INSTITUT ZA FIZIKU

PRIRODNO - MATEMATIČKOG FAKULTETA

UNIVERZITETA U NOVOM SADU

BORA DEVIĆ

# NISKOTEMPERATURSKI RAZVOJ MAGNETIZACIJE JEDNOG KVAZI-DVODIMENZIONALNOG FEROMAGNETIKA

- DIPLOMSKI RAD -

NOVI SAD, 1980.

Zahvaljujem dr Mariju Škrinjaru na sugestiji o izboru teme i na pomoći u toku rada.

Isto zahvaljujem dr Darku Kaporu i dr Bratislavu Tošiću na pomoći u toku rada.

Bora Dević

# U V O D

Cilj teorijskih istraživanja magnetizma čvrstih tela je da se objasni priroda i ponašanje magnetnih pojava u raznim materijalima. Pre svega, misli se, na nastanak i ponašanje magnetizacije u zavisnosti od temperature i prirode čvrstog tela. S obzirom na činjenicu da makroskopske magnetne pojave potiču u osnovi od magnetnih momenata i konfiguracije atoma rešetke, koji čine uzorak, možemo klasifikovati čvrsta tela na slabe magnetike (dijamagnetici i paramagnetici) i jake magnetike (fero-magnetici, ferimagnetici i antifero-magnetici).

Ovaj rad se odnosi na feromagnetizam i predstavlja analizu spinskih talasa jednog skoro dvodimenzionog feromagnetika na niskim temperaturama.

# 1. OPŠTE POSTAVKE SAVREMENE TEORIJE MAGNETIZMA

## a. Jaki magnetici

Pošto jaki magnetici nisu poznati među tečnim i gasovitim telima može se pretpostaviti da kristalna rešetka ima važnu ulogu u magnetnim pojavama.

Makroskopski magnetni momenat se u savremenoj teoriji posmatra kao superpozicija srednjih vrednosti magnetnih momenata svih atoma. Magnetni moment atoma je vektorski zbir sopstvenog i orbitalnog magnetnog momenta elektrona u nepopunjenim unutrašnjim ljuskama.

Eksperimentalno je utvrđeno da orbitalni magnetni moment elektrona nema većeg značaja za makroskopski magnetni moment, pa se može zaključiti da je magnetizacija jakih magnetika superpozicija uređenih sopstvenih magnetnih momenata elektrona nepopunjenih unutrašnjih ljusika. Uređenost spinova ovih elektrona je rezultat interakcije elektrona kvantno mehaničkim silama izmene u magnetnim dielektricima dok u magnetnim metalima postoji i slaba interakcija sa elektronima provodnosti (s - d model)

Kako kvantno mehaničke sile izmene opadaju brzo sa rastojanjem interakcija praktično postoji među bližim susednim atomima. Ovakav model je predložio Heisenberg 1928. godine.

Magnetizacija u opštem slučaju zavisi od smera i jačine spoljašnjeg magnetnog polja, ali isto tako i od pravaca u kristalnoj rešeci, što ukazuje da kristali poseduju izvesnu magnetnu anizotropiju.

Ova anizotropija zavisi od tipa kristalne rešetke. Pravci u kojima se magnetizacija uspostavlja i bez spoljašnjeg polja nazivaju se ose lake magnetizacije. Spontana magnetizacija se uvek usmerava u pravcu neke od osa lake magnetizacije, a nastaje kada ispod neke određene temperature dođe do spontanog uređivanja spinova u odsustvu polja. Ukoliko se uključi spoljašnje magnetno polje H, spinovi će početi da se usmeravaju polako u pravcu polja. Tada je magnetizacija M funkcija polja H, sa rastom polja raste i magnetizacija. Parcijalni prvi izvod magnetizacije po jačini polja H naziva se magnetna susceptibilnost. Ako H raste u nekom trenutku pri određenoj vrednosti H svi spinovi biće usmereni u pravcu H. Dalje povećanje H ne dovodi do rasta M. Tada će M biti:

$$M = M_{max} = \mu N$$

gde je $M_{max}$ magnetizacija zasićenja, $\mu$ magnetni moment atoma, a $N$ broj atoma kristalne rešetke uzorka.

Procesu rasta magnetizacije suprotstavlja se proces razmagnetisavanja, koji je posledica zagrevanja.

Toplotni kvant pri sudaru sa atomom na nekom čvoru rešetke, okrene spin u suprotnom smeru (za spin $\frac{1}{2}$ promena iznosi 1). Ovaj spin interaguje sa ostalim spinovima kvantno-mehaničkim silama izmene, tako da se promena spina prenosi kroz kristalnu rešetku u vidu spinskih talasa. Na određenoj temperaturi intenzitet, tj. energija spinskih talasa postaje dovoljno velika da potpuno narušava spinsku uređenost. Tada kažemo da je

srednja toplotna energija izjednačena sa energijom interakcije izmene. Na ovoj temperaturi sistem prelazi u paramagnetnu fazu. Data temperatura se naziva Curieva temperatura. Iz ovoga se može videti da je magnetizacija jedino na apsolutnoj nuli maksimalna. Tipična vrednost magnetizacije feromagneta na $0^oK$ pri spoljašnjem polju jednakom 0 iznosi $M = 10^{-1}$ T

Curieve temperature nekih feromagnetika izražene u Kelvinima

| kristal | $\Theta_c$ | kristal | $\Theta_c$ |
|---|---|---|---|
| Fe | 1043 | MnBi | 630 |
| Co | 1400 | MnAs | 318 |
| Ni | 631 | MnB | 533 |
| Gd | 289 | MnSb | 587 |
| Dy | 105 | CrTe | 336 |

Kod feromagnetika stanju najniže energije na $0^oK$ odgovara maksimalna magnetizacija. Međutim, postoje materijali koji stanje minimalne energije imaju kada su susedni magnetni momenti, znači i spinovi, usmereni suprotno. To svojstvo je karakteristika antiferomagneta. Kad temperatura raste antiferomagnetska uređenost se smanjuje i magnetizacija raste. Na nekoj temperaturi, koja se naziva Neelova, gubi se antiferomagnetsko svojstvo, i sistem prelazi u paramagnetnu fazu. Na Neelovoj temperaturi imamo fazni prelaz II reda. Antiferomagnet možemo zamisliti kao dve trodimenzionalne podrešetke, koje se preklapaju, ili ulaze jedna u drugu, tako da im je ukupni magnetni moment jednak nuli.

Magnetski dipoli su po vrednosti jednaki, tako da je ukupna magnetizacija jednaka nuli, na $0^{o}K$.

Ferimagnetici su slični antiferomagneticima samo što su svi dipoli jednog smera veće vrednosti od dipola drugog smera. Magnetizacija na $0^{o}K$ je različita od nule. Ovi se magnetici ponašaju u principu kao feromagnetici.

## b. Heisenbergov feromagnetik

Kao što je već pomenuto, feromagnet po Hajzenbergu predstavlja sistem uređenih spinova međusobno povezanih kvantnomehaničkim silama izmene. Energija sistema zavisi od prostorne simetrije talasne funkcije sistema, a faktor zavisnosti predstavlja interakciju izmene. Ova interakcija je proporcionalna veličini ukupnog spina sistema, i teorijski se vrlo teško izračunava i za proste sisteme, pa se uzima kao fenomenološki parametar. U feromagnetskim materijalima integral izmene je pozitivna veličina. Njegovu vrednost možemo proceniti izjednačavajući ga sa termodinamičkom energijom na Curievoj temperaturi, što daje vrednost reda 0,1 eV.

U okolini Curieve temperature magnetizacija se može izraziti na sledeći način:

$$M_{(T)} = const. \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\beta}$$

gde je $\beta$ kritični eksponent
$\beta \in (0,33 - 0,42)$

kad $T \to 0$

$$M_{(T)} = M_{max} \left(1 - A_1 T^{3/2} - A_2 T^{5/2} \cdots\right)$$

gde su $A_i$ neke konstante

Da bismo mogli opisati feromagnetik potrebno je poznavati opšti oblik hamiltonijana.

