metričkog tenzora u odnosu na indekse $\mu, \nu = 0,1,2,3$ nije bitan, bitno je da se oznake poštuju jednom kada se definišu.

jer bi svaki taj mešoviti član dobio negativan predznak pri istovremenoj promeni znaka vremenske koordinate i koordinate φ , što bi uništilo invarijantnost metrike i njenu osobinu stacionarnosti i osne simetrije. Stoga preostaje samo $g_{t\varphi}$.

Na osnovu prethodno rečenog, metrika rotirajućeg, osno-simetričnog prostor-vremena ima pet funkcija metričkog tenzora koje treba odrediti ($g_{tt}, g_{t\varphi}, g_{\varphi\varphi}, g_{rr}, g_{\theta\theta}$), kao i jednu koja ima smisao ugaone brzine (ω) i sve one zavise samo od preostale dve koordinate r i θ :

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(r, \theta)$$

$$\omega = \omega(r, \theta)$$

Na prvi pogled, izgleda veoma čudno, pa čak i besmisleno da ugaona brzina zavisi od rastojanja od ose rotacije, a tako i od ugla θ . Matematički gledano, $\omega(r, \theta)$ je samo još jedna funkcija koja se pojavljuje u metrici i ne postoji apsolutno nikakvo ograničenje na zavisnost od ovih koordinata, stoga se u knjigama i radovima o Kerovoj metrici ni ne može sresti fizički argument koji bi to opravdao. Međutim, gledano sa stanovišta fizike, zavisnost ugaone brzine od pomenutih koordinata moramo opravdati⁹.

Naime, imajmo na umu da prisustvo mase utiče na geometriju prostor-vremena, dakle na rastojanja, to je suština Einsten-ovih jednačina. Znamo da je ugaoni moment u klasičnoj fizici dat sa:

$$L = I\omega \tag{3.3}$$

(I - moment inercije) i što je najbitnije, znamo da ne zavisi od toga sa kojih koordinata ga merimo, isto je i sa energijom. Sada izvršimo jedan misaoni eksperiment. Zamislimo jedan krut štap zanemarljive mase koji na jednom kraju ima učvršćenu veoma masivnu kuglu M , a na drugom jednu mnogo manje masivnu kuglu¹⁰ mase m . Uzmimo da je dužina šapa l , i da je ona nešto veća od dimenzija kugle M i pretpostavimo da štap rotira konstantnim ugaonim momentom L oko ose koja prolazi kroz kraj štapa gde se nalazi masivnija kugla. Klasično, njegov moment inercije će biti, po Štajnerovom obrascu (Steiner):

$$I = I_M + ml^2$$

Međutim, pošto veoma masivna kugla zakrivljuje prostor-vreme oko sebe (pretpostavimo da je toliko masivna da je zakrivljenje primetno), dužina štapa (koji se nalazi u gravitacionom polju masivne kugle) će posmatraču daleko od ovog sistema biti različita od l , pa će time i moment inercije biti drugačiji. Kako je ugaoni moment (3.3) invarijantan u odnosu na transformaciju

⁹ Opravdanje direktno sledi već iz specijalne teorije relativnosti gde pojam krutog tela nema smisla, pa stoga i ugaona brzina kao veličina nezavisna od rastojanja gubi smisao, a pošto ovde govorimo o Lorenc-invarijantnoj metrici (Hendrik Antoon Lorentz), opravdanje se samo prenosi, međutim, doći ćemo do opravdanja nezavisno od toga, da bi smo stekli dublji uvid u uticaj prisustva mase na prostor-vreme.

¹⁰ Ovakav sistem očigledno nije osnosimetričan, ali to za trenutnu diskusiju nije bitno, što će se videti u daljem tekstu.

koordinata, to svaki posmatrač mora izmeriti isti ugaoni momenat, pa će i ω morati da zavisi od rastojanja.

Što se tiče zavisnosti od ugla θ , dovoljno je da uvidimo da se planeta Zemlja usled rotacije deformiše u rotacioni elipsoid, te orbitiranje duž polarne kružne orbite (što je ekvivalentno promeni ugla θ) nužno povlači za sobom merenje slabije/jače gravitacione sile, što znači da je prisutno manje/veće zakrivljenje prostora. Ovo ima za posledicu uticaj na rastojanje koje ulazi u moment inercije i time u ugaoni moment. Zbog toga ugaona brzina mora zavisiti i od koordinate θ .

Za dalju diskusiju biće pogodno umesto ugaonog momenta koristiti *ugaoni moment po jedinici mase*:

$$a = \frac{L}{Mc} \quad (3.4)$$

koja je konstantna veličina (što se vidi iz formule) i ima dimenzije rastojanja (u jedinicama $c = 1$ odgovarajući izraz je prosto $a = L/M$, kakvog ćemo dalje i koristiti).

3.2. Kerova metrika

Jedno izvodjenje Kerove metrike detaljno je obradio Čandrasekar (Subrahmanyan Chandrasekhar) u svojoj knjizi *The Mathematical Theory of Black Holes*. Čandrasekar polazi od metrike (3.1) i na njega primenjuje jedan veoma moćan formalizam koji je razvio Kartan, a koji je opisan u dodatku **D1**. Ovaj formalizam omogućava da se dodje do komponenti Rimanovog tenzora na mnogo jednostavniji i elegantniji način nego što je to opisano u prvom poglavlju, i to nezavisno od koordinatnog bazisa (tangentskog prostora). Naime, suština ovog formalizma jeste da postoje izvesne 1-forme (dakle veličine kotangentskog prostora) od kojih se mogu formirati više forme koje su dalje antisimetrične. Ako su A i B 1-forme, formiranje 2-forme se vrši pomoću njihovog *spoljašnjeg proizvoda*¹¹, koji je analogan vektorskom proizvodu, a koji je definisan sa:

$$A \wedge B = A \otimes B - B \otimes A$$

odakle je očigledno da je on anisimetričan, kao i vektorski proizvod:

$$A \wedge B = -B \wedge A$$

Ova antisimetrija omogućava konstrukciju antisimetričnih p -formi, medju njima i Rimanovog tenzora. Koristi se još i spoljašnji izvod, koji je analogan gradijentu, i koji od p -forme pravi $(p + 1)$ -formu. Za 1-formu A i 1-formu B spoljašnji proizvod je definisan sa:

$$d(A \wedge B) = dA \wedge B - A \wedge dB$$

¹¹ U literaturi se koristi naziv "wedge product".

Medjutim, od kojih 1-formi se može konstruisati Rimanov tenzor, tj. koji bazis odabrati? Koristi se *bazis ortonormirane tetrade*, gde je tetrada¹² naziv za skup od četiri 1-forme, koje se bukvalno pročitaju iz metrike; naime, ideja je da se proizvoljna metrika, recimo osno-simetrična (3.1) zapiše preko ortonormiranih tetrada $\hat{\omega}^a$ na sledeći način:

$$ds^2 = g'_{tt}dt^2 + g'_{\varphi\varphi}(d\varphi - \omega dt)^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 = (\hat{\omega}^0)^2 - (\hat{\omega}^1)^2 - (\hat{\omega}^2)^2 - (\hat{\omega}^3)^2$$

i potom pročitaju ortonormirane 1-forme:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}^0 &= \sqrt{g'_{tt}}dt \\ \hat{\omega}^1 &= \sqrt{-g'_{\varphi\varphi}}(d\varphi - \omega dt) \\ \hat{\omega}^2 &= \sqrt{-g'_{rr}}dr \\ \hat{\omega}^3 &= \sqrt{-g'_{\theta\theta}}d\theta\end{aligned}$$

Od ovih formi se, prateći postupak opisan u dodatku **D1**, može doći do komponenti Rimanovog tenzora u bazu ortonormiranih tetrada.

Ono što je bitno jeste to što se Ajnštajnovе jednačine ne menjaju pri prelasku na ovaj bazis (osobina kovarijantne formulacije fizičkih zakona), tako da Ričijev tenzor, dobijen iz komponenti Rimanovog tenzora na ovaj način, nije potrebno vraćati u koordinatni bazis (osim ako želimo da pronadjemo njegove komponente u njemu), već je dovoljno postaviti Ajnštajnovе jednačine u ovom bazu (pri tome, u slučaju da tražimo rešenje koje nije za vakuum, moramo transformisati i tenzor energije-impulsa).

Čandrasekar je koristio upravo ovaj metod primenjen na metriku (3.1) i dobio komponente Rimanovog tenzora (po postupku iz **D1**) koje dalje daju nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda po dve promenljive i koje ovde nećemo navoditi. Ove jednačine nemaju jedinstveno rešenje, i veoma su komplikovane za rešavanje.

Ono što nalaženje rešenja čini mogućim jeste kalibraciona sloboda, koju smo spomenuli u prvom poglavlju, jer bez nje jednačine uopšte ne poznaju razliku između koordinata r i θ na primer. Imajući razliku koordinata u vidu, jednačinama se nameću uslovi na osnovu matematičkih teorema i uvode se pretpostavke i smene koordinata i tek nakon toga se dolazi do rešenja, tj. do metrike aksijalno simetričnog rotirajućeg prostor-vremena.

Metrika do koje dolazi Čandrasekar u svojoj knjizi data je sa:

¹² Za četiri dimenzije. Mogu se naći i nazivi "vierbein" ili "vielbein", gde su obe nemačke reči za "četiri noge" i "mnogo nogu". Termin se koristi i u višedimenzionalnim prostorima.

$$\begin{aligned}
ds^2 = & \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi \\
& - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2
\end{aligned} \tag{3.5}$$

gde su iskorišćene sledeće oznake:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

Metrički tenzor u matičnom obliku izgleda ovako:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} & \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} & \hat{0} & \hat{0} \\ \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} & -\left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & -\frac{\rho^2}{\Delta} & 0 \\ \hat{0} & \hat{0} & 0 & -\rho^2 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

dok je njegova determinanta:

$$g = -\rho^4 \sin^2 \theta = -(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 \sin^2 \theta \tag{3.7}$$

Tokom izvodjenja, nikakav smisao nije dat veličinama M i a koje iz rešavanja prozilaze kao konstante integracija određenih funkcija, već se njihov fizički smisao dobija kada se posmatra ponašanje metrike za $r \rightarrow \infty$ i uporedi sa Švarcšildovim rešenjem, a i razmatrajući polazne opšte metričke forme (3.1) i (3.2).

Konkretno, posmatrajući koeficijent g_{00} :

$$g_{00} = \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} = \frac{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{r^2}\right)}{r^2 \left(1 + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{r^2}\right)} = \frac{1 - \frac{2M}{r} + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{r^2}}{1 + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{r^2}}$$

i zanemarujući izraze proporcionalne r^{-2} (za veliko r), vidimo da veličina M odgovara masi.

Dalje, vidimo da mešoviti član $dt d\varphi$ množi veličina a i da se metrika svodi na Švarcšildovu metriku (2.1) kada je $a = 0$, tj. simetrija se podiže na sfernu simetriju. Naslućujemo da je ova veličina proporcionalna ugaonoj brzini u opštoj metrici (3.1), koja je uvedena upravo kao množitelj mešovitog člana $dt d\varphi$ zaslužnog za narušenje sferne simetrije. Zaista, tokom izvodjenja Čandrasekar dobija da je

$$\omega = \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\rho^2(r^2 + a^2) + 2Mra^2 \sin^2 \theta} \quad (3.8)$$

i fizički smisao veličine a jeste ugaoni moment po jedinici mase, kakvog smo obeležili u (3.4).

U odeljku 3.5 ćemo videti kako se dobija izraz za ugaonu brzinu iz opšte metrike (3.2).

Koordinate u kojima je data metrika (3.5) su standardne sferne koordinate (r, θ, φ) plus vremenska koordinata, kakve meri posmatrač iz asimptotski ravnog prostora. Ove koordinate nose naziv Bojer-Lindkvist (Robert Boyer, Richard Lindquist) koordinate, po svojim pronalazačima. One se vrlo često koriste u astrofizici i najpogodnije su za proučavanje putanja kretanja tela u Kerovom prostor-vremenu.

Pogledajmo sada kako masa utiče na merenje koordinata u Kerovoj metrici u poredjenju sa Švarcšildovom metrikom. Naime, kod Švarcšildove metrike jedina prostorna koordinata na koju masa ima uticaj jeste koordinata r i taj uticaj se vidi u odgovarajućoj komponenti metričkog tenzora g_{22} . To znači da će, ako menjamo masu kao parametar, jedino koordinata r “osetiti” tu promenu, a ostale dve (θ i φ) će ostati nepromenjene i ako uzmemo da je $M = 0$, sferna simetrija ostaje očuvana. To je i suština Švarcšildovog rešenja – gravitacija je centralna sila i zavisi samo od rastojanja, stoga sferna simetrija u prisustvu statičnog objekta mase M ostaje očuvana (izvan tog objekta). Sada na isti način protumačimo Kerovu metriku datu sa (3.5). Ako u njoj stavimo da je $M = 0$ (pri čemu parametar a gubi fizički smisao jer je povezan sa postojanjem mase, ali ovde ćemo ga zadržati), dobijamo:

$$ds^2 = dt^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \quad (3.9)$$

Prostorni deo ove metrike je *identičan* metrici ravnog trodimenzionalnog prostora u elipsoidnim koordinatama¹³! Ovo je jedna ohrabrujuća činjenica koja nam govori da je apsolutno opravdano da pretpostavimo da će se simetrija koju poseduje ova metrika održati prilikom ubacivanja mase u prostor – isto ono što je Švarcšild pretpostavio za sfernu simetriju kod statične metrike. Dakle, ubacivanjem rotirajuće mase u prostor-vreme opisano gornjom metrikom, dobijamo metriku koja poseduje istovetnu simetriju – elipsoidnu simetriju, jer postojanje mase utiče samo na koordinatu r (koordinata φ je modifikovana rotacijom – da nema rotacije, ne bi bilo ni trećeg člana u zagradi koja množi $d\varphi^2$ u metrici (3.5).

Činjenica da se sferna/elipsoidna simetrija prostora očuvava u okolini ubačenog objekta mase M koji ne rotira/rotira se objašnjava, kao što smo rekli, upravo time što je gravitaciona sila *centralna sila i ne zavisi od pravca* (koji je definisan koordinatama θ i φ), već *samo od rastojanja*; menjajući masu utičemo samo na meru dužine. Sve ovo važi pod uslovom da govorimo o prostoru *izvan* objekta i da je taj prostor prazan (vakuum), na osnovu čega je i dobijeno i Švarcšildovo i Kerovo rešenje.

¹³ Biće pokazano u narednom odeljku.

Gornju diskusiju je veoma bitno naglasiti, jer Ker 1963. godine (niti iko posle njega) nije dobio rešenje Ajnštajnovih jednačina za rotirajući objekat tražeći rešenje koje zadovoljava elipsoidnu simetriju rotirajućeg objekta (kako je do svog rešenja došao Švarcšild, tražeći sferno-simetrično rešenje za sferno-simetrični objekat). Naime, metod kojim je Kerr došao do svog rešenja se ne temelji na fizičkim argumentima, već na strogim matematičkim teoremama i formalizmu koji su u to vreme počinjali da budu aktivno proučavani¹⁴. Iako taj metod čini samo rešenje (koje je inače egzaktno) veoma matematički “stabilnim”, nas u radu trenutno interesuje neki metod koji uključuje više fizičko rezonovanje, nego strogi matematički formalizam. U tu svrhu će naredni odeljci biti spona između Kerovog i Čandrasekar-ovog načina sa jedne strane i jednog malo drugačijeg metoda sa druge, čiji će okvir biti predstavljen u odeljku 3.5.

3.3. Ravan prostor u elipsoidnim koordinatama sa uključenom rotacijom koordinatnog sistema

U ovom odeljku ćemo pokazati do koje mere se možemo *na klasičan način* približiti Kerovom rešenju polazeći od ravnog prostora u elipsoidnim koordinatama, čime ukazujemo na vezu između simetrije koja je zastupljena u Kerovoj metrici i elipsoidne simetrije. Videćemo da ovaj postupak nije sasvim korektan iz razloga koje ćemo naglasiti, već više služi kao demonstracija, ali je to i bitno pokazati i naglasiti.

Znamo da su sferne koordinate date sa:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}\tag{3.10}$$

Tražeći diferencijale koordinata, potom kvadrirajući i sabirajući ih, dobijamo metriku trodimenzionalnog prostora u sfernim koordinatama:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2\tag{3.11}$$

Sferna simetrija implicira da je koordinata r u sva tri pravca ravnopravna. Sada poremetimo sfernu simetriju tako što ćemo odabrati da rastojanje r merimo nešto drugačije u x i y pravcu, a duž z pravca neka merenje ostane isto kao kod sferne simetrije, tako da ostaje osna simetrija oko z ose. U suštini, ovime smo kod x i y koordinate u (3.10) koordinatu r zamenili nekom funkcijom od r koju hoćemo da odredimo, tj.

$$\begin{aligned}x &= f(r) \sin \theta \cos \varphi \\y &= f(r) \sin \theta \sin \varphi\end{aligned}$$

¹⁴ U pitanju je formalizam svetlosnih tetrada (“null tetrad formalism”) koji je veoma moćan i čije se osnove mogu pronaći u referencama ovog rada [3],[4],[6].

$$z = r \cos \theta$$

Tražeci diferencijale koordinata, potom kvadrirajući i sabirajući ih, dobijamo metriku trodimenzionalnog prostora u novim koordinatama:

$$dl^2 = (f'^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) dr^2 + (f^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) d\theta^2 + f^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + 2(f \cdot f' - r) \sin \theta \cos \theta dr d\theta$$

Pošto ova metrika sadrži mešoviti član $dr d\theta$, a nama treba ortogonalna metrika, zahtevamo da koeficijent $(f \cdot f' - r)$ iščezne, stoga:

$$f \cdot f' - r = 0,$$

$$f df = r dr,$$

$$f^2 = r^2 + c$$

gde je c konstanta integracije koja može biti manja, jednaka ili veća od nule. Primitimo da kada je ona jednaka nuli, funkcija koju tražimo je $f = r$ i metrika se svodi na (3.11), tj. dobijamo sfernu simetriju. Iz geometrije se može pokazati da za *rotacioni elipsoid* važi da je ova konstanta veća od nule¹⁵. Ako obeležimo ovu konstantu sa \tilde{a}^2 , što je uvek pozitivno ako je \tilde{a} realno, tada je $f^2 = r^2 + \tilde{a}^2$ i metrika dobija konačnu formu:

$$dl^2 = \frac{r^2 + \tilde{a}^2 \cos^2 \theta}{r^2 + \tilde{a}^2} dr^2 + (r^2 + \tilde{a}^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + (r^2 + \tilde{a}^2) \sin^2 \theta d\varphi^2$$

dok je kompletna metrika ravnog prostor-vremena u elipsoidnim koordinatama:

$$ds^2 = dt^2 - (r^2 + \tilde{a}^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{r^2 + \tilde{a}^2 \cos^2 \theta}{r^2 + \tilde{a}^2} dr^2 - (r^2 + \tilde{a}^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \quad (3.12)$$

Odgovarajući metrički tenzor ima sledeći oblik:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(r^2 + \tilde{a}^2) \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r^2 + \tilde{a}^2 \cos^2 \theta}{r^2 + \tilde{a}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r^2 + \tilde{a}^2 \cos^2 \theta) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

a determinanta je:

¹⁵ U stranoj literaturi se za ove koordinate koristi termin "oblate spheroidal coordinates", dok se koordinate za koje je c manje od nule koristi termin "prolate spheroidal coordinates", koje opisuju jednograni hiperboloid.

$$g = -(r^2 + \tilde{a}^2 \cos^2 \theta)^2 \sin^2 \theta \quad (3.14)$$

Dobijena metrika je identična prostornom delu metrike (3.9), koju smo dobili stavljajući $M = 0$ u Kerovoj metrici. Takodje je i determinanta metričkog tenzora iz Kerovog rešenja (3.7) *identična* determinanti ravnog prostor-vremena u elipsoidnim koordinatama (3.14), isto kao što je determinanta metričkog tenzora Švarcšildove metrike (2.3) identična determinanti ravnog prostor-vremena u sfernim koordinatama.

Zaključujemo da je simetrija rotacionog elipsoida za Kerovu metriku isto što i sferna simetrija za Švarcšildovu metriku, a koordinate su:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + \tilde{a}^2} \sin \theta \cos \varphi \\ y &= \sqrt{r^2 + \tilde{a}^2} \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sada možemo da uključimo rotaciju u problem, tj. da pustimo da rotacioni elipsoid rotira u vremenu, tada metrika (3.12) postaje:

$$ds^2 = dt^2 - (r^2 + \tilde{a}^2) \sin^2 \theta (d\varphi - \omega dt)^2 - \frac{r^2 + \tilde{a}^2 \cos^2 \theta}{r^2 + \tilde{a}^2} dr^2 - (r^2 + \tilde{a}^2 \cos^2 \theta) d\theta^2$$

što nakon sredjivanja daje:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - (r^2 + \tilde{a}^2) \sin^2 \theta \omega^2) dt^2 + 2(r^2 + \tilde{a}^2) \sin^2 \theta \omega dt d\varphi \\ &\quad - (r^2 + \tilde{a}^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{r^2 + \tilde{a}^2 \cos^2 \theta}{r^2 + \tilde{a}^2} dr^2 - (r^2 + \tilde{a}^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \end{aligned}$$

Poredeći ovo sa Kerovom metrikom, koju prepisujemo ovde radi preglednosti u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) dt^2 + \frac{4Mr a \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt d\varphi \\ &\quad - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2Mr + a^2} dr^2 \\ &\quad - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \end{aligned}$$

konstatujemo da funkcija ω mora biti povezana sa masom i parametrom a i da parametar \tilde{a} upravo ima fizički smisao uganaog momenta po jedinici mase ($\tilde{a} \equiv a$). Takodje vidimo da jedini član koji ostaje nepromenjen nakon davanja fizičkog smisla funkciji ω , te nakon uključivanja mase u problem, jeste član koji množi $d\theta^2$. To je zbog toga što ni gravitaciona sila ne utiče na

merenje ove koordinate¹⁶, niti rotacija koordinatnog sistema (vektor infinitezimalne rotacije $d\varphi$ je normalan na ort-vektor pravca merenja θ koordinate).

Naravno, na ovaj način se *ne može i ne sme* tražiti Kerova metrika, jer Ajnštajnovе jednačine nisu uključene u problem, i zbog toga na osnovu gornje metrike, prostim poredjenjem, ne možemo dobiti ispravan izraz za funkciju ω , čak ispada da masa ne učestvuje u koeficijentu koji množi $d\varphi^2$, što je neispravno. Gornja diskusija je samo način da se u ovom radu ukaže na to da nije moguće prosto “proširiti” već *zadatu* metriku, već se mora krenuti od opšte metričke forme.

U narednim odeljcima će se videti zbog čega bi uvođenje rotacije i funkcije ω uopšte moglo da bude nepotrebno još u metrici (3.1), i kako se metrička forma (3.5) Kerove metrike može iskazati drugačije.

3.4. Kerova metrika u najočiglednijoj formi

Jedna od specifičnosti Kerovog rešenja jeste što njegova metrika poseduje jednu veoma lepu i elegantnu formu koja dosta podseća na Švarcšildovo rešenje, ali koja u literaturi nije toliko zastupljena i razmatrana¹⁷. Naime, metriku (3.5) je moguće preformulisati u sledeću formu:

$$ds^2 = \frac{r^2 - 2Mr + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left(d\varphi - \frac{a}{r^2 + a^2} dt \right)^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2Mr + a^2} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \quad (3.15)$$

ili konciznije napisana:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} dT^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} d\Phi^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2$$

gde su nove koordinate

$$\begin{aligned} dT &= dt - a \sin^2 \theta d\varphi \\ d\Phi &= d\varphi - \frac{a}{r^2 + a^2} dt \end{aligned} \quad (3.16)$$

Odgovarajući metrički tenzor, koga ćemo ovde obeležiti sa $G_{\mu\nu}$ jer je predstavljen u novim koordinatama (T, Φ, r, θ) , je oblika:

¹⁶ Što smo znali nezavisno od proučavanja rešenja Ajnštajnovih jednačina.

¹⁷ Primena ove forme i njenih osobina veoma je obradjena u referenci [7].

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{\rho^2} & 0 & & \hat{0} \\ 0 & -\frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} & & \\ & \hat{0} & -\frac{\rho^2}{\Delta} & 0 \\ & & 0 & -\rho^2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Poredeći ovu formu sa Švarcšildovom metrikom (2.1), možemo formirati sledeću tabelu koja prikazuje odgovarajuće komponente metričkog tenzora za Švarcšildovu i Kerovu metriku:

	dt/dT	dr	$d\theta$	$d\varphi/d\Phi$
<i>Švarcšild</i> ¹⁸	$\frac{r^2 - 2Mr}{r^2}$	$\frac{r^2}{r^2 - 2Mr}$	r^2	$r^2 \sin^2 \theta$
<i>Kerr</i>	$\frac{r^2 - 2Mr + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$	$\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2Mr + a^2}$	$r^2 + a^2 \cos^2 \theta$	$\frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$

Tabela 1: Poređenje odgovarajućih komponenti metričkog tenzora kod Švarcšildove i Kerove metrike (za formu (3.17)) uzeto iz dodatka D3.

odakle se vidi da postoji *identična veza* medju koeficijentima ispred “vremenske” i radijalne koordinate kao što je to slučaj u Švarcšildovoj metrici:

$$G_{00} = G_{22}^{-1} \quad (3.18)$$

Dalje, iz ove forme je vrlo očigledno da se za $a = 0$, dobija Švarcšildova metrika, kako i treba, naime, nove koordinate ($dT, d\Phi$) prelaze u standardnu vremensku i uglovnu koordinatu ($dt, d\varphi$) što se vidi iz (3.16), dok metrički koeficijenti u brojicu i imeniocu gube članove koji množe a i prelaze u odgovarajuće metričke koeficijente Švarcšildove metrike, održavajući vezu (3.18).

Takodje, ako pogledamo determinantu metričkog tenzora Švarcšildove metrike (2.3) i determinantu metričkog tenzora (3.17)

$$g = -(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta \quad (3.19)$$

videćemo da je njoj vrlo slična – jedina razlika jeste što umesto r^2 stoji $r^2 + a^2$, pri čemu je dimenzija determinante ista (m^4). Dalje, vidi se da je determinanta metričkog tenzora Kerove metrike (3.7) u koordinatama (t, φ, r, θ) koja je data u odeljku 3.2 *različita* od determinante u koordinatama (T, Φ, r, θ). Da li postoji metrička forma ravnog prostor-vremena čija je determinanta jednaka (3.19)?

¹⁸ $1 - \frac{2M}{r} = \frac{r^2 - 2Mr}{r^2}$

Ova paralela između Kerove metrike u formi (3.15) i Švarcšildove metrike (2.1) se nikako ne sme smatrati slučajnom. Njena specifičnost i značaj postaće još očigledniji u narednom odeljku.

Napomenimo da se u literaturi navodi slična forma:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} ((r^2 + a^2)d\varphi - a dt)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2$$

koja poseduje nešto drugačiji metrički tenzor i determinantu, ali ima iste osobine kao i ona koja je data u ovom radu (3.15). Za $M = 0$ očigledan je prelaz na odgovarajuću metričku formu za ravno prostor-vreme.

3.5. Skica jednog alternativnog izvodjenja Kerovog rešenja

Danas, nakon polovine veka od otkrića Kerove metrike, lako je zapitati se sa čudjenjem kako to Ker nije uvideo da se sfera koja rotira, sastavljena od materije, deformiše u rotacioni elipsoid, koji poseduje osnu simetriju i na osnovu toga rešavao Ajnštajnovu jednačinu (poput Švarcšild-a). Medjutim, treba imati u vidu da naučna misao evoluirala i tako je još od starih Grka. Neki aspekti pojedinih problema iz jedne oblasti fizike ranije nisu bili ni očigledni niti poznati (iako su ti problemi bili rešeni), dok danas oni to jesu i to samo zahvaljujući napretku u toj i drugim oblastima fizike i sagledavanju Prirode iz sve više različitih uglova. S druge strane, danas zasigurno postoji mnoštvo problema čija će suština tek budućim naučnicima biti očigledna. Stoga nema osnova za “čudjenjem” (iako je to “čudjenje” dokaz postojanja pozitivnih rezultata evolucije naučne misli). Ipak, svi ti novostečeni uglovi sagledavanja Prirode se oblikuju u ono što bismo danas mogli nazvati “naknadnom mudrošću”¹⁹, što može biti samo korisno, jer ta naknadna mudrost je ona koja nam pomaže da prodremo u samu suštinu nekog problema koji je već rešen, ali i da iz rezultata tog truda otvori vrata ka novim horizontima i potpomogne evoluciju naučne misli.

U ovom odeljku će biti iskorišćena “naknadna mudrost” u cilju pronalaženja jednog alternativnog izvodjenja Kerove metrike na način koji koristi fizičko (i u pojedinim momentima intuitivno) rezonovanje. Ovaj metod se zbog toga razlikuje od metoda koji je koristio Ker, a i od metoda koji je koristio Čandrusekar.

Definisaćemo korake koji bi trebalo da nas na kraju dovedu do Kerovog rešenja, imajući u vidu da tragamo za prostor-vremenom izvan rotirajućeg objekta (planeta, zvezda, Crna rupa):

- a. pretpostaviti oblik ekvipotencijalnih površi oko rotirajućeg objekta, što bi trebalo da sugeriše simetriju i koordinate u kojima će opšta metrika prostor-vremena biti zadata
- b. zadati opštu formu metrike prostor-vremena rotirajućeg objekta;
- c. naći eventualna ograničenja i eventualne veze između nepoznatih funkcija koje se pojavljuju u metrici, u cilju uprošćavanja problema;

¹⁹ Po slobodnom prevodu prof. Tristana Hibša (Tristan Hübsch).

- d. na osnovu opšte metrike izvesti formu koja nalikuje na Švarcšildovu metriku;
- e. primeniti Kartanov metod za pronalaženje komponenata Rimanovog tenzora;
- f. rešiti Ajnštajnovе jednačine za vakuum.

a. pretpostaviti oblik ekvipotencijalnih površi oko rotirajućeg objekta, što bi trebalo da sugeriše simetriju i koordinate u kojima će opšta metrika prostor-vremena biti zadata

Ekvipotencijalne površi (gravitacionog potencijala) sfernosimetričnog tela su sfere. Ako to telo počne da rotira, ono će se deformisati u *rotacioni elipsoid* i sferna simetrija ekvipotencijalnih površi će biti narušena. Gravitacioni potencijal zavisi od rasporeda mase u telu, stoga, ako raspored mase odgovara rotacionom elipsoidu, ekvipotencijalne površi će biti *površine rotacionog elipsoida*.

Na osnovu ovoga sistem koordinata koji je najpogodniji za zadavanje metrike jeste sistem *elipsoidnih koordinata* (3.14) koje smo izveli u poglavlju 3.3. Primetimo da već uvođenjem ovih koordinata uvodimo i uticaj rotacije, ali koordinata φ ostaje nepromenjena.

b. zadati opštu formu metrike prostor-vremena rotirajućeg objekta

Metrika bi trebalo da ima oblik (3.1), uz sve argumente vezane za stacionarnost i osnu simetriju koji su razmatrani u odeljku 3.1:

$$ds^2 = g'_{tt}dt^2 + g'_{\varphi\varphi}(d\varphi - \omega dt)^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 \quad (3.20)$$

tj.

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 \quad (3.21)$$

gde metrički koeficijenti sadrže simetriju elipsoida. Pri ovome ćemo zahtevati da kada telo ne rotira, gornja metrika postaje sferno-simetrična, tj. svodi se na Švarcšildovo rešenje (2.1):

$$\begin{aligned} g_{t\varphi} &\rightarrow 0 \\ g_{tt} &\rightarrow 1 - \frac{2M}{r} = \frac{r^2 - 2Mr}{r^2} \\ g_{\varphi\varphi} &\rightarrow r^2 \sin^2 \theta \\ g_{rr} &\rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} = \frac{r^2}{r^2 - 2Mr} \\ g_{\theta\theta} &\rightarrow r^2 \end{aligned}$$

a da se, kada je masa jednaka nuli, metrika svede na metriku ravnog prostora u elipsoidnim koordinatama (3.12):

$$\begin{aligned}
g_{t\varphi} &\rightarrow 0 \\
g_{tt} &\rightarrow 1 \\
g_{\varphi\varphi} &\rightarrow (r^2 + a^2) \sin^2 \theta \\
g_{rr} &\rightarrow \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} \\
g_{\theta\theta} &\rightarrow r^2 + a^2 \cos^2 \theta
\end{aligned}$$

Pošto se radi o fizičkom telu, parametar a mora imati fizički smisao. Kako on govori o deformaciji sfere u elipsoid zbog rotacije (ali ne daje informaciju da koordinatni sistem rotira), očigledno je da on mora biti povezan sa ugaonom brzinom ω (koji pokazuje da koordinatni sistem rotira). Tako smo zadavanjem metrike u formi (3.20) i uvođenjem ugaone brzine ω objasnili *zbog čega je fizički sfera deformisana u rotacioni elipsoid*. On takodje mora biti i *konstanta*, jer je rotacija ravnomerna (stacionarna metrika), stoga će u vremenu simetrija rotacionog elipsoida biti očuvana.