U tom smislu uzimamo koordinatni sistem, čija je Z-osa u pravcu spoljašnjeg polja i duž koje su usmereni svi spinovi na apsolutnoj 0, a zanemarujemo spin-spinsku i spin--orbitalnu interakciju i posmatramo samo interakciju izmene. Spinove opisujemo kvantnomehaničkim spinskim operatorima $\overline{S}_{\vec{n}}$ ( $\vec{n}$ - vektor čvora $n$ kristalne rešetke). Operatori kreacije i anihilacije spinskih pobuđenja su dati kao:

$$S^{-}_{\vec{n}} = S^{x}_{\vec{n}} - i S^{y}_{\vec{n}}$$

$$S^{+}_{\vec{n}} = S^{x}_{\vec{n}} + i S^{y}_{\vec{n}} \qquad i \qquad S^{z}_{\vec{n}}$$

Hamiltonijan Hajzenberovog izotropnog feromagneta koji je dat sa:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} \vec{S}_{\vec{n}} \vec{S}_{\vec{m}} - g\mu_B H \sum_{\vec{n}} S^z_{\vec{n}}$$

$I_{\vec{n}\vec{m}}$ - integral izmene, $g$ - Landauov faktor

$H$ - spoljašnje magnetno polje

Na osnovu gornjih relacija za spinske operatore postaje:

$$\mathcal{H} = (g\mu_B H + SJ_0)\sum_{\vec{n}}(S - S^z_{\vec{n}}) - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} S^-_{\vec{n}} S^+_{\vec{m}} - -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}}(S - S^z_{\vec{n}})(S - S^z_{\vec{m}}), \quad J_0 = \sum_{\vec{l}} I_{\vec{l}}$$

Magnetizaciju ćemo analizirati preko relativne magnetizacije koja je definisana kao odnos magnetizacije na temperaturi T i maksimalne vrednosti magnetizacije.

$$\frac{M(T)}{M(0)} = \frac{Ng\mu_B\langle S^z_{\vec{n}}\rangle}{Ng\mu_B S} = \frac{\langle S^z_{\vec{n}}\rangle}{S}$$

Statistika spinskih operatora vidi se iz njihovih komutacionih relacija:

$$[S^+_{\vec{n}}, S^-_{\vec{m}}] = 2S^z_{\vec{n}}\delta_{\vec{n}\vec{m}} \qquad [S^\pm_{\vec{n}}, S^z_{\vec{m}}] = \mp S^\pm_{\vec{n}}\delta_{\vec{n}\vec{m}}$$

$$\{S^+_{\vec{n}}, S^-_{\vec{m}}\} = 2S(S+1) - 2(S^z_{\vec{n}})^2; \quad (S^\pm_{\vec{n}})^{2S+1} = 0,$$

te vidimo da se razlikuje od statistike bozonskih i fermionskih operatora. Tu nastaje glavni problem. Fourier transformacije spinskih operatora nisu kanonične i ne održavaju komutacione relacije. Potrebno je zato nekako spinske operatore izraziti u nekoj aproksimaciji, preko operatora čiju statistiku znamo. Bloch je to uradio preko Bose-operatora, izrazivši spinske operatore kao:

$$S_{\vec{n}}^{+} = B_{\vec{n}}^{-}\sqrt{2S} \qquad S_{\vec{n}}^{-} = B_{\vec{n}}^{+}\sqrt{2S}$$

i $$S_{\vec{n}}^{z} = S - B_{\vec{n}}^{+}B_{\vec{n}}$$

tada je:

$$\mathcal{H} = (g\mu_B H + SJ_0)\sum_{\vec{n}} B_{\vec{n}}^{+}B_{\vec{n}} - S\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} B_{\vec{n}}^{+}B_{\vec{m}}$$

i $$\sigma = 1 - S^{-1}\langle B_{\vec{n}}^{+}B_{\vec{n}}\rangle$$

Zadnji član hamiltonijana se odbacuje.

Sada feromagnet analiziramo kao bozonski sistem iz kojeg se dobija poznati Blochov zakon "T na tri polovine".

$$\sigma = 1 - S^{-1}\left(\frac{KT}{\frac{2}{3}\pi S J_0}\right)^{3/2} \cdot \zeta(3/2)$$

Ovaj rezultat je dobijen razvojem talasnog vektora do kvadratnih članova. Dalju analizu sproveo je Dyson, uključivši članove do šestog stepena po K. Kao popravku na Blockov rezultat dobio je članove proporcionalne $T^{5/2}$, $T^{7/2}$ i član $T^{4}$ koji potiče od interakcije magnona.

$$\sigma = \sigma_{BL.} + \sigma_{ANH.}$$

$$\sigma_{BL.} = 1 - S^{-1}\left[\zeta(3/2)\tau^{3/2} + \frac{3}{4}\pi\zeta(5/2)\tau^{5/2} + \frac{33}{32}\pi^2\zeta(7/2)\tau^{7/2} + \dots\right]$$

$$\sigma_{ANH.} = -S^{-1}6\pi\,\zeta(3/2)\,\zeta(5/2)\,\tau^{4}$$

$$\tau = \frac{KT}{\frac{2}{3}\pi S J_0} \qquad \zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$$

Za temperature blizu Curieve magnetizacija je proporcionalna:

$$\sigma \sim \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\beta}$$

$\beta$ je kritični eksponent i kreće se u intervalu vrednosti od 0,3 do 0,5.

Ukoliko želimo da analiziramo feromagnet na temperaturama višim od Cirijeve moramo u račun uključiti spoljašnje magnetno polje, jer se sistem sada nalazi u paramagnetnoj fazi. Jedan od mogućih modela feromagnetika za visoke temperature može se dobiti iz Hajzenbergovog modela ako se zanemari efekat prenošenja spinskih talasa sa čvora na čvor. Ovaj model se naziva Izingov model. Hamiltonijan Izingovog modela feromagneta ima oblik:

$$\hat{H}_{IS} = (g\mu_B H + S J_0)\sum_{\vec{n}}(S - S^z_{\vec{n}}) - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}}(S - S^z_{\vec{n}})(S - S^z_{\vec{m}})$$

Odmah se vidi da je Izingov model za razliku od Heisenbergovog modela strogo anizotropan. Ovakav je manje podesan na niskim temperaturama. Za slučaj dvodimenzionalnog modela postoji rešenje Onsagera za kritični eksponent, koji prema njemu ima vrednost 1/8, tako da magnetizacija približno izgleda:

$$\sigma \sim \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/8}$$

## 2. GREENOVE FUNKCIJE KVAZI-DVODIMENZIONALNOG FEROMAGNETIKA

U ovom poglavlju ćemo razmatrati jedan slučaj kvazi-dvodimenzionalnog feromagnetika, kod koga je interakcija J u ravni nekoliko redova veličine veća od interakcije J' između ravni.

U radu [1] navedene su sledeće supstance kao $K_2CuF_4$ i $(C_nH_{2n+1}NH_3)_2CuCl_4$, $n=(1,2\cdots 10)$ čije se magnetne osobine mogu prikazati pomoću ovog modela.

Onda se hamiltonijan sistema može napisati na sledeći način:

$$\mathcal{H}=-2J\sum_{\langle\vec{j},\vec{l}\rangle}\vec{S}_{\vec{j}}\vec{S}_{\vec{l}}-2J_a\sum_{\langle\vec{j},\vec{l}\rangle}S^y_{\vec{j}}S^y_{\vec{l}}-2J'\sum_{\langle\vec{j},\vec{m}\rangle}\vec{S}_{\vec{j}}\vec{S}_{\vec{m}}-$$
$$-g\mu_B H\sum_{\vec{j}}S^z_{\vec{j}} \qquad (2.1)$$

Ovde je $J_a$ konstanta anizotropne interakcije unutar ravanske izmene, $g$ -Landauov $g$ faktor, $\mu_B$ je Bohrov magneton. Sumiranje se vrši u svakom članu po parovima najbližih suseda. Spinski operatori $S^z_{\vec{j}}$ i $S^{\pm}_{\vec{j}}$ se mogu napisati preko bozonskih operatora $a^+_{\vec{j}}$ i $a_{\vec{j}}$ prema Maljejevu [2] kao:

$$S^+_{\vec{j}}=\sqrt{2S}\,(a_{\vec{j}}-a^+_{\vec{j}}a_{\vec{j}}a_{\vec{j}}/2S)$$
$$S^-_{\vec{j}}=\sqrt{2S}\,a^+_{\vec{j}} \qquad (2.2)$$
$$S^z_{\vec{j}}=S-a^+_{\vec{j}}a_{\vec{j}}$$

Fourier transformi ovih operatora su:

$$a_{\vec{j}}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{j}}a_{\vec{k}}$$

$$a_{\vec{j}}^{+}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\vec{j}}a_{\vec{k}}^{+} \tag{2.3}$$

gde su $a_{\vec{k}}^{+}$ i $a_{\vec{k}}$ isto bozonski operatori, a N je ukupan broj spinova.

Ako zanemarimo članove više od 4. reda, jednačina (2.1) se može napisati, s obzirom na date transformacije, u sledećem obliku: $\mathcal{H}=E_0+H_2+H_4$

$$E_0=-Nz_0JS^2-Nz_0'J'S^2-Ng\mu_B HS \qquad \text{-a)}$$

$$H_2=\sum_{\vec{k}}A_k a_{\vec{k}}^{+}a_{\vec{k}}+\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}B_{\vec{k}}(a_{\vec{k}}^{+}a_{-\vec{k}}^{+}+a_{\vec{k}}a_{-\vec{k}}) \qquad \text{-b)}$$

(2.4)

$$\begin{aligned}H_4=&\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4}\Big[z_0J(\gamma_1-\gamma_{2-4})+z_0'J'(\gamma_1'-\gamma_{2-4}')+\\&+z_0J_a\gamma_1/2\Big]\cdot\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3-\vec{k}_4)\,a_1^{+}a_2^{+}a_3a_4+\\&+\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4}(-z_0J_a\gamma/2)\,\delta(\vec{k}_1-\vec{k}_2-\vec{k}_3-\vec{k}_4)\,a_1^{+}a_2a_3a_4\end{aligned} \qquad \text{-c)}$$

gde je:

$$\begin{aligned}A_k=&2z_0JS(1-\gamma_{\vec{k}})+2z_0J'S(1-\gamma_{\vec{k}}')-\\&-z_0J_aS\gamma_{\vec{k}}+g\mu_B H\end{aligned}$$

$$B_k=z_0J_aS\gamma_{\vec{k}} \tag{2.5}$$

$$\gamma_{\vec{k}}=\frac{1}{z_0}\sum_{intraplane}e^{i\vec{k}\vec{\rho}} \qquad \gamma_{\vec{k}}'=\frac{1}{z_0'}\sum_{interplane}e^{i\vec{k}\vec{\rho}}$$

$Z_0$ je broj najbližih suseda u ravni, a $Z_0'$ između uzastopnih ravni. Oznake $a_1$ i $\gamma_1$ su za $a_{\vec{K}_1}$, $\gamma_{\vec{K}_1}$ itd. $H_2$ i $H_4$ označavaju hamiltonijan slobodnih spinskih talasa i interakcije spinskih talasa respektivno.

$H_4$ dalje možemo pisati kao:

$$H_4 = \frac{1}{N}\sum_{\vec{K}_1\vec{K}_2\vec{K}_3} F(\vec{K}_1,\vec{K}_3)\, a^+_{\vec{K}_1} a^+_{\vec{K}_2} a_{\vec{K}_3} a_{\vec{K}_1+\vec{K}_2-\vec{K}_3} + \frac{1}{N}\sum_{\vec{K}_1\vec{K}_2\vec{K}_3} \Phi(\vec{K}_1)\, a^+_{\vec{K}_1+\vec{K}_2+\vec{K}_3} a_{\vec{K}_1} a_{\vec{K}_2} a_{\vec{K}_3} \tag{2.6}$$

gde su:

$$F(\vec{K}_1,\vec{K}_3) = z_0 J(\gamma_{\vec{K}_1} - \gamma_{\vec{K}_3-\vec{K}_1}) + z_0' J'(\gamma'_{\vec{K}_1} - \gamma'_{\vec{K}_3-\vec{K}_1}) + z_0 J_a \gamma_{\vec{K}_1}/2$$

$$\Phi(\vec{K}_1) = -\frac{Z_0}{2} J_a \gamma_{\vec{K}_1} \tag{2.7}$$

Za slučaj kad spin ima vrednost 1/2 magnetizacija će imati sledeći oblik:

$$\sigma_{1/2} = 2\langle S^z_{\vec{n}}\rangle \tag{2.8}$$

Da bismo odredili srednju vrednost komponente spina u pravcu Z-ose, koristićemo se metodom Greenovih funkcija.

Dvovremenska, temperaturska, komutatorska Greenova funkcija ima oblik:

$$\langle\langle A(t)|B(t')\rangle\rangle = \Theta(t-t')\langle[A(t),B(t')]\rangle \tag{2.9}$$

$$\Theta(t-t') = \begin{cases} 1 & t>t' \\ 0 & t<t' \end{cases}$$

Diferenciranjem po vremenu i Fourier-transformacijom po vremenu dobijamo jednačinu kretanja za Greenovu funkciju:

$$E\langle\langle A|B\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}\langle[A,B]\rangle + \langle\langle[A,H]|B\rangle\rangle \tag{2.10}$$

E je energija elementarnih eksitacija, određuje se preko realnog dela pola Greenovih funkcija operatora.

Da bi smo izračunali spektar elementarnih eksitacija najpre rešavamo sledeći sistem jednačina za Greenove funkcije oblika:

$$\begin{aligned} E\langle\langle a_{\vec{k}}|a^+_{\vec{k}}\rangle\rangle &= \frac{i}{2\pi} + \langle\langle[a_{\vec{k}},\mathcal{H}]|a^+_{\vec{k}}\rangle\rangle \\ E\langle\langle a^+_{-\vec{k}}|a^+_{\vec{k}}\rangle\rangle &= \langle\langle[a^+_{-\vec{k}},\mathcal{H}]|a^+_{\vec{k}}\rangle\rangle \end{aligned} \tag{2.11}$$

S obzirom da polazni hamiltonijan nije ermitski moraćemo izračunati i Greenove funkcije oblika:

$$\begin{aligned} E\langle\langle a^+_{\vec{k}}|a_{\vec{k}}\rangle\rangle &= -\frac{i}{2\pi} + \langle\langle[a^+_{\vec{k}},\mathcal{H}]|a_{\vec{k}}\rangle\rangle \\ E\langle\langle a_{-\vec{k}}|a_{\vec{k}}\rangle\rangle &= \langle\langle[a_{-\vec{k}},\mathcal{H}]|a_{\vec{k}}\rangle\rangle \end{aligned} \tag{2.12}$$

Izračunavajući komutatore:

$[a_{\vec{k}},\mathcal{H}],\ [a^+_{-\vec{k}},\mathcal{H}],\ [a^+_{\vec{k}},\mathcal{H}]$ i $[a_{-\vec{k}},\mathcal{H}]$

pomoću komutacionih pravila za baze operatore.

$$\begin{aligned} [a_{\vec{q}}, a^+_{\vec{k}}] &= \delta_{\vec{k},\vec{q}} \\ [a_{\vec{q}}, a_{\vec{k}}] = [a^+_{\vec{q}}, a^+_{\vec{k}}] &= 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

i zamenjujući ih u (2.11) dobijamo sistem jednačina:

$$(E-A_{\vec K})\langle\langle a_{\vec k}|a^+_{\vec k}\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} + B_{\vec K}\langle\langle a^+_{-\vec k}|a^+_{\vec K}\rangle\rangle +$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{\vec q_1,\vec q_2}[F(\vec K,\vec q_2)+F(\vec q_1,\vec q_2)]\langle\langle a^+_{\vec q_1}a_{\vec q_2}a_{\vec k+\vec q_1-\vec q_2}|a^+_{\vec k}\rangle\rangle + \quad (2.14)$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{\vec q_1\vec q_2}\Phi(\vec K-\vec q_1-\vec q_2)\langle\langle a_{\vec k-\vec q_1-\vec q_2}a_{\vec q_1}a_{\vec q_2}|a^+_{\vec k}\rangle\rangle \qquad (2.14)$$

$$(E+A_{\vec k})\langle\langle a^+_{-\vec k}|a^+_{\vec k}\rangle\rangle = -B_{\vec K}\langle\langle a_{\vec k}|a^+_{\vec k}\rangle\rangle -$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{\vec q_1,\vec q_2}[F(\vec q_1,-\vec K)+F(\vec q_1,\vec q_1+\vec q_2+\vec K)\langle\langle a^+_{\vec q_1}a^+_{\vec q_2}a_{\vec q_1+\vec q_2+\vec k}|a^+_{\vec k}\rangle\rangle$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{\vec q_1\vec q_2}[\Phi(-\vec K)+2\Phi(\vec q_1)]\langle\langle a^+_{\vec q_1+\vec q_2-\vec k}a_{\vec q_1}a_{\vec q_2}|a^+_{\vec k}\rangle\rangle$$

Na isti način jednačine iz (2.12) postaju:

$$(E+A_{\vec k})\langle\langle a^+_{-\vec k}|a_{\vec k}\rangle\rangle = -\frac{i}{2\pi} - B_{\vec K}\langle\langle a_{-\vec k}|a_{\vec k}\rangle\rangle +$$

$$+\frac{(-1)}{N}\sum_{\vec q_1\vec q_2}[F(\vec q_1,\vec K)+F(\vec q_1,\vec q_1+\vec q_2-\vec K)\langle\langle a^+_{\vec q_1}a^+_{\vec q_2}a_{\vec q_1+\vec q_2-\vec k}|a_{\vec k}\rangle\rangle -$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{\vec q_1\vec q_2}[\Phi(\vec K)+2\Phi(\vec q_1)]\langle\langle a^+_{\vec q_1+\vec q_2+\vec k}a_{\vec q_1}a_{\vec q_2}|a_{\vec k}\rangle\rangle \qquad (2.15)$$

$$(E-A_{\vec k})\langle\langle a_{-\vec k}|a_{\vec k}\rangle\rangle = B_{\vec K}\langle\langle a^+_{\vec k}|a_{\vec k}\rangle\rangle +$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{\vec q_1\vec q_2}F(-\vec K,\vec q_2)+F(\vec q_1,\vec q_2)]\langle\langle a^+_{\vec q_1}a_{\vec q_2}a_{\vec q_1-\vec q_2-\vec k}|a_{\vec k}\rangle\rangle$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{\vec q_1\vec q_2}\Phi(\vec q_1)\langle\langle a_{\vec q_1}a_{\vec q_2}a_{-\vec k-\vec q_1-\vec q_2}|a_{\vec k}\rangle\rangle$$