Primitimo još da komponenti g_{rr} u Švarčšildovom rešenju (na osnovu Tabele 1) kao da “fali” u brojiocu član $+a^2 \cos^2 \theta$, a u imeniocu $+a^2$, dok kod iste komponente u (3.12) “fali” u imeniocu član sa masom. (Kako smo videli, u Kerovoj metrici je g_{rr} upravo član koji sadrži oba ova “nedostatka”, ali pošto ovde još nismo došli do Kerovog rešenja, te ga “ne poznajemo”, ovaj podatak nam ne može pomoći i ovo je (za sada) observacija koja nema uticaja na dalje izvođenje.)

c. naći eventualna ograničenja i eventualne veze izmedju nepoznatih funkcija koje se pojavljuju u metrici, u cilju uprošćavanja problema

Metrika (3.21) poseduje *pet nepoznatih funkcija* koordianta r i θ , kao i metrika (3.20). Medjutim, prelaskom sa forme (3.20) na formu (3.21) dobijamo vezu izmedju ugaone brzine i metričkih koeficijenata:

$$(3.20) : ds^2 = (g'_{tt} + g'_{\varphi\varphi}\omega^2)dt^2 - 2g'_{\varphi\varphi}\omega d\varphi dt + g'_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2$$

$$(3.21): ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2,$$

$$g_{tt} = g'_{tt} + g'_{\varphi\varphi}\omega^2$$

$$g_{t\varphi} = -\omega g'_{\varphi\varphi}$$

$$g_{\varphi\varphi} = g'_{\varphi\varphi}$$

Iz druge i treće jednačine dobijamo da je:

$$\omega = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}$$

što će nakon pronalaženja metričkih koeficijenata dovesti do (3.8). Ovo je vrlo važan rezultat: bez ikakvih pretpostavki o komponentama metričkog tenzora, nalazimo vezu funkcije ω (koja obezbeđuje postojanje mešovitog člana) i metričkih koeficijenata, u ovom slučaju $g_{t\varphi}$ i $g_{\varphi\varphi}$. Suština ove veze jeste da brzina rotacije tela ima uticaj na okolno prostor-vreme, te na vrednosti prostor-vremenskih intervala.

d. na osnovu opšte metrike izvesti formu koja nalikuje na Švarcšildovu metriku

Dalje, možemo pogledati da li se i pod kojim uslovima metrička forma može svesti na oblik koji ne poseduje eksplicitno $d\varphi dt$, ali takav da postoji istovetna veza između dve određene funkcije kao što je to sa Švarcšildovim rešenjem gde je $g_{tt} = g_{rr}^{-1}$. Dva su razloga zbog čega tražimo ovakvu formu – prvi je taj što je ona elegantnija i više liči na Švarcšildovo rešenje, a drugi je taj što time smanjujemo broj nepoznatih funkcija. (Naravno, “naknadna mudrost” nam je pokazala put ka tačnom rešenju u onoj formi koju smo opisali u prethodnom odeljku (3.15).)

Na osnovu rezultata iz dodatka **D2**, konkretno (D2.7)-(D2.11), vidi se da je u opštem slučaju moguće naći transformacije koordinata koje daju dijagonalnu metriku. Proverimo prvo da li se metrika ravnog prostor-vremena u elipsoidnim koordinatama (bez rotacije) (3.12) može svesti na formu:

$$ds^2 = G_{00}(dt - fd\varphi)^2 - G_{11}(d\varphi - gdt)^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \quad (3.22)$$

tako da je

$$G_{00} = -g_{22}^{-1} = \frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$$

gde su f i g funkcije koje zavise od r, θ i parametra a . Ukoliko forma (3.22) postoji, to nam je signal da je moguće pronaći metriku u takvoj formi, a koja bi eventualno zadovoljavala Ajnštajnovu jednačinu.

Komponente metričkog tenzora koje nam trebaju na osnovu (3.12) su:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 \\ g_{11} &= -(r^2 + a^2) \sin^2 \theta \\ g_{22} &= -\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} = -G_{00}^{-1} \end{aligned}$$

Od veličina koje sistem jednačina (D2.5) sadrži:

$$\begin{aligned}g_{00} &= G_{00} + G_{11}g^2 \\g_{11} &= G_{00}f^2 + G_{11} \\0 &= G_{00}f + G_{11}g\end{aligned}$$

mi znamo dve - g_{00} i g_{11} , a na treću smo nametnuli uslov $G_{00} = g_{22}^{-1}$, tako da sve skupa imamo tri jednačine i tri nepoznate, te je sistem rešiv po G_{11}, f i g . Stoga (D2.6) postaje

$$\frac{G_{11}}{G_{00}} = \frac{g_{11}}{g_{00}} \Rightarrow \frac{G_{11}}{\frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}} = -\frac{(r^2 + a^2) \sin^2 \theta}{1}$$

odakle dobijamo G_{11} :

$$G_{11} = -\frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$$

Rešavajući dalje sistem jednačina (D2.5):

$$\begin{aligned}g_{00} &= G_{00} + G_{11}g^2 \\g_{11} &= G_{00}f^2 + G_{11}\end{aligned}$$

dobijamo tražene funkcije transformacije:

$$f = a \sin^2 \theta \quad g = \frac{a}{r^2 + a^2}$$

Tako da metrika ravnog prostor-vremena u elipsoidnim koordinatama dobija konačnu formu:

$$\begin{aligned}ds^2 &= \frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left(d\varphi - \frac{a}{r^2 + a^2} dt \right)^2 \\&\quad - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2\end{aligned} \quad (3.23)$$

ili konciznije napisana

$$\begin{aligned}ds^2 &= \frac{r^2 + a^2}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(d\varphi - \frac{a}{r^2 + a^2} dt \right)^2 \\&\quad - \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 - \rho^2 d\theta^2\end{aligned}$$

Dobili smo nešto zaista intrigantno: samo zbog toga što smo zahtevali da veza G_{00} i g_{22} bude ista kao veza odgovarajućih koeficijenata u Švarcšildovoj metrici, dobijena forma se od Kerovog rešenja u formi (3.15) razlikuje *jedino u tome što u brojiocu koeficijenta G_{00} i imeniocu koeficijenta G_{11} "fali" član $-2Mr$ i to bez uključivanja rotacije koordinatnog sistema*, tj. funkcije ω . Takođe, determinanta ove metrike je

$$g = -(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta \quad (3.24)$$

Ovo je veoma značajno – uvođenje novih koordinata T i Φ je obezbedilo ne samo metričku formu koja nalikuje na Švarcšildovu, već i sistem koordinata koji na neki način *prirodno uvodi mogućnost za rotaciju*, jer bilo kakva promena u G_{00} ili G_{11} indukuje pojavljivanje mešovitog člana $dt d\varphi$ koji inače iščezava. *Ovo znači da postoje koordinate koje ostaju ortogonalne jedna drugoj i nepromenjene u odnosu na inercijalni koordinatni sistem nakon uvođenja rotacije i mase*. Na ovaj način, uopšte nema potrebe za modifikovanjem bilo koje od koordinata T i Φ zbog rotacije koordinatnog sistema! Stoga, moglo bi se konstatovati da je ovaj tip koordinata pogodan za uključivanje rotacije u potencijalno rešenje Ajnštajnovih jednačina, i da one predstavljaju analog koordinatama (t, φ, r, θ) u kojima je Švarcšild tražio sferno simetrično rešenje. Vrlo je verovatno da postoji duboka veza između odabranog bazisa (T, Φ, r, θ) , osne simetrije i rotacije, a u prilog tome ide i činjenica da se tangentni vektori novouvedenih koordinata mogu dobiti kanoničkim transformacijama²⁰.

Na osnovu gornje diskusije, možemo *pretpostaviti* da element luka na dvodimenzionalnoj hiperpovršini (Φ, θ) :

$$ds^2 = \frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} d\Phi^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (3.25)$$

ostaje nepromenjen u gravitacionom polju rotirajućeg objekta, tj. da se elipsoidna simetrija održava, kao što je to pretpostavio Švarcšild za sfernu simetriju. Dakle, mogli bismo da tražimo rešenje Ajnštajnovih jednačina koje zadovoljava elipsoidnu simetriju u koordinatama (T, Φ, r, θ) . Medjutim, pošto ne znamo osnov za tu pretpostvku (koji mora imati strogu matematičku potporu, te dokaz da sistem koordinata (T, Φ, r, θ) ostaje *ortogonalan bilo da postoji mešoviti član $dt d\varphi$ ili ne te da predstavlja prirodan bazis za osnu simetriju*), smatraćemo da je koeficijent uz $d\Phi^2$ nepoznat pri rešavanju Ajnštajnovih jednačina.

S druge strane, možemo pokazati da je opštu metriku (3.21) *zaista moguće* svesti na dijagonalni oblik, tj. na

$$ds^2 = G_{00}(dt - \hat{f} d\varphi)^2 + G_{11}(d\varphi - \hat{g} dt)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2$$

Naime, koristeći se Teoremom 2 iz dodatka **D2**, na osnovu sistema jednačina

²⁰ Pojašnjeno u [7].

$$G_{00} = \frac{g_{00} - g_{11}\hat{g}^2}{1 - \hat{f}^2\hat{g}^2}$$

$$G_{11} = \frac{g_{11} - g_{00}\hat{f}^2}{1 - \hat{f}^2\hat{g}^2}$$

$$\hat{f} = -\frac{g_{01} + g_{11}\hat{g}}{g_{00} + g_{01}\hat{g}}$$

vidi se da ako smatramo da su koeficijenti g_{00} , g_{11} i g_{01} rešenja Ajnštajnovih jednačina, te nam njihov izbor nije dozvoljen, ostaje nam sloboda u izboru G_{00} , G_{11} , \hat{f} i \hat{g} . Medjutim, važno je primetiti da opet imamo ograničenu slobodu u odabiru funkcija \hat{f} i \hat{g} , što se vidi iz treće jednačine gornjeg sistema: biranjem jedne od funkcija \hat{f} ili \hat{g} , druga postaje potpuno određena. Odaberemo li za proizvoljnu funkciju \hat{g} , onda nam pored treće jednačine, ostale dve tada preko \hat{g} daju nepoznate G_{00} , G_{11} i imamo konzistentan sistem jednačina.

Ako odaberemo funkciju \hat{g} , tako da nam koordinata $d\Phi$ bude ista kao ona koju smo koristili u (3.23), tj.

$$\hat{g} = \frac{a}{r^2 + a^2}$$

time praktično tražimo da barem deo metrike bude izražen u koordinatama (Φ, r, θ) , istim onim kojima smo ranije izrazili ravno prostor-vreme sa elipsoidnom simetrijom. Pri tome mi sada *ne znamo* da li se koordinata dT menja u odnosu na istu koordinatu u ravnom prostor-vremenu, a samim tim, ne možemo tvrditi da će G_{11} biti isti kao u (3.23), jer je određen preko funkcije \hat{f} . Medjutim, možemo pretpostaviti da će rešenje za kojim tragamo imati elemente i elipsoidne simetrije i vezu izmedju koeficijenata G_{00} i g_{22} istu kao kod Švarcšildove metrike, jer znamo da kada je $M = 0$, ili kada je $a = 0$, ta veza ostaje. Što se tiče koeficijenta g_{33} , pozvaćemo se na činjenicu da je uticaj rotacije na koordinatu φ ne menja merenje koordinate θ , te ćemo kao što je to Švarcšild uradio, tražiti rešenje koje održava ovaj koeficijent nepromenjenim u odnosu na ravan prostor.

Možemo rezimirati dosadašnje zahteve:

Za metriku:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{01}dtd\varphi + g_{11}d\varphi^2 + g_{22}dr^2 + g_{33}d\theta^2$$

tražimo rešenje Ajnštajnovih jednačina za vakuum preko ekvivalentne forme:

$$ds^2 = G_{00}(dt - fd\varphi)^2 + G_{11}(d\varphi - gdt)^2 + g_{22}dr^2 + g_{33}d\theta^2$$

tako da je:

$$g_{22} = -G_{00}^{-1}$$

$$g_{33} = -(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)$$

$$g = \frac{a}{r^2 + a^2}$$

tj. takvo da ono po formi liči na Schwarzschild-ovo rešenje i da poseduje elipsoidnu simetriju.

Takodje zahtevamo da se ono svede na Švarcšildovu metriku (2.1) za $a = 0$ i na metriku ravnog prostor-vremena u elipsoidnim koordinatama (3.12) za $M = 0$:

$$G_{00} \xrightarrow{M=0} \frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$$

$$G_{11} \xrightarrow{M=0} -\frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$$

$$g_{22} \xrightarrow{M=0} -\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2}$$

$$f \xrightarrow{M=0} a \sin^2 \theta$$
(3.26)

$$G_{00} \xrightarrow{a=0} \frac{r^2 - 2Mr}{r^2}$$

$$G_{11} \xrightarrow{a=0} -r^2 \sin^2 \theta$$

$$g_{22} \xrightarrow{a=0} -\frac{r^2}{r^2 - 2Mr}$$

$$f \xrightarrow{a=0} 0$$

e. primeniti metod tetrada (Kartanov metod) za pronalaženje komponenta Rimanovog tenzora

Na osnovu prethodne diskusije, metrika na koju ćemo primeniti metod ortonormiranih tetrada, opisan detaljno u dodatku **D1** je:

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt - fd\varphi)^2 - e^{2\mu}(d\varphi - gdt)^2 - e^{-2\nu}dr^2 - e^{2\lambda}d\theta^2 \quad (3.27)$$

gde su ν, μ, λ, f, g funkcije koordinata r i θ . Funkcije g i $e^{2\lambda}$ su poznate, ali ih je poželjno zameniti tek nakon dobijanja komponenta Rimanovog tenzora, radi zadržavanja preglednosti.

Držaćemo se sledećih oznaka:

$$dx^0 = dt \quad dx^1 = d\varphi \quad dx^2 = dr \quad dx^3 = d\theta$$

Ortonormalni bazis 1-formi na osnovu metrike (3.27) jeste:

$$\omega^0 = e^\nu(dx^0 - f dx^1)$$

$$\omega^1 = e^\mu(dx^1 - g dx^0)$$

$$\omega^2 = e^{-\nu} dx^2$$

$$\omega^3 = e^\lambda dx^3$$

pri čemu je $\eta_{ab} = \eta^{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ koji koristimo za podizanje i spuštanje indeksa.

Diferencijali koordinata izraženi preko 1-formi dati su sa:

$$dx^0 = X(e^{-\nu}\omega^0 + f e^{-\mu}\omega^1)$$

$$dx^1 = X(e^{-\mu}\omega^1 + f e^{-\nu}\omega^0)$$

$$dx^2 = e^\nu \omega^2$$

$$dx^3 = e^{-\lambda} \omega^3$$

gde je $X = |J|^{-1}$ recipročna vrednost Jakobijana transformacije $(t, \varphi) \rightarrow (T, \Phi)$.

Sledeći uputstva iz dodatka **D1** imamo²¹:

$$\begin{aligned} d\omega^0 &= d(e^\nu(dx^0 - f dx^1)) \\ &= -e^\nu(\nu_{,2} - f g \nu_{,2} - g f_{,2})X \omega^0 \wedge \omega^2 - e^{-\lambda}(\nu_{,3} - f g \nu_{,3} - g f_{,3})X \omega^0 \wedge \omega^3 \\ &\quad + f_{,2} e^{2\nu-\mu} X \omega^1 \wedge \omega^2 + f_{,3} e^{\nu-\lambda-\mu} X \omega^1 \wedge \omega^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= d(e^\mu(dx^1 - g dx^0)) \\ &= g_{,2} e^\mu X \omega^0 \wedge \omega^2 + g_{,3} e^{\mu-\lambda-\nu} X \omega^0 \wedge \omega^3 \\ &\quad - e^\nu(\mu_{,2} - f g \mu_{,2} - f g_{,2})X \omega^1 \wedge \omega^2 - e^{-\lambda}(\mu_{,3} - f g \mu_{,3} - f g_{,3})X \omega^1 \wedge \omega^3 \end{aligned}$$

$$d\omega^2 = d(e^{-\nu} dx^2) = \nu_{,3} e^{-\lambda} \omega^2 \wedge \omega^3$$

$$d\omega^3 = d(e^\lambda dx^3) = -\lambda_{,2} e^\nu \omega^3 \wedge \omega^2$$

Na osnovu prve Kartanove jednačine strukture (D1.3) dobijamo 1-forme povezanosti:

$$\omega^0_{\ 2} = e^\nu(\nu_{,2} - f g \nu_{,2} - g f_{,2})X \omega^0 - f_{,2} e^{2\nu-\mu} X \omega^1$$

$$\omega^0_{\ 3} = e^{-\lambda}(\nu_{,3} - f g \nu_{,3} - g f_{,3})X \omega^0 - f_{,3} e^{\nu-\lambda-\mu} X \omega^1$$

²¹ Oznake $\mu_{,i}$, $\nu_{,i}$, $g_{,i}$, $f_{,i}$ i $\lambda_{,i}$ stoje za parcijalne izvode ovih funkcija po koordinati $i = 2,3$.

$$\omega^1_2 = e^\nu(\mu_{,2} - fg\mu_{,2} - fg_{,2})X\omega^1 - g_{,2}e^\mu X\omega^0$$

$$\omega^1_3 = e^{-\lambda}(\mu_{,3} - fg\mu_{,3} - fg_{,3})X\omega^1 - g_{,3}e^{\mu-\lambda-\nu}X\omega^0$$

$$\omega^2_3 = -\nu_{,3}e^{-\lambda}\omega^2 - \lambda_{,2}e^\nu\omega^3$$

Diferencirajući gornje 1-forme dobijamo:

$$\begin{aligned} d\omega^0_2 &= d(e^\nu(\nu_{,2} - fg\nu_{,2} - gf_{,2})X\omega^0 - f_{,2}e^{2\nu-\mu}X\omega^1) \\ &= \left\{ [e^{2\nu}(f\nu_{,2} + f_{,2})]_{,2}g - (e^{2\nu}\nu_{,2})_{,2} \right\} X\omega^0 \wedge \omega^2 \\ &\quad + \left\{ e^{-(\lambda+\nu)}[e^{2\nu}(f\nu_{,2} + f_{,2})]_{,3}g - e^{-(\lambda+\nu)}(e^{2\nu}\nu_{,2})_{,3} \right\} X\omega^0 \wedge \omega^3 \\ &\quad + \left\{ e^{\nu-\mu}[e^{2\nu}(f\nu_{,2} + f_{,2})]_{,2} - e^{\nu-\mu}(e^{2\nu}\nu_{,2})_{,2}f \right\} X\omega^1 \wedge \omega^2 \\ &\quad + \left\{ e^{-(\lambda+\mu)}[e^{2\nu}(f\nu_{,2} + f_{,2})]_{,3} - e^{-(\lambda+\mu)}(e^{2\nu}\nu_{,2})_{,3}f \right\} X\omega^1 \wedge \omega^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega^0_3 &= d(e^{-\lambda}(\nu_{,3} - fg\nu_{,3} - gf_{,3})X\omega^0 - f_{,3}e^{\nu-\lambda-\mu}X\omega^1) \\ &= \left\{ [e^{\nu-\lambda}(f\nu_{,3} + f_{,3})]_{,2}g - (e^{\nu-\lambda}\nu_{,3})_{,2} \right\} X\omega^0 \wedge \omega^2 \\ &\quad + \left\{ e^{-(\lambda+\nu)}[e^{\nu-\lambda}(f\nu_{,3} + f_{,3})]_{,3}g - e^{-(\lambda+\nu)}(e^{\nu-\lambda}\nu_{,3})_{,3} \right\} X\omega^0 \wedge \omega^3 \\ &\quad + \left\{ e^{\nu-\mu}[e^{\nu-\lambda}(f\nu_{,3} + f_{,3})]_{,2} - e^{\nu-\mu}(e^{\nu-\lambda}\nu_{,3})_{,2}f \right\} X\omega^1 \wedge \omega^2 \\ &\quad + \left\{ e^{-(\lambda+\mu)}[e^{\nu-\lambda}(f\nu_{,3} + f_{,3})]_{,3} - e^{-(\lambda+\mu)}(e^{\nu-\lambda}\nu_{,3})_{,3}f \right\} X\omega^1 \wedge \omega^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega^1_2 &= d(e^\nu(\mu_{,2} - fg\mu_{,2} - fg_{,2})X\omega^1 - g_{,2}e^\mu X\omega^0) \\ &= \left\{ [e^{\nu+\mu}(g\mu_{,2} + g_{,2})]_{,2} - (e^{\nu+\mu}\mu_{,2})_{,2}g \right\} X\omega^0 \wedge \omega^2 \\ &\quad + \left\{ e^{-(\lambda+\nu)}[e^{\nu+\mu}(g\mu_{,2} + g_{,2})]_{,3} - e^{-(\lambda+\nu)}(e^{\nu+\mu}\mu_{,2})_{,3}g \right\} X\omega^0 \wedge \omega^3 \\ &\quad + \left\{ e^{\nu-\mu}[e^{\nu+\mu}(g\mu_{,2} + g_{,2})]_{,2}f - e^{\nu-\mu}(e^{\nu+\mu}\mu_{,2})_{,2} \right\} X\omega^1 \wedge \omega^2 \\ &\quad + \left\{ e^{-(\lambda+\mu)}[e^{\nu+\mu}(g\mu_{,2} + g_{,2})]_{,3}f - e^{-(\lambda+\mu)}(e^{\nu+\mu}\mu_{,2})_{,3} \right\} X\omega^1 \wedge \omega^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega^1_3 &= d(e^{-\lambda}(\mu_{,3} - fg\mu_{,3} - fg_{,3})X\omega^1 - g_{,3}e^{\mu-\lambda-\nu}X\omega^0) \\ &= \left\{ [e^{\mu-\lambda}(g\mu_{,3} + g_{,3})]_{,2} - (e^{\mu-\lambda}\mu_{,3})_{,2}g \right\} X\omega^0 \wedge \omega^2 \\ &\quad + \left\{ e^{-(\lambda+\nu)}[e^{\mu-\lambda}(g\mu_{,3} + g_{,3})]_{,3} - e^{-(\lambda+\nu)}(e^{\mu-\lambda}\mu_{,3})_{,3}g \right\} X\omega^0 \wedge \omega^3 \\ &\quad + \left\{ e^{\nu-\mu}[e^{\mu-\lambda}(g\mu_{,3} + g_{,3})]_{,2}f - e^{\nu-\mu}(e^{\mu-\lambda}\mu_{,3})_{,2} \right\} X\omega^1 \wedge \omega^2 \\ &\quad + \left\{ e^{-(\lambda+\mu)}[e^{\mu-\lambda}(g\mu_{,3} + g_{,3})]_{,3}f - e^{-(\lambda+\mu)}(e^{\mu-\lambda}\mu_{,3})_{,3} \right\} X\omega^1 \wedge \omega^3 \end{aligned}$$

$$d\omega^2_3 = -d(\nu_{,3}e^{-\lambda}\omega^2 + \lambda_{,2}e^\nu\omega^3) = \left\{ (e^{\nu+\lambda}\lambda_{,2})_{,2} - (e^{-(\nu+\lambda)}\nu_{,3})_{,3} \right\} \omega^3 \wedge \omega^2$$

Na osnovu gornjih veličina i računa šest 2-formi krivina, računajući druge Kartanove jednačine strukture (D1.4) i (D1.5) dobijamo sledeće komponente Rimanovog tenzora u ortonormiranom bazu:

$$\Omega^0_1 = \omega^0_2 \wedge \omega^2_1 + \omega^0_3 \wedge \omega^3_1:$$

$$R^0_{101} = e^{2\nu} [X(gf_{,2}\mu_{,2} + fg_{,2}\nu_{,2} - g_{,2}f_{,2}) - \mu_{,2}\nu_{,2}] \\ + e^{-2\lambda} [X(gf_{,3}\mu_{,3} + fg_{,3}\nu_{,3} - g_{,3}f_{,3}) - \mu_{,3}\nu_{,3}]$$

$$\Omega^0_2 = d\omega^0_2 + \omega^0_3 \wedge \omega^3_2:$$

$$R^0_{202} = \left\{ [e^{2\nu}(f\nu_{,2} + f_{,2})]_{,2} g - (e^{2\nu}\nu_{,2})_{,2} + \nu_{,3} e^{-2\lambda} (\nu_{,3} - fg\nu_{,3} - gf_{,3}) \right\} X$$

$$R^0_{212} = e^{\nu-\mu} \left\{ [e^{2\nu}(f\nu_{,2} + f_{,2})]_{,2} - (e^{2\nu}\nu_{,2})_{,2} f - f_{,3}\nu_{,3} e^{-2\lambda} \right\} X$$

$$R^0_{203} = e^{-(\lambda+\nu)} \left\{ [e^{2\nu}(f\nu_{,2} + f_{,2})]_{,3} g - (e^{2\nu}\nu_{,2})_{,3} + \lambda_{,2} e^{2\nu} (\nu_{,3} - fg\nu_{,3} - gf_{,3}) \right\} X$$

$$R^0_{213} = e^{-(\lambda+\mu)} \left\{ [e^{2\nu}(f\nu_{,2} + f_{,2})]_{,3} - (e^{2\nu}\nu_{,2})_{,3} f - f_{,3}\lambda_{,2} e^{2\nu} \right\} X$$

$$\Omega^0_3 = d\omega^0_3 + \omega^0_2 \wedge \omega^2_3:$$

$$R^0_{302} = \left\{ [e^{\nu-\lambda}(f\nu_{,3} + f_{,3})]_{,2} g - (e^{\nu-\lambda}\nu_{,3})_{,2} - \nu_{,3} e^{\nu-\lambda} (\nu_{,2} - fg\nu_{,2} - gf_{,2}) \right\} X$$

$$R^0_{312} = e^{\nu-\mu} \left\{ [e^{\nu-\lambda}(f\nu_{,3} + f_{,3})]_{,2} - (e^{\nu-\lambda}\nu_{,3})_{,2} f + f_{,2}\nu_{,3} e^{\nu-\lambda} \right\} X$$

$$R^0_{303} = e^{-(\lambda+\nu)} \left\{ [e^{\nu-\lambda}(f\nu_{,3} + f_{,3})]_{,3} g - (e^{\nu-\lambda}\nu_{,3})_{,3} - \lambda_{,2} e^{2\nu} (\nu_{,2} - fg\nu_{,2} - gf_{,2}) \right\} X$$

$$R^0_{313} = e^{-(\lambda+\mu)} \left\{ [e^{\nu-\lambda}(f\nu_{,3} + f_{,3})]_{,3} - (e^{\nu-\lambda}\nu_{,3})_{,3} f + f_{,2}\lambda_{,2} e^{2\nu} \right\} X$$

$$\Omega^1_2 = d\omega^1_2 + \omega^1_3 \wedge \omega^3_2:$$

$$R^1_{202} = \left\{ [e^{\nu+\mu}(g\mu_{,2} + g_{,2})]_{,2} - (e^{\nu+\mu}\mu_{,2})_{,2} g - g_{,3}\nu_{,3} e^{\mu-\lambda-\nu} \right\} X$$

$$R^1_{212} = e^{\nu-\mu} \left\{ [e^{\nu+\mu}(g\mu_{,2} + g_{,2})]_{,2} f - (e^{\nu+\mu}\mu_{,2})_{,2} + \nu_{,3} e^{\mu-\nu-2\lambda} (\mu_{,3} - fg\mu_{,3} - fg_{,3}) \right\} X$$

$$R^1_{203} = e^{-(\lambda+\nu)} \left\{ [e^{\nu+\mu}(g\mu_{,2} + g_{,2})]_{,3} - (e^{\nu+\mu}\mu_{,2})_{,3} g - g_{,3}\lambda_{,2} e^{\nu+\mu} \right\} X$$

$$R^1_{213} = e^{-(\mu+\nu)} \left\{ [e^{\nu+\mu}(g\mu_{,2} + g_{,2})]_{,3} f - (e^{\nu+\mu}\mu_{,2})_{,3} + \lambda_{,2} e^{2\nu} (\mu_{,3} - fg\mu_{,3} - fg_{,3}) \right\} X$$

$$\Omega^1_3 = d\omega^1_3 + \omega^1_2 \wedge \omega^2_3:$$

$$R^1_{302} = \left\{ [e^{\mu-\lambda}(g\mu_{,3} + g_{,3})]_{,2} - (e^{\mu-\lambda}\mu_{,3})_{,2}g + g_{,2}v_{,3}e^{\mu-\lambda} \right\} X$$

$$R^1_{312} = e^{\nu-\mu} \left\{ [e^{\mu-\lambda}(g\mu_{,3} + g_{,3})]_{,2}f - (e^{\mu-\lambda}\mu_{,3})_{,2} - v_{,3}e^{\mu-\lambda}(\mu_{,2} - fg\mu_{,2} - fg_{,2}) \right\} X$$

$$R^1_{303} = e^{-(\lambda+\nu)} \left\{ [e^{\mu-\lambda}(g\mu_{,3} + g_{,3})]_{,3} - (e^{\mu-\lambda}\mu_{,3})_{,3}g + g_{,2}\lambda_{,2}e^{\mu+\lambda} \right\} X$$

$$R^1_{313} = e^{-(\lambda+\mu)} \left\{ [e^{\mu-\lambda}(g\mu_{,3} + g_{,3})]_{,3}f - (e^{\mu-\lambda}\mu_{,3})_{,3} - \lambda_{,2}e^{2\nu+\lambda+\mu}(\mu_{,2} - fg\mu_{,2} - fg_{,2}) \right\} X$$

$$\Omega^2_3 = d\omega^2_3 + \omega^2_0 \wedge \omega^0_3 + \omega^2_1 \wedge \omega^1_3:$$

$$R^2_{323} = -e^{\nu-\lambda} \left\{ [e^\nu(e^\lambda)_{,2}]_{,2} + [e^{-\lambda}(e^\nu)_{,3}]_{,3} \right\}$$

$$R^2_{301} = e^{\mu-\lambda} \left\{ (g_{,2}\mu_{,3} - g_{,2}\mu_{,3}) + e^{2\nu}(f_{,3}v_{,2} - f_{,2}v_{,3}) \right\} X$$

Primetimo da ima 19 komponenti različitih od nule, pri čemu na osnovu osobina simetrija (D1.6) postoje izvesne veze medju njima koje mogu biti od koristi. Na primer:

Jakobijev identitet (1.8) nam daje vezu:

$$R^0_{123} + R^0_{231} + R^0_{312} = 0$$

Komponentu R^0_{312} imamo, a ostale možemo izvesti na osnovu R^0_{213} i R^2_{301} i (D1.6):

$$R^0_{213} = \eta^{00}R_{02\underline{13}} = -\eta^{00}R_{02\underline{31}} = -R^0_{231}$$

$$R^2_{301} = \eta^{22}R_{\underline{23}0\underline{1}} = \eta^{22}R_{\underline{01}2\underline{3}} = \eta^{22}\eta_{00}R^0_{123} = -R^0_{123}$$

Stoga bez rešavanja Ajnštajnovih jednačina već imamo jednu jednačinu:

$$-R^2_{301} - R^0_{213} + R^0_{312} = 0$$

Slično možemo uspostaviti vezu izmedju R^0_{212} i R^1_{202} :

$$R^0_{212} = \eta^{00}R_{\underline{02}1\underline{2}} = \eta^{00}R_{\underline{12}0\underline{2}} = \eta^{00}\eta_{11}R^1_{202} = -R^1_{202}$$

i izmedju R^1_{213} i R^1_{312} :

$$R^1_{213} = \eta^{11} R_{\underline{12}\overline{13}} = \eta^{11} R_{\overline{13}\underline{12}} = \eta^{11} \eta_{11} R^1_{312} = R^1_{312}$$

Ove veze, kao i Jakobijev identitet nam ne moraju obavezno služiti. Izrazi su isuviše komplikovani da bi se bez iscrpne i detaljne analize jednačina mogla ustanoviti neka uprošćenja. Ostale relacije dobijamo izračunavajući Ričijev tenzor i rešavajući Ajnštajnovne jednačine za vakuum (1.13).

f. rešiti Ajnštajnovne jednačine za vakuum

Deo traganja za rešenjem Ajnštajnovih jednačina ovim putem koji se odnosi na rešavanje jednačina (1.13) je što se tiče računa najteži. U suštini, rešavanje ovih jednačina se svodi na rešavanje nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda po dve promenljive.

Medjutim, u odnosu na rešavanje po Čandrasekaru, problem je ovde u neku ruku uprošćen. To je zbog toga što smo drugačijim rezonom došli do zaključka da bi rešenje za kojim tragamo trebalo da očuvava elipsoidnu simetriju, te nam je, u skladu sa kalibracionom slobodom, jedna funkcija u celini poznata, a to je $g_{33} = e^{2\lambda} = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. Takodje, nametnuli smo takvu metričku formu da nam u računu može pomoći i poznavanje funkcije $g = a/(r^2 + a^2)$, koja, vidimo, ne zavisi od koordinate $\theta = x^3$, stoga su svi izvodi funkcije g po ovoj koordinati jednaki nuli, što u neku ruku dosta uprošćava jednačine. Birajući takvu funkciju g da nam se za $M = 0$ metrika svede na metriku ravnog prostor-vremena u elipsoidnim koordinatama u formi (3.23) i uočavajući *istvu vezu* izmedju odgovarajućih koeficijenata u toj metrici kao u Švarcšildovoj metrici (Tabela 1), eliminisali smo jednu funkciju već na početku, zbog čega su jednačine od početka uprošćene.

Dalje, mogu se iskoristiti i zahtevi (3.26) da bi se pretpostavio oblik funkcija za kojima tragamo, zbog čega smo i postavili takve zahteve. Na primer, bez ikakvih ograničenja, funkciju $G_{00} = e^{2\nu}$ možemo napisati kao količnik dve funkcije, jer su odgovarajuće funkcije takvog oblika i u Švarcšildovoj i u metrici ravnog prostor-vremena u elipsoidnim koordinatama (Tabela 1 na strani 26), na koje zahtevamo da se naše rešenje svede pri $a = 0$ i $M = 0$, redom.