Višečestične Greenove funkcije dekuplovaćemo na sledeći način:

$$\langle\langle a^+_{\vec q_1}a^+_{\vec q_2}a_{\vec q_1+\vec q_2+\vec k}|a^+_{\vec k}\rangle\rangle = \langle a^+_{\vec q_1}a^+_{-\vec q_1}\rangle\langle\langle a_{\vec k}|a^+_{\vec k}\rangle\rangle\delta_{\vec q_1,-\vec q_2}+$$

$$+\langle a^+_{\vec q_1}a_{\vec q_1}\rangle\langle\langle a^+_{-\vec k}|a^+_{\vec k}\rangle\rangle\delta_{\vec q_2,-\vec K}+\langle a^+_{\vec q_2}a_{\vec q_2}\rangle\langle\langle a^+_{-\vec k}|a^+_{\vec k}\rangle\rangle\delta_{\vec q_1,-\vec K}$$

$$\langle\langle a^+_{\vec q_1+\vec q_2-\vec k}a_{\vec q_1}a_{\vec q_2}|a^+_{\vec k}\rangle\rangle = \langle a^+_{\vec q_1}a_{\vec q_1}\rangle\langle\langle a_{\vec k}|a^+_{\vec k}\rangle\rangle\delta_{\vec q_2,\vec K}+$$

$$+\langle a^+_{\vec{q}_2} a_{\vec{q}_2}\rangle \langle\langle a_{\vec{K}} | a^+_{\vec{K}}\rangle\rangle \delta_{\vec{q}_1,\vec{K}} + \langle a_{\vec{q}_1} a_{-\vec{q}_1}\rangle \langle\langle a^+_{-\vec{K}} | a^+_{\vec{K}}\rangle\rangle \delta_{\vec{q}_1,\vec{q}_2}$$

$$\langle\langle a^+_{\vec{q}_1} a_{\vec{q}_2} a_{\vec{q}_1-\vec{q}_2-\vec{K}} | a_{\vec{K}}\rangle\rangle = \langle a^+_{\vec{q}_1} a_{\vec{q}_1}\rangle \langle\langle a_{-\vec{K}} | a_{\vec{K}}\rangle\rangle \delta_{\vec{q}_1,\vec{q}_2} +$$

$$+\langle a^+_{\vec{q}_1} a_{\vec{q}_1}\rangle \langle\langle a_{-\vec{K}} | a_{\vec{K}}\rangle\rangle \delta_{\vec{q}_2,-\vec{K}} + \langle a_{\vec{q}_2} a_{-\vec{q}_2}\rangle \langle\langle a^+_{\vec{K}} | a_{\vec{K}}\rangle\rangle \delta_{\vec{q}_1,\vec{K}}$$

$$\langle\langle a_{\vec{q}_1} a_{\vec{q}_2} a_{-\vec{q}_1-\vec{q}_2-\vec{K}} | a_{\vec{K}}\rangle\rangle = [\langle a_{\vec{q}_1} a_{-\vec{q}_1}\rangle (\delta_{\vec{q}_1,-\vec{q}_2} + \delta_{\vec{q}_2,-\vec{K}})$$

$$+ \langle a_{\vec{q}_2} a_{-\vec{q}_2}\rangle \delta_{\vec{q}_1,-\vec{K}}] \langle\langle a_{-\vec{K}} | a_{\vec{K}}\rangle\rangle$$

itd. Tako dobijamo:

$$(E + X(\vec{K}))\langle\langle a^+_{\vec{K}} | a_{\vec{K}}\rangle\rangle + (Z(\vec{K}) - Y'(\vec{K}))\langle\langle a_{-\vec{K}} | a_{\vec{K}}\rangle\rangle = -\frac{i}{2\pi}$$

$$(E - X(\vec{K}))\langle\langle a_{-\vec{K}} | a_{\vec{K}}\rangle\rangle + Y(\vec{K})\langle\langle a^+_{\vec{K}} | a_{\vec{K}}\rangle\rangle = 0 \qquad (2.16)$$

i

$$(E + X(\vec{K}))\langle\langle a^+_{-\vec{K}} | a^+_{\vec{K}}\rangle\rangle + (Z(\vec{K}) - Y'(\vec{K}))\langle\langle a_{\vec{K}} | a^+_{\vec{K}}\rangle\rangle = 0$$

$$(E - X(\vec{K}))\langle\langle a_{\vec{K}} | a^+_{\vec{K}}\rangle\rangle + Y(\vec{K})\langle\langle a^+_{-\vec{K}} | a^+_{\vec{K}}\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} \qquad (2.17)$$

gde su:

$$X(\vec{K}) = A_{\vec{K}} + \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \langle a^+_{\vec{q}} a_{\vec{q}}\rangle [F(\vec{K},\vec{q}) + F(\vec{q},\vec{q}) + F(\vec{K},\vec{K}) + F(\vec{q},\vec{K})] +$$

$$+ \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \langle a_{\vec{q}} a_{-\vec{q}}\rangle [2\Phi(\vec{q}) + \Phi(\vec{K})]$$

$$Y(\vec{k}) = -B_{\vec{k}} - \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \langle a_{\vec{q}} a_{-\vec{q}} \rangle \left[ F(-\vec{k},\vec{q}) + F(\vec{k},\vec{q}) \right]$$

$$Z(\vec{k}) = \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \langle a^{+}_{\vec{q}} a_{\vec{q}} \rangle \left[ 4\Phi(\vec{k}) + 2\Phi(\vec{q}) \right] \qquad (2.18)$$

$$Y'(\vec{k}) = -B_{\vec{k}} - \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \langle a^{+}_{\vec{q}} a^{+}_{-\vec{q}} \rangle \left[ F(\vec{q},\vec{k}) + F(\vec{q},-\vec{k}) \right]$$

Rešavanjem sistema jednačina (2.16) i (2.17) dobijamo sve četiri Greenove funkcije:

$$\langle\langle a_{\vec{k}} | a^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}\frac{1}{2E_{\vec{k}}}\left[\frac{E_{\vec{k}} + X(\vec{k})}{E - E_{\vec{k}}} + \frac{E_{\vec{k}} - X(\vec{k})}{E + E_{\vec{k}}}\right]$$

$$\langle\langle a^{+}_{-\vec{k}} | a^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{-i}{2\pi}\frac{Z(\vec{k}) - Y'(\vec{k})}{2E_{\vec{k}}}\left[\frac{1}{E - E_{\vec{k}}} - \frac{1}{E + E_{\vec{k}}}\right]$$

$$\langle\langle a^{+}_{\vec{k}} | a_{\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{-i}{2\pi}\frac{1}{2E_{\vec{k}}}\left[\frac{E_{\vec{k}} - X(\vec{k})}{E - E_{\vec{k}}} + \frac{E_{\vec{k}} + X(\vec{k})}{E + E_{\vec{k}}}\right] \qquad (2.19)$$

$$\langle\langle a_{-\vec{k}} | a_{\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}\frac{Y(\vec{k})}{2E_{\vec{k}}}\left[\frac{1}{E - E_{\vec{k}}} - \frac{1}{E + E_{\vec{k}}}\right]$$

$E_{\vec{k}}$ je pol Greenove funkcije,

$$E_{\vec{k}} = \sqrt{X^2(\vec{k}) + (Z(\vec{k}) - Y'(\vec{k}))Y(\vec{k})} \qquad (2.20)$$

i predstavlja energiju elementarnih eksitacija.

Koristeći relaciju za izračunavanje spektralne intenzivnosti neke Greenove funkcije $G_{\vec{k}}(E)$:

$$Q_{\vec{k}}(E) = \frac{2\,\mathrm{Re}\,G_{\vec{k}}(E)}{e^{\frac{E_{\vec{k}}}{\Theta}} - 1} \qquad (2.21)$$

Tada je srednja vrednost proizvoda dva operatora $a_{\vec{k}}$ i $a_{\vec{k}}$ dat kao:

$$\langle a_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 R_e G_{\vec{k}}(E)}{e^{\frac{E_{\vec{k}}}{\Theta}} - 1} dE \tag{2.22}$$

Primenjujući (2.22) na svaku Greenovu funkciju iz (2.19) dobijamo srednje brojeve respektivno:

$$\begin{aligned}
&\langle a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \rangle = \frac{1}{2}\left[ \frac{X(\vec{k})}{E_{\vec{k}}} cth \frac{E_{\vec{k}}}{2\Theta} - 1 \right] && a \\
&\langle a^+_{-\vec{k}} a^+_{\vec{k}} \rangle = \frac{1}{2} \frac{Y'(\vec{k}) - Z(\vec{k})}{E_{\vec{k}}} cth \frac{E_{\vec{k}}}{2\Theta} && b \qquad (2.23) \\
&\langle a_{\vec{k}} a^+_{\vec{k}} \rangle = \frac{1}{2}\left[ \frac{X(\vec{k})}{E_{\vec{k}}} cth \frac{E_{\vec{k}}}{2\Theta} + 1 \right] && c \\
&\langle a_{-\vec{k}} a_{\vec{k}} \rangle = \frac{1}{2} \frac{Y(\vec{k})}{E_{\vec{k}}} cth \frac{E_{\vec{k}}}{2\Theta} && d
\end{aligned}$$

Koristeći gornje rezultate srednju magnetizaciju po čvoru rešetke možemo izraziti sledećom formulom:

$$\begin{aligned}
\sigma &= 1 - 2\langle a^+_{\vec{j}} a_{\vec{j}} \rangle \\
\sigma &= 1 - \frac{2}{N} \sum_{\vec{k}} \langle a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \rangle
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Rešavajući (2.18), (2.20) i (2.23) možemo odrediti energiju elementarnih eksitacija i magnetizaciju. Međutim, izračunavanja su vrlo komplikovana, pošto je u opštem slučaju potrebno rešavati sistem integralnih jednačina, što je moguće samo numerički.

Zbog toga ćemo izvršiti neke aproksimacije, kako bi smo dobili niskotemperaturski razvoj za magnetizaciju sistema, koji ćemo uporediti sa poznatim Dysonovim rezultatom trodimenzionalnog izotropnog Heisenbergovog feromagnetika.

## 3. MAGNETIZACIJA U SLUČAJU $J_a = 0$

U ovom delu razmatraćemo slučaj kada je konstanta anizotropne interakcije jednaka nuli. Slična analiza ovog problema je data u radu (2), gde je posmatrana magnetizacija za $J' \ll K_B T \ll J$ i dobijena logaritamska zavisnost od temperature:

$$\frac{M(T)}{Ng\mu_B} = S - t\left(\log t' + \frac{1}{t'}\right) - \frac{t^2}{2}\left(\frac{\pi^3}{6} - \frac{2\pi}{t'}\log t'\right) - \dots \tag{3.1}$$

gde je $\quad t' = \dfrac{K_B T}{Z_0' J' S}$

Međutim, ovde nije jasno kako je uračunata interakcija među spinovima;

Mi ćemo posmatrati slučaj kada $J'$ teži ka $J$, odnosno kada dvodimenzionalni feromagnet prelazi u trodimenzionalni:

$$\frac{J - J'}{J} = \delta \ll 1 \tag{3.2}$$

U graničnom slučaju, kad moramo dobiti Dysonov rezultat: $\delta \to 0$.

Kada je $J_a = 0$, srednje vrednosti $\langle a^+ a^+ \rangle$ su jednake nuli, kao i Grennove funkcije $\langle\langle a^+ | a^+ \rangle\rangle$ , što sledi iz polaznog hamiltonijana (2.4). Tada je hamiltonijan sistema:

$$H_2 + H_4 + E_0 = \mathcal{H} \qquad H_2 = \sum_{\vec{k}} A'_{\vec{k}} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}}$$
$$H_4 = \frac{1}{N} \sum_{k} F'(\vec{k}_1, \vec{k}_3)\, a^+_{\vec{k}_1} a^+_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3} \tag{3.3}$$

Greenova funkcija $\langle\langle a_{\vec{k}} | a^+_{\vec{k}} \rangle\rangle$ tada izgleda:

$$\langle\langle a_{\vec{k}} | a^+_{\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{1}{E - A'_{\vec{k}} - \widetilde{M}(\vec{k}, \vec{q})} \tag{3.4}$$

$$\mathcal{E}_{\vec{k}} = A'_{\vec{k}} + \widetilde{M}(\vec{k}, \vec{q}) \tag{3.5}$$

$$\widetilde{M}(\vec{k}, \vec{q}) = \frac{2}{N} \sum_{\vec{q}} \langle a^+_{\vec{q}}, a_{\vec{q}} \rangle M(\vec{k}, \vec{q}) \tag{3.6}$$

$$M(\vec{k}, \vec{q}) = z_0 J(\gamma_{\vec{k}} + \gamma_{\vec{q}} - \gamma_{\vec{k}-\vec{q}} - \gamma_0) + z'_0 J'(\gamma'_{\vec{k}} + \gamma'_{\vec{q}} - \gamma'_{\vec{k}-\vec{q}} - \gamma'_0) \tag{3.7}$$

$\mathcal{E}_{\vec{k}}$ je pol Greenove funkcije, odnosno energija elementarnih eksitacija. S obzirom na (3.2) možemo (3.7) napisati kao:

$$\frac{M(\vec{k}, \vec{q})}{J} = \frac{M_D}{J} - \delta z'_0 [\gamma'_{\vec{k}} + \gamma'_{\vec{q}} - \gamma'_{\vec{k}-\vec{q}} - \gamma'_0] \tag{3.8}$$

gde smo iskoristili izraz:

$$z_0 \gamma_{\vec{k}} + z'_0 \gamma'_{\vec{k}} = z_0^i \gamma^i_{\vec{k}}$$
$$M_D = z_0^i [\gamma^i_{\vec{k}} + \gamma^i_{\vec{q}} - \gamma^i_{\vec{k}-\vec{q}} - \gamma^i_0] \tag{3.9}$$
$$M_1 = z'_0 [\gamma'_{\vec{k}} + \gamma'_{\vec{q}} - \gamma'_{\vec{k}-\vec{q}} - \gamma'_0]$$

Srednja vrednost $\langle a_{\vec{K}}^{+} a_{\vec{K}} \rangle$ je oblika:

$$\langle a_{\vec{K}}^{+} a_{\vec{K}} \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_{\vec{K}}}{kT}} - 1} \tag{3.10}$$

Onda energiju $\varepsilon_K$ možemo napisati kao:

$$\varepsilon_{\vec{K}} = \frac{E_o(\vec{K})}{J} J - J\delta z_o'(1-\gamma_{\vec{K}}')\cdot 2S + \\ + J\frac{2}{N}\sum_{\vec{q}} \frac{1}{e^{\varepsilon_{\vec{K}}/\theta}-1}\left[\frac{M_D(\vec{K},\vec{q})}{J} - \delta M_1(\vec{K},\vec{q})\right] \tag{3.11}$$

ili

$$\widetilde{X}_{(\vec{K})} = \frac{X(\vec{K})}{J} = \frac{\varepsilon_{\vec{K}}}{J} = \frac{E_o(\vec{K})}{J} + \frac{2}{N}\sum_{\vec{q}} \frac{1}{e^{\varepsilon_{\vec{K}}/\theta}-1}\cdot\frac{M_D(\vec{K},\vec{q})}{J} - \\ -\delta\left[z_o'(1-\gamma_{\vec{K}}')2S - \frac{2}{N}\sum_{\vec{q}}\frac{1}{e^{\varepsilon_{\vec{K}}/\theta}-1} M_1(\vec{K},\vec{q})\right] \tag{3.12}$$

Ako primenimo jednakost:

$$\frac{1}{e^{\widetilde{X}_{\vec{K}}/\theta'}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n+1}{\theta'}\widetilde{X}_{\vec{K}}^{i}} - \\ - \delta\frac{n+1}{\theta'}\widetilde{X}_{\vec{K}}^{a}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n+1}{\theta'}\widetilde{X}_{\vec{K}}^{i}} \qquad \theta' = \frac{\theta}{J} \tag{3.13}$$

Dobijamo da je za:

$$\widetilde{X}_{\vec{K}} = \widetilde{X}_{\vec{K}}^{i} + \delta\widetilde{X}_{\vec{K}}^{a} \tag{3.14}$$

$\widetilde{X}_{\vec{K}}^{i}$ jednako Dysonovom rezultatu:

$$\widetilde{X}^{i}_{\vec{K}} = E_{D(\vec{K})} = \Gamma' + \frac{E_0(\vec{K})}{J} + \frac{2}{N}\sum_{\vec{q}} \frac{1}{e^{X_{\vec{q}}/\Theta'}-1}\,\frac{M_D(\vec{K},\vec{q})}{J} \qquad (3.15)$$

Dok je anizotropni deo $\widetilde{X}^{a}_{\vec{K}}$ jednak:

$$\widetilde{X}^{a}_{\vec{K}} = 2Sz_0'(1-\gamma_{\vec{K}}') - \frac{2}{N}\sum_{\vec{q}} \frac{1}{e^{\widetilde{X}_{\vec{q}}/\Theta'}-1} M_1(\vec{K},\vec{q}) - \qquad (3.16)$$

$$-\frac{2}{N}\sum_{\vec{q},\vec{n}} \frac{n+1}{\Theta'}\widetilde{X}^{a}_{q}\, e^{-\frac{n+1}{\Theta'}\widetilde{X}^{i}_{\vec{q}}}\cdot \frac{M_0(\vec{K},\vec{q})}{J}$$