Na osnovu (1.13), konačno imamo sledeće jednačine:

$$R_{00} = R^1_{010} + R^2_{020} + R^3_{030} = -(R^0_{101} + R^0_{202} + R^0_{303}) = 0$$

$$R_{11} = R^0_{101} + R^2_{121} + R^3_{131} = 0$$

$$R_{22} = R^0_{202} + R^1_{212} + R^3_{232} = R^0_{202} + R^1_{212} + R^2_{323} = 0$$

$$R_{33} = R^0_{303} + R^1_{313} + R^2_{323} = 0$$

$$R_{01} = R^0_{212} + R^0_{313} = 0$$

$$R_{23} = R^0_{203} + R^1_{213} = 0$$

Nakon identifikacija:

$$e^{2\nu} = G_{00}$$

$$e^{2\mu} = G_{11}$$

$$e^{2\lambda} = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

$$g = \frac{a}{r^2 + a^2}$$

prethodnih šest jednačina bi trebalo da bude dovoljno za rešavanje metrike prostor-vremena rotirajućeg objekta, tj. Kerove metrike. Bez obzira na to, na ovom mestu stajemo sa rešavanjem. Sprovedeno do kraja, rešenje bi trebalo da bude metrička forma (3.15).

4. Priroda Kerovog rešenja

Kerova metrika predviđa objekte koji su jedinstveni po tome što su u Prirodi jedini koji su zaista lepi isto onoliko koliko i samo rešenje koje ih predviđa.

U ovom poglavlju ćemo se suočiti sa *smislom* Kerovog rešenja i dati odgovore na pitanja poput: Šta opisuje Kerovo rešenje (kakav rotirajući objekat)? Koje su karakteristike Kerovog prostor-vremena? Kakve su putanje tela u Kerovom prostor-vremenu? Odgovori na ova pitanja kriju se u samim komponentama metričkog tenzora.

4.1. Horizonti događaja i singularitet: rotirajuća Crna rupa

Isto kao što u Švarcšildovom rešenju postoji vrednost koordinate r koja proizvodi koordinatni singularitet, i kod Kerovog rešenja se nešto slično pojavljuje. Naime, koeficijent $g_{22} = g_{rr}$ u formi (3.5) ima beskonačnu vrednost kada je

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = 0$$

Ovo je kvadratna jednačina i njena rešenja su:

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2} \quad (4.1a)$$

$$r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2} \quad (4.1b)$$

Ovi singulariteti su prividni i mogu se otkloniti pogodnom transformacijom koordinata. Analogno Švarcšildovom rešenju, vidimo da i ovde postoji horizont događaja, samo što ih ovde ima *dva*. Za $a = 0$ vidimo da se oni poklapaju i svode na Švarcšildov radijus, što se i očekuje.

Medjutim, za razliku od Švarcšildovog rešenja, ovde je g_{00} različit od nule na bilo kom od dva horizonta (4.1a) i (4.1b). Ipak, postoji rastojanje na kome je $g_{00} = 0$. Ono definiše *statičke granične površi* i dato je kao rešenje pomenute jednačine:

$$r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta = 0$$

odakle se kao rešenja dobijaju poluprečnici pomenutih površi:

$$r_+^s = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (4.2a)$$

$$r_-^s = M - \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (4.2b)$$

Sva ova rastojanja zavise od ugaonog momenta po jedinici mase a , koje se nalazi pod korenom. Da bi vrednost ovih rastojanja bila realna, podkorena veličina mora biti nenegativna, što znači da mora važiti da je $a < M$, odakle sledi da je $a = M$ maksimalno moguća vrednost

ugaonog momenta. Ovaj slučaj se naziva ekstremno Kerovo rešenje i biće korišćen često u daljem izlaganju.

Prodiskutujemo sada značenje rastojanja (4.1a), (4.1a), (4.2a) i (4.2b).

Rastojanje (4.2a) naziva se *statički limit* i on predstavlja granicu oblasti koja se naziva *ergosfera* i unutar koje sva tela nužno rotiraju oko objekta mase M , čak i kada im je ugaona brzina u sopstvenom referentnom sistemu jednaka nuli. Ovo znači da *sam prostor* oko ovog objekta rotira, kao da ga on povlači za sobom svojom rotacijom, o čemu će detaljnije biti reči u narednom odeljku.

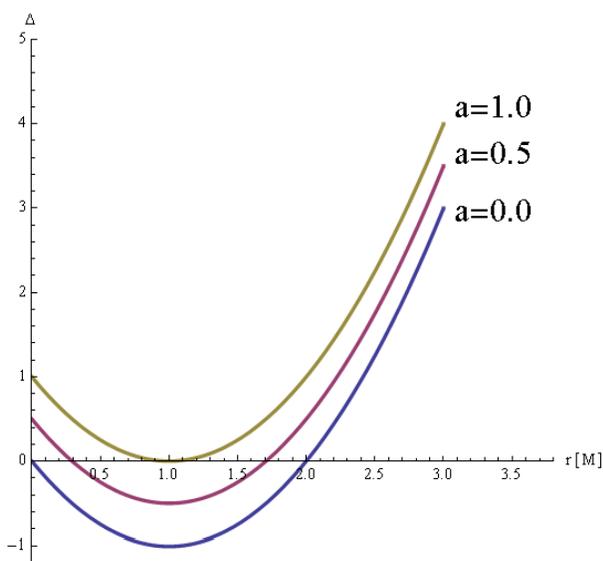
Sledeće rastojanje jeste ono koje odgovara r_+ , tj. *spoljašnji horizont događaja* dat sa (4.1a). Na Slici 2 je dat grafik zavisnosti funkcije $\Delta(r)$, odakle se vidi da je ona negativna izmedju dva horizonta r_+ i r_- , a izvan ovog intervala pozitivna.

Sad, ako neko telo slobodno pada u gravitacionom polju radialno i prelazi horizont događaja r_+ u oblast gde je $\Delta(r)$ negativno, na osnovu metrike (3.5) se vidi da je koeficijent $g_{00} < 0$, a $g_{22} > 0$. Ovo znači da rastojanje izmedju dve tačke postaje vremenskog tipa, a vremenski interval postaje prostornog tipa. Drugim rečima, kao što je to bio slučaj sa Švarcšildovom metrikom, tela koja jednom predju horizont događaja r_+ , *ne mogu se vratiti izvan njega, čak ni svetlost*, jer unutar spoljašnjeg horizonta događaja

svaka putanja u prostor-vremenu je takva da se rastojanje r *uvek smanjuje* i nijedna vremenska putanja ne vodi izvan horizonta događaja. Ovo se može protumačiti kao da su prostor i vreme podelili svoje osobine medjusobno – kao što vreme teče samo od prošlosti ka budućnosti, tako je sada kretanje u prostoru moguće samo u jednom smeru – od veće ka manjoj vrednosti r .

Stoga objekat koji opisuje Kerova metrika predstavlja isti objekat koji opisuje Švarcšildova metrika, ali koji rotira – Kerova metrika opisuje prostor-vreme *rotirajuće Crne rupe*.

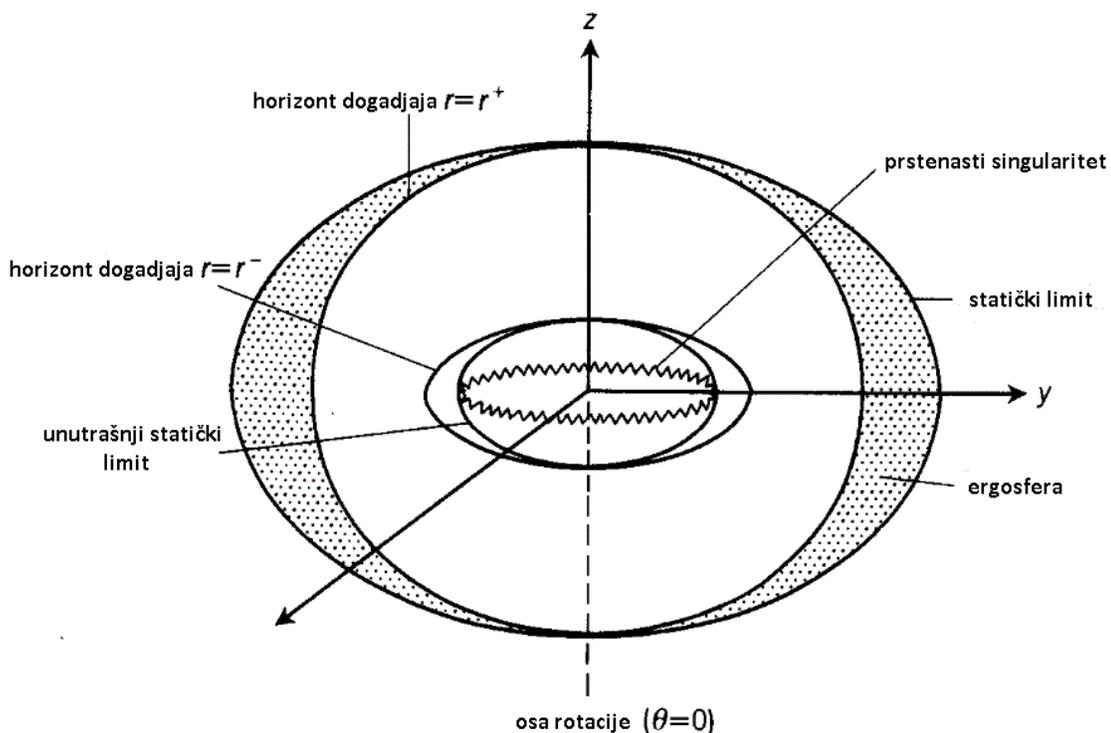
Sledeće karakteristično rastojanje na koje nailazi telo koje upada u rotirajuću Crnu rupu jeste *unutrašnji horizont događaja* (4.1b). Ovaj horizont događaja je neizbežan za ona tela koja jednom predju spoljašnji horizont događaja iz razloga koje smo gore naveli. Medjutim, prelaskom unutrašnjeg horizonta događaja (zanemarićemo činjenicu da je prostor-vreme toliko zakrivljeno i plimske sile toliko jake da bi se i atomi raspali), funkcija $\Delta(r)$ postaje opet pozitivna, kao što se sa Slike 2 može videti. Ovo znači da je vremenski interval opet vremenskog tipa, a prostorni interval (rastojanje) prostornog tipa, kao i izvan Crne rupe. Drugim rečima, u



Slika 2: Zavisnost funkcije $\Delta(r)$ od rastojanja za Schwarzschild-ov ($a = 0$), jedan Kerr-ov slučaj ($a = 0.5$) i ekstremni Kerr-ov slučaj ($a = 1$). (Dimenzija rastojanja je data u terminima mase objekta: $1 M \approx 1.5$ km za Sunce, za objekat mase $M = nM_\odot$, rastojanje je $n \cdot 1.5$ km; brzina je data po brzini svetlosti c)

oblasti unutar unutrašnjeg horizonta događaja r_- moguće je proizvoljno kretanje i odupiranje gravitacionoj sili koja deluje iz $r = 0$.

Na Slici 3 je predstavljen prostor sa označenim rastojanjima koje smo do sada opisali.



Slika 3: Kerovo prostor-vreme unutar $r = 2M$. Sve karakteristične površine su elipsoidi, a prstenasti singularitet predstavlja degenerisanu elipsu.

Na rastojanju r_-^s , telo nailazi na površinu koja ima sličnu prirodu kao i statički limit, stoga ćemo je nazvati *unutrašnji statički limit*. Na ovoj površini, svetlost, pa time i sva tela, se nužno kreće u smeru rotacije Crne rupe, bez obzira na to u kom smeru je krenula.

Poslednje značajno rastojanje je ono koje daje *pravi singularitet* (i jedini) u Kerovoj metrici, tj. onaj koji se ne može otkloniti transformacijama koordinata. Ono se može videti na osnovu skalarne invarijante²²:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48M^2}{\rho^{12}}(r^6 - a^6 \cos^6 \theta) - \frac{720M^2 r^2 a^2 \cos^2 \theta}{\rho^{12}}(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)$$

Pravi singularitet nalazi se na rastojanju za koje je $\rho^2 = 0$, što znači da je $g_{00} = \infty$, dakle imamo:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$$

²² Primitimo da se ona svodi na odgovarajuću invarijantu za Švarcšildovu metriku kada je $a = 0$, datu jednačinom (2.8).

Ova jednačina na prvi pogled nema realnih rešenja za r , medjutim, ovde imamo dve promenljive, r i θ , i jednačina je zadovoljena kada je istovremeno $r = 0$ i $\theta = \pi/2$. Ovo nije koordinatni početak, već *žiža elipsa* koje su normalne na xy ravan i čijom se rotacijom oko z -ose dobija rotacioni elipsoid. Zapravo, u Dekartovim koordinatama za koje smo u odeljku 3.3 pokazali da opisuju rotacioni elipsoid (3.14), $r = 0$ daje kružnicu poluprečnika a :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Ova kružnica poluprečnika a predstavlja *kružni singularitet*, ili *prstenasti singularitet*. Stoga, ispada da je rotacija (možemo uslovno reći centrifuga koja od nje potiče) tačkasti singularitet u Švarcšildovoj Crnoj rupi “razvukla“ u prstenasti singularitet.

Osim toga, ono što je novo u odnosu na Švarcšildovu Crnu rupu jeste to što se (prstenasti) singularitet nalazi u oblasti $r < r_-$ u kojoj su, kako smo rekli, putanje vremenskog tipa. U ovoj oblasti je moguće kretati se takvom putanjom koja će *izbeći prstenasti singularitet*. Singularitet postoji samo u ravi $\theta = \pi/2$ (ekvatorijalnoj ravni) i unutar prstena je prostor konačne zakrivljenost, kao u ostatku oblasti unutar $r < r_-$, tako da je moguće da telo upadne u Crnu rupu recimo duž z -ose, prodje unutrašnji horizont dogajdjaja i prodje kroz centar kružnice, tj. kroz koordinatni početak, i završi sa druge strane ekvatorijalne ravni. Ovakve putanje su sasvim moguće i postoji nešto veoma zanimljivo povodom toga.

Naime, u oblasti $r < r_-$ prelazeći sa druge strane ekvatorijalne ravni, koordinata r postaje negativna, što za posledicu ima promenu nekih metričkih koeficijenata u metrici (3.5), pa metrika tada izgleda ovako:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi - \left(r^2 + a^2 - \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (4.3)$$

Primitimo da je znak promenjen ispred svakog člana koji sadrži masu M . Stoga se ova oblast može protumačiti kao oblast u kojoj je gravitaciona sila *odbojna*, te će sva tela koja dodju u ovu oblast i ako, idući putanjama vremenskog tipa, predju r_- nužno izleteti iz nje u pravcu rastuće koordinate r , prolazeći r_+ i statički limit na kraju, izlazeći iz onoga što se u ovom slučaju naziva *Bela rupa*, iz koje sve izlazi a ništa ne može da udje, dakle suprotno od Crne rupe. Štaviše, oblast u koju bi telo izašlo nakon izbacivanja iz Bele rupe bila bi neka udaljena oblast istog Univerzuma iz koga je telo upalo u Crnu rupu, ali udaljena i u *vremenu*, tj. budućnost ili čak i prošlost. Na osnovu ovoga, tunel kroz koji bi telo prolazilo bi predstavljao *crvotočinu* koja na jednom kraju ima Crnu rupu, a na drugom Belu rupu i koja zapravo omogućava putovanje kroz prostor-vreme.

Malo je verovatno da je to zaista slučaj, jer su detaljnija izučavanja metrike koja opisuje unutrašnjost Crne rupe pokazala da je prostor-vreme izuzetno nestabilno unutar prstenastog singulariteta i da najmanja promena u masi Crne rupe izaziva kolaps crvotočine. Dalje, Takodje, do sada nije uočen nijedan objekat koji bi mogao predstavljati Belu rupu, kojih bi, ukoliko

postoje, trebalo da bude isto koliko i Crnih rupa. S druge strane, Kerova metrika uopšte ne daje informacije o globalnom prostor-vremenu izvan Crne ili Bele rupe, te ne možemo tvrditi o kom delu Univerzuma ili o kom Univerzumu se radi.

Na kraju spomenimo da mi zapravo *ne znamo* šta se nalazi unutar horizonta događaja – da li je ono što nazivamo masom/energijom unutar horizonta događaja u formi elementarnih čestica? Kolika je energija po čestici unutar Crne rupe i kakve su implikacije tih vrednosti? Vratićemo se na ova i slična pitanja u poglavlju 8.

4.2. Lens-Tiringov efekat – efekat povlačenja metrike

Da bismo potpunije razumeli prostor-vreme u ergosferi i izvan statičkog limita (4.2a), upoređićemo početne brzine svetlosti puštene u tangencijalnom pravcu (normalnom na rastojanje r) od strane nekog izvora koji se nalazi u ekvatorijalnoj ravni ($\theta = \pi/2$) na različitim rastojanjima od ekstremne Kerove Crne rupe ($a = M$). Za poredjenje ćemo uzeti Švarcšildovu Crnu rupu.

U slučaju Švarcšildove Crne rupe, na osnovu metrike (2.1), uzimajući interval svetlosnog tipa $ds^2 = 0$, i stavljajući da je $dr = d\theta = 0$ i $\theta = \pi/2$, pa deleći potom celu jednačinu sa dt^2 , dobijamo:

$$0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

i dalje

$$r \frac{d\varphi}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

što je traženi izraz za tangencijalnu brzinu kakvu meri udaljeni posmatrač. Primetimo da znak plus/minus odgovara brzinama u jednom ili drugom smeru duž pravca tangente; te dve brzine su u slučaju Švarcšildove metrike identične.

Ovo rešenje nam govori da će posmatraču u asimptotski ravnom prostoru (daleko od Crne rupe) izgledati da je brzina svetlosti *u tangencijalnom pravcu* manja što je manje rastojanje, tj. da prisustvo mase M utiče i na tangencijalnu brzinu, bez obzira na to što je ona normalna na radijalni pravac. Kada $r \rightarrow \infty$, dakle za asimptotski ravan prostor, za brzinu svetlosti se dobija ± 1 ($\pm c$).

Sada izvršimo isti postupak sa ekstremnom Kerovom metrikom. Stavljajući u metrici (3.5) $ds^2 = 0$ za interval svetlosnog tipa, i stavljajući da je $dr = d\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ i $a = M$, te deleći potom celu jednačinu sa dt^2 , za tangencijalnu početnu brzinu svetlosti dobijamo

$$0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{4M^2}{r} \frac{d\varphi}{dt} - R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

gde je $R^2 = r^2 + M^2 + 2M^3/r$. Dalje je

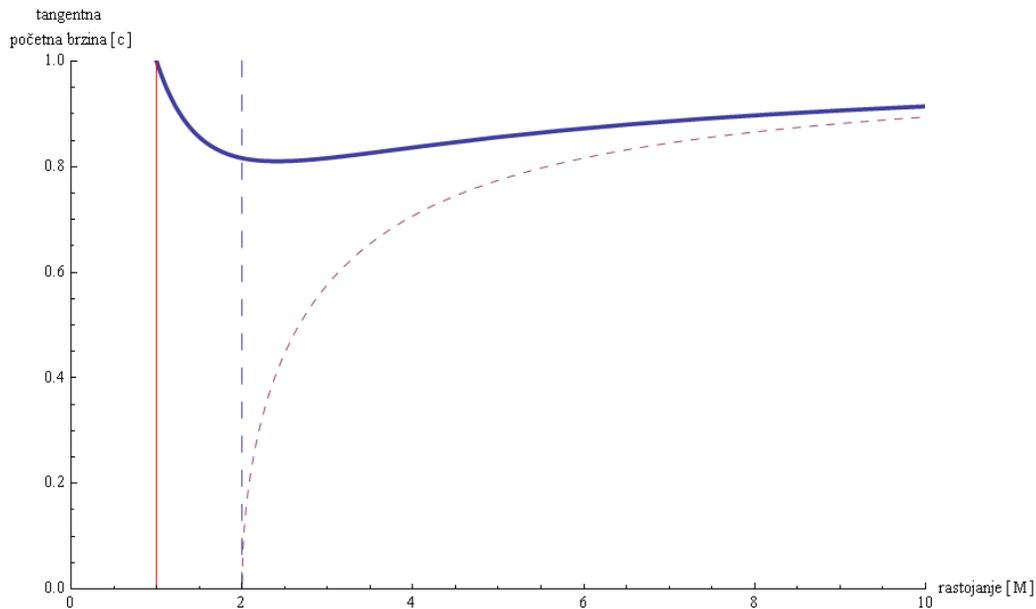
$$R \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2M^2}{rR} \pm \frac{2M^2}{rR} \left(1 + \frac{r^2 R^2}{4M^4} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.5)$$

Primitimo da sa leve strane umesto koordinate r stoji R , jer to je ono “pravo” rastojanje koje u sebi ima uključene i efekte rotacije. To je ono rastojanje koje bi se dobilo mereći obim oko Crne rupe i deleći ga sa 2π . Ovaj izraz važi samo u početnom trenutku, jer foton potom dobija i radijalnu komponentu. Znak plus u gornjem rešenju daje početnu brzinu fotona ispaljenog u smeru rotacije Crne rupe, dok znak minus odgovara početnoj brzini suprotnoj od smera rotacije. Primitimo jedno specifično rastojanje $r = 2M$, na kojem su dva rešenja (4.5)

$$(-): R \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (+): R \frac{d\varphi}{dt} = \frac{4M^2}{rR}$$

Ovo rastojanje je upravo ono koje odgovara površini koja se naziva *statički limit*, a koju smo pominjali u prethodnom odeljku. Ona nosi taj naziv upravo zbog toga što foton na tom rastojanju ispaljen u tangencijalnom pravcu u suprotnom smeru od smera rotacije (rešenje sa znakom minus) *ima brzinu jednaku nuli* – on bukvalno *stoji* za udaljenog posmatrača. Sada ćemo to prikazati i grafički.

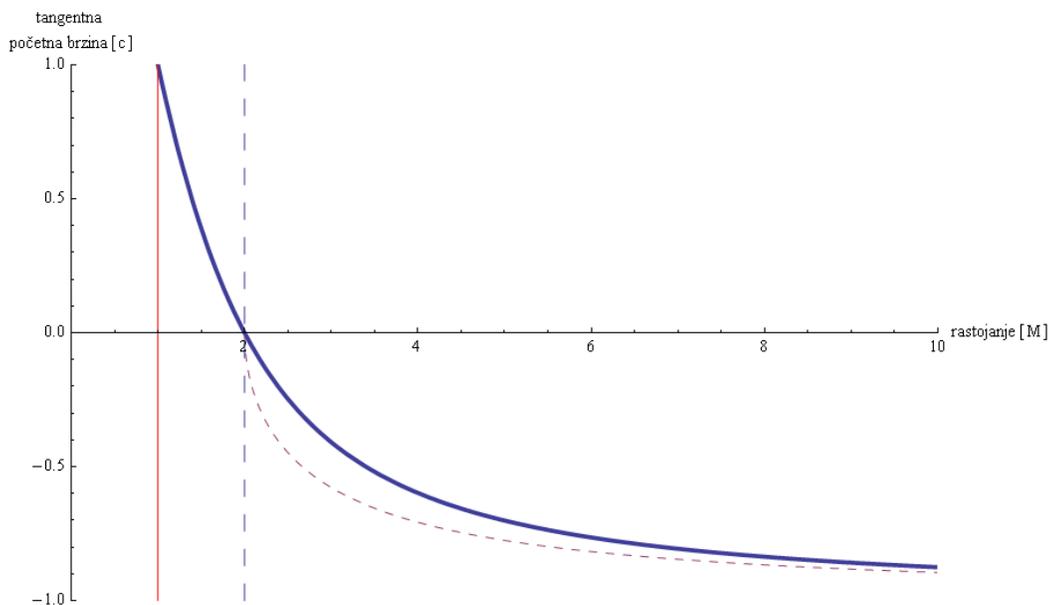
Ako nacrtamo grafik zavisnosti leve strane (4.5) od r za oba znaka dobijamo Slike 4 i 5. Na Slici 4 je prikazana početna brzina svetlosti poštene u smeru rotacije.



Slika 4: Zavisnost tangente početne brzine fotona od rastojanja od centra rotirajuće Crne rupe na osnovu Kerove metrike (puna kriva linija) i nerotirajuće Crne rupe na osnovu Švarcšildove metrike (isprekidana kriva linija), za fotone koji su pušteni u istom smeru u odnosu na smer rotacije – znak plus u (4.5). Puna vertikalna linija na $r = M$ označava horizont događaja ekstremne Kerove Crne rupe, dok isprekidana vertikalna linija na $r = 2M$ stoji za statički limit i Švarcšildov radijus.

Vidimo da je ona sve manja, kako je tačka ispaljivanja fotona na sve manjem rastojanju r . Medjutim, vidimo da je ona ipak veća na celom grafiku od istog slučaja u Švarcšildovoj metrici (kriva isprekidana linija). To je upravo zbog rotacije samog prostora oko Kerove Crne rupe – na posmatranu brzinu fotona kao da se dodaje brzina rotacije prostor-vremena. Na statičkom limitu $r = 2M$ se ništa značajno ne dešava, vrednost početne brzine je oko $0.8c$. Takodje vidimo da (4.5) ima smisla samo za rastojanja veća od $1M$, dakle izvan horizonta događaja ekstremne rotirajuće Crne rupe²³ (puna vertikalna linija).

Na Slici 5 je prikazano rešenje (4.5) sa znakom minus, opet u poredjenju sa istim rešenjem za $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, tj. Švarcšildovu Crnu rupu (4.4) prikazanim isprekidanom linijom (koja ima isti oblik kao na prethodnoj slici, ali se nalazi na negativnoj strani r -ose jer je smer suprotan). Za razliku od prethodnog slučaja, ovde vidimo da ako je foton ispaljen na rastojanju $r = 2M$ u suprotnom smeru od smera rotacije Crne rupe, njegova početna brzina će biti jednaka nuli!



Slika 5: Zavisnost tangente početne brzine fotona od rastojanja od centra rotirajuće Crne rupe na osnovu Kerove metrike (puna kriva linija) i nerotirajuće Crne rupe na osnovu Švarcšildove metrike (isprekidana kriva linija), za fotone koji su pušteni u suprotnom smeru od rotacije - znak minus u (4.5).

Upravo zbog ove činjenice se $r = 2M$ naziva statički limit. Kako se ništa ne može kretati brže od svetlosti, svako telo, pa i foton, osudjeni su na *obavezno kretanje u smeru rotacije Crne rupe*, ako se nadju unutar statičkog limita, bez obzira u kom smeru im je početna brzina. Statički limit je stoga najbliže rastojanje do Crne rupe izvan koga je moguće kretati se u suprotnom smeru od smera rotacije Crne rupe.

Treba napomenuti da nema ništa nekonzistentno u gornjoj diskusiji. Naime, moglo bi se pitati kako to da Lorenz-invarijantna teorija predviđa brzinu svetlosti koja je manja od c (a pritom je ta teorija postavljena od strane samog Ajnštajna)? Medjutim, ne zaboravimo da su ove koordinate merene od strane udaljenog posmatrača koji se nalazi daleko od Crne rupe, u inercijalnom sistemu reference, pa stoga i ravnom prostor-vremenu. Za njega je jedini način da

²³ Za ekstremnu otirajuću Crnu rupu dva horizonta događaja se poklapaju: $r_+ = r_- = M$, što se vidi iz (4.1a) i (4.1b).

se uveri o veličini brzine svetlosti taj da na licu mesta, na rastojanju r od rotirajuće Crne rupe postavi eksperiment koji bi tu brzinu izmerio.

Medjutim, za svakog posmatrača koji se nalazi u slobodnom padu u gravitacionom polju, prostor-vreme je *lokalno inercijalno*, tj. uopšte se ne razlikuje od ravnog prostor-vremena, tako da bi skeptični eksperimentator na svakom rastojanju izmerio brzinu svetlosti da je ravna c i time se otarasio svoje dileme. Takodje, zbog toga što je brzina svetlosti dok prolazi kroz gravitaciono polje drugačija (i u njemu se menja još i zbog rotacije prostor-vremena), udaljenom posmatraču će ta svetlost stići kasnije nego neka koja prelazi isto rastojanje u ravnom prostor-vremenu, a to je upravo zbog toga što je samo prostor-vreme drugačije, pa se svetlost drugačije i ponaša (ovo je poznato kao Šapirovo (Irwin Shapiro) efekat, za koji je Šapiro predložio eksperimentalnu proveru, a koja je kasnije i sprovedena). Prema tome, ne postoji eksperiment koji bi izmerio da je brzina svetlosti jednaka nuli na statičkom limitu, jer upravo zbog toga što je jednaka nuli, ona nikad neće stići do udaljenog eksperimentatora da bi izmerio njenu brzinu. Za njega je jednostavno vreme koje je potrebno svetlosti da stigne do njega beskonačno – na osnovu čega se zaključuje o drugačijoj prirodi prostor-vremena, a ne o brzini svetlosti. S druge strane, maksimalna moguća brzina svetlosti u zakrivljenom prostor-vremenu *nikada* neće preći c , što se da videti sa Slike 4 i 5 – na horizontu događaja je brzina svetlosti koja je puštena u oba smera jednaka c .

Kako se sva tela kreću sporije od svetlosti, to ona nužno moraju biti povučena zajedno sa okolnim rotirajućim prostorom i taj efekat se naziva efekat povlačenja metrike (frame dragging). Takodje je u upotrebi naziv po njegovim pronalazačima - Lens-Tiringov efekat, koji ćemo nadalje koristiti. O eksperimentalnoj potvrdi ovog efekta biće reči u poglavlju 7.

4.3. Ergosfera i Penrose proces

Fokusirajmo se sada na ergosferu, tj. na oblast unutar statičkog limita $r = 2M$. Zbog simetrije Kerove metrike (3.5) u odnosu na translaciju u vremenu, postoji Kilingov vektor $\zeta_{\mu}^{(t)} = \partial_t$, dok osna simetrija generiše drugi Kilingov vektor $\zeta_{\mu}^{(\varphi)} = \partial_{\varphi}$, slično kao kod Švarcšildove metrike. Za oblast ergosfere važi da g_{00} u (3.5) obrće znak i postaje manje od nule, te Kilingov vektor $\zeta_{\mu}^{(t)}$ postaje vektor prostornog tipa. Kako je energija kao konstanta kretanja čestica definisana sa

$$E = p^{\mu} \zeta_{\mu}^{(t)} \quad (4.6)$$

gde je p^{μ} vremenskog tipa, ovaj skalarni proizvod daće vrednost koja je manja od nule, što implicira da je energija čestice unutar statičkog limita manja od nule:

$$E = p^{\mu} \zeta_{\mu}^{(t)} < 0 \quad (4.7)$$

Ovo ne znači da postoji nešto poput “negativne mase”, već je ta energija ukupna kinetička i potencijalna energija, za koju znamo da u Newton-ovoj nebeskoj mehanici generiše eliptične orbite. U principu, ovo bi značilo da će čestica u slobodnom padu unutar ergosfere sa energijom

manjom od nule nužno upasti u Crnu rupu (preći spoljašnji horizont događaja) imajući pri tom negativnu energiju, ali je takodje moguće da ta ista čestica delovanjem spoljašnjih sila dobije takvu putanju da je izvede izvan ergosfere, gde nužno opet mora imati pozitivnu energiju. Ova činjenica navela je Penrouza (Roger Penrose) da smisli način kako se energija može *oduzimati Crnoj rupi*.

Naime, ideja je da usmerimo hipotetički svemirski brod B koji sa sobom vuče teret T putanjom na putu ka spoljašnjem horizontu i onda, jednom kada se brod nadje unutar ergosfere, odbacimo teret B tako da on završi u Crnoj rupi, ali u isto vreme da brod nastavi da putuje putanjom koja vodi van ergosfere. Zakon održanja kvadrivektora impulsa kaže da impuls pre odbacivanja pora biti jednak ukupnom impulsu posle odbacivanja tereta:

$$p_{B+T}^\mu = p_B^\mu + p_T^\mu$$

Množeći ovu jednačinu sa $\zeta_\mu^{(t)} = \partial_t$ dobijamo zakon održanja energije:

$$E_{B+T} = E_B + E_T$$

Sad, kako je Penrose pokazao, moguće je namestiti takvu putanju broda da u trenutku odbacivanja tereta, teret ima negativnu energiju saglasno sa (4.7), a brod takvu putanju da sa preostalom energijom izađe iz ergosfere na sigurno rastojanje, ne menjajući snagu motora. Negativna energija $E_T < 0$ implicira da je

$$E_{B+T} = E_B - |E_T|$$

odakle sledi

$$E_{B+T} + |E_T| = E_B > E_{B+T}$$

Dakle, energija broda posle odbacivanja tereta može biti *veća od početne energije*, ako je u ergosferi teret odbačen sa negativnom energijom u Crnu rupu.

Postavlja se pitanje odakle ova energija dolazi? Primitimo da intenziteti Kilingovih vektora $\zeta_\mu^{(t)} = \partial_t$ i $\zeta_\mu^{(\varphi)} = \partial_\varphi$ na spoljašnjem horizontu $r = r_+$ nisu jednaki nuli, tj. ti vektori nisu svetlosni vektori na ovoj površini. Medjutim, postoji linearna kombinacija ovih vektora koja to jeste (linearna kombinacija Kilingovih vektora daje opet Kilingov vektor) i taj novi Kilingov vektor jeste:

$$\chi_\mu = \zeta_\mu^{(t)} + \Omega_{BH} \zeta_\mu^{(\varphi)} = \partial_t + \frac{a}{r_+^2 + a^2} \partial_\varphi \quad (4.8)$$

Množitelj $\Omega_{BH} = a/(r_+^2 + a^2)$ predstavlja ugaonu brzinu rotacije prostor-vremena na samom horizontu događaja, na osnovu jednačine (3.8), i može se smatrati ugaonom brzinom Crne rupe.

Primetimo da je ova veličina jednaka funkciji g za $r = r_+$ koju smo u odeljku 3.5 definisali za Kerovu metriku u ortogonalnoj formi.