Temperaturska zavisnost magnetizacije je:

$$\sigma = 1 - \frac{2}{N}\sum_{\vec{K}} \langle a^{+}_{\vec{K}} a_{\vec{K}} \rangle = \qquad (3.17)$$

$$= 1 - \frac{1}{N}\sum_{\vec{K}}\left(\frac{X_{\vec{K}}}{\mathcal{E}_{\vec{K}}}\,\mathrm{cth}\,\frac{\mathcal{E}_{\vec{K}}}{2\Theta} - 1\right)$$

ako iskoristimo identitet:

$$\mathrm{cth}\,\frac{\widetilde{\mathcal{E}}_{\vec{q}}}{2\Theta'} \equiv 1 + 2\frac{1}{e^{\mathcal{E}_{\vec{q}}/\Theta'}-1} \qquad (3.18)$$

dobijamo:

$$\sigma = 1 - \frac{1}{N}\sum_{\vec{K}}\left(\frac{X_{\vec{K}}}{\mathcal{E}_{\vec{K}}} - 1\right) -$$

$$-\frac{2}{N}\sum_{\vec{K}} \frac{X_{\vec{K}}}{\mathcal{E}_{\vec{K}}}\,\frac{1}{e^{\mathcal{E}_{\vec{K}}/\Theta}-1} \qquad (3.19)$$

Drugi član daje devijaciju magnetizacije na apsolutnoj nuli i za $X_{\vec{K}} = \mathcal{E}_{\vec{K}}$ jednak je nuli. Zadnji član predstavlja temperatursku zavisnost magnetizacije, što možemo pisati:

$$\sigma = 1 - \Delta\sigma_0 - \Delta\sigma(\Theta)$$

$$\Delta \sigma_0 = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \left( \frac{X_{\vec{k}}}{\mathcal{E}_{\vec{k}}} - 1 \right) = 0, \quad \mathcal{E}_{\vec{q}} = X_{\vec{q}} \tag{3.20}$$

$$\Delta \sigma(\Theta) = \frac{2}{N} \sum_{\vec{k}} \frac{X_{\vec{k}}}{\mathcal{E}_{\vec{k}}} \frac{1}{e^{X_{\vec{k}}/\Theta} - 1} = \frac{2}{N} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{X_{\vec{k}}/\Theta} - 1}$$

S obzirom na (3.14) dobijamo:

$$\Delta \sigma(\Theta) = \Delta \sigma_i(\Theta) - \delta \Delta \sigma_a(\Theta)$$

$$\Delta \sigma(\Theta) = \frac{2}{N} \sum_n e^{-\frac{n+1}{\Theta'}\Gamma'} \sum_{\vec{k}} e^{-\frac{n+1}{\Theta'}\left(\tilde{X}'^{i}_{\vec{k}} + \delta \tilde{X}^{a}_{\vec{k}}\right)} \tag{3.21}$$

$$\Delta \sigma(\Theta) = \Delta \sigma_i(\Theta) - \delta \frac{2}{N} \sum_n \frac{n+1}{\Theta'} e^{-\frac{n+1}{\Theta'}\Gamma'} \times$$
$$\times \sum_{\vec{k}} \tilde{X}^{a}_{\vec{k}} e^{-\frac{n+1}{\Theta'} \tilde{X}'^{i}_{\vec{k}}}$$

$$\Delta \sigma_i(\Theta) = \Delta \sigma_D(\Theta) =$$
$$= \frac{2}{N} \sum_n e^{-\frac{n+1}{\Theta'}\Gamma'} \sum_{\vec{k}} e^{-\frac{n+1}{\Theta'} \tilde{X}'^{i}_{\vec{k}}}$$

Ako pređemo sada sa sume na integral, dobijamo opšti izraz za magnetizaciju:

$$\sigma = 1 - \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n+1}{\Theta'}\Gamma'} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \int_{-\frac{\pi}{b}}^{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{n+1}{\Theta'} \tilde{X}'^{i}_{\vec{k}}} dk_x\, dk_y\, dk_z \tag{3.22}$$

Ovaj izraz se koristi za izračunavanje magnetizacije kada je $\delta = 0$ , odnosno kada je anizotropni deo jednak nuli. Ako je $\delta \neq 0$ imamo i popravku usled anizotropije. Kada $\Theta \to 0$ granice integracije postaju beskonačne. Sada nastavljamo, naime, energiju $\widetilde{X}'^{i}_{\vec{K}}$ ćemo napisati kao razvoj po parnim stepenima talasnog vektora $\vec{K}$;

$$\widetilde{X}'^{i}_{\vec{K}} = \sum_i a_i(\Theta') K_i'^2 + \sum_i b_i(\Theta') K_i'^4 + \sum_i c_i(\Theta') K_i'^6 = \widetilde{X}^{i}_{\vec{K}} - \Gamma' ; \quad K_i' = \alpha_i K_i \tag{3.23}$$

$$i = 1,2,3 \text{ ili } i = x,y,z;$$

Ako iskoristimo razvoj:

$$e^{-\frac{n+1}{\Theta'}\widetilde{X}'^{i}_{\vec{K}}} = e^{-\frac{n+1}{\Theta'}\sum_i a_i(\Theta') K_i'^2}\Big[1 - \frac{n+1}{\Theta'}\Big(\sum_i b_i(\Theta')K_i'^4 + \sum_i c_i(\Theta')K_i'^6\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{n+1}{\Theta'}\Big)^2 \sum_{i,j} b_i(\Theta') b_j(\Theta') K_i'^4 K_j'^4 + \cdots\Big] \tag{3.24}$$

Za magnetizaciju (3.22) dobijamo:

$$\sigma = 1 - 2\frac{V}{N}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\Theta'^{3/2}}{\sqrt{a_1(\Theta')a_2(\Theta')a_3(\Theta')}} \times \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n+1}{\Theta'}\Gamma'}(n+1)^{-3/2}\Big\{\pi^{3/2} - \frac{\Theta'}{n+1}\sum_i \frac{b_i(\Theta')}{a_i^2(\Theta')}J_4 - \frac{\Theta'^2}{(n+1)^2}\sum_i \frac{c_i(\Theta')}{a_i^3(\Theta')}J_6 + \frac{\Theta'^2}{2(n+1)^2}\sum_{i,j}\frac{b_i(\Theta')b_j(\Theta')}{a_i^2(\Theta')a_j^2(\Theta')}J_8^{i,j} \tag{3.25}$$

$$\frac{V}{N} = \Omega_0 \qquad i = 1,2,3; \text{ odnosno } i = x,y,z$$

gde su:

$$J_4 = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu_1^2-\nu_2^2-\nu_3^2} \nu_1^4 d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3 = \pi\,\Gamma(5/2) \tag{3.26}$$

$$J_6 = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu_1^2-\nu_2^2-\nu_3^2} \nu_1^6 d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3 = \pi\,\Gamma(7/2)$$

$$J_8^{i=j} = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu_1^2-\nu_2^2-\nu_3^2} \nu_1^4 \nu_2^4 d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3 = \pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu^2} \nu^8 d\nu = \pi\,\Gamma(9/2)$$

$$J_8^{i\neq j} = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu_1^2-\nu_2^2-\nu_3^2} \nu_1^4 \nu_2^4 d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu_1^2} \nu_1^4 d\nu_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu_2^2} \nu_2^4 d\nu_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu_3} d\nu_3 =$$

$$= \Gamma(5/2)\,\Gamma(5/2)\cdot\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}\,\Gamma^2(5/2)$$

gde je iskorišćena smena u (3.22)

$$\alpha_i K_i = \sqrt{\frac{\Theta'}{(n+1)a_i(\Theta')}} \cdot \nu_i \qquad dK_i = \sqrt{\frac{\Theta'}{(n+1)a_i(\Theta')}}\, d\nu_i \frac{1}{\alpha_i}$$

$$\alpha_i^2 K_i^2 = \frac{\Theta'}{(n+1)a_i(\Theta')}\,\nu_i^2 \qquad \alpha_i^{2p} K_i^{2p} = \left[\frac{\Theta'}{(n+1)\,a_i(\Theta')}\right]^p \nu_i^{2p}; \quad p\in N$$

Ako uvedemo oznaku $Z_p(\alpha)$ kao:

$$Z_p(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(n+1)\Gamma'}{\Theta'}}}{(n+1)^p} \qquad \alpha = \frac{\Gamma'}{\Theta'} \tag{3.27}$$

za $\Delta\sigma_i(\Theta')$ imamo:

$$\Delta\sigma_i(\Theta') = \Theta'^{3/2} Z_{3/2}(\alpha) \cdot \frac{\Omega_0}{4\pi^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{a_1(\Theta')a_2(\Theta')a_3(\Theta')}} - \tag{3.28}$$

$$- \Theta'^{5/2} Z_{5/2}(\alpha) \frac{\Omega_0}{4\pi^2} \Gamma(5/2) \frac{1}{\sqrt{a_1(\Theta')a_2(\Theta')a_3(\Theta')}} \cdot \sum_i \frac{b_i(\Theta')}{a_i^2(\Theta')} -$$

$$- \Theta'^{7/2} Z_{7/2}(\alpha) \frac{\Omega_0}{\sqrt{a_1(\Theta')a_2(\Theta')a_3(\Theta')}} \left[ \Gamma(7/2)(4\pi^2)^{-1} \sum_i \frac{c_i(\Theta')}{a_i^3(\Theta')} - \right.$$

$$- \frac{\Gamma(9/2)}{8\pi^2} \sum_i \frac{b_i(\Theta')}{a_i^4(\Theta')} - \Gamma^2(5/2) \cdot \frac{1}{4\pi^{5/2}} \times$$

$$\left. \times \sum_{i \neq j} \frac{b_i(\Theta') b_j(\Theta')}{a_i^2(\Theta') a_j^2(\Theta')} \right] + O(\Theta'^{9/2})$$