Množeći (4.8) sa kvadrivektorom impulsa tereta p_T^μ dobijamo:

$$p_T^\mu \chi_\mu = p_T^\mu \zeta_\mu^{(t)} + \Omega_{BH} p_T^\mu \zeta_\mu^{(\varphi)} = E_T - \Omega_{BH} L_T$$

što je ništa drugo do zakon održanja ukupne energije tereta napisan zajedno na horizontu događaja. Sad, pošto skalarni proizvod $\chi_\mu \chi^\mu$ na horizontu događaja menja znak i postaje negativan, χ_μ na osnovu diskusije u poglavlju 1 postaje vektor prostornog tipa. Kvadrivektor impulsa p_T^μ je vektor vremenskog tipa, pa je skalarni proizvod $p_T^\mu \chi_\mu$ manji ili jednak nuli:

$$p_T^\mu \chi_\mu = E_T - \Omega_{BH} L_T \leq 0$$

odakle je:

$$L_T \leq \frac{E_T}{\Omega_{BH}} \quad (4.9)$$

Pošto teret želimo da odbacimo sa negativnom energijom, to na osnovu gornje nejednakosti znači da ga moramo odbaciti sa negativnim momentom impulsa u odnosu na moment impulsa Crne rupe, dakle *u suprotnom smeru od smera rotacije Crne rupe*.

Stoga, teret povećava masu Crne rupe za iznos od

$$\delta M = E_t$$

a smanjuje ugaoni moment J za iznos od

$$\delta J = L_t$$

što kada se zameni u (4.9) daje:

$$\frac{\delta M}{\Omega_{BH}} \geq \delta J \Rightarrow \frac{\delta M}{\Omega_{BH}} - \delta J \geq 0 \quad (4.10)$$

Dakle, energija koja se može crpeti iz Crne rupe jeste energija njene rotacije. Medjutim, očigledno je da nije moguće iscrpeti više od sveukupne energije rotacije Crne rupe, a da bi smo to pokazali, iskoristićemo sledeći rezon. Izračunajmo površinu svetlosne površi horizonta događaja:

$$\begin{aligned}
A(r = r_+) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (g_{11}g_{33})^{\frac{1}{2}} d\theta d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}} d\theta d\varphi \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\left((r_+^2 + a^2) \rho^2 - \underset{=0}{\Delta} a^2 \sin^2 \theta + (r_+^2 + a^2) a^2 \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}} d\theta d\varphi \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(((r_+^2 + a^2)(r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta) + (r_+^2 + a^2) a^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}} d\theta d\varphi \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r_+^2 + a^2) \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 8\pi M r_+ \\
&= 8\pi M \left(M + \sqrt{M^2 - a^2} \right) = 8\pi \left(M^2 + \sqrt{M^4 - (aM)^2} \right) \\
&= 8\pi \left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2} \right)
\end{aligned}$$

Sad potražimo varijaciju površine δA po masi M i ugaonom momentu J :

$$\delta A = \frac{8\pi J}{\sqrt{M^4 - J^2}} \left(\frac{\delta M}{\Omega_{BH}} - \delta J \right) = \frac{8\pi a}{\sqrt{M^2 - a^2}} \left(\frac{\delta M}{\Omega_{BH}} - \delta J \right)$$

Na osnovu (4.10), iz gornjeg izraza zaključujemo:

$$\delta A \geq 0 \tag{4.11}$$

tj. da se površina horizonta događaja ne može smanjiti. Ovo smo mogli odmah da pogodimo, zbog toga što sve što jednom udje u Crnu rupu, nikada ne izlazi izvan, ali rezultat je veoma bitan i odnosi se na Hokingovu (Stephen Hawking) *teoremu površine*²⁴ koja kaže da se *površina horizonta događaja nikada ne smanjuje*.

Ovu površinu možemo zapisati i kao:

$$A = 8\pi \left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2} \right) = 16\pi M_{irr}^2 \tag{4.12}$$

gde $M_{irr} = \left(\left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2} \right) / 2 \right)^{1/2}$ stoji za *ireducibilnu masu Crne rupe*. Naziv potiče upravo od činjenice da se ona ne može smanjiti što sledi iz (4.11). Iz definicije ireducibilne mase sledi da je masa Crne rupe uvek veća ili jednaka od ireducibilne mase:

$$M^2 = M_{irr}^2 + \frac{J^2}{4M_{irr}^2} \geq M_{irr}^2$$

²⁴ Eng. *area theorem*.

Stoga, deo mase (energije) Crne rupe je energija rotacije i upravo je to ona energija koja se može oduzimati Crnoj rupi, a najveća količina enerije koja se može oduzeti Crnoj rupi na ovaj način je:

$$\Delta M = M - M_{irr} = M - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2} \right)^{1/2} \quad (4.13)$$

što za ekstremnu Kerovu Crnu rupu daje:

$$\Delta M = M - M_{irr} = M - \frac{1}{\sqrt{2}} (M^2)^{1/2} = M \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 0.29M$$

Na osnovu ovoga, Penrose-ov proces omogućava da se iskoristi 29% početne mase rotirajuće Crne rupe. Primetimo da kada se u jednačini (4.13) stavi da je $J = 0$, što odgovara Švarcšildovoj, nerotirajućoj Crnoj rupi, količina energije koja se može oduzeti Crnoj rupi je $\Delta M = 0$. Iz ovoga zaista sledi da je iskoristiva energija upravo energija rotacije Crne rupe.

Mehanizam iskorišćavanja energije iz rotirajućih Crnih rupa posredstvom materijala u ergosferi je najefikasniji mehanizam konverzije materije u energiju koji postoji u Univerzumu, efikasniji i od nuklearnih reakcija. Videćemo u poglavlju 6 da je uzrok najintenzivnijih astrofizičkih pojava u Univerzumu upravo interakcija materije sa rotirajućom Crnom rupom.

4.4. Geodezijske jednačine u Kerovom prostor-vremenu

Odredjivanje geodezijskih putanja se može izvesti na dva načina: jedan uključuje računanje Kristofelovih simbola (1.11) i potom rešavanje geodezijskih jednačina (1.12a), a drugi se zasniva na Lagranževom (Joseph-Louis Lagrange) formalizmu. Mi ćemo ovde koristiti ovaj potonji, jer je lakši i ne zahteva računanje Kristofelovih simbola koji u sličaju Kerove metrike imaju veoma komplikovanu funkcionalnu zavisnost od koordinata. Krenimo stoga od lagranžijana za koji znamo da je proporcionalan elementu luka ds^2 , jer oba zadovoljavaju princip najmanjeg dejstva. Lagranžijan po jedinici mase je na ovaj način definisan kao:

$$2\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (4.14)$$

gde su u^μ kvadrivекtori brzine u prostor-vremenu.

Jednačina (4.14) za Kerovu metriku (3.5) dobija oblik:

$$2\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) \dot{t}^2 + \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{t} \dot{\phi} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} \dot{r}^2 - \rho^2 \dot{\theta}^2 \quad (4.15)$$

gde tačka iznad koordinate predstavlja izvod te koordinate po sopstvenom vremenu τ .

Generalisane impulse (po jedinici mase) možemo naći poznatom jednačinom iz teorijske mehanike:

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \quad (4.16)$$

pa imamo:

$$p_t = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) \dot{t} + \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{\varphi} \quad (4.17a)$$

$$p_\varphi = \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{t} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad (4.17b)$$

$$p_r = -\frac{\rho^2}{\Delta} \dot{r} \quad (4.17c)$$

$$p_\theta = -\rho^2 \dot{\theta} \quad (4.17d)$$

Jednačine (4.17a) - (4.17d) pružaju mogućnost da se odrede trajektorije u Kerovoj metrici, ako smo u mogućnosti da izračunamo levu stranu jednačina.

Sada na snagu stupaju simetrije Kerove metrike, koje geneišu konstante kretanja. Do konstanti kretanja doći ćemo na dva načina – koristeći se Lagranževim jednačinama i pomoću Kilingovih vektora.

Kako Kerova metrika (3.5) ne zavisi od koordinata t i φ , to će Lagranževe jednačine za te koordinate biti:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \frac{dp_t}{d\tau} = \dot{p}_t = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{dp_\varphi}{d\tau} = \dot{p}_\varphi = 0$$

odakle dobijamo dve konstante kretanja $p_t = const = E$ i $p_\varphi = const = -L_z$. Na osnovu ovoga, (4.17a) i (4.17b) postaju:

$$E = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) \dot{t} + \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{\varphi} \quad (4.18a)$$

$$L_z = -\frac{4Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{t} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad (4.18b)$$

Jednačina (4.18a) predstavlja energiju čestice, a (4.18b) predstavlja z-komponentu momenta impulsa čestice. Primitimo da ove dve jednačine predstavljaju generalizaciju jednačina (2.6) i (2.7) koje smo dobili za Švarcšildovu metriku u poglavlju 2, i na njih se svode ako u gornje jednačine stavimo $a = 0$.

Isti rezultat možemo dobiti na osnovu Kilingovih vektora koji su već iskorišćeni u prethodnom poglavlju za računanje energije čestice unutar ergosfere, a sada ćemo ih koristiti u opštem slučaju. Simetrija u odnosu na translaciju u vremenu i simetrija u odnosu na kontinualnu promenu koordinate φ , tj. osna simetrija, donose po jedan Kilingov vektor, te oni generišu po jednu konstantu kretanja. Kilingov vektor $\zeta_{\mu}^{(t)} = \partial_t$ nam daje na osnovu (2.5) energiju čestice kao konstantu kretanja:

$$u^{\mu}\zeta_{\mu}^{(t)} = \dot{t}\partial_t\partial_t + \dot{\varphi}\partial_{\varphi}\partial_t = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)\dot{t} + \frac{4Mr a \sin^2 \theta}{\rho^2}\dot{\varphi} = E$$

dok osna simetrija generiše drugi Kilingov vektor $\zeta_{\mu}^{(\varphi)} = \partial_{\varphi}$ i moment impulsa kao konstantu kretanja:

$$u^{\mu}\zeta_{\mu}^{(\varphi)} = \dot{t}\partial_t\partial_{\varphi} + \dot{\varphi}\partial_{\varphi}\partial_{\varphi} = -\frac{4Mr a \sin^2 \theta}{\rho^2}\dot{t} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right)\sin^2 \theta \dot{\varphi} = L_z$$

što su upravo iste one jednačine date sa (4.18a) i (4.18b).

Da bismo pronašli levu stranu jednačina (4.17a)-(4.17d) trebaju nam ukupno četiri jednačine pomoću kojih rešavamo isto četiri jednačine (4.17a)-(4.17d) za četiri nepoznate \dot{t} , $\dot{\varphi}$, \dot{r} , $\dot{\theta}$. Već smo pronašli dve jednačine, tj. dve konstante E i L pomoću kojih smo pronašli levu stranu jednačina (4.17a) i (4.17b), za evoluciju koordinata \dot{t} i $\dot{\varphi}$. Korisno je uočiti da je lagranžijan po jedinici mase (4.15) jednak odgovarajućem hamiltonijanu po jedinici mase, jer:

$$\mathcal{H} = p_{\mu}\dot{x}^{\mu} - \mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = \mathcal{L}$$

Na osnovu (4.14) lagranžijan po jedinici mase je $\mathcal{L} = \delta/2$, gde je $\delta = +1$ ili $\delta = 0$. Upravo je \mathcal{L} treća konstanta koja nam definiše levu stranu jednačine (4.15). Na ovaj način, u (4.15) figurišu samo \dot{r} i $\dot{\theta}$ kao nepoznate funkcije.

Sve četiri funkcije je pronašao Karter (Brandon Carter) korišćenjem Hamilton-Jakobijevog metoda (William Rowan Hamilton) čije se postavke mogu naći u udžbenicima teorijske mehanike²⁵, a pomoću koga se dobija četvrta konstanta kretanja K , koja se naziva Karterova konstanta²⁶.

²⁵ Poput [15].

²⁶ Detaljno izvođenje se može naći u [6].

Geodezijske jednačine koje se dobijaju ovim putem su²⁷:

$$\dot{t} = \frac{1}{\rho^2} \left\{ a(L_z - aE \sin^2 \theta) + \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - aL_z] \right\} \quad (4.19a)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\rho^2} \left\{ \frac{L_z}{\sin^2 \theta} - aE + \frac{a}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - aL_z] \right\} \quad (4.19b)$$

$$\dot{r} = \frac{1}{\rho^2} \sqrt{R(r)} \quad (4.19c)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\rho^2} \sqrt{\Theta(\theta)} \quad (4.19d)$$

gde je

$$R(r) = [E(r^2 + a^2) - aL_z]^2 - \Delta[\delta r^2 + (L_z - aE)^2 + K]$$

$$\Theta(\theta) = K - \left(a^2(\delta - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right) \cos^2 \theta$$

K je Karterova konstanta i definisana je sa:

$$K = \rho^4 \dot{\theta}^2 + \left(a^2(\delta - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right) \cos^2 \theta \Big|_{\tau=\tau_0}$$

gde su veličine r , θ i $\dot{\theta}$ definisane u početnom trenutku $\tau = \tau_0$.

Jednačine (4.19a)-(4.19d) se mogu rešiti numerički (za zadate parametre M, a, δ, E, L_z i početne uslove) i rešenja predstavljaju konačne jednačine kretanja čestica u Kerovom prostoru-vremenu. Mi se ovde nećemo baviti opštim putanjama, već ćemo samo ukazati na neke aspekte specijalnih orbita.

Na primer, za kretanje u ekvatorijalnoj ravni je $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$, Karterova konstanta K je jednaka nuli i može se videti da se jednačine (4.19a)-(4.19d) znatno uprošćavaju.

Ako se posmatraju kružne orbite, što znači da je $\dot{r} = 0$, pa time i $R(r) = 0$, a i $\partial_r R(r) = 0$, rešavanjem ovih uslova po E i L_z dobijaju se jednačine:

²⁷ Forme jednačina uzeta iz [15], ali postoje i drugačije forme koje zavise od odabira notacije drugih autora, što ne bi trebalo da dovede do zabune.

$$E = \frac{r^2 - 2Mr \pm a\sqrt{Mr}}{r(r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr})^{1/2}} \quad (4.20a)$$

$$L_z = \pm \frac{\sqrt{Mr}(r^2 \mp 2a\sqrt{Mr} + a^2)}{r(r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr})^{1/2}} \quad (4.20b)$$

gde se gornji znak odnosi na kruženja u smeru rotacije Crne rupe, dok se donji znak odnosi na kruženja u suprotnom smeru od rotacije. Zanimljivo je pogledati kako se generalizuje III Keplerov (Johannes Kepler) zakon u gravitacionom polju rotirajućeg objekta:

$$\Omega = \pm \frac{\sqrt{M}}{r^{3/2} \pm a\sqrt{M}} \quad (4.21)$$

Ovaj generalizovani Kepler-ov zakon nam govori da period revolucije nije više obrnuto proporcionalan $r^{-3/2}$, već je nešto kraći za kruženja u smeru rotacije objekta (+) zbog uticaja Lens-Tiringovog efekta na kretanje, a duži ukoliko se radi o kretanju u suprotnom smeru od rotacije objekta (–), u odnosu na III Keplerov zakon za nerotirajuće objekte ($a = 0$).

Primetimo da imenilac u jednačinama (4.20a) i (4.20b) mora biti realan da bi orbite postojale. Kružne orbite su moguće u prostoru izvan radijusa koji odgovara poslednjoj stabilnoj kružnoj orbiti fotona (ako foton ne može da se kreće više po kružnoj orbiti, ne može ništa drugo), koja je definisana upravo poslednjom realnom vrednošću imenioca iz pomenutih jednačina, tj. kada je

$$r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr} = 0$$

Rešenje ove jednačine je:

$$r_{ph} = 2M \left(1 + \cos \left\{ \frac{2}{3} \arccos \left(\mp \frac{a}{M} \right) \right\} \right) \quad (4.22)$$

što predstavlja poluprečnik poslednje kružne orbite za slučaj kretanja u smeru (–) i u suprotnom smeru (+) od smera rotacije Crne rupe. Za $a = 0$, što odgovara Švarčildovoj Crnoj rupi, $r_{ph} = 3M$, dok za ekstremnu Kerovu Crnu rupu ($a = M$) ovaj poluprečnik je $r_{ph}^- = M$, $r_{ph}^+ = 4M$, gde znak odgovara znaku u prethodnoj jednačini.

Medjutim, orbite većeg poluprečnika ne moraju biti vezane. Postoje takve orbite kod kojih je dovoljna mala perturbacija u kretanju da ili pošalje foton Crnu rupu ili izbací daleko od nje. Primera radi, Zemlja je podložna tim malim perturbacijama od strane ostalih planeta i Meseca, ali te perturbacije ne utiču drastično na njenu orbitu – to je upravo zbog toga što se ona vrši ravoluciju na vezanoj orbiti. Tako i u slučaju Kerove Crne rupe imamo orbite koje su vezane i one koje nisu. One su okarakterisane energijom po jedinici mase (4.20a) koja je veća od jedinice

$E > 1$. Tako rastojanje za koju je $E = 1$ predstavlja poslednje rastojanje na kojoj može postojati vezana kružna orbita i to rastojanje je na osnovu (4.20a):

$$r_{v0} = 2M \mp a + 2\sqrt{M}(M \mp a)^{1/2} \quad (4.23)$$

Za Švarcšildov slučaj ovo rastojanje je $r_{v0} = 4M$, a za ekstremnu Kerovu metriku u slučaju orbitiranja u smeru rotacije je $r_{v0}^- = M$, što je horizont događaja, a u slučaju orbitiranja u suprotnom smeru je $r_{v0}^+ = 5.83M$. Suština ovog rastojanja jeste da telo koje dolazi iz beskonačnosti po paraboli koja prodire unutar ovog rastojanja, mora završiti u Crnoj rupi.

Od svih ovih orbita, postoje one koje su stabilne i one koje su nestabilne. Nestabilne orbite su one koje se nakon početnog trenutka sve više i više smanjuju da bi prodrle na kraju u Crnu rupu, dok stabilne orbite nastavljaju kretanje oko Crne rupe proizvoljno dugo. Poluprečnik poslednje stabilne kružne orbite dobijen je na osnovu jednačine $\partial^2 R / \partial r^2$, koja predstavlja granicu stabilne i nestabilne ravnoteže i dat je komplikovanim izrazom:

$$r_{s0} = M(3 + Z_2 \mp [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]^{1/2}) \quad (4.24)$$

gde je

$$Z_1 = 1 + \left(1 - \frac{a^2}{M^2}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \frac{a}{M}\right)^{1/3} + \left(1 - \frac{a}{M}\right)^{1/3}\right]$$

$$Z_2 = \left(3 \frac{a^2}{M^2} + Z_1^2\right)^{1/2}$$

Poslednja stabilna kružna orbita za Švarcšildov slučaj iznosi $r_{s0} = 6M$, a za ekstremni Kerov slučaj $r_{s0} = M$ i $r_{s0} = 9M$ za orbitiranje u smeru i u suprotnom smeru od rotacije Crne rupe.

Zanimljivo je da za ove orbite važi da je

$$1 - E^2 \geq \frac{2M}{3r}$$

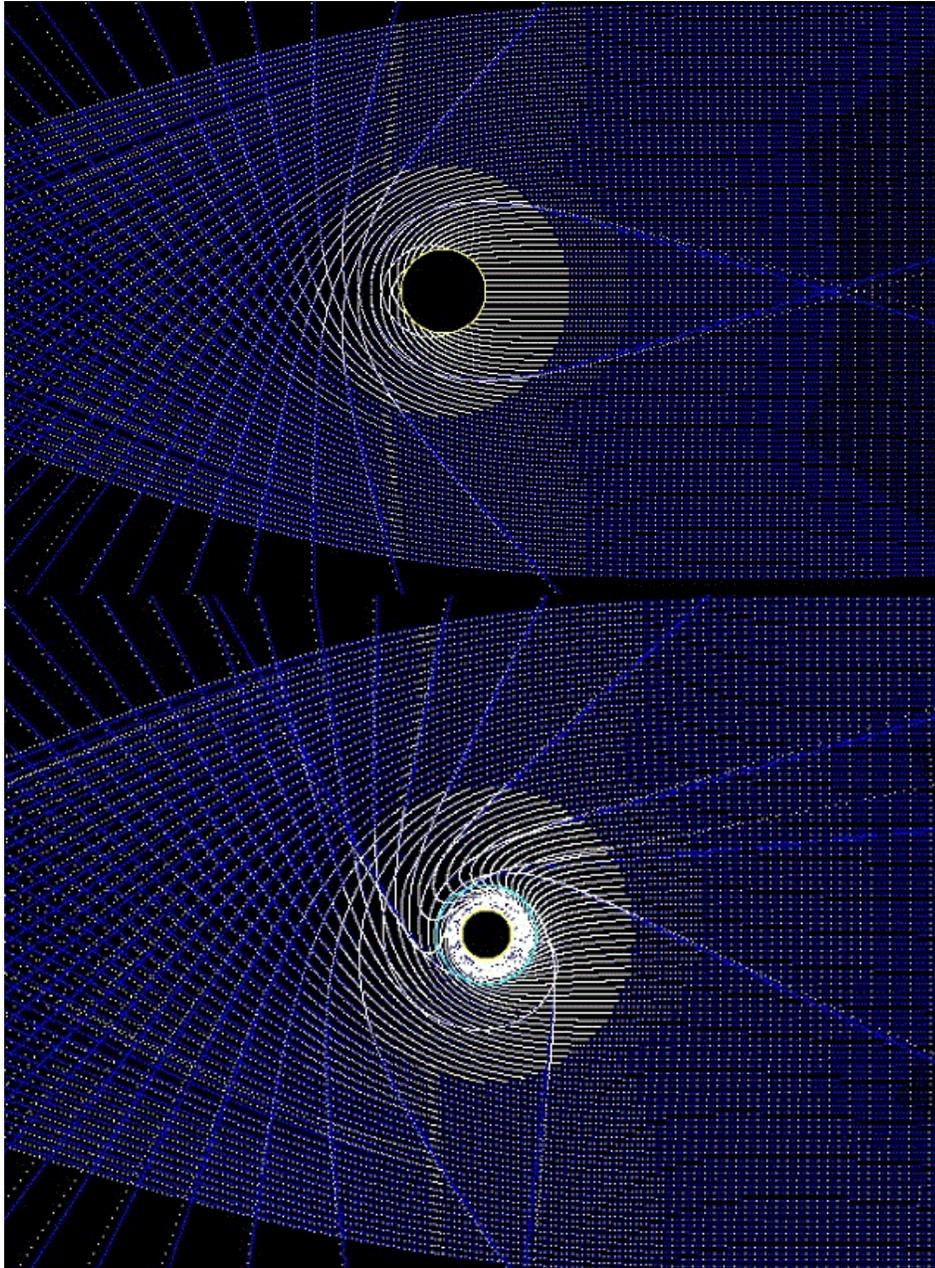
što se može iskoristiti da se eliminiše r iz (4.20a) i tada se dobija

$$\frac{a}{M} = \mp \frac{4\sqrt{2}(1 - E^2)^{1/2} - 2E}{3\sqrt{3}(1 - E^2)}$$

Vezane orbite ($E > 1$) poseduju energiju veze $1 - E$. Ova energija se pri padanju u Crnu rupu oslobadja i može se videti da tokom spiralnog pada u Švarcšildovu Crnu rupu ($a = 0$) oslobadja $1 - E = 0.057 = 5.7\%$, dok se tokom spiralnog pada u ekstremnu Kerovu Crnu rupu

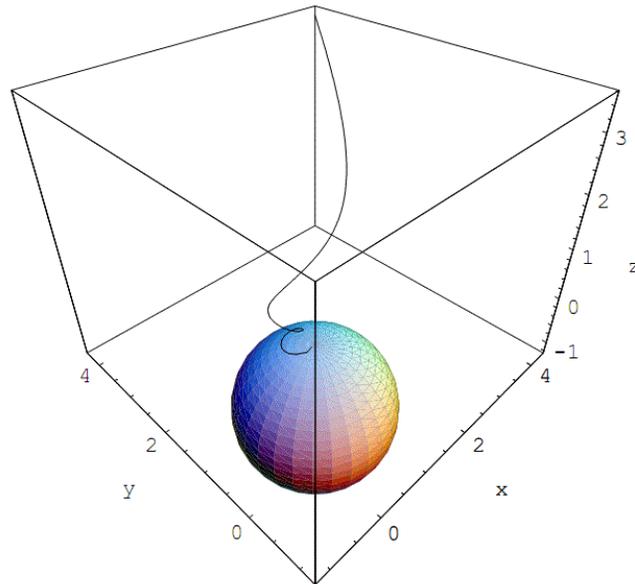
oslobodi čak 42.3% energije mirovanja. Ovo je najbolji pokazatelj koliko je rotirajuća Crna rupa efikasna “mašina” za konverziju mase u energiju. Spiralno padanje u rotirajuću Crnu rupu predstavlja izuzetan izvor energije aktivnih galaktičkih jezgara, o čemu će biti reči u narednom poglavlju.

Prikažimo sada neke putanje svetlosnih zraka u Kerovoj metrici. Na Slici 6 se može videti najznačajnija razlika izmedju Švarcschildove i Kerove metrike – vidi se da u oko Kerove Crne rupe, osim što dolazi do skretanja svetlosti zbog zakrivljenja prostora, dolazi i do efekta savijanja putanja zbog Lens-Tiringovog efekta.



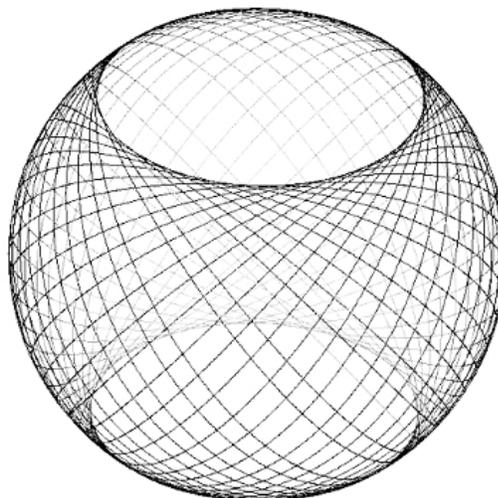
Slika 6: Putanje svetlosnih zraka u blizini Schwarzschild-ove Crne rupe (gore) i putanje svetlosnih zraka u blizini ekstremne Kerove Crne rupe (dole) gledano iz pravca ose rotacije koja je negativna. Na donjoj slici uočava se asimetrija u odnosu na gornju sliku, koja dolazi zbog rotacije Crne rupe.

Efekat rotacije prostora se još bolje može uočiti u tri dimenzije, kako je prikazano na Slici 7 za svetlost puštenu sa z-ose pod nekim uglom u odnosu na nju.



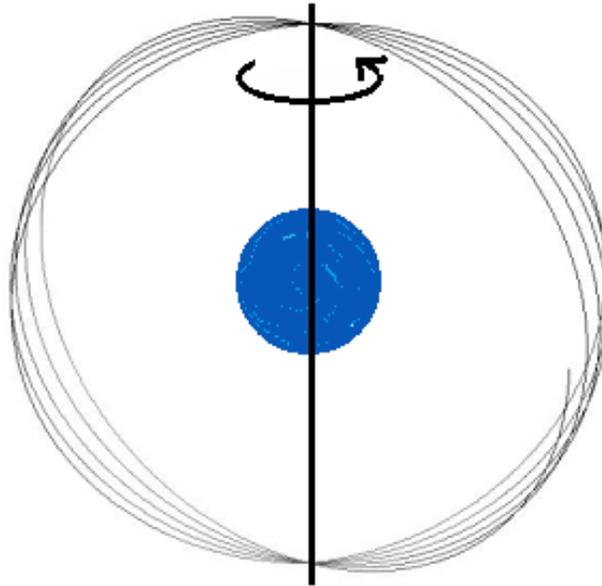
Slika 7: Izgled putanje svetlosti puštene relativno daleko od ekstremne Kerove Crne rupe i daleko od ekvatorijalne ravni. Može se primetiti da je Lens-Tiringov efekat sve jači kako se svetlost približava Crnoj rupi.

Moguće je pronaći orbite svetlosti koje su relativno stabilne, a opisuju svoje kretanje po površini sfere oko Crne rupe. Ovakve orbite se nazivaju sferne orbite i za njih je karakteristično da je tokom kretanja u tri dimenzije $\dot{r} = 0$. Nisu od nekog praktičnog značaja, ali demonstriraju mogućnosti Kerovog rešenja. Jedna ovakva orbita je prikazana na Slici 8.



Slika 8: Jedna od sfernih orbita fotona. Za ovakve orbite je karakteristično da postoji interval uglova θ izvan koga putanje ne izlaze tokom orbitiranja.

Od većeg značaja su polarne orbite prikazane na Slici 9, one koje seku z-osu i karakteriše ih komponenta brzine $u^{\varphi} = 0$. Pomoću ovih orbita se može meriti Lens-Tiringov efekat, kako je opisano u poglavlju 7, jer dolazi do precesije orbite oko ose rotacije Crne rupe. Proučavanjem kretanja satelita po ovakvim orbitama bi se moglo eksperimentalno proveriti predviđanje opšte teorije relativnosti i Kerovog rešenja.



Slika 9: Polarna orbita oko Kerove Crne rupe, za koju je karakteristično da precesira oko ose rotacije zbog Lens-Tiringovog efekta.

Podrobnijim proučavanjem geodezijskih jednačina ispostavlja se da je za slučaj Sunčevog sistema dovoljno koristiti Kerovu metriku u limitu $a \rightarrow 0$ za Sunce, jer njegova rotacija ima zanemarljiv uticaj na planete – precesija Merkurove orbite je par redova veličina dominantniji efekat od Lens-Tiringovog efekta na istom rastojanju. Ipak, proučavanje geodezijskih jednačina u Kerovoj metrici može pomoći pri razumevanju i vizualizaciji Kerovog prostor-vremena.

II DEO

5. Eksperimentalna potvrda postojanja Crnih rupa

Crne rupe nastaju kao rezultat gravitacionog kolapsa zvezda masivnijih od oko 25 Sunčevih masa ($25 M_{\odot}$). Do sada nije pronađena nijedna zvezda koja ne rotira, što i nije čudno, jer su prvobitno zvezde i nastale od gasa koji je nužno unosio određeni ugaoni moment pri formiranju zvezde. Stoga nakon eksplozije zvezde masivnije od $25 M_{\odot}$ kao supernova, ostaje kompaktni ostatak, rezultat implozije jezgra zvezde – rotirajuća Crna rupa. Posmatrački dokazi koji potvrđuju postojanje Crnih rupa ne mogu biti direktni – upravo zbog činjenice da ovi objekti ne zrače elektromagnetno (EM) zračenje, ali su veoma blizu tome. Jedini način da se ovi objekti otkriju jeste da se proučava ponašanje objekata u njihovoj okolini.

5.1. Cygnus X-1 i binarni sistemi

Šezdesetih godina, sa pojavom astronomije X zraka, uočeni su pojedini binarni sistemi čiji se jedan član ne vidi u optičkom delu spektra, a koji su bili izvor intenzivnog X zračenja – Cyg X-1, Her X-3, Sco X-1. Iz spektra vidljivog člana, koje je u slučaju Cyg X-1 zvezda spektralne klase O6 mase od oko $12M_{\odot}$, može se utvrditi radijalna brzina v_1 tog člana, kao i period revolucije τ . Ono što je bilo čudno jeste da izvor X zraka nije bio ni tamo gde se nalazi zvezda, ni tamo gde bi se nalazio nevidljivi član, već negde između. To je objašnjeno transferom materije sa zvezde na nevidljivi objekat, pri čemu se materijal zagrevao i zračio u X delu spektra. Na osnovu crvenog pomaka je utvrđeno da ovaj materijal odlazi od zvezde ka nevidljivom objektu. Ovaj proces se naziva *akrecija materije* i detaljnije je opisan u sledećem odeljku.

U optičkim binarnim sistemima je nemoguće utvrditi masu oba objekta iz prostog razloga što je ravan orbitiranja nagnuta pod nepoznatim uglom inklinacije i u odnosu na liniju posmatranja, te se u jednačinama pojavljuje još jedna nepoznata. Na osnovu III Kepler-ovog zakona i definicije centra mase, dobija se dobro poznata relacija za tzv. funkciju mase binarnog sistema:

$$f(m_1, m_2, i) = \frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{T v_1^3}{2\pi G}$$

gde je m_1 masa jedne komponente (vidljive), m_2 masa druge komponente (nevidljive), i inklinacija orbite, T period orbitiranja, v_1 radijalna komponenta brzine orbitiranja vidljive komponente.

Radijalna brzina vidljive komponente v_1 , kao i period T se mogu izmeriti na osnovu spektra te komponente; takodje je moguće proceniti i masu m_1 . Na osnovu ove relacije se tada vidi da je, ako su masa m_2 i inklinacija i nepoznate, nemoguće odrediti masu nevidljivog objekta m_2 .

Zbog toga se funkcija mase $f(m_1, m_2, i)$ koristi za *procenu* mase nevidljivog objekta m_2 . Na osnovu ovakvih procena, ispostavlja se da masa nevidljivog objekta u Cyg X-1 mora biti veća od

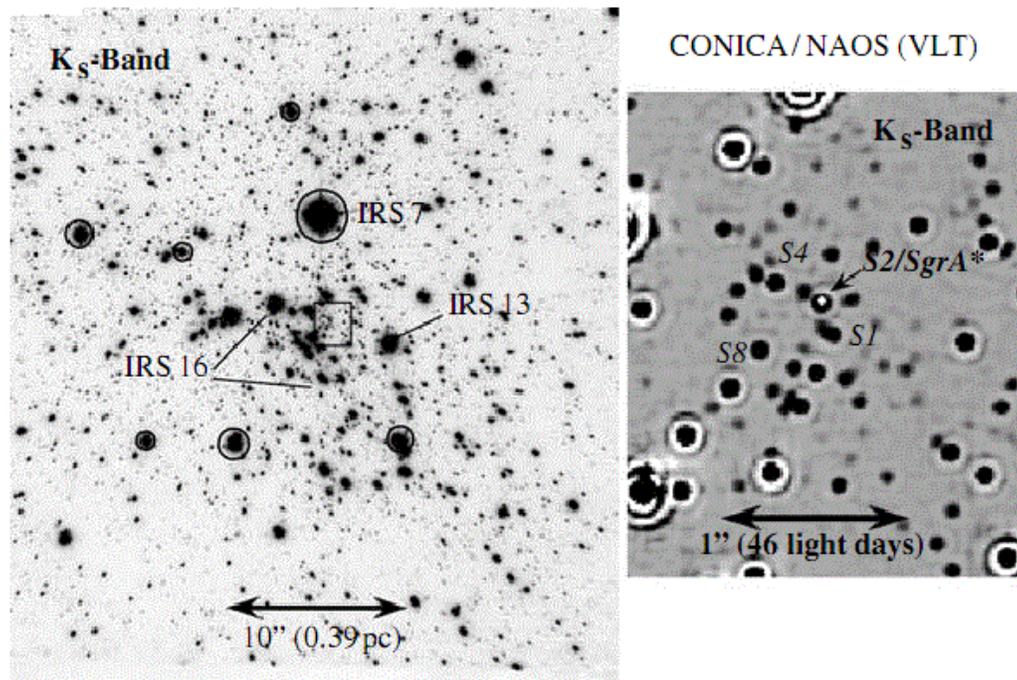
$3M_{\odot}$, što je veće od gornje granice za masu neutronske zvezde, stoga u pitanju ne može biti neutronska zvezda, već neki kompaktniji objekat, a jedini kompaktniji objekat od neutronske zvezde je upravo Crna rupa.

Ovo nikako nije direktni dokaz, jer bi se direktni dokaz morao ticati relativističkih efekata vezanih za Crnu rupu, ali komponente optičkih binarnih sistema nisu toliko blizu jedna drugoj da bi neki relativistički efekti došli do izražaja. Međutim, među svim indirektnim dokazima, ovo je najbliže direktnom dokazu za postojanje Crnih rupa reda veličina mase zvezda, ili tzv. *stelarnih Crnih rupa*.

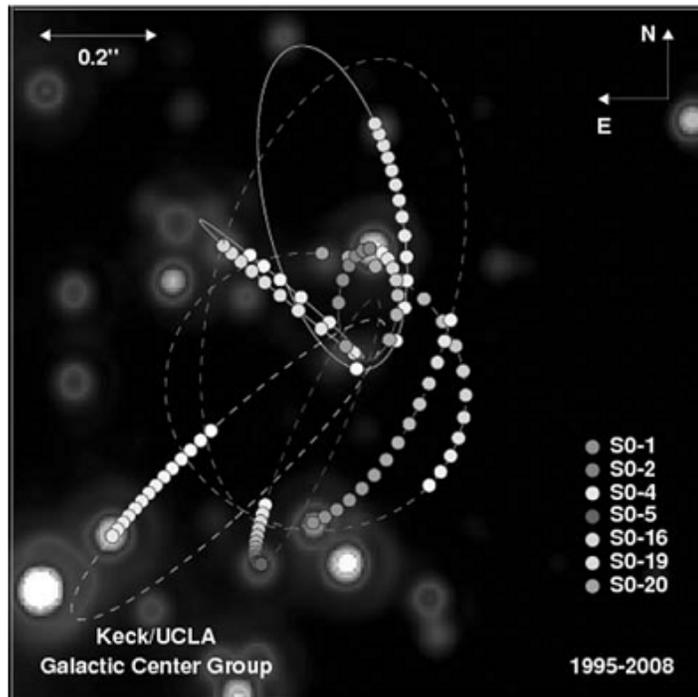
Danas je poznato nekoliko desetina ovakvih binarnih sistema i svi ukazuju na to da je nevidljiva komponenta upravo Crna rupa.

5.2. Supermasivna Crna rupa u centru Mlečnog Puta

Iz sopstvenih kretanja oko 200 zvezda u centru Mlečnog Puta – oblasti pod nazivom SgrA* - ustanovljeno je da ukupna masa koja ih drži na okupu mora biti reda veličina $10^6 M_{\odot}$. Brzine kojima se te zvezde kreću prevazilaze i 1000 km/s – zvezda sa najkraćim periodom orbitiranja pod oznakom S2 ima maksimalnu brzinu od oko 5000 km/s. Takodje je ustanovljeno da sva ta masa skoncentrisana u oblast čije su dimenzije reda veličina desetih delova parseka (Slika 10), što bi značilo da sfera radijusa jednakom recimo polovini rastojanja Sunca do njemu najbliže zvezde – Proxima Cen - sadrži oko milion Sunčevih masa. Posmatrački rezultati merenja orbita nekih od zvezda sa Slike 10 prikazani su na Slici 11.

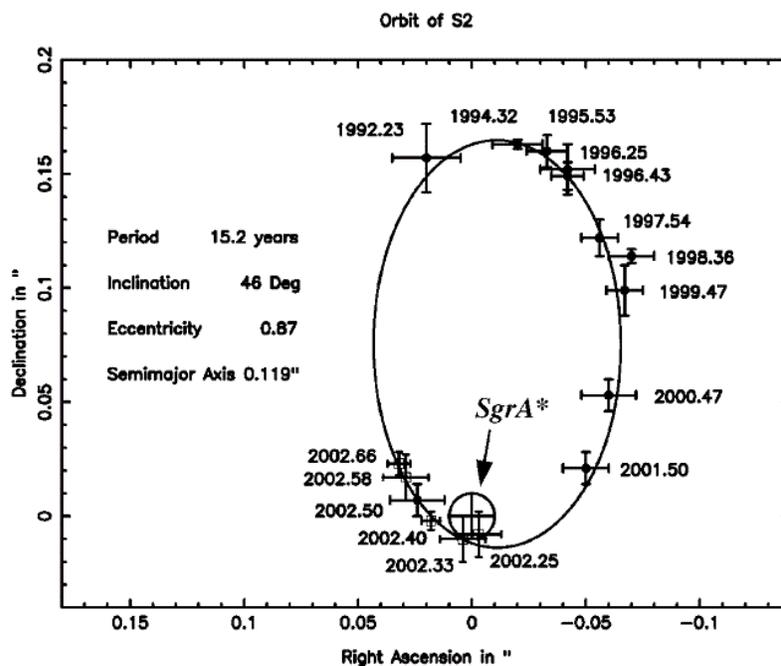


Slika 10: Oblast centra Mlečnog Puta. Desno je prikazana uvećana oblast označena pravougaonikom na levoj slici, gde se vidi zvezda S2 i SgrA*.



Slika 11: Orbite zvezda oko SgrA* sa položajima u periodu od 1992. do 2002. godine.

Preciznija posmatranja su ustanovila da zvezda S2 ima period od 15.2 godine i da je pericentar (najbliže rastojanje do centralne mase oko koje rotira zvezda) 17 svetlosnih dana, što iznosi oko 124 astronomske jedinice (AU). Orbita ove zvezde prikazana je na Slici 12. Na osnovu kretanja ove zvezde, ustanovljena je masa centralnog objekta od oko $3.7 \times 10^6 M_{\odot}$.



Slika 12: Keplerova orbita zvezde S2 merena u periodu od 1992. do 2002. godine. Puna elipsa je fit na podatke prikazane tačkama.

Jedna od mogućnosti pre otkrića ove zvezde 2002. godine bilo je da se u centru nalazi jedno veliko jato tamnih ostataka zvezda kao što su braon patuljci, neutronske zvezde i stelarne Crne rupe, međutim, računanja pokazuju da bi takav sistem bio veoma nestabilan, jer bi morao da sadrži ogroman broj takvih tela, a to bi prouzrokovalo jako veliku haotičnost i sistem bi živeo samo oko 10 miliona godina, dok starost većine zvezda u okolini prevazilazi desetine, pa i stotine miliona godina, te one moraju orbitirati oko nečeg znatno stabilnijeg. Dalje, profil gustine centralne mase koji bi odgovarao gravitacionom potencijalu centra izračunatog na osnovu sopstvenih kretanja zvezda govori da se u samom centru nalazi jako veliki procenat tamne komponente mase, a potom gustina veoma brzo opada kako se rastojanje povećava. I konačno, radio posmatranja centralnog regiona ukazuju na to da je izvor skoncentrisan u oblasti radijusa od oko 1.5×10^{13} cm, što daje gornji limit na veličinu te tamne mase. Ako se izračuna gustina koja bi odgovarala sferi tog radijusa, sa masom od $10^6 M_{\odot}$, ona bi iznosila oko $10^{24} M_{\odot} \text{pc}^{-3}$. Ako sada pretpostavimo da se u centru nalazi Crna rupa sa masom od $10^6 M_{\odot}$ i izračunamo njen Švarcšildov radijus do na red veličina

$$R = \frac{2GM}{c^2} \sim 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2} \times 10^{36} \text{kg} \times 10^{16} \text{m}^2 \text{s}^{-2} \sim 10^{10} \text{m} = 10^{12} \text{cm} \approx 10 \text{AU} \approx 10^{-7} \text{pc}$$

i potom procenimo njenu gustinu

$$\rho \sim \frac{10^6 M_{\odot}}{(10^{-7} \text{pc})^3} = 10^{27} M_{\odot} \text{pc}^{-3}$$

vidimo da je razlika samo par redova veličina. Na osnovu ovoga, jedino fizičko objašnjenje koje je moglo objasniti sopstvena kretanja zvezda u SgrA*, profil gustine i samu gustinu centralnog regiona pre otkrića putanje zvezde S2 jeste *supermasivna Crna rupa*, trenutno neaktivna, sa masom od nekoliko miliona Suncevih masa, čiji bi Švarcšildov radijus obuhvatio Saturnovu orbitu.

6. Akrecioni diskovi i džetovi naelektrisanih čestica AGN-a

Danas se smatra da sve galaksije koje nisu nepravilne poseduju u svojim jezgrima supermasivnu Crnu rupu. Galaksije koje su slične starosti kao i naša (što znači i da su u našoj blizini) poseduju neaktivnu Crnu rupu. Međutim, postoje galaksije koje poseduju aktivna galaktička jezgra (active galactic nuclei - AGN) i to su jezgra ekstremno velike aktivnosti. U delu prostora radijusa do jedne svetlosne godine emituje se elektromagnetno zračenje veoma visoke luminoznosti – nekad i do $10^{14}L_{\odot}$, što je više od ukupnog sjaja svih zvezda u galaksiji - uglavnom u X i gama delu spektra. Mehanizam proizvodnje ovako velikih energija za kratko vreme u tako relativno malom delu prostora se nikako ne može objasniti aktivnošću zvezda. U prilog tome ide i činjenica da iz ovih regija izbijaju vrlo kolimisani džetovi relativističkih elektrona – u pitanju su i veoma jaka magnetna polja. Takodje, spektri AGN-a pokazuju široke emisione linije, za razliku od “normalnih” galaksija čijim spektrima dominiraju uske apsorpcione linije.

6.1. Akrecioni disk

Da bi jezgro neke galaksije bilo aktivno, oko supermasivne Crne rupe u centru mora postojati materijal dovoljno velike gustine. Zbog jakog gravitacionog privlačenja, okolni materijal počinje da pada u Crnu rupu, spiralnom putanjom. Međutim, kako smo videli, postoji oblast oko Crne rupe izvan koje je moguće da materijal kruži po stabilnim orbitama. Unutar ove oblasti, konkretno, unutar poslednje stabilne kružne orbite, i najmanja perturbacija u kretanju materijala može povući nepovratno taj materijal ka horizontu događaja. Ukoliko je oblast oko supermasivne Crne rupe bogata gasom i prasinom, oni će se gomilati sve više i više u spiralnom kruženju oko Crne rupe i formiraće disk koji se naziva *akrecioni disk*. Ovaj akrecioni disk zrači i iz elektromagnetnih (EM) spektara se može izučavati oblast oko Crne rupe. Kakva će ekscitacija atoma materijala biti, pa time i kakav će biti spektar, zavisi od temperature i luminoznosti diska, a temperatura i luminoznost diska zavise od toga koliko se mase u jedinici vremena gomila u disku – što se više mase u jedinici vremena gomila, to će temperatura i luminoznost diska biti veća. Edington (Arthur Stanley Eddington) je pokazao da postoji maksimalna luminoznost koju disk može imati. Naime, na isti način kao što postoji ravnoteža između unutrašnjeg pritiska zračenja unutar zvezde i gravitacionog pritiska ka centru, pa ta ravnoteža znači da je zvezda stabilna (ne skuplja se niti širi), tako i kod akrecionog diska je moguće da u jednom momentu zračenje nadjača gomilanje materijala. Tada gomilanje prestaje i luminoznost više ne raste. Ova luminoznost se naziva Edingtonova luminoznost i procenjuje se na sledeći način.

Pretpostavka je da je najefikasnija interakcija fotona i gomilajućeg materijala Tomsonovo (Joseph John Thomson) rasejanje na elektronima za koje je efikasni presek²⁸:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right)^2 = 0.665 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$$

²⁸ Efikasni presek Tomsonovog rasejanja na protonima kojih su takodje zastupljeni u istoj meri kao i elektroni je zanemarljivo zbog velikog odnosa masa protona i elektrona.

gde je m_e masa elektrona, e naelektrisanje elektrona, a ϵ_0 dielektrična konstanta vakuuma. Deo fluksa fotona koji se raseje na elektronima na rastojanju r je stoga:

$$\sigma_T F = N \sigma_T \frac{L}{4\pi r^2} \left[\frac{\text{J}}{\text{s}} \right]$$

gde je L luminoznost diska, a N ukupan broj fotona. Energija koja ulazi u L podeljena sa c nam daje impuls fotona. Stoga gornji izraz podeljen sa c daje ukupan impuls u jedinici vremena što je jednako ukupnoj sili kojom se zračenje suprotstavlja gravitacionoj sili izmedju Crne rupe i gomilajuće materije u kojoj ima približno isti broj protona kao i elektrona, dakle N . (U ovom procesu protoni prate elektrone zbog Kulonove (Coloumb) interakcije medju njima.) Izjednačavanjem ove dve sile:

$$\frac{GNm_p M}{r^2} = N \sigma_T \frac{L}{4\pi r^2 c}$$

gde je M masa Crne rupe, dobija se Edingtonova luminoznost:

$$L_{Edd} = \frac{4\pi c G m_p M}{\sigma_T} = 1.3 \times 10^{38} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \frac{\text{erg}}{\text{s}}$$

Radi poredjenja, luminoznost Sunca je $L_\odot = 3.8 \times 10^{33} \text{erg/s}$, a imajmo na umu da luminoznost Sunca potiče od nuklearnih reakcija u njegovom centru. Luminoznosti nekih tipičnih objekata koji poseduju akrecioni disk (ne nužno supermasivne Crne rupe) i čija je masa reda veličina Sunčeve mase, su reda veličina desetih delova Edingtonove luminoznosti, što je nekoliko redova veličina veće od luminoznosti zvezde poput Sunca. Stoga, konverzija gravitacione u elektromagnetnu energiju putem gomilanje materijala u akrecionim diskovima je mnogo efikasnija od proizvodnje energije nuklearnim reakcijama.

Procenimo sada temperaturu akrecionog diska na rastojanju r od centralnog objekta pod pretpostavkom da je luminoznost diska neki procenat ϵ Edingtonove luminoznosti i da je akrecioni disk apsolutno crno telo, te koristeći Štefan-Bolcmanov (Jožef Stephan, Ludwig Boltzmann) zakon

$$4\pi r^2 \sigma T^4 = \epsilon L_{Edd}$$

gde je σ Štefan-Bolcman-ova konstanta. Odavde je temperatura

$$T \sim 5 \times 10^7 \left(\frac{2GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \left(\epsilon \frac{M_\odot}{M} \right)^{1/4} \text{ K} \sim 5 \left(\frac{2GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \left(\epsilon \frac{M_\odot}{M} \right)^{1/4} \text{ keV}$$

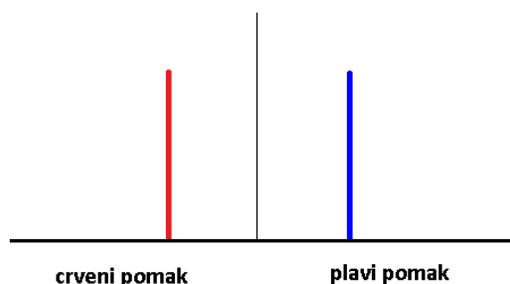
Za neutronske zvezde $2GM/c^2 r$ je oko 0.10, a za rotirajuću Crnu rupu bi ta vrednost uvek bila manja od 1 na osnovu (4.23).

Na osnovu ovoga, unutrašnji deo akrecionog diska supermasivne Crne rupe od recimo $10^8 M_\odot$ bi imao temperaturu reda velicina 10^4K , što je dovoljno za jonizaciju vodonika, a ovoj temperaturi bi odgovarao spektar crnog tela koji bi pokrio ultraljubičastu (UV) do vidljive (VID) oblasti spektra. Spoljašnji delovi diska imaju nižu temperaturu.

Niski energetske nivoi nekih metala sa periferije diska ostaju neeksitovani na ovim temperaturama. Medjutim, spektri AGN-a su bogati širokim emisionim linijama metala koje odgovaraju energijama $\sim \text{keV}$. Ovi metali su prvobitno pobudjeni X zracima koji su emitovani usled aktivnosti iznad i ispod akrecionog diska²⁹. EM spektri metala koji se nalaze u disku predstavljaju stoga veoma bogat izvor informacija o dinamici samog diska i o samom prostor-vremenu oko rotirajuće Crne rupe i zbog toga pružaju čak i mogućnost eksperimentalne provere Kerovog rešenja.

6.2. Uticaj gravitacionog polja rotirajuće Crne rupe na profil spektralne linije

Naime, pretpostavimo da posmatramo akrecioni disk u ravni koja sadrži liniju posmatranja. Pošto disk rotira, fotoni emitovani sa jednog kraja će posedovati crveni pomak (sa onog koji se udaljava od nas), a oni emitovani sa drugog kraja poseduju plavi pomak (sa onog koji se nama približava). Rezultat u klasičnoj mehanici, dakle u ravnom prostoru, bi bio da je posmatrana linija razdvojena na dve: jednu koja ima crveni pomak, i drugu koja ima plavi pomak (Slika 13).



Slika 13: Spektralna linija snimljena sa radijalno odlazećeg (crveni pomak) i radijalno dolazećeg (plavi pomak) kraja diska.

Medjutim, kako se ovde radi o jakom gravitacionom polju objekta koji rotira, spektralna linija će nakon uračunavanja svih efekata imati veoma drugačiji profil.

Neka je foton emitovan na rastojanju \vec{r} od centra Crne rupe ka nama. Foton poseduje izvesnu energiju E_0 , merenu na mestu emitovanja (što je ista energija koju bismo izmerili u ravnom prostor-vremenu) i ugaoni moment \vec{L} , koji je uvek usmeren ka nama koji posmatramo disk, ali njegova vrednost je merena u odnosu na centar rotacije (centar Crne rupe). Tako da, ukoliko je foton emitovan iz centralnog regiona diska sa linije posmatranja, ugaoni moment je jednak nuli ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{u}_{ph} = 0$, jer je $\vec{r} \parallel \vec{u}_{ph}$), a ako je emitovan sa jednog ili drugog kraja diska (ili sa nekog drugog mesta) ima vrednost različitu od nule, jer postoji i uglovna komponenta brzine fotona.

Da bismo našli izraz za crveni pomak, tražimo odnos energije emitovanog fotona merene na mestu gde je emitovan E_0 i energije koju mi, posmatrači, merimo E_p . Energiju fotona E_0 tražimo kao skalarni proizvod kvadrvektora impulsa fotona $p_{0\mu}$ i kvadrvektora brzine izvora u_i^μ :

²⁹ O čemu je detaljnije pisano u nastavku ovog poglavlja.

$$E_0 = u_i^\mu p_{0\mu} \quad (6.1)$$

Kvadrivektor brzine fotona je

$$u_i^\mu = (u_i^t, 0, 0, u_i^\varphi) = u_i^t \zeta^{\mu(t)} + u_i^\varphi \zeta^{\mu(\varphi)}$$

gde smo ostavili komponente Killingovih vektora $\zeta_t^{(t)}$ i $\zeta_\varphi^{(\varphi)}$. A kako je ugaona brzina rotacije diska $\Omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi}/\dot{t} = u_i^\varphi/u_i^t$, odakle je $u_i^\varphi = \Omega u_i^t$, to prethodni izraz postaje:

$$u_i^\mu = u_i^t (\zeta^{\mu(t)} + \Omega \zeta^{\mu(\varphi)})$$

u_i^t ćemo kasnije izračunati iz skalarnog proizvoda.

Izraz (6.1), imajući na umu i (2.5), sada postaje:

$$E_0 = u_i^\mu p_{0\mu} = u_i^t (\zeta^{\mu(t)} + \Omega \zeta^{\mu(\varphi)}) p_{0\mu} = u_i^t (E - \Omega L) \quad (6.2)$$

Za energiju fotona koju meri posmatrač u asimptotski ravnom prostoru imamo:

$$E_p = u^\mu p_\mu = u^t \zeta^{\mu(t)} p_\mu = \zeta^{\mu(t)} p_\mu = E \quad (6.3)$$

Sada je odnos energija (6.2) i (6.3):

$$\frac{E_p}{E_0} = \frac{\nu_p}{\nu_0} = \frac{E}{u_i^t (E - \Omega L)} = \frac{1}{u_i^t (1 \pm \Omega b)} \quad (6.4)$$

gde je $b = \left| \frac{L}{E} \right|$, a ν_p i ν_0 odgovarajuće frekvencije fotona. Znak plus odgovara fotonima emitovanim sa radijalno odlazećeg kraja diska, dok znak minus odgovara fotonima emitovanim sa radijalno dolazećeg kraja diska.

Iz uslova da je $u_i^\mu u_{i\mu} = g_{\mu\nu} u_i^\mu u_i^\nu = 1$, na osnovu (3.5) dobijamo:

$$u_i^t = \sqrt{\frac{r}{\Omega^2 (r(r^2 + a^2) + 2Ma^2) + 4Ma\Omega - 2M + r}} \quad (6.5)$$

dok znamo na osnovu (4.21) da je (uzimamo znak plus):

$$\Omega = \frac{\sqrt{M}}{(r^{3/2} + aM^{1/2})} \quad (6.6)$$

Parametar $b = |L/E|$ možemo izračunati na osnovu uslova koji važi za foton:

$$u^\mu u_\mu = g_{tt}(u^t)^2 + 2g_{t\varphi}u^t u^\varphi + g_{\varphi\varphi}(u^\varphi)^2 = 0$$

i na osnovu (4.19a) i (4.19b) kada je $\theta = \pi/2$, eliminišući \dot{t} i $\dot{\varphi}$. Dobija se kvadratna jednačina čija su rešenja:

$$b = \frac{2Ma \mp r\sqrt{r^2 - 2Mr + a^2}}{2M - r} \quad (6.7)$$

gde sada znak minus odgovara radijalno odlazećem kraju diska, a znak plus radijalno dolazećem kraju diska.

Ubacujući (6.5), (6.6) i (6.7) u (6.4), dobijamo funkciju koja izgleda veoma komplikovano i koju iz tog razloga nećemo ovde napisati, već ćemo je obeležiti sa $g_\pm(r, a, M)$, gde plus/minus odgovara zapisu u (5.4).

Kako je

$$\frac{v_p}{v_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_p} = g_\pm(r, a, M) \Rightarrow \frac{\lambda_p}{\lambda_0} - 1 = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = z$$

odavde je crveni pomak:

$$z_\pm = \frac{1 - g_\pm(r, a, M)}{g_\pm(r, a, M)} \quad (6.8)$$

Ova funkcija nam govori koliko su linije pomaknute zbog uticaja rotirajućeg gravitacionog polja Crne rupe. Medjutim, postoji i efekat specijalne teorije relativnosti, tj. relativistički Doppler-ov efekat koji je dat izrazom:

$$\frac{v_p}{v_0} = \frac{\sqrt{1 - \Omega^2 r^2}}{1 \pm \Omega r \cos \beta}$$

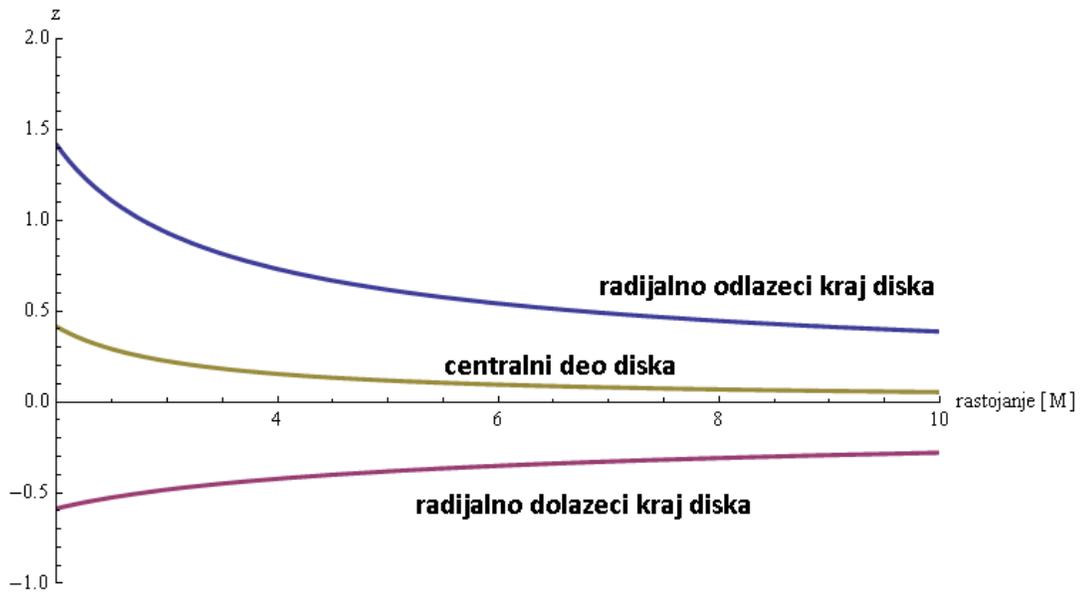
gde je brzina izvora $v = \Omega r$, a ugao β odgovara uglu između linije posmatranja i vektora tangentne brzine obrtanja diska, tako da je u tačkama na obodima diska ovaj ugao jednak nuli, te je $\cos \beta = 1$ i prethodna formula se svodi na

$$\frac{v_p}{v_0} = \frac{\sqrt{1 - \Omega^2 r^2}}{1 \pm \Omega r} \quad (6.9)$$

Za centralne delove diska ova formula je

$$\frac{v_p}{v_0} = \sqrt{1 - \Omega^2 r^2} \quad (6.10)$$

Na Slici 14 je prikazan zveni pomak u zavisnosti od rastojanja uzrokovan relativističkim Doppler-ovim efektom u ravnom prostoru. Sa tog grafika se sa ordinate može očitati relativni razmak izmedju crveno i plavo pomaknute linije. U odnosu na odsustvo crvenog pomaka ($z = 0$), vidi se da je crveni pomak linija veći od plavog za dato rastojanje. U beskonačnosti ova asimetrija nestaje i linije su na jednakom rastojanju od $z = 0$. Takodje, linije emitovane sa centralnog dela diska su uvek crveno pomaknute po (6.10), zbog efekta aberacije svetlosti.



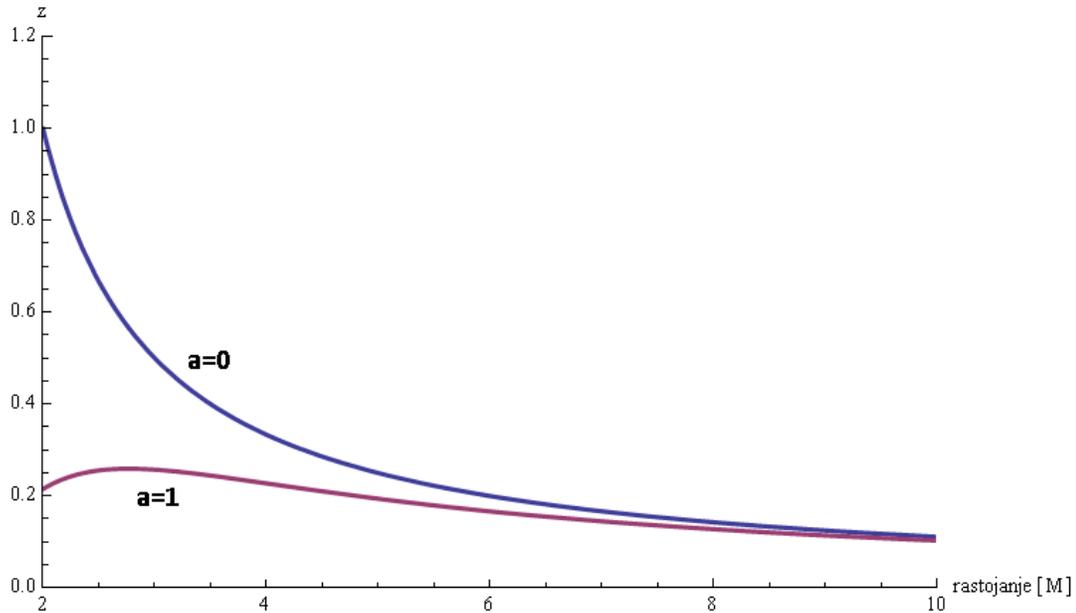
Slika 14: Crveni pomak od zavisnosti od rastojanja mesta emitovanja do centra rotacije akrecionog diska, bez uticaja gravitacionog polja. Pojavljuje se asimetrija izmedju plavo i crveno pomaknute linije, zbog relativističkog Doppler-ovog efekta.

Formule (6.9) i (6.10) daju kinematičku relativističku korekciju na (6.8). Konačna jednačina za crveni pomak će tada biti:

1 - za centralni deo diska ($b = 0$):

$$z = \frac{1 - g_{b=0}(r, a, M)\sqrt{1 - \Omega^2 r^2}}{g_{b=0}(r, a, M)\sqrt{1 - \Omega^2 r^2}} \quad (5.11)$$

i grafik je za slučaj $a = 0$ i $a = 1$ prikazan na Slici 15.



Slika 15: Crveni polak linija fotona emitovanih sa centralne ivice diska za Schwazschild-ovu Crnu rupu ($a = 0$) i ekstremnu Kerovu Crnu rupu ($a = 1$).

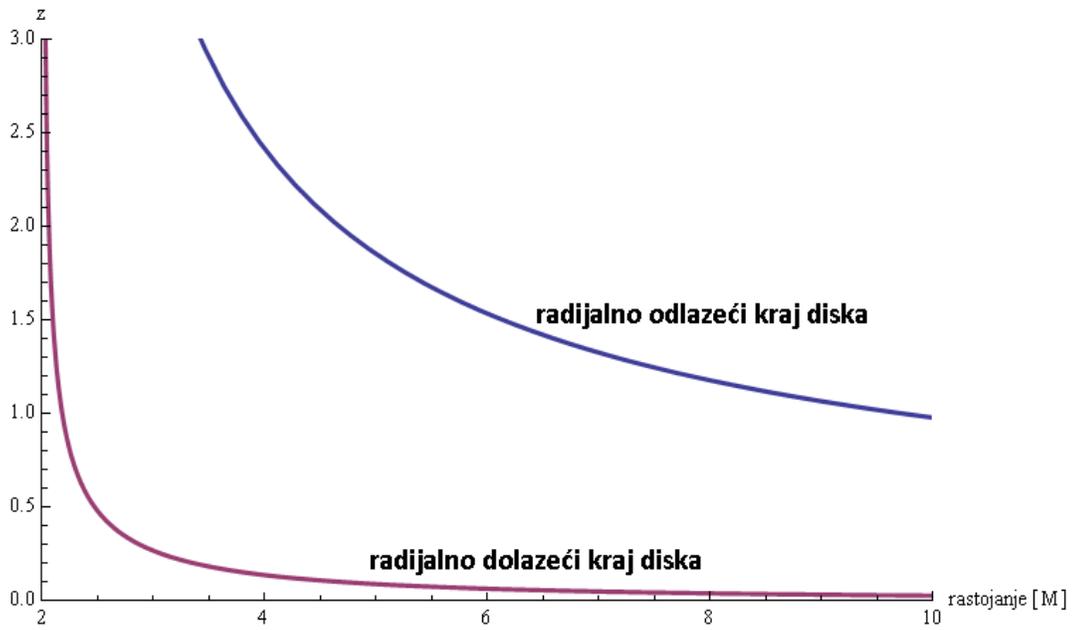
Sa slike se vidi da su linije emitovane sa dela diska koji leži na liniji posmatranja obavezno pomaknute ka crvenom delu spektra. Crveni pomak opada sa rastojanjem od centra diska, što je i za očekivati, jer je gravitaciono polje Crne rupe sve slabije. Primetimo da je za Švarčšildovu Crnu rupu crveni pomak na $r = 2M$ manji od beskonačnosti, kakav bi trebalo da bude. To je upravo zbog toga što se gravitacionom polju suprotstavlja centrifugalna sila okretanja samog diska, dok je za ekstremnu Kerovu Crnu rupu pomak još manji, jer se gravitaciono polje još više smanjuje zbog rotacije samog prostor-vremena (Lens-Tiringovog efekta). Zaključujemo da crveni pomak linija emitovanih sa centralnog dela diska opada sa povećanjem brzine rotacije (ugaonog momenta) Crne rupe.