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} dt$$

Sada treba proceniti do kog stepena po $\Theta'$ treba izračunati koeficijente $a_i(\Theta')$, $b_i(\Theta')$ i $c_i(\Theta')$ u izrazu za energiju (3.23). Da bi izraz (3.28), tj. magnetizacija sadržavala sve članove do $\Theta'^{9/2}$, procenjivanjem zaključujemo da koeficijenti $a_i(\Theta')$ $b_i(\Theta')$ i $c_i(\Theta')$ moraju ići do sledeće tačnosti:

$$a_i(\theta') \sim \theta'^{7/2} \quad b_i(\theta') \sim \theta'^{5/2} \quad c_i(\theta') \sim \theta'^{1/2} \tag{3.29}$$

odnosno:

$$a_i(\theta') = \frac{1}{2} - \pi Z_{5/2}(\alpha)\left(\frac{\theta'}{2\pi}\right)^{5/2} + \frac{\pi^2}{2} Z_{7/2}(\alpha)\left(\frac{\theta'}{2\pi}\right)^{7/2}$$

$$b_i(\theta') = -\frac{1}{24} - \pi Z_{5/2}(\alpha)\left(\frac{\theta'}{2\pi}\right)^{5/2} \tag{3.30}$$

$$c_i(\theta') = \frac{1}{720}$$

Ako ove koeficijente zamenimo u (3.23) i (3.28) dobićemo:

$$\begin{aligned}\tilde{X}^{\prime i}_{\vec{k}} = E_D(\vec{k}) = {} & \frac{1}{720}\sum_i k_i^6 + \\ & + \left[-\frac{1}{24} - \pi Z_{5/2}(\alpha)\left(\frac{\theta'}{2\pi}\right)^{5/2}\right]\cdot\sum_i k_i^4 \\ & + \left[\frac{1}{2} - \pi Z_{5/2}(\alpha)\left(\frac{\theta'}{2\pi}\right)^{5/2} + \frac{\pi^2}{2} Z_{7/2}(\alpha)\left(\frac{\theta'}{2\pi}\right)^{7/2}\right]\sum_i k_i^2\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}\Delta b_i(\theta') = \Delta b_D(\theta') = {} & 2 Z_{3/2}(\alpha)\rho^{3/2} + \\ & + \frac{3}{2}\pi Z_{5/2}(\alpha)\rho^{5/2} + \frac{33}{16}\pi^2 Z_{7/2}(\alpha)\rho^{7/2} + \\ & + 6\pi Z_{3/2}(\alpha) Z_{5/2}(\alpha)\rho^4\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\rho = \frac{\theta'}{2\pi}$$

što predstavlja Dysonove rezultate za energiju i magnetizaciju izotropnog feromagnetika.

Na sličan način možemo izračunati $\Delta\sigma_a(\theta')$ za slučaj $\delta \neq 0$ Iz (3.21) imamo:

$$\Delta\sigma_a(\theta') = \frac{2}{N}\sum_n \frac{n+1}{\theta'} e^{-\frac{n+1}{\theta'}\Gamma'} \times \sum_{\vec{K}} \widetilde{X}^a_{\vec{K}} e^{-\frac{n+1}{\theta'}\widetilde{X}^{\prime i}_{\vec{K}}} \qquad (3.33)$$

Veličinu $\widetilde{X}^a_K$ ćemo predstaviti na sledeći način:

$$\widetilde{X}^a_K = \sum_i A_i(\theta')\alpha_i^2 K_i^2 + \sum_i B_i(\theta')\alpha_i^4 K_i^4 + \sum_i C_i(\theta)\alpha_i^6 K_i^6 \qquad (3.34)$$

Prelaskom sa sume na integral u (3.33) i koristeći (3.23) i (3.34) imamo:

$$\Delta\sigma_a(\theta') = \frac{2V}{(2\pi)^3}\frac{1}{N}\sum_n \frac{n+1}{\theta'} e^{-\frac{n+1}{\theta'}\Gamma'} \times \qquad (3.35)$$

$$\times \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}}\int\int_{-\frac{\pi}{b}}^{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{n+1}{\theta'}\left[\sum_i a_i(\theta')(\alpha_i K_i)^2 + \sum_i b_i(\theta)(\alpha_i K_i)^4 + \sum_i c_i(\theta)(\alpha_i K_i)^6\right]} \times$$

$$\times \left[\sum_i A_i(\theta')(\alpha_i K_i)^2 + \sum_i B_i(\theta')(\alpha_i K_i)^4 + \sum_i C_i(\theta)(\alpha_i K_i)^6\right] d^3\vec{K}$$

*kako je:*

$$e^{a+b} = e^a e^b = e^a\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

Ovo se dalje može pisati kao:

$$\Delta\sigma_a(\theta') = \frac{2V}{N(2\pi)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\theta'}e^{-\frac{n+1}{\theta'}\Gamma'} \times$$

$$\times \int_{-\pi/a}^{-\pi/a}\int_{-\pi/b}^{-\pi/b}\int e^{-\frac{n+1}{\theta'}\sum_i a_i(\theta')\alpha_i^2 k_i^2}\left[1 - \frac{n+1}{\theta'}\left(\sum_i b_i(\theta')\alpha_i^4 k_i^4 +\right.\right.$$

$$\left. + \sum_i c_i(\theta')\alpha_i^6 k_i^6\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{n+1}{\theta'}\right)^2 \times \qquad (3.36)$$

$$\left.\times\left(\sum_i b_i(\theta')\alpha_i^4 k_i^4 + \sum_i c_i(\theta')\alpha_i^6 k_i^6\right)^2 + \dots\right] \times$$

$$\times\left[\sum_i A_i(\theta')\alpha_i^2 k_i^2 + \sum_i B_i(\theta')\alpha_i^4 k_i^4 + \sum_i C_i(\theta')\alpha_i^6 k_i^6\right] d^3k$$

Koristeći istu smenu promenljive kao u (3.22) *imamo:*

$$\Delta\sigma_a(\theta') = \frac{2\,\theta'^{1/2}}{\sqrt{a_1(\theta')a_2(\theta')a_3(\theta')}} \cdot \sum_n (n+1)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{n+1}{\theta'}\Gamma'} \times$$

$$\times \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu_1^2-\nu_2^2-\nu_3^2}\, d\nu_1\, d\nu_2\, d\nu_3 \times$$

$$\times\Big\{1-\frac{\theta'}{n+1}\sum_i b_i(\theta)\frac{1}{a_i^2(\theta')}\nu_i^4-\frac{\theta'^2}{(n+1)^2}\sum_i\frac{c_i(\theta')}{a_i^3(\theta')}\nu_i^6+$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\frac{\theta'^2}{(n+1)^2}\Big(\sum_i b_i(\theta')\cdot\frac{1}{a_i^2(\theta')}\cdot\nu_i^4\Big)^2\Big]\Big\}\times$$

$$\times\Big[\sum_i A_i(\theta')\frac{1}{a_i(\theta')}\cdot\frac{\theta'}{n+1}\nu_i^2+\sum_i B_i(\theta')\frac{1}{a_i^2(\theta')}\times$$

$$\times\frac{\theta'^2}{(n+1)^2}\nu_i^4+\sum_i C_i(\theta')\frac{\theta'^3}{(n+1)^3}\cdot\frac{1}{a_i^3(\theta')}\nu_i^6\Big]$$