2 - za radijalno odlazeću i radijalno dolazeću ivicu diska važi sledeća formula za crveni pomak:

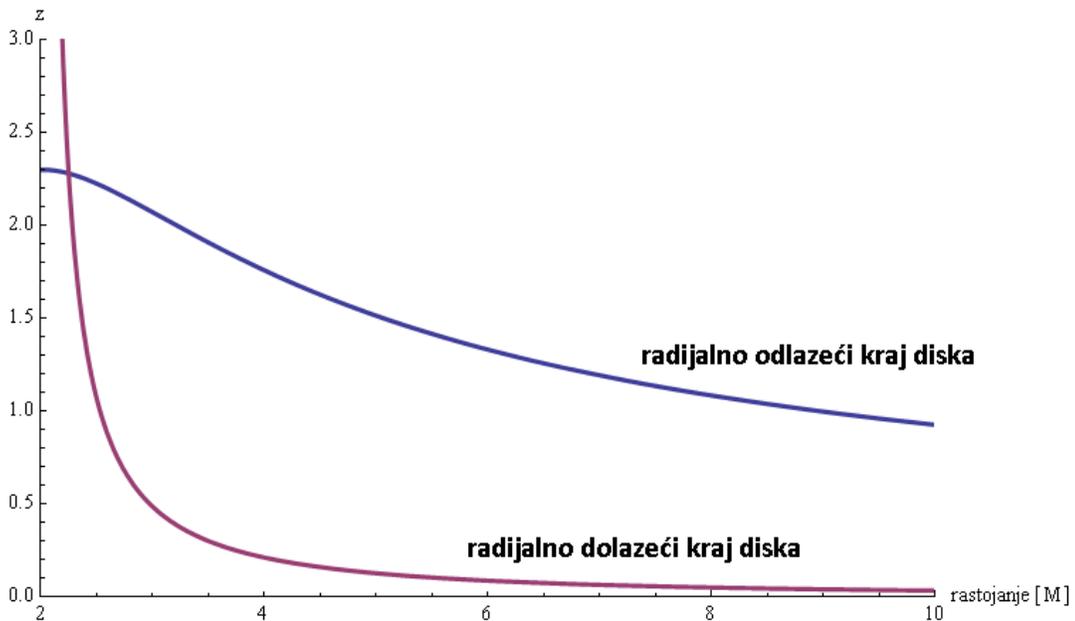
$$z_{\pm} = \frac{1 - g_{\pm}(r, a, M) \frac{\sqrt{1 - \Omega^2 r^2}}{1 \pm \Omega r}}{g_{\pm}(r, a, M) \frac{\sqrt{1 - \Omega^2 r^2}}{1 \pm \Omega r}} \quad (5.12)$$

i odgovarajući grafik za slučaj $a = 0$ je prikazan na Slici 16, a za $a = 1$ na Slici 17.

Poredjenjem Slike 16 i Slike 17 na sledećoj strani se vidi da će rotacija Crne rupe smanjiti rastojanje izmedju linija i to u velikoj meri na rastojanjima od $2M$ do oko $4M$ od centra Crne rupe.



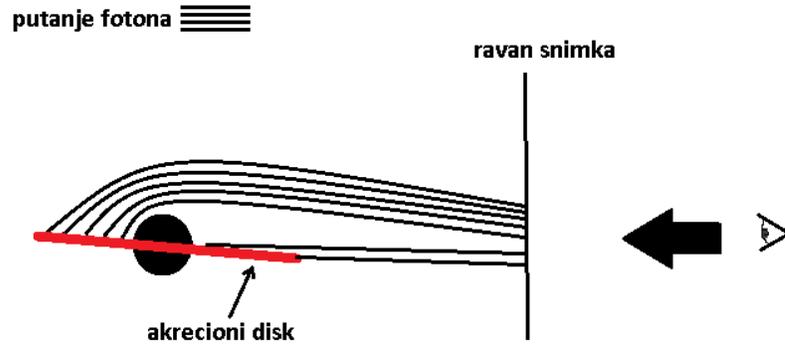
Slika 16: Crveni pomak linija fotona emitovanih sa suprotnih krajeva akrecionog diska u zavisnosti od rastojanja do centra Švarcšildove Crne rupe ($\alpha = 0$).



Slika 17: Crveni pomak linija fotona emitovanih sa ivice akrecionog diska u zavisnosti od rastojanja do centra ekstremne Kerove Crne rupe.

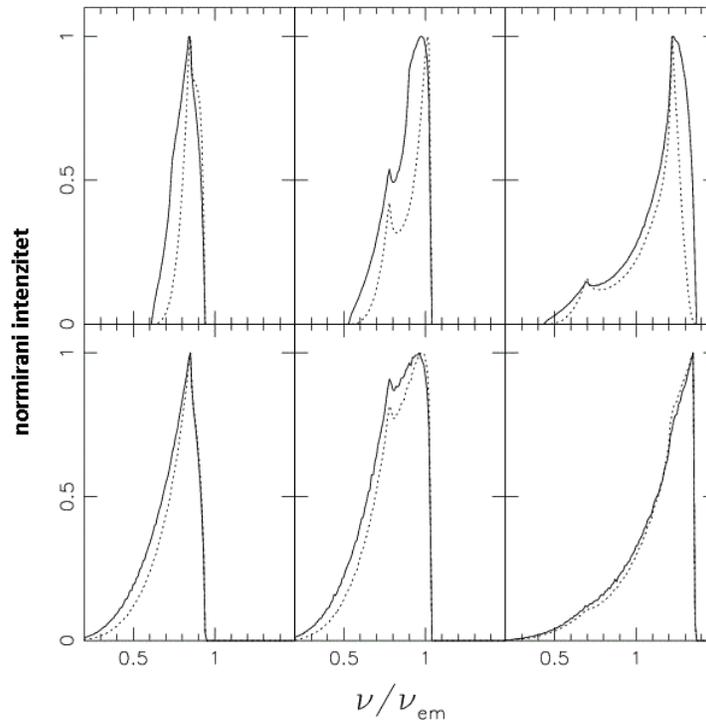
Postoje još neki efekti koje ovde nismo uračunali, a koji se u praksi pojavljuju. Jedan od njih je efekat gravitacionog sočiva, tj. zakrivljenja putanja svetlosti u prisustvu masivnog objekta, zbog koga možemo primiti svetlost i sa onih delova akrecionog diska sa kojih u ravnom prostoru ne bismo mogli. Ovo dodatno obogaćuje spektralnu liniju informacijama jer taj efekat takodje zavisi od mase, ugaonog momenta Crne rupe i rastojanja do Crne rupe. Rezultujući profil linije

sa ovim efektom je veoma tesno povezan sa inklinacijom akrecionog diska (uglom pod kojim je disk nagnut u odnosu na liiju posmatranja). Naime, kao što se na Slici 18 može videti, u zavisnosti od toga koliko je disk nagnut, zavisi i koliko će fotona sa, u klasičnom ravnom prostoru, nevidljive strane diska dospeti do posmatrača, pa time i koliki će biti intenzitet linije.



Slika 18: Uticaj inklinacije i efekta gravitacionog sočiva na intenzitet linije. Fotoni sa posmatranju nedostupnog dela diska bivaju zakrivljeni gravitacionim poljem te ipak stižu do posmatrača, povećavajuću intenzitet spektralnih linija.

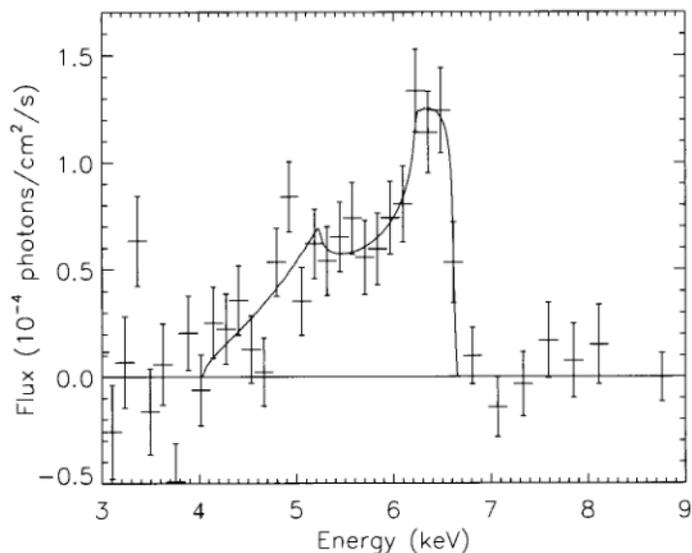
Nakon integracije svih efekata, linija koja potiče od onih fotona emitovanih sa celog akrecionog diska koji stižu do posmatrača može da izgleda kao na Slici 19, pri čemu linija zavisi i od veličine diska, tj. od unutrašnjeg i spoljašnjeg rastojanja njegovih odgovarajućih ivica do Crne rupe.



Slika 19: Profil linije akrecionog diska. Gornji red prikazuje slučaj Švarcšildove Crne rupe, donji red slučaj ekstremne Kerove Crne rupe. Kolone sa leva na desno prikazuju tri ugla inklinacije: $i = 10^\circ$, $i = 30^\circ$, $i = 75^\circ$. Integracija je izvršena za disk koji se proteže od $r=r_{ISCO}$ do $r = 15M$.

Sa slike se vide efekti koje smo diskutovali u dosadašnjem izlaganju, pogotovo smanjenje razlike energija između linije sa odlazećeg i dolazećeg kraja diska i proširenje linije ka crvenom delu spektra u Kerovom u odnosu na Švarčšildov slučaj.

Linija gvozdja na 6.4 keV je veoma česta u emisionim spektrima i ona se koristi za proučavanje prostor-vremena u oblasti oko rotirajuće supermasivne Crne rupe u centrima aktivnih galaksija. Na Slici 20 je prikazana jedna takva linija i može se uočiti da podaci ukazuju na proširenje linije ka crvenom delu spektra – efekat rotacije prostor-vremena.



Slika 20: Linija gvozdja galaksije MCG 6-30-15. Puna linija predstavlja fit za Schwarzschild-ov slučaj. Podaci ukazuju da je vrlo izvesno da postoji uticaj rotacije, što se vidi iz niskoenergetskog dela spektra.

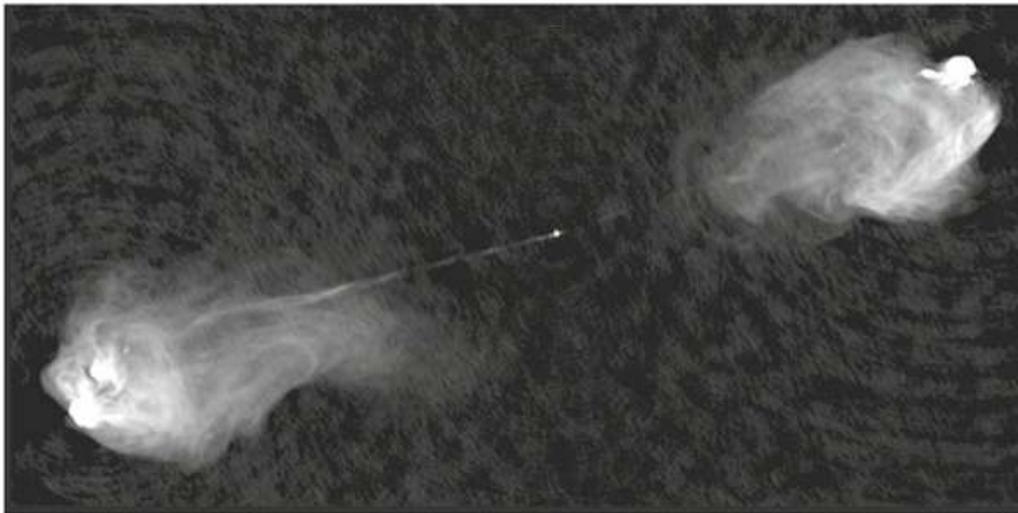
Zbog činjenice da na integralni profil spektralne linije utiču samo dva parametra vezana za Crnu rupu – ugaoni moment i masa Crne rupe, i jedna koji zavisi od položaja – inklinacija akrecionog diska u odnosu na liniju posmatranja, modeliranje linije je veoma olakšano i principijelno je vrlo lako odrediti parametre Crne rupe na osnovu ovakvih emisionih linija. Ovo predstavlja za sada jedini metod da se direktno izmere relativistički efekti predviđeni Kerovim rešenjem, pa time i testira samo predviđanje Kerovog rešenja i opšte teorije relativnosti, uopšte.

6.3. Džetovi naelektrisanih čestica

Postavlja se pitanje odakle dolazi X i gama zračenje i kako objasniti ogromne posmatrane luminoznosti od $10^{14}L_{\odot}$? Očigledno je da proizvodnja energije u akrecionom disku ne može objasniti ni spektre, ni luminoznosti.

Objašnjenje sledi iz činjenice da su u problemu magnetna polja nezanemarljiva. Naime, materija u akrecionom disku oko rotirajuće Crne rupe može razviti relativističke brzine, a pri tome je i jonizovana, tako da je neizbežno stvaranje jakog magnetnog polja. Dokaz za postojanje jakih magnetnih polja oko Crne rupe jesu dugački i jako kolimisani mlazevi (džetovi) naelektrisanih čestica koji izbijaju sa obe strane Crne rupe u centru aktivnih galaksija. Na Slici 21 je prikazan snimak galaksije Cygnus A sa džetovima naelektrisanih čestica, snimljen u radio delu spektra.

Magnetno polje se stvara zbog kretanja velike količine plazme oko Crne rupe u obliku torusa; magnetne linije sile su tada kružne sa centrom u sredini cevi torusa, i šire se ka spolja, ali u oblasti u sredini torusa (gde se nalazi Crna rupa) magnetne linije sile se skupljaju i polje je u toj oblasti najjače. Jačina magnetnog polja bi, na osnovu izučavanja sinhrotronskog zračenja, trebalo da je u jezgrima aktivnih galaksija reda veličina 10^4G .

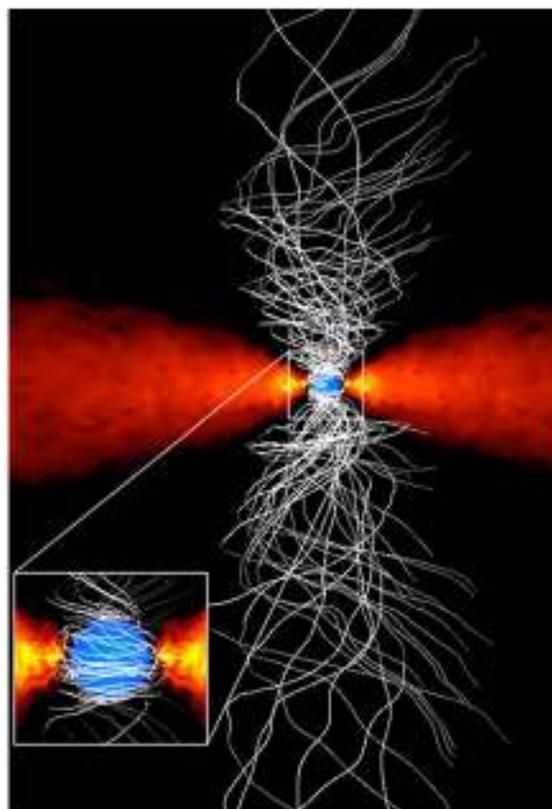


Slika 21: Aktivna galaksija Cygnus A sa džetovima. Rastojanje od jednog do drugog kraja mlazeva je oko 150 kpc. Na kraju mlazeva uočava se pojačani intenzitet, koji je posledica zakočnog zračenja – gubitak energije čestica prilikom sudara sa međuzvezdanom sredinom.

Dalje, linije sila koje su najbliže horizontu događaja Crne rupe su veoma guste i protežu se vertikalno naviše i naniže od ravni diska.

Ono što je fascinantno jeste da zbog rotacije materijala relativističkim brzinama, magnetno polje je *uvijeno*, kao što je prikazano na Slici 22. Ovo uvijanje dolazi zbog toga što informacija o promeni magnetnog polja putuje brzinom svetlosti koja je konačna, a same linije sila magnetnog polja kruže uporedivim brzinama. Ove linije nisu pravilne spirale, zbog toga što bivaju modifikovane turbulentnim kretanjima plazme u blizini ravni diska.

Postoje razni modeli koji nastoje da objasne koji se tačno fizički procesi i na koji način odvijaju u ovoj oblasti, međjutim, priroda problema je toliko kompleksna, da je još uvek nemoguće postaviti jedinstvenu teoriju koja će objasniti posmatračke podatke. Ta kompleksnost se ogleda u tome što, pored toga što se moraju uključiti magnetna polja, Kerovo rešenje više nije egzaktno rešenje za ovaj slučaj, jer ono opisuje prostor-vreme u vakuumu, a prostor oko realne Crne rupe je ispunjen materijom i energijom plazme i magnetnim

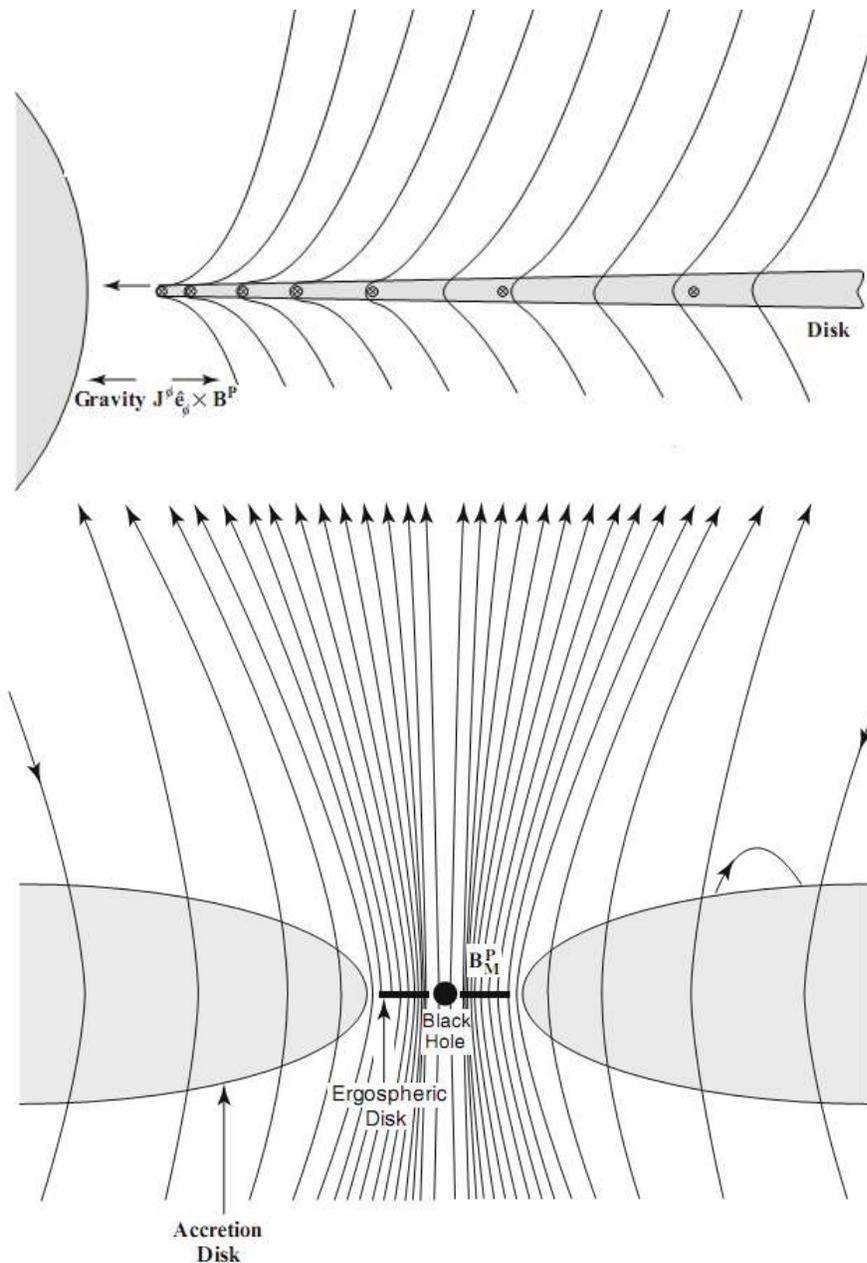


Slika 22: Simulacija koja pokazuje rotaciju samih linija sila magnetnog polja ekstremne supermasivne Crne rupe u centru akrecionog diska.

poljima. Zbog toga se moraju raditi numeričke simulacije koje uključuju sve ove efekte u model Kerove metrike za prostor ispunjen plazmom i EM poljima.

Uprkos tome, napravljen je izvestan pomak u razumevanju problema. Zna se da ergosfera ima veoma bitan uticaj na fiziku problema, i dosta dobro se mogu objasniti iznenadni i ogromni skokovi u luminoznosti.

Naime, materijal koji se nalazi između $r = M$ i $r = 2M$ od centra ekstremne Crne rupe ima relativističku rotacionu brzinu, i struje naelektrisanih čestica koje stvaraju magnetno polje spiralno padaju ka horizontu događaja, ali postaju sve zbijenije kako poniru jer poniranje usporava zbog sve jače Lorenz-ove sile koja se suprotstavlja gravitaciji (Slika 23).



Slika 23: Disk ergosfere. Gore: naelektrisane struje usporavaju poniranje jer se gravitaciji suprotstavlja Lorenz-ova sila. Dole: rezultujuće magnetno polje akrecionog diska i diska ergosfere.

Ovo gomilanje struja prouzrokuje sve jače magnetno polje unutar tih struja, što znači da su magnetne linije još gušće, tj. magnetni fluks je još veći.

Oblast gde je Lorencova sila jača od gravitacije se može naći i u regiji izvan ravni diska, na mestima gde su linije sila dovoljno guste, te magnetno polje dovoljno jako, a i u toj oblasti postoji materijal, koji, pak, ne mora biti jonizovan, bar ne u tolikoj meri koliko je materijal u akrecionom disku jonizovan.

Sad, odvijaju se dva procesa:

1 - Može se desiti da materijal iz akrecionog diska počne pratiti neke magnetne linije sile koje su "lokalnog" karaktera, tj. one koje potiču iz lokalnih kretanja naleytrisanja, najčešće turbulentnih. Povučeni ovim magnetnim linijama, materijal može dospeti do oblasti gde je Lorentz-ova sila jača od gravitacije, te ga može bukvalno "lansirati" duž tih linija sila u kolimisane mlazeve.

2 - Takodje, postoji i materijal koji se nalazi iznad i ispod akrecionog diska i diska ergosfere u formi BLR ("broad line region") oblaka. Emisione linije iz ovih oblaka su vrlo široke što ukazuje na velike brzine kretanja materijala i visoku temperaturu. Ovi oblaci mogu upadati u oblast diska i zbog velikih energija prouzrokovati intenzivno zakočno zračenje u X delu spektra i izazvati jake udarne talase čija je brzina nekoliko desetina puta veća od brzine zvuka u toj sredini. Takodje ovi oblaci mogu padati i na samu Crnu rupu pri čemu u sudaru sa gama fotonima mogu prouzrokovati i stvaranje elektron-pozitron parova.

To su glavni procesi koji prouzrokuju relativističke mlazeve i iznenadne emisije ogromnih luminoznosti.

Ispostavlja se da su relativistički džetovivi i emisija fotona procesi koji mogu smanjiti energiju Crne rupe i njihova energetičnost potiče upravo od toga što dolazi do prebacivanja ugaonog momenta sa Crne rupe na relativističke čestice posredstvom magnetnog polja. Model za ovaj proces postavili su Blanford i Znajek (Roger Blanford, Roman Znajek). Njihova ideja jeste da pri spiralnoj akreciji materijala na Crnu rupu dolazi do emisije gama fotona. Ovi fotoni mogu posedovati toliku energiju da omoguće stvaranje elektron-pozitronskih parova. Naleytrisane čestice dalje proizvode magnetno polje oko Crne rupe koje može omogućiti izbacivanje čestica duž džetova daleko od Crne rupe, oduzimajući energiju. Ovo se dešava jer magnetno polje može izazvati takvo kretanje unutar ergosfere da određeni deo materijala poseduje negativnu mehaničku energiju i time nakon upadanja iza horizonta dogadjaja smanjiti ugaoni moment Crne rupe.

Na osnovu ovoga, kretanje plazme u ergosferi predstavlja glavni "motor" koji održava aktivnost AGN-a.

7. Eksperimentalna potvrda frame-dragging efekta

2004. godine lansiran je satelit pod imenom Gravity Probe B i postavljen u polarnu orbitu oko Zemlje u cilju provjere predviđanja opšte teorije relativnosti – precesije zbog zakrivljenja prostora (isti efekat koji uzrokuje i precesiju Merkurove orbite) i precesije zbog efekta povlačenja metrike. Ovde ćemo u osnovnim crtama opisati na koji način se pomoću žiroskopa može meriti Lens-Tiringov efekat.

Najlakše je da posmatramo žiroskop koji slobodno pada ka Zemlji duž z -ose oko koje Zemlja rotira. Vektor spina ovog žiroskopa ima samo prostorne komponente i postavimo ga tako da spin leži u xy ravni, normalno na brzinu kojom slobodno pada duž z -ose. Tada su vektor spina i brzine:

$$s^\mu = (0, s^x, s^y, 0) \quad (7.1)$$

$$u^\mu = (1, 0, 0, u^z) \quad (7.2)$$

Ono što tražimo jesu jednačine kretanja komponenti spina, odakle ćemo pročitati ugaonu brzinu precesije.

Ako napišemo kovarijantni izvod vektora spina, a žiroskop puštamo da slobodno pada duž geodezijske linije, onda on postaje jednak nuli:

$$D_\alpha s^\mu = \frac{\partial s^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu s^\beta = 0$$

Nama treba izvod po sopstvenom vremenu vektora spina. Stoga, ako ovu jednačinu pomnožimo sa u^α :

$$u^\alpha \frac{\partial s^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha s^\beta = 0$$

i ako imamo u vidu da je $u^\alpha = dx^\alpha/d\tau$, dobijamo:

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial s^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha s^\beta = \frac{ds^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha s^\beta = 0 \quad (7.3)$$

Sad, pošto smo komponente vektora brzine i spina zadali u Dekartovim koordinatama, traće nam Kristofelovi simboli u ovim koordinatama, a to znači i Kerova metrika u Dekartovim koordinatama. Takodje, metriku (3.5) ćemo aproksimirati metrikom koja važi za mali ugaoni momenat, pošto se Zemlja okreće relativno sporo. To znači da možemo zanemariti sve članove drugog reda po a i stoga dobijamo³⁰:

$$ds^2 = ds_{Sch}^2 + \frac{4GMa}{cr^3} dt(xdy - ydx) + O(a^2)$$

³⁰ Sada ćemo vratiti konstante G i c .

Na osnovu ove metrike, dobijaju se dva Kristofelova simbola koji su nam potrebni (za $x = y = 0$, dakle za z-osu):

$$\Gamma_{ty}^x = \frac{2GMa}{cz^3}$$

$$\Gamma_{tx}^y = -\frac{2GMa}{cz^3}$$

Na osnovu (7.3) dobijamo jednačine kretanja za spin:

$$\begin{aligned} \frac{ds^x}{d\tau} + \Gamma_{ty}^x u^t s^y &= \frac{dt}{d\tau} \frac{ds^x}{dt} + \Gamma_{ty}^x u^t s^y = u^t \frac{ds^x}{dt} + \Gamma_{ty}^x u^t s^y = u^t \left(\frac{ds^x}{dt} + \Gamma_{ty}^x s^y \right) = 0 \\ \frac{ds^x}{dt} &= -\frac{2GMa}{cz^3} s^y \end{aligned} \quad (6.4)$$

i slično se dobija za drugu komponentu:

$$\frac{ds^y}{dt} = \frac{2GMa}{cz^3} s^x \quad (6.5)$$

Deleći jednačinu (7.4) sa (7.5) dobijamo:

$$\frac{ds^x}{ds^y} = -\frac{s^y}{s^x}$$

odakle je:

$$(s^x)^2 + (s^y)^2 = s^2 = \text{const.}$$

vraćajući ovo u (7.4), dobijamo:

$$\frac{ds^x}{\sqrt{s^2 - (s^x)^2}} = -\frac{2GMa}{cz^3} dt$$

odakle je nakon uvođenja smene $s^x = s \cos \varphi$, tj. nakon izražavanja komponenti spina preko projekcija u xy ravni, gde je ugao φ upravo polarni ugao, i nakon ubacivanja izraza za a (3.4), dobija se:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega_{FD} = \frac{2GJ}{c^2 z^3} \quad (7.6)$$

Isti rezultat se dobija i odgovarajućom smenom u (7.5).

Jednačina (7.6) predstavlja vrednost ugaone brzine precesije spina žiroskopa prilikom njegovog slobodnog pada duž z-ose. Za proizvoljnu orbitu poluprečnika R oko Zemlje važi vektorska jednačina:

$$\vec{\Omega}_{FD} = \frac{2G}{c^2 R^3} \left(\frac{3\vec{R} \cdot (\vec{J} \cdot \vec{R})}{R^2} - \vec{J} \right) = \frac{2GI}{c^2 R^3} \left(\frac{3\vec{R}(\vec{\omega} \cdot \vec{R})}{R^2} - \vec{\omega} \right)$$

gde je I moment inercije Zemlje, $\vec{\omega}$ ugaona brzina rotacije Zemlje, a količnik $\vec{R}/R = \vec{e}_r$. Skalarni proizvod $\vec{\omega} \cdot \vec{R} = \omega R \cos \theta$ daje upravo zavisnost ugaone brzine precesije od položaja žiroskopa na orbiti. Teorijski rezultat na osnovu gornje jednačine bi za polarnu orbitu trebalo da bude $39.2 \times 10^{-3}''/\text{god}$ ($'' = \text{jedna lučna sekunda}^{31}$).

Gravity Probe B je kružio oko Zemlje u polarnoj orbiti³² koja je prikazana na Slici 9 na strani 59 godinu dana, od 28. avgusta 2004. do 14. avgusta 2005. U maju 2011. godine su konačno objavljeni rezultati, nakon petogodišnje analize. Rezultat je:

$$|\vec{\Omega}_{FD}| = 37.2 \pm 7.2''/\text{god}$$

te se može konstatovati da je još jedno predviđanje opšte teorije relativnosti eksperimentalno potvrđeno sa preciznošću od 19%. Gravity Probe B je u isto vreme merio i efekat geodetske precesije, koji se od teorijske vrednosti predviđene opštom teorijom relativnosti razlikuje za svega 0.28%.

³¹ $1'' = 4.848 \times 10^{-9} \text{rad} = 2.778 \times 10^{-7}^\circ$

³² Kakva je prikazana na Slici 9, strana 59.

8. Gravitacija i fundamentalna fizika

Fizika kojom danas opisujemo Prirodu temelji se na dve opšte teorije – opštoj teoriji relativnosti, koja opisuje makrosvet i kvantnoj teoriji polja, koja opisuje mikrosvet. Sa aspekta fundamentalnih interakcija, od četiri fundamentalne sile Prirode (gravitaciona, elektromagnetna, slaba i jaka), gravitaciju opisuje opšta teorija relativnosti, a ostale tri kvantna teorija polja. Takodje, na nivou kvantne teorije polja, potonje tri sile su ujedinjene: elektromagnetna i slaba u elektroslabu silu, koja je onda ujedinjena sa jakom u tzv. veliku objedinjenu silu, koju opisuju još nekompletne GUT³³ teorije. Objedinjenje elektromagnetne, slabe i jake sile je jedan od najznačajnijih koraka u nauci učinjenih u istoriji čovečanstva i ono znači da se pomenute tri sile ponašaju potpuno isto na visokim energijama – nemoguće ih je razlikovati. Sledeći korak bi, prirodno, bio ujedinenje ove tri sile sa gravitacijom, čime bi se ujediniio opis mikro- i makrosveta u jednu jedinstvenu fundamentalnu interakciju Prirode.

Medjutim, pokazalo se da bi takvo ujedinenje moralo da prati promene postojećih teorija *u korenu*, jer su matematički aparati opšte teorije relativnosti i kvantne teorije polja nekompatibilni i teorije je nemoguće objediniti u sadašnjem obliku. Nekoliko je razloga zbog kojih je to tako.

Prvo, elektromagnetna, slaba i jaka sila opisane su teorijama Jang-Milsovog tipa (Chen-Ning Yang, Robert L. Mills) tipa koje se baziraju na principu kalibracionih simetrija, koji kao rezultat daje linearnu interakciju po potencijalima polja sve tri sile, dok je gravitaciona sila opisana pomoću OTR nelinearna po izvodima metričkog tenzora.

Drugo, opisivanje gravitacije je po mnogo čemu drugačije od opisa ostalih sila zbog toga što je gravitaciona sila opisana kao posledica zakrivljenja prostor-vremena, dok su ostale tri sile opisane kao razmenjivanje odgovarajućih nosilaca interakcija – virtuelnih čestica – između čestica koje interaguju. Ukoliko bismo gravitacionu silu hteli da opišemo kao razmenjivanje virtuelnih čestica – gravitona – između čestica koje poseduju masu/energiju, naići ćemo na problem, jer moramo uračunati interakciju sa samim prostor-vremenom; to je suštinska razlika između gravitacione sile i ostale tri sile: u kvantnoj teoriji polja prostor-vreme je samo arena u kojoj opisujemo interakciju među česticama, a u opštoj teoriji relativnosti samo prostor-vreme, dakle sama arena, je ravnopravni akter zajedno sa česticama. Stoga bi hipotetička *kvantna teorija gravitacije* trebalo da poseduje matematički aparat koji opisuje interakciju materije/energije sa samim prostor-vremenom i obrnuto. Takva teorija još uvek nepostoji, ali nešto najbliže toj teoriji je *teorija stringova*, koju je na žalost, nemoguće direktno proveriti.

8.1. Hokingovo zračenje

Prvi korak ka mogućnosti ujedinenja gravitacije sa kvantnom teorijom polja načinili su Hoking i Bekenštajn (Jacob Bekenstein) sedamdesetih godina prošlog veka, kada su shvatili da Crne rupe moraju imati temperaturu i entropiju.

Naime, zamislimo jednu zatvorenu kutiju sa zračenjem crnog tela unutar nje. Takva kutija se nalazi na nekoj temperaturi i poseduje neku entropiju. Ako ovu kutiju ubacimo u Crnu rupu, entropija spoljašnjeg Univerzuma će se smanjiti. Kako je ovo u suprotnosti sa drugim zakonom

³³ Grand Unification Theory – teorija velikog objedinjenja.

termodinamike, mora postojati neka entropija vezana za Crnu rupu, koja se povećava. Prema tome, Crna rupa bi trebalo da poseduje entropiju, a to dalje implicira da Crna rupa ima i neku temperaturu.

Pošto je promena entropije nenegativna ($dS \geq 0$), a i promena površine horizonta događaja takodje nenegativna, možemo pronaći vezu izmedju ove dve veličine. Sada nastupa tzv. poluklasičan pristup, pomoću koga je moguće (u ovom konkretnom problemu) povezati kvantnu teoriju i gravitaciju. Naime, suština je da samo prostor-vreme izdelimo na najsitnije moguće oblasti – da ga diskretizujemo – i veličina tog najmanjeg dela prostor-vremena može se izraziti samo pomoću fundamentalnih konstanti:

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.62 \times 10^{-35} \text{m} \quad (8.1)$$

gde je \hbar redukovana Plankova (Max Planck) konstanta. Ovo je tzv. Plankova dužina. Takodje se može od fundamentalnih konstanti napraviti veličina koja ima dimenzije mase:

$$M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.28 \times 10^{-8} \text{kg} \sim 10^{19} \text{GeV} \quad (8.2)$$

koja se naziva Plankova masa, a ako (8.1) podelimo brzinom svetlosti, dobijamo Plankovo vreme:

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.4 \times 10^{-44} \text{s} \quad (8.3)$$

U fizici fundamentalnih interakcija, ove veličine (8.1) i (8.2) definišu najmanji observabilni deo prostor-vremena³⁴ – iz unutrašnjosti oblasti ovih dimenzija Hajzenbergov (Werner Heisenberg) princip neodređenosti nam ne dozvoljava da dobijemo ikakvu informaciju o procesima koji se unutar te oblasti odvijaju – oni se odvijaju, ali se ne mogu neposredno opaziti i zato se nazivaju *virtuelni procesi*. Ovo je vrlo slično slučaju sa Crnom rupom, samo što su dimenzije tih oblasti veoma mnogo redova veličina manje od dimanzija postojećih Crnih rupa (najmanje 10^{38} puta). Sad, na osnovu ovoga možemo *diskretizovati* horizont događaja tako da smatramo da je on popoločan velikim brojem infinitezimalno malih horizonata događaja kojih ima N . Tada bi površina horizonta događaja bila:

$$A \sim N l_p^2 \quad (8.4)$$

³⁴ Videćemo u narednom odeljku kojim rezonom se dolazi do ovih veličina.

Sa druge strane, pošto smo površinu horizonta događaja popločali sa N identičnih infinitezimalnih horizonta događaja, broj načina na koji to možemo uraditi je $N!$, pa je entropija data Bolcmanovom jednačinom

$$S = k \ln N!$$

gde je k Bolcmanova konstanta. Za veliko N može se reći da je entropija sigurno veća od

$$S = kN$$

Stavljajući za N iz (8.4) u prethodni izraz i imaući u vidu (8.1), dobijamo

$$S \sim \frac{kc^3 A}{\hbar G}$$

dok je tačan izraz za entropiju strogim formalizmom dobio Bekenstein:

$$S = \frac{kc^3 A}{4\hbar G} = \frac{A}{4} \quad (8.4)$$

Ovaj izraz³⁵ (koji se inače naziva Bekenštajn-Hokingova entropija) je izuzetno bitan – u jednoj jenačini pojavljuju se fundamentalne konstante prirode – k , c , G , \hbar i to je prvi slučaj da se fizičkim rezonom dolazi do neke takve jednačine. Štaviše, ova jednačina je rezultat razmišljanja u pravcu spajanja opšte teorije relativnosti i principa kvantne mehanike. Primetimo da u konstanta karakteristična za makrosvet G i konstanta karakteristična za mikrosvet \hbar stoje zajedno u jednoj jednačini. Takođe, procenjujući gornji izraz, vidimo da je kombinacija konstanti $kc^3/\hbar G$ obezbeđuje ogromnu entropiju – Crne rupe su stoga objekti sa najvećom entropijom u Univerzumu.

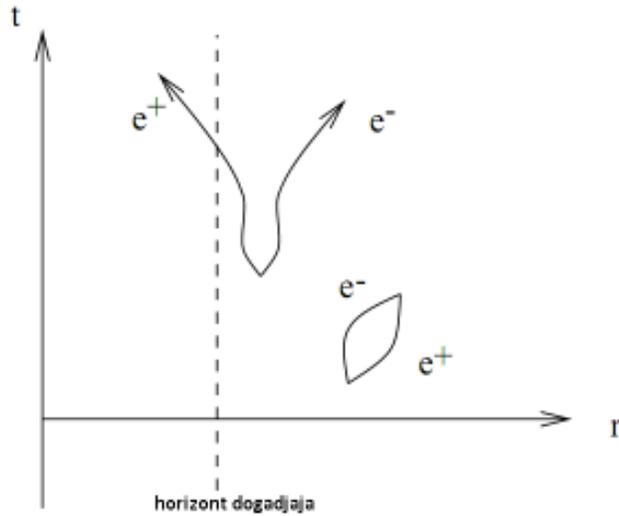
Probajmo sada da definišemo temperaturu Crne rupe. Pošto činjenica da je Crna rupa apsolutno crno telo sa konačnom entropijom implicira da Crna rupa mora imati neku temperaturu na kojoj će zračiti, postavlja se pitanje koji bi mehanizam to mogao omogućiti, ako ništa ne može izaći izvan horizonta događaja. Odgovor na ovo pitanje dao je Hoking i ovde ćemo ga predstaviti ukratko.

Naime, ideja je da se u problem uključe same kvantne fluktuacije vakuuma u blizini horizonta događaja. Kako unutar prostor-vremenskog intervala definisanim Hajzenbergovim relacijama neodređenosti (Plankovo vreme i Plankova dužina) dolazi do konstantne kreacije i anihilacije parova čestica-antičestica, moguće je da par nastane u neposrednoj blizini horizonta događaja. Sad, kao što bi bilo moguće da se jakim električnim poljem virtuelnom paru čestica-antičestica dodeli tolika energija da one napuste oblast nastanka i to u suprotnim smerovima i tako postanu realne čestice koje možemo opaziti, tako isto i jake plimske sile u blizini horizonta događaja mogu razdvojiti par čestica-antičestica, i to tako da jedna dobije putanju koja vodi unutar

³⁵ U poslednjoj jednakosti ćemo pisati rezultat u jedinicama $\hbar = G = k = c = 1$.

horizonta događaja, a druga nastavi putanjom koja vodi u beskonačnost, daleko od Crne rupe, kao što je prikazano na Slika 24.

Ovo je također omogućeno i time što, primenom Hajzenbergove relacije neodređenosti, horizont događaja gubi definisan poluprečnik – njegov položaj se *razmazuje*, te postoji verovatnoća da se jedna od dve nastale čestice nađe unutar horizonta događaja iako je par nastao van njega. Pošto je ukupna energija vakuuma jednaka nuli, tj. zbir energija virtuelne čestice i antičestice je jednak nuli, nakon razdvajanja čestica ovo opet mora važiti. Dalje, znamo da čestica koja je pobegla Crnoj rupi mora posedovati neku energiju koja je pozitivna, jer je postala realna čestica koju možemo da opazimo. Stoga, drugi par koji je upao u Crnu rupu mora imati negativnu energiju koja će Crnoj rupi *smanjiti masu*. Odavde sledi da (4.11) nije validno i da se entropija Crne rupe može smanjiti, što narušava drugi zakon termodinamike.



Slika 24: Kreacija para čestica-antičestica u blizini horizonta događaja, prikazana na prostor-vremenskom dijagramu.

Međutim, treba imati na umu da mi ne znamo od čega se sastoji Crna rupa – stoga ne možemo utvrditi u kakvoj formi se nalazi materija unutar horizonta događaja i od kojih čestica je sačinjena. Novonastala čestica potiče izvan Crne rupe, i njena energija (koju je dobila razdvajanjem od antičestice) je pozajmljena od strane Crne rupe, a o čestici koja je upala u nju ne znamo ništa, jednom kad udje u Crnu rupu. Tako da ne možemo tvrditi da čestica koja je upala u Crnu rupu poseduje negativnu energiju, ne – već je unutar oblasti definisanim Hajzenbergovim relacijama došlo do razmene energije vakuuma i unutrašnjosti Crne rupe – energija je iz Crne rupe prebačena na virtuelnu česticu koja je postala realna i odnela tu energiju (masu) iz Crne rupe, iako u njoj nije nikad ni bila.

Što se tiče entropije i površine Crne rupe, drugi zakon termodinamike je zapravo očuvan – jer je entropija sa Crne rupe prebačena na česticu – čak je pokazano da je ukupna entropija Crna rupa + čestica veća od entropije Crne rupe pre nastanka čestice. Ovime je drugi zakon termodinamike proširen da uključi i Crne rupe.

Ove čestice koje Crna rupa “zrači” bi trebalo da imaju termalni spektar jer ih proizvodi apsolutno crno telo i ovo zračenje se naziva Hokingovo zračenje. Temperaturu možemo proceniti upoređujući talasnu dužinu maksimuma zračenja Plankove raspodele sa Švarcšildovim radijusom

$$\frac{hc}{kT} \sim \frac{\hbar c}{kT} \sim \frac{2GM}{c^2}$$

odakle za temperaturu dobijamo:

$$T \sim \frac{\hbar c^3}{2kGM} = \frac{1}{2M}$$

Tačan izraz za temperaturu Hokingovog zračenja glasi:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi kGM} = \frac{1}{8\pi M} \approx \frac{2 \times 10^{-7} \text{m}}{r_s} \text{K} \quad (8.5)$$

gde je r_s Švarcšildov radijus. Ovaj rezultat znači da se temperatura Crne rupe smanjuje kako se povećava njena masa. Sa druge strane, Hokingovim zračenjem se masa Crne rupe smanjuje, pa temperatura raste, što znači da je zračenje intenzivnije i sve više energije se oduzima Crnoj rupi ovim putem. Pošto se masa zbog toga još više smanjuje, temperatura još brže raste i tako strmoglavo sve do hipotetičkog “isparenja Crne rupe”, za koje se misli da je praćeno ekstremno intenzivnim bljeskom gama zračenja.

Gornja diskusija je hipotetična – ona se ne može proveriti upravo zbog činjenice da bi temperatura stelarnih Crnih rupa bila zanemarljivo mala na osnovu (8.5), te se zračenje ne bi ni moglo uočiti – toliko bi bilo slabo da bi Crne rupa reda veličina Sunčeve mase na osnovu (8.5) bila milion puta niža od temperature kosmičkog pozadinskog zračenja koje je 2.73 K.

Takodje je procenjeno vreme isparenja Crne rupe – za Crne rupe mase veće od oko 10^{12} kg vreme do isparenja (pod uslovom da tokom svog života Crna rupa ne dobija na masi akreciojm materijala) je višestruko duže od veka Univerzuma. Tek za Crne rupe veoma malih masa – tzv. mini Crne rupe – je moguće da imaju život kraći od veka Univerzuma, tako da njihove gama bljeskove mi danas u principu možemo detektovati. Međutim, nijedan takav gama bljesak povezan sa isparenjem Crnih rupa nije do sada detektovan. Pretpostavlja se da je velikom broju fotona u ranom Univerzumu (neposredno posle Velikog Praska) doprineo i znatan broj tzv. primordijalnih “mini-Crnih rupa” koje su nastale od prvobitnih nehomogenosti materije – ove Crne rupe bile bi reda veličina atoma i veoma brzo bi isparile. Na žalost, ovakvu hipotezu nije moguće proveriti. Ipak, u moćnim akceleratorima poput CERN-a, danas je vrlo verovatno da se takve mini-Crne rupe mogu proizvesti – one bi živele svega delić sekunde, a njihov potpis bi bio bljesak gama zračenja. Naravno, takve Crne rupe su bezopasne.

8.2. Četiri zakona mehanike Crnih rupa

Veoma je bitno pomenuti da izmedju zakona koji vladaju Crnim rupama i termodinamike postoji veoma tesna veza. Štaviše, zakoni termodinamike se daju napisati za Crne rupe u terminima mase, ugaonog momenta i površinske gravitacije (ubrzanje na površini horizonta događaja). Naime, prvi zakon termodinamike glasi:

$$TdS = dU + dW \quad (8.6)$$

gde je T temperatura sistema, dS promena entropije, a dU i dW promena unutrašnje energije i učinjen rad. U slučaju Crnih rupa, postoji veličina analogna temperaturi, sa istim osobinama – da

je konstantna unutar sistema u ravnoteži. Ta veličina je *površinska gravitacija*, praktično gravitaciono ubrzanje na površini horizonta događaja i ona je za spoljašnji horizont događaja data sa (u jedinicama $\hbar = G = k = c = 1$):

$$\kappa = \frac{r_+ - M}{2Mr_+}$$

Ako u gornju jednačinu stavimo da je $a = 0$, dobićemo površinsku gravitaciju za Švarcšildovu Crnu rupu:

$$\kappa = \frac{1}{4M}$$

Detaljan proračun pokazuje da se površinska gravitacija zaista krije u izrazu za temperaturu, a ovde se može jednostavno iščitati iz (8.5):

$$T = \frac{1}{8\pi M} = \frac{1}{2\pi(4M)} = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (8.7)$$

što daje konačan izraz za vezu temperature i analogne veličine vezane za Crne rupe.

Dalje, već imamo vezu entropije i analogne veličine (8.4), a unutrašnja energija je ništa drugo do masa Crne rupe M . Ostaje još rad, ali ako se setimo da je to energija koju možemo iskoristiti, onda znamo da se isto to pojavljuje i kod Crnih rupa u formi energije rotacije, što se može videti iz, na primer, (4.10), dakle je $dW = \Omega_H dJ$. Stavljajući ovaj izraz, (8.4) i (8.7) u (8.6) i imajući na umu da je unutrašnja energija isto što i masa Crne rupe, dobijamo *prvi zakon mehanike Crnih rupa*:

$$\frac{\kappa}{8\pi} dA = dM + \Omega_H dJ \quad (8.8)$$

Nulti zakon mehanike Crnih rupa glasio bi “*površinska gravitacija Crne rupe je konstantna na celoj površini horizonta događaja*” dakle:

$$\kappa = \text{const.} \quad (8.9)$$

Drugi zakon mehanike Crnih rupa smo već sreli (4.11) u odeljku 4.3 i on tvrdi da je *površina horizonta događaja uvek rastuća veličina*:

$$dA \geq 0 \quad (8.10)$$

Analogija ide i do trećeg zakona termodinamike koji tvrdi da je $T = 0$ nedostižno realnim procesima, dakle, *treći zakon mehanike Crnih rupa* glasio bi da je *površinska gravitacija ravna nuli nedostižna*.

Jednačine (8.8), (8.9), (8.10) i poslednja tvrdnja predstavljaju četiri zakona mehanike Crnih rupa i pokazuju tesnu vezu između zakona termodinamike i opšte teorije relativnosti.

8.3. Unutrašnjost Crne rupe: Supergravitacija

Neprirodno je ne zapitati se šta se nalazi u Crnoj rupi. Iako smo svesni da odgovor na ovo pitanje (uslovno rečeno) nikada nećemo saznati, jer ne postoji mogućnost da dobijemo informaciju iz unutrašnjosti Crne rupe, postavljanje ovog pitanja je ne samo prirodno, već i nužno. Crne rupe su danas (astrofizičarima) svakodnevnica i intenzivni predmet teorijskog i eksperimentalnog izučavanja. Ono što one čine materiji iz spoljašnjeg Univerzuma je nemoguće ne primetiti, dok ono što su one učinile materiji koja je jednom činila zvezde od kojih su nastale je nemoguće čak ni indirektno posmatrati. Da li nas je Priroda osudila da najsavršenije i najjednostavnije njene tvorevine ostanu zauvek neobjašnjene do kraja?

U prethodnom odeljku je opisano kako čestica može pobeći iz blizine Crne rupe, odnoseći njenu masu/energiju, pojava koja je opisana primenom načela kvantne mehanike na gravitaciju. Detaljna analiza ove pojave na osnovu kvantne teorije polja u zakrivljenim prostorima pokazuje da je čestica koja je pobjegla zapravo superpozicija velikog broja stanja koja se u isto vreme nalaze i izvan i unutar Crne rupe. Informacija koju ova čestica nosi bi trebalo da bude na neki način povezana sa informacijom koja se nalazi unutar Crne rupe. Međutim, ako Crna rupa ispari, stanja čestice koje čine Hokingovo zračenje više nemaju sa čim da budu pomešana! A ipak nose mešana stanja. Po ovome izgleda da je informacija iz Crne rupe *izgubljena zauvek*, da je praktično uništena, a iz tog asledi da su stanja čestice koje pobjegnu Crnoj rupi mešana na fundamentalnom nivou – ona su kao takva nastala iz vakuuma pri produkciji Hokingovog zračenja. Ovo se naziva *paradoks informacije*.

Hawking je na osnovu ovoga ukazao na to da bi trebalo preformulisati kvantnu mehaniku u zakrivljenim prostorima tako da se polazi od mešanih stanja, a ne od nekog čistog stanja koje potom evoluiru u vremenu. To bi značilo da bi trebalo da se odrekemo unitarnih operatora i evoluciju sistema opisujemo u terminima superpozicije mešanih stanja. Stoga je paradoks informacije taj koji sugerise da bi kvantnu mehaniku trebalo preformulisati na fundamentalnom nivou, isto kao što nam predviđanje postojanja tačkica beskonačne gustine – singulariteta – od strane opšte teorije relativnosti sugerise da bi istu takodje trebalo preformulisati na fundamentalnom nivou.

Paradoks informacija je još uvek otvoreni problem i predstavlja oblast aktivnog teorijskog istraživanja danas, a verovatno je da će njegovo rešenje dovesti do novog preokreta u shvatanju Prirode.

Uprkos nedostatku informacija iz unutrašnjosti Crne rupe, mogu se izvesti neki direkcioni zaključci o njenoj unutrašnjosti i njihovim implikacijama, na osnovu teorijskih i posmatračkih istraživanja. Pre svega, spomenimo da su sile koje deluju unutar Crne rupe veoma slične po jačini onima koje su delovale neposredno posle Velikog Praska. Smatra se da je Veliki Prask bio početak svega – materije, energije, prostora i vremena – i da je sva materija i energija u tom trenutku bila skoncentrisana u singularitetu³⁶. Energije koje su vladale tada se danas ne mogu ni

³⁶ Veliki Prask je takodje predviđen opštom teorijom relativnosti primenjenom na Univerzum.

sa čim uporediti; u jezgrima zvezda i eksplozijama supernovih vladaju energije reda veličina MeV; u CERN-u je postignuta energija reda veličina 10^3 GeV; ultrarelativističke čestice kosmičkog zračenja takodje postižu energije reda veličina 10^3 GeV. Na skali fundamentalnih interakcija, karakteristična energija ujedinjenja slabe i elektromagnetne sile je oko 10^2 GeV. Sledeća karakteristična energija je ona na kojoj se očekuje veliko ujedinjenje sa jakom silom i iznosi oko 10^{15} GeV. Ove energije su još uvek nedostižne eksperimentima, ali energije od 10^2 GeV i nešto više se očekuju unutar neutronske zvezde. Ova činjenica nas interesuje.

Naime, neutronske zvezde se hijerarhijski nalaze na nivou ispod Crnih rupa – one su takodje kompaktni objekti, ali su nestabilne ako im je masa veća od oko $2.5 M_{\odot}$ kada postaju Crne rupe, koje ostaju Crne rupe sa daljim povećanjem mase. Neutronske zvezde i Crne rupe su ostaci jezgra koje nastaju nakon eksplozija supernove tipa II, za koju je karakteristična implozija jezgra prilikom eksplozije, s tim što Crne rupe nastaju od zvezda većih masa nego neutronske zvezde. Gustina materije koja vlada u površinskim slojevima neutronske zvezde je oko $10^{12} - 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$, što je praktično isto kao i nuklearna gustina – gustina samih neutrona od kojih je neutronska zvezda sačinjena. Zbog ovoga se pretpostavlja da je u centru neutronske zvezde gustina još veća, te su neutroni toliko blizu jedan drugom da je međusobno rastojanje između 3 kvarka od kojih se svaki neutron sastoji praktično isto kao i rastojanje od tih kvarkova do kvarkova iz susednog neutrona. Zbog ovoga više nema smisla govoriti o neutronima, jer oni praktično gube svoj identitet, već se opisano stanje materije naziva *kvark-gluon supa*. Naime, energije su iznad 200 MeV po čestici, što je karakteristična energija jake interakcije koja deluje između kvarkova, a čiji su gluoni prenosioci.

Sad, na osnovu gornje diskusije, energija koja bi vladala u Crnim rupama definitivno mora biti veća. Štaviše, proračuni pokazuju da bi već u neutronske zvezde energija mogla biti i veća od 100 GeV, iznad koje su elektromagnetna i slaba nuklearna sila ujedinjene, tako da bi se moglo očekivati da unutar Crnih rupa vlada, osim veoma jake gravitacione sile, i elektroslaba sila sa jakom nuklearnom silom, a da je materija u stanju kvark-gluon plazme ili u čak nekom egzotičnijem stanju.

Međutim, postoji jedan veoma elegantan i jednostavan način da pokušamo da pogodimo koje energije vladaju u Crnim rupama. Naime, sada ćemo iskoristiti rezon kojim dolazimo do relacija (8.1)-(8.3).

Ispitivanje detalja nekog fizičkog sistema (atomske jezgre ili nekih čestica) u sve većoj rezoluciji zahteva da čestica-projektil (ili sonda) kojom “gadjamo” taj sistem-metu da bismo ga ispitali ima sve manju de Broglie-ovu talasnu dužinu λ_s definisanu kao:

$$\lambda_s = \frac{2\pi\hbar c}{E_s}$$

gde je E_s relativistička energija sonde³⁷. U interakciji sa metom z koju ćemo pretpostaviti da miruje, sonda i meta čine sistem čija je ukupna energija $mc^2 = m_t c^2 + E_s$. Kako se sonda približava meti, gravitaciona sila (ma koliko zanemarljiva bila na većim rastojanjima) raste. U

³⁷ Pretpostavljamo da se radi o ultrarelativističkoj čestici pa je $p_s = E_s/c$.

jednom momentu, ako je energija sonde dovoljno velika, sistem meta+sonda se može se naći unutar Švarcšildovog radijusa koji odgovara njihovoj ukupnoj masi (energiji). Ovo se dešava kada de Broglie-va talasna dužina sonde postane uporediva sa pomenutim Švarcšildovim radijusom:

$$r_s \sim \lambda_s$$

$$\frac{2G(m_t c^2 + E_s)}{c^4} \sim \frac{2\pi \hbar c}{E_s}$$

odakle je, u ultrarelativističkom slučaju ($m_t c^2 \ll E_s$) energija (masa) sonde:

$$E_s \sim \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \Rightarrow m_s \sim \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad (8.11)$$

Dakle, da bismo (interakcijom) sudarom dve čestice dobili Crnu rupu, ukupna energija tih čestica mora biti do na konstantni faktor (8.11), što je reda veličina:

$$M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{19} \frac{\text{GeV}}{c^2}$$

a to je relacija (8.2), Plankova masa. Množeći ovaj izraz sa G/c^2 , dobijamo izraz za Plankovu dužinu (8.2):

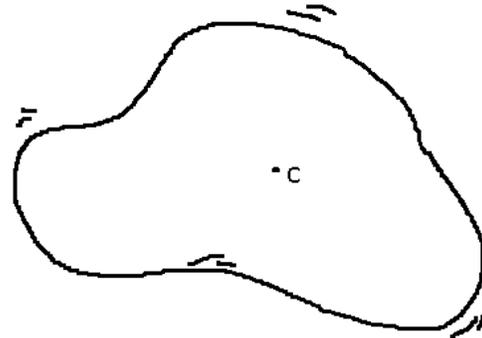
$$M_p \frac{G}{c^2} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = l_p \sim 10^{-35} \text{m}$$

odakle sledi i relacija (8.3).

Sušтина ove diskusije jeste da je nemoguće razlučiti detalje sistema čije su dimenzije manje od 10^{-35}m , jer su nam potrebne čestice-sonde sa energijom iznad 10^{19}GeV , a takve čestice ne mogu da pobegnu iz Švarcšildovog radijusa koji odgovara sistemu meta + sonda i informacija koju želimo dobiti iz takvog sistema je nedostupna, a možemo reći i izgubljena. Medjutim, pošto je informacija nedostupna iz unutrašnjosti horizonta događaja, poslednje mesto odakle informacija može da dodje, a da nam kaže nešto o tom sistemu jeste sa površine horizonta događaja. Upravo zbog ovoga se definisanje entropije Crne rupe čini preko predstavljanja *površine* horizonta događaja kao N umnožaka *površine* horizonta događaja *minijaturnih* Crnih rupa, upravo ovih koje smo gore definisali, jer nema nikakvog smisla da govorimo o entropiji unutrašnjosti Crne rupe, tj. o njenoj zapremini. Na ovaj način Crne rupe ne bi bile ništa drugo do uvećane verzije čestica koje se nalaze unutar svog Švarcšildovog radijusa.

Primitimo sada da su ove energije iznad energija velikog ujedinjenja. Ako zamislimo sistem od velikog broja čestica koje poseduju energiju od oko 10^{19}GeV , dobili bismo (astrofizičku) Crnu rupu. To bi upravo bilo ono što se događa kada Crna rupa nastaje – zbog sve većih gustina prilikom implozije, čestice se toliko približe jedna drugoj da se nađu unutar svog zbirnog horizonta događaja – čija površina raste kako se sve više i više čestica nađu unutar njega. Sad, gravitaciona sila je obrnuto proporcionalna rastojanju. Kako se rastojanje medju česticama smanjuje, sila postaje sve jača i u jednom momentu nadmašuje sve druge sile koje deluju, a imajmo na umu da se radi o mikrosvetu – svetu kvantne teorije polja. Dakle, Plankove dimenzije definišu oblast gde je naprosto nemoguće zanemariti gravitacionu silu. Ekstrapolirajući energiju od energija koje vladaju u neutronske zvezdama do 10^{19}GeV , vidimo da bi za sistem od velikog broja čestica koje se nalaze unutar svog zbirnog horizonta događaja trebalo da važi da je već došlo do velikog ujedinjenja, te da u najmanju ruku postoje samo dve sile – gravitaciona i sila velikog ujedinjenja, a uzimajući u obzir i dosadašnju diskusiju iz celog poglavlja, može biti da se radi o jednoj jedinstvenoj sili. Stoga, došli smo do mesta gde sve sile postaju ravnopravne po jačini, ujedinjene u tzv. *supergravitaciju* – unutrašnjost Crne rupe.

Postoje teorije koje suštinski nastoje da preformulišu i kvantnu teoriju polja i opštu relativnost, tačnije, postoji jedna klasa takvih teorija koja svojim postulatima u jednom potezu rešava oba problema – problem kvantizacije gravitacije i problem singulariteta – to je *teorija superstringova*. Po ovoj teoriji, čestice se modeliraju kao jednodimenzionalni zatvoreni objekti – stringovi – čije razne vibracione ekscitacije definišu razne osobine čestica – spin, naboj, ukus... Ovakav model (prikazan šematski na Slici 25) je dobar jer automatski otklanja singularitet – centar mase je u centru C , a opet, masa/energija (i sama čestica) je razmazana po jednoj dimenziji u prostoru. Položaj čestica modelirane na ovaj način prirodno zadovoljava relacije neodređenosti, upravo zato što je svaka tačka stringa ravnopravna, te možemo govoriti samo o “centru raspodele”, te je zbog toga postojanje čestice “razmazano” po prostoru. Takođe, veličina stringa je manja od Plankovih dimenzija, pa je model univerzalan³⁸. Predviđanja jedne klase ovih teorija idu dotle da objedinjuju i materiju i energiju i prostor i vreme u jedinstvenu celinu, te ove teorije predviđaju i jedinstvenu objedinjenu silu – tzv. supergravitaciju, sintezu kvantne teorije polja i opšte teorije relativnosti.



Slika 25: Stringovi kao recept za ujedinjenje – model čestice.

Kerovo rešenje nam govori da takve teorije ne greše u nekim predviđanjima jer pokazuje da između prostor-vremena i materije/energije *zaista* postoji neraskidiva veza (demonstrirano Lens-Tiringovim efektom), isto kao što postoji između prostora i vremena, i materije i energije. Takođe, jednačine Kerovog rešenja govore da se sva masa nalazi u prstenastom singularitetu koja čini Crnu rupu, skoncentrisana u jednoj jedinoj zatvorenoj liniji. Ako prihvatimo prethodnu diskusiju i model stringova, ovo bi moglo imati smisla.

³⁸ Ali takođe i eksperimentalno neproverljiv iz istog razloga.

Specijalna rešenja Ajnštajnovih jednačina poput Kerovog rešenja oslikavaju moć veze geometrije i materije/energije i daju nam *nagoveštaje* njenog postojanja na fundamentalnom nivou, iako ga eksplicitno ne izlažu. Ovo je od izuzetnog značaja, jer principi na kojima se temelje fundamentalne interakcije su isti oni pomoću kojih su pronadjena egzaktna rešenja Ajnštajnovih jednačina, a medju njima i Kerovo rešenje – to su *simetrije* i *kalibraciona invarijantnost*. Crne rupe su otvorile nova vrata ka teorijama kvantne gravitacije i rešavanjem problema unutrašnjosti Crnih rupa, rešice se i problem prirode prostor-vremena na mikroskopskom nivou, ali i obrnuto.

Zaključak

Često se mogu sresti ljudi, nažalost kako iz naučnih krugova, tako i obični ljudi, koji tvrde da Ajnštajnova teorija gravitacije “nije korektna teorija” ili da je “besmislena” jer predviđa, (pored veze između prostor-vremena i mase/energije) objekte poput Crnih rupa i tačaka beskonačne gustine i zakrivljenosti prostor-vremena – singularitete. Jedini besmisao koji neka teorija može imati nikako nije onaj koji proizilazi iz kontraintuitivnog predviđanja teorije, već onaj i samo onaj koji proizilazi iz matematičkih kontradikcija same teorije ili iz kontradikcija njenih predviđanja sa eksperimentalnim testovima iste.

Kako OTR odoleva i dan-danas eksperimentalnim testovima sve veće preciznosti, još uvek se ne može naći nijedan argument koji ide u prilog takvim tvrdnjama. Jedini argument koji ide u prilog tome da Ajnštajnova teorija nije korektna teorija jeste upravo onaj koji je i sam Einstein jednom izneo – da veza prostor-vremena sa materijom-energijom koja je centralna u opštoj teoriji relativnosti nije *fundamentalana* (u onom smislu u kom su opisane elektromagnetna, slaba i jaka nuklearna interakcija kakve danas znamo)³⁹. Dakle, suštinska veza između prostor-vremena i materije-energije nikako nije *eksplicitna* u Ajnštajnovim jednačinama, i *prava* teorija gravitacije koja će na fundamentalnom nivou opisati gravitacionu interakciju tek će ugledati svetlost dana.

Ipak, to nikako nije razlog da se opisivanje gravitacionih pojava pomoću opšte teorije relativnosti napusti. Tako danas koristimo Njutnov zakon gravitacije, kada je to opravdano, iako znamo da je on samo aproksimacija tačnije teorije – opšte teorije relativnosti. Isto tako, izvesno je da je opšta teorija relativnosti naspram neke opštije teorije (recimo supergravitacije) isto što je i Njutnova teorija bila naspram opšte teorije relativnosti i sve dok se ne postavi opštija, fundamentalnija teorija, OTR će važiti za teoriju koja važi pod određenim uslovima – na velikoj skali, opisujući makroskopske objekte.

Kerovo rešenje je jedan primer kako Ajnštajnova teorija “radi” i zbog čega je OTR moćna teorija. Ono otkriva suptilnost prostor-vremena koja postaje vidljiva već proučavajući samo rešenje sa teorijskog aspekta. Pitanje nalaženja Kerovog rešenja u formi (3.15) na osnovu kombinovanog fizičkog rezonovanja i matematičkog formalizma još uvek je otvoreno, iako su Ker i Čandrasekar već došli do rešenja. U literaturi se naglašava da je izvođenje Kerove metrike “veoma teško” i skoro uvek se izostavlja, ostavljajući samo krajnje rešenje za prostor-vremenski interval. Opšta teorija relativnosti nije teorija u kojoj je dovoljno samo rešiti Ajnštajnovu jednačinu. Ona je teorija koja zahteva jaku intuiciju i korektno fizičko rezonovanje, zajedno sa sposobnošću uočavanja simetrija i vizualizacije geometrijskih oblika u prostoru.

Sa druge strane, Kerovo rešenje predstavlja jedinu jednačinu u celokupnoj nauci koja egzaktno opisuje jedan makroskopski objekat (rotirajuću Crnu rupu) i to samo pomoću dva parametara – mase i ugaonog momenta. To omogućava da se astrofizički izučavaju ne samo Crne rupe (i to od onih čija je masa uporediva sa zvezdama, pa sve do supermasivnih Crnih rupa čija masa prelazi milijarde Sunčevih masa, a koje se nalaze u jezgrima galaksija), već i najzastupljeniji objekti u Univerzumu – zvezde. Zbog ove univerzalnosti Kerovo rešenje

³⁹ Ajnštajn je to rekao još pre nego što je postavljena i kvantna elektrodinamika.

predstavlja izuzetno značajno orudje pomoću kojeg se (u sintezi sa ostalim granama fizike) može proučavati velika raznolikost objekata “s kraja na kraj” Univerzuma.

Na kraju, Kerovo rešenje Ajnštajnovih jednačina pokazuje da mora postojati opštija teorija od opšte teorije relativnosti i kvantne teorije polja, teorija koja bi u svom zagrljaju držala jedinstvenu zadivljujuću lepotu obe teorije

Jer Priroda poseduje nepodeljenu lepotu.

Dodatak

D1. Kartanov metod ortonormiranih tetrada

Kartan je razvio metod kojim je moguće doći do Rimanovog tenzora na lakši način nego klasičnim putem, tj. računajući Kristofelove simbole. Ovaj metod se naziva *formalizam ortonormiranih tetrada*.

Pod tetradom se podrazumeva skup od 4 bazisnih 1-formi, koje se daju iščitati iz metrike. Kao primer uzmimo osno-simetričnu metriku

$$ds^2 = e^{2\alpha} dt^2 - e^{2\beta} (d\varphi - \Omega dt)^2 - e^{2\gamma} dr^2 - e^{2\delta} d\theta^2 \quad (\text{D1.1})$$

Skup od četiri bazisnih tetrada je na osnovu gornje metrike sledeći:

$$\omega^0 = dt \quad \omega^1 = d\varphi \quad \omega^2 = dr \quad \omega^3 = d\theta$$

Ovaj skup jeste ortogonalan ali nije ortonormiran, međutim, moguće je dobiti ortonormiranu tetradu, prosto definišući nove 1-forme koje gornju metriku svode na:

$$ds^2 = (\hat{\omega}^0)^2 - (\hat{\omega}^1)^2 - (\hat{\omega}^2)^2 - (\hat{\omega}^3)^2 \quad (\text{D1.2})$$

tako da metrički tenzor u ovom bazu odgovara onom iz prostora Minkovskog $\hat{\eta}_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ i koja se koristi za podizanje i spuštanje indeksa. Poredeći sa metrikom (D1.1) vidimo da je veza koordinatnih 1-formi i ortonormirane tetrade sledeća⁴⁰:

$$\hat{\omega}^0 = e^\alpha dt$$

$$\hat{\omega}^1 = e^\beta (d\varphi - \Omega dt)$$

$$\hat{\omega}^2 = e^\gamma dr$$

$$\hat{\omega}^3 = e^\delta d\theta$$

Kako se u OTR susrećemo sa tenzorima višeg ranga (do četvrtog), predstavljanje tih tenzora preko p -formi ($p = 0, 1, 2, 3, 4$) će biti od koristi. Međutim, gore su definisane samo ortonormirane 1-forme. Konstrukcija viših formi se realizuje preko *spoljašnjeg proizvoda* (“wedge product”, “exterior product”) koji je između dve 1-forme A i B definisan sa:

$$A \wedge B = A \otimes B - B \otimes A$$

⁴⁰ U ovom dodatku će ortonormirane forme biti obeležene “kapičom” iznad slova, inače je u radu korišćena oznaka bez “kapiče”.

stoga se na osnovu ovoga dobija 2-forma.

Odavde sledi da je spoljašnji proizvod antisimetričan u odnosu na poziciju formi A i B :

$$A \wedge B = -B \wedge A$$

odakle dalje sledi da je $A \wedge A = 0$, dakle slično kao kod vektorskog proizvoda.

Definisan je takodje i spoljašnji izvod, koji se obeležava sa “ d ”, i koji p -forme prevodi u $(p + 1)$ -forme. Spoljašnji izvod $(p + q)$ -forme se računa preko spoljašnjeg proizvoda p -forme A i q -forme B na sledeći način:

$$d(A \wedge B) = dA \wedge B + (-1)^p A \wedge dB$$

Ako su A i B 1-forme, onda je spoljašnji izvod njihovog spoljašnjeg proizvoda prosto:

$$d(A \wedge B) = dA \wedge B - A \wedge dB$$

Zbog osobina antisimetrije, dvostruki spoljašnji izvod jedne veličine jednak je nuli - $d^2 A = 0$. Na osnovu ovoga, spoljašnji izvod proizvoda neke funkcije koordinata i diferencijala je:

$$d(f dx^\mu) = df \wedge dx^\mu = \frac{\partial f}{\partial x^\rho} dx^\rho \wedge dx^\mu$$

odakle iščezavaju vrednosti za koje je $\rho = \mu$.

Koristeći se gore opisanim formalizmom primenjenim na ortonormiranu tetradu, Kartan je pronašao dve jednačine pomoću kojih se formiraju određene p -forme u ortonormiranom bazu i iz kojih je na kraju moguće pročitati Rimanov tenzor i to bez računanja Kristofelovih simbola.

Prva jednačina je Kartanova prva jednačina strukture i glasi (podrazumeva se sumiranje po ponovljenim indeksima):

$$d\hat{\omega}^a = -\hat{\omega}^a_b \wedge \hat{\omega}^b \tag{D1.3}$$

gde su $\hat{\omega}^a$ upravo one iz (D1.2). Ova jednačina se koristi tako što se prvo izračuna leva strana, na osnovu definicija spoljašnjeg izvoda, a potom razvije leva strana i jednostavno iščitaju koeficijenti $\hat{\omega}^a_b$, koji se nazivaju 1-forme povezanosti (“connection 1-forms”).

Sledeći korak jeste da se 1-forme povezanosti iskoriste u drugoj Kartanovoj jednačini strukture koja glasi:

$$\Omega^a_b = d\hat{\omega}^a_b + \hat{\omega}^a_c \wedge \hat{\omega}^c_b \tag{D1.4}$$

što zahteva računanje spoljašnjeg izvoda 1-formi povezanosti $d\hat{\omega}^a_b$ i spoljašnjeg proizvoda $\hat{\omega}^a_c \wedge \hat{\omega}^c_b$. Ω^a_b se nazivaju 2-forme povezanosti. Ove 2-forme povezanosti se sa druge strane računaju preko jednačine:

$$\Omega^a_b = \frac{1}{2} \hat{R}^a_{bcd} \hat{\omega}^c \wedge \hat{\omega}^d \quad (\text{D1.5})$$

gde su \hat{R}^a_{bcd} upravo komponente Rimanovog tenzora u ortonormiranom bazu, i koje se takođe bukvalno iščitavaju razvijanjem (D1.4) i (D1.5)

Važno je obratiti pažnju na simetrije pomenutih veličina:

$$\hat{\omega}^0_b = \hat{\omega}^b_0$$

$$\hat{\omega}^i_j = -\hat{\omega}^j_i$$

$$\Omega^0_b = \Omega^b_0$$

$$\Omega^i_j = \Omega^j_i$$

gde se indeksi i, j odnose na prostorne koordinate.

Dok je simetrija Rimanovog tenzora ista kao i u koordinatnom bazu, dakle:

$$\hat{R}^a_{bcd} = \hat{\eta}^{ai} \hat{R}_{ibcd} = \hat{\eta}^{ai} \hat{R}_{cdib} = -\hat{\eta}^{ai} \hat{R}_{ibdc} = -\hat{\eta}^{ai} \hat{R}_{bicd} \quad (\text{D1.6})$$

Dalje se Ričijev tenzor može naći na isti način kao i u koordinatnom bazu, kontrakcijom po prvom i trećem indeksu Rimanovog tenzora:

$$\hat{R}_{bd} = \hat{R}^a_{bad}$$

Ajnštajnovе jednačine su kovarijantne, stoga nema potrebe prevoditi Rimanov i Ričijev tenzor u koordinatni bazu. Štaviše, Ričijev skalar je prosto:

$$\hat{\eta}^{ab} \hat{R}_{ab} = \hat{R}^a_a$$

D2. Svodjenje opšte metriке na dijagonalnu formu

U odeljku 3.5 iskorišćena je torema koja će ovde biti dokazana.

Teorema 1:

Metriku oblika

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + g_{11} d\varphi^2 + g_{22} (dx^2)^2 + g_{33} (dx^3)^2 \quad (\text{D2.1})$$

je uvek moguće preformulisati u sledeću formu:

$$ds^2 = G_{00}(dt - fd\varphi)^2 + G_{11}(d\varphi - gdt)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 \quad (D2.2)$$

pri čemu su f i g proizvoljne funkcije koordinata x^2 i x^3 .

Dokaz 1:

Za svodjenje forme (D2.1) na (D2.2) jedino što se može uraditi jeste transformacija koordinata i to takva da su

$$dT = dt - fd\varphi$$

$$d\Phi = -gdt + d\varphi$$

nove koordinate, koje se takodje mere duž ortogonalnih pravaca (nema mešovitih članova $dTd\Phi$). Možemo napisati matricu transformacije⁴¹ koja prevodi funkcije $(dT, d\Phi)$ u $(dt, d\varphi)$:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -f \\ -g & 1 \end{pmatrix}$$

i pisati

$$\begin{pmatrix} dT \\ d\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -f \\ -g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ d\varphi \end{pmatrix} \quad (D2.3)$$

Determinanta matrice je Jakobijan

$$\det(J) = |J| = 1 - fg \quad (D2.4)$$

i mora biti različita od nule da bi postojala inverzna transformacija, te proizvod fg mora biti različit od jedinice.

Dovoljno je sada da posmatramo samo onaj deo metrike koji sadrži diferencijale dt i $d\varphi$. Ako raspišemo (D2.2):

$$ds^2 = G_{00}dt^2 - G_{00}fdtd\varphi + G_{00}f^2d\varphi^2 + G_{11}g^2dt^2 - G_{11}gdtd\varphi + G_{11}d\varphi^2$$

i izjednačimo sa odgovarajućim delom metrike date sa (D2.1), dobijamo sledeće tri jednačine⁴²:

$$g_{00} = G_{00} + G_{11}g^2$$

⁴¹ Matrični elementi ove transformacije su $J_{\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$.

⁴² Naravno, radi se o transformaciji metričkog tenzora: $g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g_{\alpha\beta} = J_{\mu}^{\alpha'} J_{\nu}^{\beta'} g_{\alpha\beta}$.

$$g_{11} = G_{00}f^2 + G_{11} \quad (D2.5)$$

$$0 = G_{00}f + G_{11}g$$

Ove tri jednačine daju vezu između koeficijenata G_{00} , G_{11} i komponenti metričkog tenzora g_{00} , g_{11} :

$$\frac{G_{00}}{G_{11}} = \frac{g_{00}}{g_{11}} = -\frac{g}{f} \quad (D2.6)$$

A u kombinaciji sa izrazom za determinantu datim u (D2.4) dobijamo sledeću vezu:

$$\frac{G_{00}}{g_{00}} = \frac{G_{11}}{g_{11}} = |J|$$

Drugim rečima, na osnovu ortogonalne forme (D2.1) moguće je preći na takodje ortogonalnu formu (D2.2) uvodeći proizvoljnu transformaciju koordinata datom sa (D2.3) čije komponente f i g zadovoljavaju uslove (D2.4) i (D2.6).

Ovime je Teorema 1 dokazana.

(D2.5) je sistem od tri jednačine sa 6 nepoznatih (u opstem slučaju). Pod pretpostavkom da su g_{00} i g_{11} poznate veličine, sistem (D2.5) sadrži 4 nepoznate veličine (G_{00} , G_{11} , f , g), i za svaku metriku okarakterisanom veličinama g_{00} i g_{11} postoji uređeni par funkcija (f , g) takav da zadovoljava uslov (D2.6). Pri tome je bitno napomenuti da biranjem jedne od funkcija f i g automatski znamo drugu, tako da njihov izbor nije u potpunosti proizvoljan. Znajući f i g , funkcije G_{00} i G_{11} su u potpunosti određene.

Sa druge strane, može se nametnuti uslov na G_{00} ili G_{11} , tako da preostale tri funkcije budu u potpunosti određene na osnovu sistema (D2.5), jer bi isti tada sadržao 3 nepoznate veličine.

Teorema 2:

Metriku oblika

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{01}dtd\varphi + g_{11}d\varphi^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 \quad (D2.7)$$

je uvek moguće preformulisati u sledeću formu:

$$ds^2 = G_{00}(dt - \hat{f}d\varphi)^2 + G_{11}(d\varphi - \hat{g}dt)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 \quad (D2.8)$$

pri čemu su \hat{f} i \hat{g} proizvoljne funkcije koordinata x^2 i x^3 .

Dokaz 2:

Na sličan se način kao i prošla dokazuje i ova teorema. Naime, opet se radi o transformaciji koordinata

$$\begin{pmatrix} dT \\ d\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\hat{f} \\ -\hat{g} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ d\varphi \end{pmatrix} \quad (\text{D2.9})$$

s tim da sada odgovarajući sistem jednačina izgleda ovako:

$$\begin{aligned} g_{00} &= G_{00} + G_{11}\hat{g}^2 \\ g_{11} &= G_{00}\hat{f}^2 + G_{11} \\ g_{01} &= -(G_{00}\hat{f} + G_{11}\hat{g}) \end{aligned} \quad (\text{D2.10})$$

tj. isto kao i (D2.5), samo što je sada vandijagonalna komponenta metričkog tenzora g_{01} različita od nule. Ovaj sistem sada sadrži 7 nepoznatih veličina, s tim da ako opet smatramo da su komponente g_{00} , g_{11} i g_{01} poznate, ostaju nam isto 4 nepoznate (G_{00} , G_{11} , \hat{f} , \hat{g}). Sistem jednačina (D2.10) daje sledeće veze:

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{g_{00} - g_{11}\hat{g}^2}{1 - \hat{f}^2\hat{g}^2} \\ G_{11} &= \frac{g_{11} - g_{00}\hat{f}^2}{1 - \hat{f}^2\hat{g}^2} \\ \hat{f} &= -\frac{g_{01} + g_{11}\hat{g}}{g_{00} + g_{01}\hat{g}} \end{aligned} \quad (\text{D2.11})$$

Iz treće jednačine se vidi da je sloboda u odabiru funkcija \hat{f} i \hat{g} opet ograničena, te je odabirom jedne od funkcija \hat{f} ili \hat{g} druga potpuno određena. Sa druge strane, isto kao i u dokazu Teoreme 1, i ovde se može nametnuti uslov na jednu od funkcija G_{00} i G_{11} , tako da je u principu moguće rešiti sistem (D2.11) po ostale tri nepoznate.

Suština ovih teorema jeste da se dobija izvesna sloboda što se tiče odabira metričke forme, kao i postizanje ortogonalnosti nove metrike. Uvodjenjem koordinata T i Φ smo obezbedili da se one uvek mogu odabrati tako da metrika poseduje ortogonalnu formu. Ono što treba naglasiti jeste da je Teorema 1 vezana za ortogonalnu metriku (D2.1), a Teorema 2 za metriku koja nije ortogonalna (D2.7) i da su koordinate T i Φ u opštem slučaju različite za te dve metrike, jer su funkcije (f, g) različite od (\hat{f}, \hat{g}) , ali su u oba slučaja tangenti vektori duž koordinatnih linija međusobno ortogonalni.

Napomenimo samo da se ispostavlja da su za slučaj ravnog prostora u elipsoidnim koordinatama i Kerove metrike ove koordinate identične.

D3. Razne metričke forme korišćene u radu

Ovde je dat pregled metričkih formi, skalarnih invarijanti i determinanti metričkog tenzora koji su korišćeni u radu. Jednačine su numerisane, tako da se numeracija odnosi na onu iskorišćenu u radu, ukoliko postoji, a u suprotnom je naveden odeljak/poglavljje i strana na kojoj se odgovarajuća jednačina nalazi.

Švarcšildova metrika:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.1)$$

i odgovarajuća skalarna invarijanta drugog reda:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48M^2}{r^6} \quad (2.8)$$

Kerova metrika:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (3.5)$$

gde su:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

i odgovarajuća skalarna invarijanta drugog reda (data u odeljku 4.1, strana 42):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48M^2}{\rho^{12}} (r^6 - a^6 \cos^6 \theta) - \frac{720M^2 r^2 a^2 \cos^2 \theta}{\rho^{12}} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta)$$

U Tabeli 2 na sledećoj strani date su komponente metričkih tenzora koji se susreću u radu. Poređenjem odgovarajućih komponenti iz različitih metrika može se steći uvid u osobine istih.

	dt/dT	dr	$d\theta$	$d\varphi/d\Phi$
<i>Minkovski-sferne</i>	1	-1	$-r^2$	$-r^2 \sin^2 \theta$
<i>Švarcšild</i>	$\frac{r^2 - 2Mr}{r^2}$	$-\frac{r^2}{r^2 - 2Mr}$	$-r^2$	$-r^2 \sin^2 \theta$
<i>Minkovski-elipsoidne</i>	1	$-\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2}$	$-(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)$	$-(r^2 + a^2) \sin^2 \theta$
<i>Minkovski-elipsoidne</i> (T, Φ, r, θ)	$\frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$	$-\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2}$	$-(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)$	$-\frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$
<i>Ker</i> (T, Φ, r, θ)	$\frac{r^2 - 2Mr + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$	$-\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2Mr + a^2}$	$-(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)$	$-\frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$

Tabela 2: Poredjenje dogovarajućih komponenti metričkih tenzora za razne metrike korišćene u radu.

Pregled determinanti metričkih tenzora metrika iskorišćenih u radu:

<i>Minkovski-sferne</i>	$-r^4 \sin^2 \theta$	na osnovu metrike (3.11)
<i>Švarcšild</i>	$-r^4 \sin^2 \theta$	(2.3)
<i>Minkovski-elipsoidne</i>	$-(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 \sin^2 \theta$	(3.14)
<i>Ker</i>	$-(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 \sin^2 \theta$	(3.7)
<i>Minkovski-elipsoidne</i> (T, Φ, r, θ)	$-(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta$	(3.24)
<i>Ker</i> (T, Φ, r, θ)	$-(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta$	(3.19)

Tabela 3: Poredjenje determinanti metričkih tenzora korišćenih u radu.

D4. Vizuelizacija rotirajućeg prostora u četvrtoj dimenziji – uronjeni prostor

Nekad je veoma teško pojmiti “zakrivljenost” prostora, iz prostog razloga što je potrebna četvrta prostorna dimenzija za vizuelizaciju te “zakrivljenosti”. Medjutim, zakrivljen prostor nije teško zamisliti, ako predstavimo neku dvodimenzionalnu površ u toj četvrtoj dimenziji. Pri tome nam je dovoljan trodimenzionalni prostor za takvo predstavljanje. Ovakva dvodimenzionalna ravan je onda *uronjena* u trodimenzionalni euklidski prostor.

Uzmimo ekvatorijalnu ravan kao dvodimenzionalnu površ. U metrici (3.5) tada stavljamo $dt = d\theta = 0$, a $\theta = \pi/2$ i metrika postaje:

$$ds^2 = \frac{r^2}{r^2 - 2Mr + a^2} dr^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) d\varphi^2 \quad (D4.1)$$

S druge strane, hoćemo da “ispeglamo” promenu koeficijenta ispred dr^2 , tako da u uronjenom prostoru ona bude merena kao u ravnom prostoru, dok zadržavamo oblik koeficijenta ispred $d\varphi^2$, jer želimo da nam nova dimenzija pokazuje promenu koordinate r . Stoga, nova metrika u trodimenzionalnom prostoru bi trebalo da izgleda ovako

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) d\varphi^2 \quad (D4.2)$$

gde smo dodali jednu dimenziju koju merimo duž z-ose. Pošto je element luka invarijantan, desne strane jednačina (D4.1) i (D4.2) moraju biti jednake. Izjednačavanjem dobijamo:

$$dz^2 + dr^2 = \frac{r^2}{r^2 - 2Mr + a^2} dr^2$$

odakle je

$$dz = \sqrt{\frac{2Mr - a^2}{r^2 - 2Mr + a^2}} dr$$

Integracijom gornje jednačine uz uslove da je $r^2 - 2Mr + a^2 > 0$ i $r > M$, dobijamo zavisnost koordinate z od rastojanja u Kerr-ovoj metrici. Prikazujući dobijeni rezultat grafički u trodimenzionalnom xyz koordinatnom sistemu uz transformacije koordinata:

$$x = r \cos(\varphi + \omega(r)t)$$

$$y = r \sin(\varphi + \omega(r)t)$$

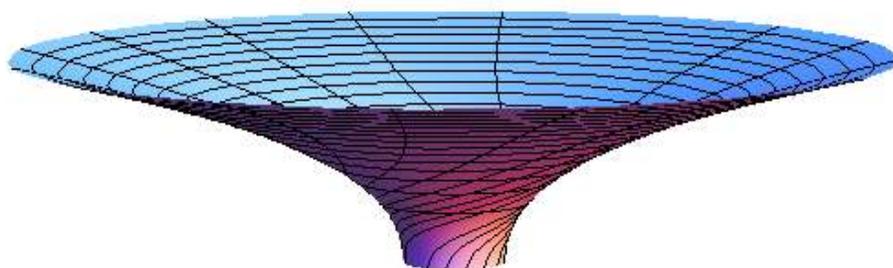
$$z = \int \sqrt{\frac{2Mr - a^2}{r^2 - 2Mr + a^2}} dr$$

U gornjem sistemu je, na osnovu (3.8) i za ekvatorijalnu ravan:

$$\omega(r) = 2Ma/(r^3 + ra^2 + 2Ma^2)$$

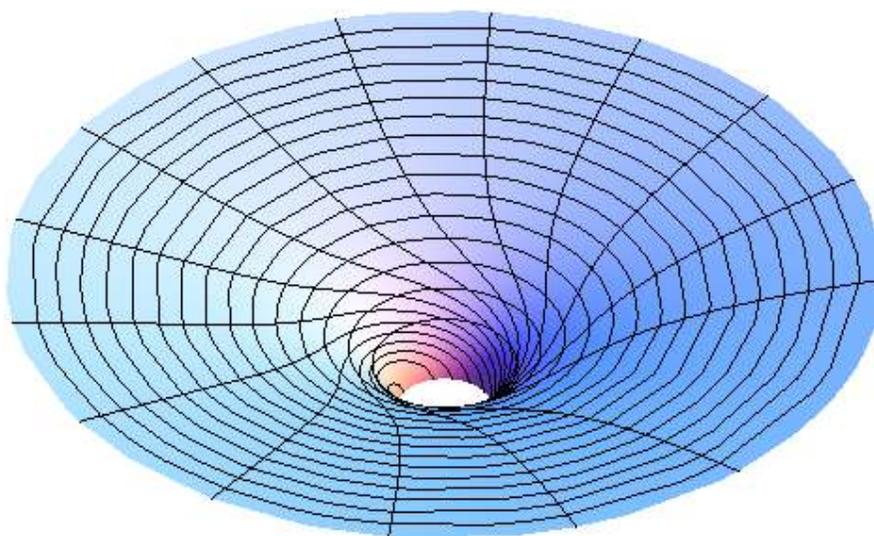
a ωt predstavlja fazu koja nastaje usled Lens-Tiringovog efekta i ona zavisi od trenutka posmatranja. Pošto nas ne interesuje vremenska zavisnost, mi ćemo ovde posmatrati kako izgleda ekvatorijalna ravan nakon nekoliko sekundi od početka posmatranja.

Izgled ekvatorijalne ravni u uronjenom prostoru za ekstremnu Kerovu Crnu rupu i $M = 1$ dat je na Slici 26. Kao što se može pretpostaviti, Crna rupa se nalazi u centru ravni i samo "grotlo" prikazane površi predstavlja horizont događaja Crne rupe.



Slika 26: Ekvatorijalna ravan Kerove metrike uronjene u trodimenzionalni prostor. Predstavljen je prostor od horizonta događaja ekstremne Kerove Crne rupe do $r = 10M$. Može se reći da je prostor zakrivljen u četvrtoj dimenziji, koja je ovde predstavljena z koordinatom (vertikalni pravac). Vidi se da ekvatorijalna ravan idući ka obodima asimptotski teži ravnom prostoru. Takodje se vidi da su radijalne linije zakrivljene, što je posledica povlačenja metrike, tj. Lens-Tiringovog efekta.

Na Slici 27 prikazana je ista ravan, ali iz drugačijeg ugla.



Slika 27: Pogled na ekvatorijalnu ravan iz pozitivnog pravca z-ose.

Ono što je važno napomenuti jeste da koordinatu r merimo po površini koja je prikazana na slikama, duž radijalnog pravca. U realnom prostoru, ne vidimo z -osu, a r koordinatu merimo kontrahovanu, zbog čega i dolazi do deformacije posmatranih oblika u blizini Crnih rupa.

Ovakvo prikazivanje je veoma ilustrativno i može pomoći u razumevanju zakrivljenosti prostora. Štaviše, ovakvo tumačenje zakrivljenosti prostora govori da je za gravitacija sila koja se može opisivati u petodimenzionalnom prostor-vremenu.

Literatura

I DEO

- [1] Carroll, S. M., *Lecture Notes on General Relativity*, arXiv:gr-qc/9712019
- [2] Pantić, M., *Uvod u Ajnštajnovu Teoriju Gravitacije*, Univerzitet u Novom Sadu (2005)
- [3] MacMahon, D., *Relativity Demystified*, McGraw – Hill (2006)
- [4] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A., *Gravitation*, W. H. Freeman and Co. (1973)
- [5] Dirac, P. A. M., *General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, Inc. (1975)
- [6] Chandrasekhar, S., *Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press (1983)
- [7] O’Neil, B., *The Geometry of Kerr Black Holes*, A. K. Peters (1995)
- [8] Wiltshire, D. L., Visser, M., Scott, S. M. (eds.), *The Kerr Spacetime Rotating Black Holes in General Relativity*, Cambridge University Press (2009)
- [9] Krasinski, A., *Ellipsoidal Space-Times, Sources for the Kerr Metric*, Ann. Phys. **112**, 22 (1978)
- [10] D’Inverno, R., *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press (1992)
- [11] Taylor, E. F., Wheeler, J. A., *Exploring Black Holes – Introduction To General Relativity*, Addison Wesley Longman, inc. (2000)
- [12] Padmanabhan, T., *Gravitation – Foundations and Frontiers*, Cambridge University Press (2010)
- [13] Mušicki, Dj., *Uvod u Teorijsku Fiziku I*, Univerzitet u Beogradu (1964)
- [14] Frolov, V.P., Novikov, I.D., *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*, Kluwer (1997)
- [15] Shapiro, S.L., Teukolsky, S.A., *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, John Wiley & Sons, Inc. (1983)
- [16] Teo, E., *Spherical photon orbits around a Kerr black hole*, Gen. Rel. Grav. **35**, 1909 (2003), dostupno na <http://www.physics.nus.edu.sg/~phyteoe/kerr/paper.pdf>
- [17] Kheng, L. Y., Perng, S. C., Jackson, T. B. S., *Massive Particle Orbits Around Kerr Black Holes*, Lectures, I Semester 2006/2007, dostupno na http://sps.nus.edu.sg/~limyengk/downloads/reports/sp2172_report.pdf
- [18] Tollerud, E., *Kerr Orbit GR Project*, (2007), dostupno na <http://www.physics.uci.edu/~etollern/KerrOrbitProject.pdf>

II DEO

- [19] Hehl, F. W., Kiefer, C., Metzler, R. J. K. (eds.), *Black Holes: Theory and Observation*, Springer (1998) (Lecture Notes in Physics, vol. 514)
- [20] Luminet, J.-P., *Black Holes: A General Introduction*, arXiv:astro-ph/9801252
- [21] Dermer, C. D., Menon, G., *High Energy Radiation from Black Holes*, Princeton University Press (2009)
- [22] Meszaros, P., *The High Energy Universe*, Cambridge University Press (2010)

- [23] Van Putten, M., *Gravitational Radiation, Luminous Black Holes and Gamma-Ray Burst Supernovae*, Cambridge University Press (2005)
- [24] Čadež, A., Fanton, C., Calvani, M., *Line Emission From Accretion Discs Around Black Holes: The Analytic Approach*, MNRAS **363**, 177 (2005), dostupno na <http://web.pd.astro.it/calvani/cadez.ps>
- [25] Beckwith, K., Done, C., *Iron Line Profiles in Strong Gravity*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **000**, 1 (2004)
- [26] Khriplovich, I. B., *General Relativity*, Springer (2005)
- [27] Everitt, C.W. F. et al., *Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity*, Phys. Rev. Lett. **106**, 221101 (2011)
- [28] *Gravity Probe B: Testing Einstein's Relativity*, <http://einstein.stanford.edu/index.html>
- [29] Townsend, P.K., *Black Holes*, arXiv:gr-qc/9707012
- [30] Papantonopoulos, E. (ed.), *Physics of Black Holes - A Guided Tour*, Springer (2009)
- [31] Traschen, J., *An Introduction to Black Hole Evaporation*, arXiv:gr-qc/0010055
- [32] Hübsch, T., *Fundamentalna Fizika Elementarnih Čestica*, Univerzitet u Novon Sadu (2011)
- [33] Wang, F. Y.-H., *Relativistic Orbits With Computer Algebra*, Am. J. Phys. **72**, 1040 (2004), dostupno na <http://faculty.lagcc.cuny.edu/fwang/wangorbits.pdf>
- [34] Za izračunavanje skalarnih invarijanti korišćen *Mathematica* paket EDCRGTCcode.m, dostupan na <http://www.inp.demokritos.gr/~sbonano/RGTC/>

Biografija autora



Rodjen sam 7. septembra 1988. godine u Požarevcu. Osnovnu školu “Jovan Jovanović-Zmaj” sam završio u Pančevu 2003. godine. Od 2003. godine sam pohađao prirodno-matematički smer gimnazije “Isidora Sekulić” u Novom Sadu. Odbranom maturalnog rada sa naslovom “Ajnštajnova gravitacija i geometrija svemira” završavam srednjoškolsko obrazovanje 2007. godine. Iste godine upisujem studije fizike, smer astronomija sa astrofizikom, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

<i>Redni broj:</i>	
RBR	
<i>Identifikacioni broj:</i>	
IBR	
<i>Tip dokumentacije:</i>	Monografska dokumentacija
TD	
<i>Tip zapisa:</i>	Tekstualni štampani materijal
TZ	
<i>Vrsta rada:</i>	Završni rad
VR	
<i>Autor:</i>	Branislav Nikolić
AU	
<i>Mentor:</i>	Prof. dr Milan Pantić
MN	
<i>Naslov rada:</i>	Kerova metrika sa primenama u astrofizici
NR	
<i>Jezik publikacije:</i>	srpski (latinica)
JP	
<i>Jezik izvoda:</i>	srpski/engleski
JI	
<i>Zemlja publikovanja:</i>	Srbija
ZP	
<i>Uže geografsko područje:</i>	Vojvodina
UGP	
<i>Godina:</i>	2011
GO	
<i>Izdavač:</i>	Autorski reprint
IZ	
<i>Mesto i adresa:</i>	Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA	
<i>Fizički opis rada:</i>	broj poglavlja-8, broj strana-106, broj referenci-34, broj tabela-3, broj slika-27, broj priloga-4
FO	
<i>Naučna oblast:</i>	Fizika
NO	
<i>Naučna disciplina:</i>	Astrofizika
ND	
<i>Predmetna odrednica/ ključne reči:</i>	Kerova metrika, opšta teorija relativnosti, rotirajuće Crne rupe, Lens-Tiringov efekat
PO	
UDK	
<i>Čuva se:</i>	Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu
ČU	
<i>Važna napomena:</i>	nema
VN	
<i>Izvod:</i>	U radu su predstavljene osnovne karakteristike Kerovog rešenja Ajnštajnovih jednačina i neke primene u astrofizici. Akcenat je stavljen na fizičko rezonovanje koje dovodi do potrebe za metrikom rotirajućih objekata. Rad takođe obuhvata i autorov doprinos razumevanju Kerove metrike u dvema različitim metričkim formama, kao i skicu autorovog alternativnog načina izvodjenja Kerovog rešenja, potkovanu fizičkim rezonom. U osnovnim crtama je obradjena i primena Kerovog rešenja na astrofizičke pojave aktivnih galaktičkih jezgara, kao i posledice koje Kerovo rešenje ima na razumevanje veze između prostor-vremena i materije/energije na fundamentalnom nivou.
IZ	
<i>Datum prihvatanja teme od NN veća:</i>	
DP	

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik:

Prof. dr Tijana Prodanović

član:

Prof. dr Milan Pantić

član:

Prof. dr Dušan Mrdja

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph publication
DT

Type of record: Textual printed material
TR

Content code: Final paper
CC

Author: Branislav Nikolić
AU

Mentor/comentor: Prof. dr Milan Pantić
MN

Title: Kerr metric with applications to astrophysics
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2011
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP

Physical description: chapters-8, pages-106, references-34, tables-3, figures-27, appendices-4
PD

Scientific field: Physics
SF

Scientific discipline: Astrophysics
SD

Subject/ Key words: Kerr metric, general theory of relativity, rotating Black holes, Lense-Thirring effect
SKW

Holding data: Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4
UC

Note: None
HD

Abstract:
AB

In this paper, basic characteristics and some applications of the Kerr solution to the Einstein's equations are discussed. Physical reasoning which gives a basis for the search of a metric for the rotating object is highlighted. Author's contribution to the understanding of the Kerr metric given with two different metric forms, along with the sketch of author's alternative derivation of Kerr solution through physical reasoning are also presented. The application of the Kerr solution to some astrophysical processes is discussed, with some consequences of Kerr solution to the understanding of the relationship between space-time and mater/energy on the fundamental level.

Accepted by the Scientific Board:
ASB

Defended on:

DE

Thesis defend board:

DB

President:

Prof. dr Tijana Prodanović

Member:

Prof. dr Milan Pantić

Member:

Prof. dr Dušan Mrdja