*Konačno, posle množenja i integracije za magnetizaciju* $\Delta\sigma_a(\theta)$ dobijamo:

$$\Delta\sigma_a(\theta')=\frac{2}{(2\pi)^3}\Big\{\pi Z_{3/2}(\alpha)\Gamma(3/2)\sum_i A_i(\theta')\frac{1}{a^{5/2}(\theta')}\cdot\theta'^{3/2}-$$

$$-Z_{5/2}(\alpha)\Big[-\pi\Gamma(5/2)\sum_i B_i(\theta')\frac{1}{a^{7/2}(\theta')}+$$

$$+\pi\Gamma(7/2)\sum_i A_i(\theta')\frac{b(\theta')}{a^{9/2}(\theta')}+$$

$$+\sqrt{\pi}\,\Gamma(3/2)\Gamma(5/2)\sum_i A_i(\theta')\,b(\theta')/a^{9/2}(\theta')\Big]\cdot\theta^{5/2}+$$

$$+Z_{7/2}(\alpha)\Big[\frac{\pi}{2}\Gamma(11/2)\sum_i A_i(\theta)\,b^2(\theta')/a^{13/2}(\theta')+ \tag{3.37}$$

$$+\sqrt{\pi}/2\,\Gamma(3/2)\Gamma(9/2)\sum_i A_i(\theta')\,b^2(\theta')/a^{13/2}(\theta')+$$

$$+ \sqrt{\pi}\,\Gamma(5/2)\,\Gamma(7/2) \sum_i A_i(\Theta')\, b^2(\Theta')/a^{13/2}(\Theta') +$$

$$+ \Gamma(3/2)\,\Gamma^2(5/2) \sum_i A_i(\Theta')\, b^2(\Theta')/a^{13/2}(\Theta') +$$

$$+ (-\pi)\,\Gamma(9/2) \sum_i A_i(\Theta')\, c(\Theta')/a^{11/2}(\Theta')$$

$$- \sqrt{\pi}\,\Gamma(3/2)\,\Gamma(7/2) \sum_i A_i(\Theta')\, c(\Theta')/a^{11/2}(\Theta')$$

$$- \pi\,\Gamma(9/2) \sum_i B_i(\Theta')\, b(\Theta')/a^{11/2}(\Theta') -$$

$$- \sqrt{\pi}\,\Gamma^2(5/2) \sum_i B_i(\Theta')\, b(\Theta')/a^{11/2}(\Theta') +$$

$$+ \pi\,\Gamma(7/2) \sum_i C_i(\Theta')\, 1/a^{9/2}(\Theta') \,]\cdot \Theta^{7/2} \}$$

Iz ovog izraza za magnetizaciju $\Delta \sigma_a(\Theta')$ možemo da procenimo do koje tačnosti po stepenima temperature treba da odredimo koeficijente $A_i(\Theta')$, $B_i(\Theta')$ i $C_i(\Theta')$, rukovodeći se uslovom da svaki član u (3.37) sadrži u sebi sve stepene do $\Theta^{9/2}$ .

Koeficijente $A_i(\Theta'), B_i(\Theta')$ i $C_i(\Theta')$ odredićemo izjednačavanjem (3.16) i (3.34). U (3.16) ćemo razviti $M_1(\vec{k},\vec{q})$ i $M_D(\vec{k},\vec{q})$ u red po talasnom vektoru $\vec{k}$. Za $\gamma^i_{\vec{k}}$ i $\gamma'_{\vec{k}}$ uzećemo da su:

$$\gamma^i_{\vec{k}} = \cos k_x + \cos k_y + \cos k_z$$

$$\gamma'_{\vec{k}} = \cos k_y \tag{3.38}$$

Pa možemo pisati da je:

$$\sum A_i(\Theta') k_i^2 \alpha_i^2 + \sum B_i(\Theta') k_i^4 \alpha_i^4 + \sum C_i(\Theta') k_i^6 \alpha_i^6 =$$

$$= 2 S z_0' \left( \frac{k_y^2 b^2}{2} - \frac{k_y^4 b^4}{24} + \frac{k_y^6 b^6}{720} \right) -$$

$$- \frac{2}{N} \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_n e^{-\frac{n+1}{\Theta'} \Gamma'} \int d^3 q\, e^{-\frac{n+1}{\Theta'} X'^i_q} \times \left[ -\frac{\alpha_y^4}{4} k_y^2 q_y^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_y^6}{48} k_y^4 q_y^2 + \frac{\alpha_y^6}{48} k_y^2 q_y^4 \right] - \frac{2}{N} \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_n e^{-\frac{n+1}{\Theta'} \Gamma'} \times$$

$$\times \frac{1}{\Theta'} \int e^{-\frac{n+1}{\Theta'} \tilde{X}'^i_q} \tilde{X}^a_q \cdot \left[ -\frac{1}{4} \left( \alpha_x^4 k_x^2 q_x^2 + \alpha_y^4 k_y^2 q_y^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \alpha_z^4 k_z^2 q_z^2 \right) - \frac{\alpha_x^6}{48} k_x^4 q_x^2 - \frac{\alpha_y^6}{48} k_y^4 q_y^2 - \frac{\alpha_z^6}{48} k_z^4 q_z^2 \right] \tag{3.39}$$

gde su:

$$\alpha_x = \alpha_z = a$$

$$\alpha_y = b$$

Iz (3.37) vidimo da koeficijente

treba odrediti sa tačnošću:

$$A_i(\theta') \sim \theta^{5/2} \quad B_i(\theta') \sim \theta^{3/2} \quad C_i(\theta') \sim \theta^{1/2} \tag{3.40}$$

S obzirom na ovaj uslov iz (3.39) dobijamo da koeficijenti $A_i(\theta')$, $B_i(\theta')$ i $C_i(\theta')$ imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
&A_y(\theta') = 1 + 20\pi Z_{5/2}(\alpha)\rho^{5/2} + O(\theta^{7/2})\\
&A_x(\theta') = A_z(\theta') = 2\cdot 6\pi Z_{5/2}(\alpha)\rho^{5/2} = 12\pi Z_{5/2}(\alpha)\rho^{5/2} + O(\theta^{7/2})\\
&B_x(\theta') = B_z(\theta') = 0; \quad B_y(\theta') = -\frac{1}{12}\\
&C_x(\theta') = C_z(\theta') = 0; \quad C_y(\theta') = \frac{1}{360}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Zbog zahteva (3.40) u (3.39) smo stavili za $\widetilde{X}^a_{\vec{q}}$:

$$\widetilde{X}^a_{\vec{q}} = \frac{1}{2} q_y^2 b^2 \cdot 2 = q_y^2 b^2$$

Ako zamenimo izračunate koeficijente iz (3.41) u izraze za $\Delta\delta_a(\theta')$ i $\delta(\theta')$ isti postaju:

$$\begin{aligned}
\Delta\delta_a(\theta') = {} & 2Z_{3/2}(\alpha)\rho^{3/2} + 2Z_{5/2}(\alpha)\pi\rho^{5/2}\\
& + [10\pi Z^2_{3/2}(\alpha) + 64\pi Z_{5/2}(\alpha)]\rho^4 +\\
& + \frac{31}{12}\pi^2 Z_{7/2}(\alpha)\rho^{7/2}
\end{aligned}$$

$$\Delta\sigma(\theta') = \Delta\sigma_D(\theta') - \delta\Delta\sigma_a(\theta')$$

$$\sigma = 1 - \Delta\sigma(\theta')$$

$$\sigma = 1 - 2Z_{3/2}(\alpha)(1-\delta)\rho^{3/2} -$$

$$-\pi Z_{5/2}(\alpha)(3/2 - 2\delta)\rho^{5/2} -$$

$$-\pi^2 Z_{7/2}(\alpha)\left(\frac{33}{16} - \frac{31}{12}\delta\right)\rho^{7/2} -$$

$$-\pi\left\{6Z_{3/2}(\alpha)Z_{5/2}(\alpha) - [10Z_{3/2}^2(\alpha) + 64Z_{5/2}(\alpha)]\cdot\delta\right\}\rho^4$$

Iz zadnjeg izraza se vidi da magnetizacija zavisi od istih stepena temperature kao i kod Dysonovog rezultata, s tom razlikom da su svi koeficijenti u razvoju renormalizovani zbog kvazi-dvodimenzionalnosti feromagnetika.

## ZAKLJUČAK:

Rezultate ovog diplomskog rada možemo ukratko rezimirati na sledeći način:

U prvoj glavi je data opšta teorija magnetizma i uveden je Heisenbergov hamiltonijan za izotropni feromagnetik.

U drugoj glavi je u skladu sa radom [2] definisan hamiltonijan kvazi-dvodimenzionalnog feromagnetika, koji dobro opisuje magnetne osobine sledećih magnetika: $K_2CuF_4$ i $(C_nH_{2n+1}NH_3)_2CuCl_4$ $(n = 1,2 \cdots 10)$

Dalje, u trećoj glavi, našli smo niskotemperaturski razvoj za magnetizaciju u graničnom slučaju kada konstanta interakcije spinova između ravni $J'$ teži konstanti interakcije spinova u ravni $J$, odnosno kada dvodimenzionalni feromagnetik prelazi u Heisenbergov trodimenzionalni feromagnetik.

U izrazu za magnetizaciju pojavljuju se isti članovi po stepenima temperature, kao kod poznatog Dysonovog rezultata, s tim da su koeficijenti u razvoju renormalizovani do članova linearnih po $\delta$. Kada $\delta \to 0$, ( $\delta = \frac{J-J'}{J}$ ) dobijamo poznati Dysonov rezultat za trodimenzioni feromagnetik.

LITERATURA

[1] K. Yamaji and J. Kondo
Journal of the phys. soc. of Japan.
39 (5), 1239 (1975)

[2] K. Tsuru and N. Uryu
Journal of the phys. soc. of Japan.
41 (3) 804 (1976)

[3] F. Dyson phys. rev. 102, 1217, 1230 (1956)

[4] B. S. Tošić Statistička fizika N. Sad (1978)

S A D R Ž A J: