



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Department za fiziku



**Primjena efekta pravih koincidentnih sumiranja u
 γ -spektrometriji za proračun efikasnosti vrha ukupne
energije detektora i aktivnosti tačkastog izvora Co-60
-magistarski rad-**

Mentor:
Dr Ištvan Bikit

Kandidat:
Bojan Štrbac

Novi Sad, 2009.

Sadržaj

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Generalni uvod | 3 |
| 1.1 | Gama-spektrometrija | 3 |
| 1.2 | Interakcija fotona sa materijom | 4 |
| 1.3 | Efikasnost detektora | 6 |
| 1.4 | Efekat sumiranja pravih koincidencija | 6 |
| 2 | Vjerovatnoće prelaza i putevi raspada | 10 |
| 2.1 | Konstrukcija matrice vjerovatnoća prelaza | 10 |
| 2.2 | Putevi raspada | 12 |
| 2.3 | Izlazi puteva raspada | 13 |
| 2.4 | Grupisanje elemenata vjerovatnoće sa energetskim izlazima | 16 |
| 3 | Vjerovatnoće | 17 |
| 3.1 | Zahvat elektrona | 17 |
| 3.2 | Interna konverzija | 18 |
| 4 | Primjer primjene metode na Ce-139 | 19 |
| 5 | Primjena metoda na Co-60 | 23 |
| 5.1 | Osnovne osobine Co-60 | 23 |
| 5.2 | Konstrukcija matrica | 24 |
| 5.3 | Jednačine brzine brojanja | 26 |
| 5.4 | Određivanje efikasnosti | 28 |
| 5.5 | Rezultati | 33 |
| 6 | Zaključak | 35 |

Glava 1

Generalni uvod

Još od otkrića radioaktivnosti 1896 godine od strane H. Bekerela (H. Becquerel), razvijene su razne tehnike za identifikovnje izvora radioaktivnosti. Nakon nekoliko prvih mjernih uređaja, koji su uglavnom detektovali α i β -zračenje, razvijene su jonizacione komore koje su osjetljive na γ -zračenje. Osjetljive fotomultiplikatorske cijevi su razvijene u kombinaciji sa scintilacionim kristalima. Hofstadter je 1948 prijavio detekciju γ -zraka korištenjem NaI(Tl) kristala. Ovaj materijal je ostao skoro 20 godina najvažniji detektorski medijum za γ -spektrometriju. Danas, scintilacioni spektrometri se ne smatraju uređajima visoke rezolucije. Mada su još uvijek široko zastupljeni zbog jednostavnosti korištenja, polako ih zamjenjuju detektori visoke rezolucije kao što su HPGe i Ge(Li) detektori.

1.1 γ -spektrometrija

Da bi identifikovali radionuklide u radioaktivnom izvoru i u isto vrijeme odredili njihove apsolutne aktivnosti, neophodno je da budemo u mogućnosti razlikovati emitovane γ -kvante u odnosu na njihove energije. To je jedno od osnovnih svojstava γ -spektrometrije.

Obzirom da upadni γ -kvant bez naelektrisanja kreira indirektnu jonizaciju ili ekscitaciju u materijalu detektora, svrha detektora je sljedeća: prvo, on djeluje kao konverzioni medijum u kome upadni γ -kvant ima razumnu vjerovatnoću za interakciju koja može da stvori jedan ili više brzih elektrona; drugo, on djeluje kao konvencionalni detektor čineći transfer ovih brzih elektrona u električni signal.

Svaka interakcija je uzrok stvaranja električnog pulsa od strane detektora čija amplituda je proporcionalna deponovanoj energiji. Ovi pulsevi su kolektovani i pohranjeni za kasniju interpretaciju. Apscisa je amplituda linearnog pulsa skalirana na način da pokrije interval pulsne visina posmatranih u izvoru. Ordinata je diferencijalni broj pulseva dN posmatranih sa amplitudom unutar diferencijalnog inkrementa amplitude dH , podjeljena sa tim inkrementom dN/dH . Horizontalna skala onda ima jedinice pulsne amplitude, dok vertikalna skala ima jedinice inverzne amplitude. Broj pulseva koji leže između dvije specifične vrijednosti H_1 i H_2 može biti dobijen integrisanjem površine ispod

raspodjele ovih granica:

$$N_{H_1 < H < H_2} = \int_{H_1}^{H_2} \frac{dN}{dH} dH \quad (1.1)$$

Proporcionalnost između pulsne amplitude i transfera energije dozvoljava transformaciju jedinica horizontalne skale od jedinica amplitude u jedinice energije (keV ili MeV , gdje je $1eV = 1.6 \times 10^{16} J$). Jedinica vertikalne skale tada transformiše jedinicu inverzne amplitude u jedinicu inverzne energije. Jednačina (1.1) se tada transformiše u:

$$N_{E_1 < E < E_2} = \int_{E_1}^{E_2} \frac{dN}{dE} dE \quad (1.2)$$

što predstavlja broj fotonskih interakcija sa transferom energije između E_1 i E_2 . Pulsni spektar se sada zove γ -spektar. Fizička interpretacija diferencijalnog pulsog spektra ili γ -spektra uvijek uključuje površine ispod spektra između dvije granice pulsne visine ili, ekvivalentno, energije. Vrijednost ordinate nema neko značenje dok se ne pomnoži sa inkrementom apscise.

1.2 Interakcija fotona sa materijom

Tri najbitnija procesa interakcije γ -zračenja sa materijom jesu fotoelektrična apsorpcija, Komptonovo rasijanje i proizvodnja parova. U sva tri procesa se stvaraju slobodni elektroni i kako se oni kreću kroz materiju stvaraju parove jon-elektron ili elektron-šupljina. U detektorima fotona se koriste ovi parovi naelektrisanja radi detekcije prolaska fotona ili da se odredi njegova energija na osnovu količine proizvedenog elektriciteta. U procesu fotoelektrične apsorpcije foton interaguje sa vezanim elektronom pri čemu se cjelokupna energija fotona apsorbuje. Iz atoma se izbacuje elektron energije E_c , koja je približno jednaka:

$$E_c = E_\gamma - E_b \quad (1.3)$$

gdje je E_b energija veze elektrona, a E_γ energija upadnog fotona. Mali dio energije koji je zanemaren u prethodnoj jednačini se predaje na uzmak elektrona. Presjek za fotoefekt se ne može izraziti preko jedinstvenog analitičkog izraza. Njegova zavisnost od atomskog broja materijala Z i energije fotona E_γ može se približno izraziti kao:

$$\sigma_{pe} = const \cdot Z^{4.5} \cdot E_\gamma^{-3} \quad (1.4)$$

Visoka zavisnost od Z pokazuje da su materijali visokog rednog broja vrlo efikasni za apsorpciju fotona. Sa druge strane jaka zavisnost presjeka od energije fotona je razlog zbog čega je ovaj proces dominantan način interakcije na niskim energijama a postaje zanemarljiv na visokim energijama. U procesu Komptonova rasijanja samo jedan dio energije fotona se prenosi na elektron, dok se ostatak javlja u vidu sekundarnog fotona. Prema relativističkim zakonima održanja energije i impulsa, energija rasijanog fotona i elektrona su povezane uglovima pod kojima se izbacuju. Energija rasijanog fotona E' ,

uz uvedenu oznaku $\epsilon = E/m_0c^2$ gdje je m_0c^2 energija elektrona u miru, a E energija upadnog fotona se može izraziti kao:

$$E' = E \cdot [1 + \epsilon \cdot (1 - \cos\theta)] \quad (1.5)$$

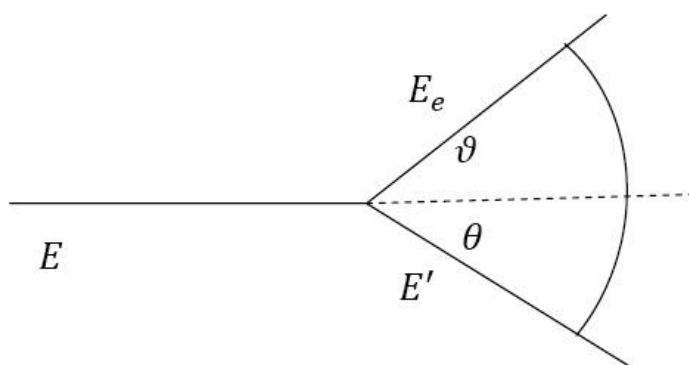
Energija rasijanog elektrona će biti:

$$E_e = E \cdot \left[1 - \frac{1}{1 + \epsilon(1 - \cos\theta)} \right] \quad (1.6)$$

Za vrlo male uglove rasijanja energija sekundarnog fotona je skoro ista kao i upadnog. Maksimalna energija rasijanog elektrona je:

$$E_e^{max} = E \cdot \frac{2 \cdot \epsilon}{1 + 2 \cdot \epsilon} \quad (1.7)$$

i zove se Komptonova ivica. Zavisnost ukupnog presjeka od rednog broja Z , elemenata



Slika 1.1: Shematski prikaz Komptonovog efekta

na kojima se rasejanje vrši i energije E može da se približno izrazi u obliku:

$$\sigma_c = const \cdot \frac{Z}{E} \quad (1.8)$$

Za γ -zrake energija iznad nekoliko MeV glavni mehanizam interakcije je proizvodnja parova. U ovom procesu energija fotona se u Kulonovom polju jezgara pretvara u par elektron-pozitron. Energija fotona mora biti znatno veća od dvostruke energije elektrona u stanju mirovanja $2m_e c^2 = 1022keV$. Višak energije, $E_\gamma - 2m_e c^2$, se raspoređuje između dvije čestice kao kinetička energija. Elektron i pozitron se usporavaju u okolnom materijalu. Pozitron na kraju reaguje sa nekim materijalom i anihilira se gubeći svu svoju energiju. Nastaju dva fotona od $511keV$. Fotoni su emitovani u suprotnim smjerovima u skladu sa zakonom održanja impulsa. Približno, presjek za proizvodnju parova se mijenja sa Z kao Z^2 .

Ukupni presjek za interakciju fotona sa materijom je dat kao zbir presjeka za fotoefekt, Komptonov efekt i par efekt:

$$\sigma_{ukupni} = \sigma_{pe} + \sigma_c + \sigma_p \quad (1.9)$$

1.3 Efikasnost detektora

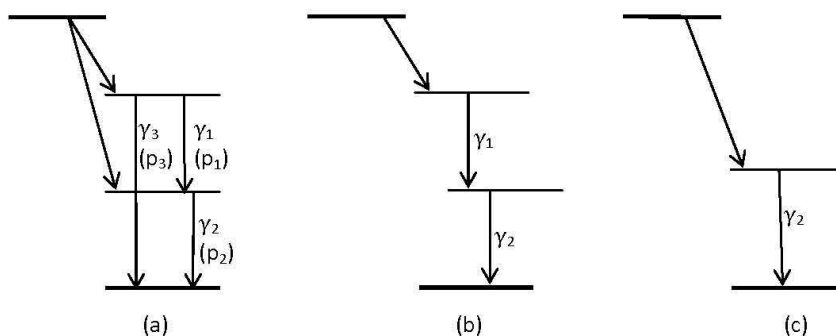
Upadni foton može interagovati sa detektorskim materijalom jednim od tri glavna mehanizma: fotoelektrična apsorpcija, Komptonovo rasijanje i proizvodnja parova. Od ova tri mehanizma fotoelektrična apsorpcija će deponovati punu energiju fotona u detektor. Druga dva mehanizma će deponovati samo dio fotonske energije u detektor. Mada rasijanje praćeno fotoelektričnim apsorpcijama može još uvijek uzrokovati da totalna energija primarnog fotona bude ukupno proslijeđena, u razumnom broju slučajeva, primarni foton je detektovan samo djelimično. Na osnovu ovog svojstva detekcije, dva tipa efikasnosti detekcije su definisana. Prvi tip razmatra sve fotonske interakcije, bez obzira na količinu deponovane energije. Zbog toga se zove totalna efikasnost i definisana je kao ε_t , odnosno kao vjerovatnoća da foton emitovan iz izvora deponuje bilo koji nenultni dio energije u aktivnu zapreminu detektora. Drugi tip razmatra samo one interakcije koje deponuju ukupnu energiju fotona u detektor. Ovaj tip se zove efikasnost vrha ukupne energije ε definisanu kao: Vjerovatnoću da foton emitovan od strane izvora deponuje svu svoju energiju u aktivnu zapreminu detektora. Efikasnost vrha ukupne energije i totalna efikasnost su povezane odnosom peak-to-total r , $r = \varepsilon/\varepsilon_t$.

1.4 Efekat sumiranja pravih koincidencija

Sumiranje pravih koincidencija nastaje kad radionuklid koji emituje dva ili više fotona jedan za drugim unutar vremena razlaganja spektrometra. Za razliku od slučajnih sumiranja, koja su zavisna od brzine brojanja, prava koincidentna sumiranja zavise od geometrije i razdaljine izvor-detektor. U principu moguće je matematički korigovati prave koincidence. Da bi razumjeli efekat pravih koincidencija uzmimo najjednostavniju shemu raspada na slici 1.2. Da bi uprostiti, pretpostavimo da su koeficijenti interne konverzije za γ -zrake nula. Uzmimo izvor aktivnosti R , tada u odsustvu pravih koincidencija brzina brojanja u vrhu ukupne energije 1 će biti:

$$n_1 = Rp_1\varepsilon_1 \quad (1.10)$$

gdje su p_1 i ε_1 vjerovatnoća emisije γ -zraka i efikasnost vrha ukupne energije za detekciju γ_1 . Slične jednačine možemo napisati za γ_2 i γ_3 . Gubitak odbroja iz vrha γ_1 će se desiti zbog sumiranja sa γ_2 . Nemamo potrebe razmatrati γ_3 jer deeskscitacija gornjih nivoa može dati samo γ_1 i γ_3 , ne oba zajedno tako da nam je dovoljna parcijalna shema raspada kao na slici 1.2 pod (b). Odbroj izgubljen (u sekundi) sumiranjem može biti izračunat kao proizvod:



Slika 1.2: Jednostavna shema raspada.

- broja raspadnutih atoma, R ,
- vjerovatnoća deekscitacije koja proizvede γ_1, p_1 ,
- vjerovatnoća detekcije γ_1 i pojavljivanja u vrhu ukupne energije, ε_1 ,
- vjerovatnoća detekcije γ_2 i pojavljivanja bilo gdje u spektru, ε_{t2} .

Moramo voditi računa o svim koincidencijama bez obzira da li doprinose odbroju sumarnog vrha ili ne, pa zbog toga posljednji član sadrži totalnu efikasnost ε_{t2} . Neto površina vrha će da bude

$$n'_1 = Rp_1\varepsilon_1 - Rp_1\varepsilon_1\varepsilon_{t2} \quad (1.11)$$

Odnos n_1/n'_1 se onda koristi za korekcije na gubitke površine vrha γ_1 usljed sumiranja pravih koincidencija. Za γ_2 situacija je drugačija zato što nisu svi γ -zranci koji nastaju deekscitacijom međunivoa posljedica deekscitacije višeg nivoa. Dio njih potiče direktno iz beta raspada i ne može doprinijeti sumiranju, slika 1.2. Broj događaja sumiranja je:

- broja događaja, Rp_1 koji doprinose γ_2 ,
- vjerovatnoća detekcije γ_2 u vrhu ukupne energije, ε_2 ,
- vjerovatnoće detekcije γ_1 bilo gdje u spektru ε_{t1} .

Tako da je neto površina vrha 2:

$$n'_2 = Rp_2\varepsilon_2 - Rp_1\varepsilon_2\varepsilon_{t1} \quad (1.12)$$

Svaki događaj sumiranja pravih koincidencija kompletno apsorbovanih γ -zraka proizvešće odbroj u vrhu ekvivalentnom sumi energija i tako će vrh koji odgovara direktnom prelazu γ_3 biti uvećan, a ne umanjen, tj. sumiranjem γ_1 i γ_2 dovodi do dodatnog događaja u

γ_3 kada se njihova sva energija deponuje u detektoru. Ovo se dešava sa vjerovatnoćom $p_1\varepsilon_1\varepsilon_1$. Neto brzina brojanja biće:

$$n'_3 = Rp_3\varepsilon_3 - Rp_1\varepsilon_1\varepsilon_2 \quad (1.13)$$

Najčešći slučaj je da je vjerovatnoća direktnog prelaza mala i pošto su emisione vjerovatnoće za normalnu kaskadu velike, sumiranje u vrh γ_3 može biti mnogo veće nego direktna emisija. Korekcije na koincidentana sumiranja za ovaj slučaj dobijamo uvodeći sljedeća pojednostavljenja:

- imamo tačkasti izvor,
- β -zračenje je apsorbovano u detektorskom prozoru,
- bremsstrahlung može biti zanemaren,
- γ_1 i γ_2 sa energijama E_1 i E_2 su emitovane unutar intervala vremenske rezolucije spektrometra,
- nema angularnih korelacija između njih,
- prelazi nisu interno konvertovani.

Dakle, koristeći jednačine (1.10) i (1.11) dobijamo korekcije na koincidentana sumiranja:

$$C_1 = \frac{n_1}{n'_1} = \frac{1}{1 - \varepsilon_{t2}} \quad (1.14)$$

Situacija za vrh 2 je nešto drugačija obzirom da dijelu γ_2 -zraka prethodi β -raspad. Dobijamo sljedeći korekcionni faktor:

$$C_2 = \frac{1}{1 - (p_1/p_2)\varepsilon_{t1}} \quad (1.15)$$

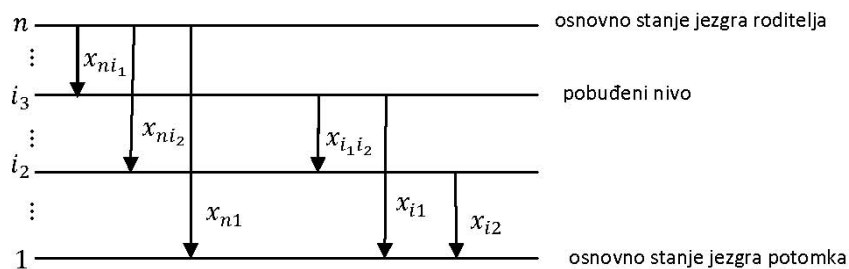
gdje odnos p_1/p_2 je dio γ_2 kojem je prethodio γ_1 .

Mora se naglasiti da je gornje razmatranje pojednostavljeno, te u nastavku dajemo mnogo generalniji slučaj. Razmotrimo radionuklid sa proizvoljnom shemom raspada kao na slici 1.3. U generalnoj postavci, raspad jezgra je opisan kao skup kaskadnih prelaza, gdje svaka kaskada ima svoju sopstvenu vjerovatnoću pojavljivanja, P_c . Za kaskade na slici P_c bi bilo:

$$P_c = f_{n-1}X_{n-1,2}X_{2,1}X_{1,0} \quad (1.16)$$

gdje f_i predstavlja vjerovatnoću popunjavanja i -tog nivoa, a X_{ij} predstavlja vjerovatnoću prelaza sa i -tog na j -ti nivo. Vjerovatnoća P_E detekcije odbroja u vrhu ukupne energije na energiji E usljed raspada jezgra se sada dobija sumiranjem, preko svih kaskada, produkata vjerovatnoća kaskada i vjerovatnoća doprinosa kaskadnih prelaza vrhu energije:

$$P_E = \sum_{kaskada} \left[P_c \cdot \prod_{i=1}^n g_i \varepsilon_i \prod_{j=M_c}^{N_c} (1 - g_j \varepsilon_{tj}) \right] \quad (1.17)$$



Slika 1.3: Generalna shema raspada

gdje ε označava efikasnost vrha ukupne energije, ε_t označava totalnu efikasnost, a g označava vjerovatnoću emisije fotona, češće izražena kao $g = 1/(1+\alpha)$ gdje α označava koeficijente interne konverzije. U jednačini (1.17) N_c je broj fotona emitovanih u specifičnoj kaskadi, a M_c je broj fotona koji konstituišu vrh ukupne energije. Ovo znači da ako je $M_c = 1$, produkt preko indeksa i opisuje jednostavnu detekciju fotona energije E . Ako je $M_c > 1$, onda opisuje *summing in* efekat koincidentnog sumiranja, tj. kada dva ili više fotona sa njihovim energijama doprinesu dodatnom odbroju u vrhu E . Produkt preko indeksa j opisuje *summing out* efekte sa preostalim fotonima u kaskadama. U γ -spektrometriji sa germanijumskim detektorima efekti sumiranja treba da se uračunaju u slučaju kada imamo male razdaljine između izvora i detektora. Vrhovi koji nastaju zbog koincidentnih sumiranja $X + X$, $X + \gamma$ i $\gamma + \gamma$ zraka mogu iskomplikovati spektar dobijen ovim tipom detektora i značajnije promijeniti brzine odbroja pojedinačnih vrhova. Model se zasniva na identifikaciji svih puteva raspada i njihovih višestrukih izlaza. Ovaj metod se može primjeniti na jezgra čiji potomak ima više od dva pobuđena nivoa.

Glava 2

Vjerovatnoće prelaza i putevi raspada

2.1 Konstrukcija matrice vjerovatnoća prelaza

Počecemo od sheme raspada, slika 1.3, koja predstavlja jezgro koje se raspada sa $n - 1$ elektronskim zahvatom u jezgro potomka koje ima $n - 2$ pobuđena nivoa. Osnovno stanje roditeljskog jezgra je predstavljeno kao pobuđeno stanje jezgra potomka, označenog sa n . Osnovno stanje jezgra potomka je označeno sa 1. Matrica vjerovatnoća koja odgovara modifikovanoj shemi na slici 1.3, \mathbf{X} , je:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

gdje x_{ij} vjerovatnoća prelaza sa nivoa i na nivo j . Matrični elementi x_{ij} mogu biti izvedeni iz standardnih shema raspada koje možemo pronaći u [3]. Matrični elementi zadovoljavaju sljedeću relaciju:

$$\sum_{j=1}^{i-1} x_{ij} = 1, \quad i = 2, \dots, n - 1 \quad (2.2)$$

tj. jezgro potomka mora da pređe iz pobuđenog nivoa u neki od niže pobuđenih nivoa. Roditeljsko jezgro mora da se raspadne u jezgro potomka i matematički izraz za to je:

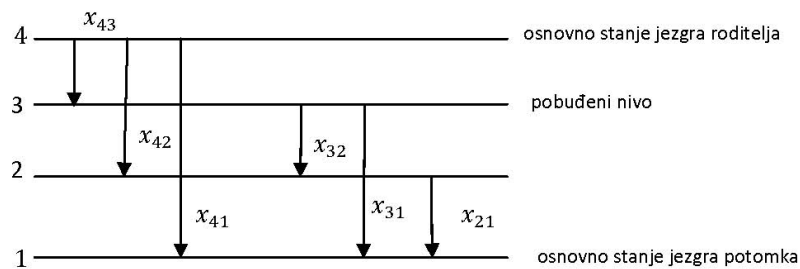
$$\sum_{j=1}^{i-1} x_{ij} = 1 \quad (2.3)$$

Prelaz iz osnovnog stanja roditeljskog jezgra u osnovno stanje jezgra potomka može da se desi u k koraka ($k = 1, 2, \dots, n$). Kada je $k = 1$ onda se roditeljsko jezgro raspada direktno

u osnovno stanje jezgra potomka. Matrični elementi matrice \mathbf{X}^k postavljen u n -tom redu i 1-koloni, $[\mathbf{X}^k]_{n1}$, predstavlja vjerovatnoću prelaza roditeljskog jezgra u osnovno stanje jezgra potomka u k koraka. Ovi matrični elementi moraju zadovoljiti uslov:

$$\sum_{k=1}^{n-1} [\mathbf{X}^k]_{n1} = 1 \quad (2.4)$$

tj. roditeljsko jezgro mora preći u osnovno stanje jezgra potomka. Shema raspada data na slici 2.1 je prikladna za opis matrice vjerovatnoće u više detalja. Prema podacima



Slika 2.1: Generalna shema raspada

dostupnim za jezgro čija je shema raspada prikazana na slici 2.1, formiramo matricu \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

gdje su elementi x_{ij} ($i > j, i = 2, 3, 4; j = 1, 2, 3$) vjerovatnoće za prelaz $i \rightarrow j$ u jednom koraku. Elementi x_{4j} moraju zadovoljiti jednačinu (2.3), tj. totalna vjerovatnoća za raspad roditeljskog jezgra je jednaka 1, odnosno to je siguran događaj. Elementi x_{ij} ($j < i < 4$) zadovoljavaju relaciju (2.2), tj. totalna vjerovatnoća za raspad pobuđenog nivoa jezgra potomka je jednaka 1, odnosno to je siguran događaj. Kvadrat prethodne matrice \mathbf{X}^2 :

$$\mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{31}x_{21} & x_{32} & 0 & 0 \\ x_{41}x_{21} + x_{43}x_{31} & x_{43}x_{32} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

sadrži vjerovatnoće za prelaze $i \rightarrow j$ ($i - j > 2$) u dva koraka. Vjerovatnoća za prelaz $3 \rightarrow 1$ u dva koraka je, $[\mathbf{X}^2]_{31} = x_{32}x_{21}$, za prelaz $4 \rightarrow 2$, $[\mathbf{X}^2]_{42} = x_{43}x_{32}$ i za prelaz $4 \rightarrow 1$, $[\mathbf{X}^2]_{41} = x_{42}x_{21} + x_{43}x_{31}$. Evidentno je da se vjerovatnoće za svaki prelaz u dva

koraka nalazi u matrici \mathbf{X}^2 . Dizanjem \mathbf{X} na treći stepen dobijamo sljedeću matricu:

$$\mathbf{X}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{43}x_{32}x_{21} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

gdje imamo samo jedan nenulni element, $[\mathbf{X}^3]_{41} = x_{43}x_{32}x_{21}$. Prelaz iz osnovnog stanja roditeljskog jezgra u osnovno stanje jezgra potomka, $4 \rightarrow 1$, je realizovan u jednom, dva ili tri koraka sa sljedećim vjerovatnoćama: x_{41} , $x_{42}x_{21} + x_{43}x_{31}$ i $x_{43}x_{32}x_{21}$. Njihova suma je jednaka 1, tj. $\sum_{k=1}^3 [\mathbf{X}^k]_{41} = 1$, zato što prelaz iz osnovnog stanja roditeljskog jezgra u osnovno stanje jezgra potomka je siguran događaj.

2.2 Putevi raspada

Put raspada je definisan kaskadnim prelazima iz osnovnog stanja roditeljskog jezgra u osnovno stanje jezgra potomka. Da bi odredili puteve raspada uvodimo kvadratnu matricu, \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_{31} & y_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Matrični elementi y_{ij} predstavljaju prelaze sa i -tog nivoa na j -ti nivo. Matrični element $[\mathbf{Y}^k]_{n1}$ je jednak sumi svih puteva raspada za prelaze sa osnovnog stanja roditeljskog jezgra na osnovno stanje jezgra potomka u k koraka. Matrice \mathbf{Y}^k , $k = 1, 2, \dots, n-1$ se koriste za određivanje svih puteva raspada. Put raspada od k koraka ima formu:

$$y_{ni_1} y_{i_1 i_2} y_{i_2 i_3} \cdots y_{i_{k-1} 1} \quad (2.9)$$

za kaskadne prelaze $n \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \cdots \rightarrow i_{k-1} \rightarrow 1$. Shema raspada data na slici 2.1 je pogodna za detaljno pojašnjenje određivanja puteva raspada sa matricom \mathbf{Y} , koja u tom slučaju izgleda:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{21} & 0 & 0 & 0 \\ y_{31} & y_{32} & 0 & 0 \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Matrični elementi y_{ij} ($i > j, i = 2, 3, 4; j = 1, 2, 3$) predstavljaju simbol za prelaz $i \rightarrow j$ u jednom koraku. Kvadrat prethodne matrice:

$$\mathbf{Y}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{31}y_{21} & y_{32} & 0 & 0 \\ y_{41}y_{21} + y_{43}y_{31} & y_{43}y_{32} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

sadrži sve prelaze u dva koraka. Matrični element $[\mathbf{Y}^2]_{31} = y_{32}y_{21}$ je simbol za prelaz sa nivoa 3 u nivo 1 u dva koraka, $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Matrični element $[\mathbf{Y}^2]_{42} = y_{43}y_{32}$, je simbol za prelaz sa nivoa 4 u nivo 2 u dva koraka, $4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$. Matrični element $[\mathbf{Y}^2]_{41} = y_{43}y_{31} + y_{42}y_{21}$ sadrži dva člana što znači da se prelaz $4 \rightarrow 1$ u dva koraka može desiti na dva načina $4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ i $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Treći stepen matrice \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{43}y_{32}y_{21} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

sadrži samo jedan nenultni član, $y_{43}y_{32}y_{21}$. Prelaz u tri koraka $4 \rightarrow 1$ se dešava u kaskadi $4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Za analizu koincidentnih sumiranja bitni su prelazi iz nivoa 4 (osnovno stanje roditeljskog jezgra) u nivo 1 (stabilno stanje jezgra potomka) koji se dešava u jednom koraku y_{41} , dva koraka $y_{43}y_{31}$ ili $y_{42}y_{21}$, i u tri koraka $y_{43}y_{32}y_{21}$. Ovi kaskadni prelazi, iz osnovnog stanja roditeljskog jezgra u osnovno stanje jezgra potomka nazivamo *putevima raspada*, sa generalnim simbolom datim izrazom (2.9).

2.3 Izlazi puteva raspada

Iz pogleda spektrometarske detekcije X i γ -zraka, emitovanih pri radioaktivnom raspadu, svaki nivo na slici 1.3 je tačka grananja zato što posljedice prelaza mogu biti različite. Prelaz sa nivoa n na nivo i (elektronski zahvat) je praćen jednim od tri moguća događaja: detekcijom K_α, K_β fotona emitovanih u elektronskom zahvatu, ili bez detekcije bilo kojeg fotona. Prelaz sa nivoa potomka i na niži nivo j je praćen sa jednim od četiri događaja: detekcijom K_α, K_β fotona iz interne konverzije, detekcijom γ -fotona, ili bez detekcije bilo kojeg fotona. Matrični elementi y_{ni} su predstavljeni grupom (ili listom) od tri elementa:

$$y_{ni} = \{p_{\alpha ni}, p_{\beta ni}, q_{ni}\} \quad i < n \quad (2.13)$$

gdje $p_{\alpha ni}$ i $p_{\beta ni}$ predstavljaju vjerovatnoće detekcije K_α i K_β fotona, respektivno, pri prelazu $n \rightarrow i$, a q_{ni} je vjerovatnoća za nedetekciju bilo kojeg fotona.

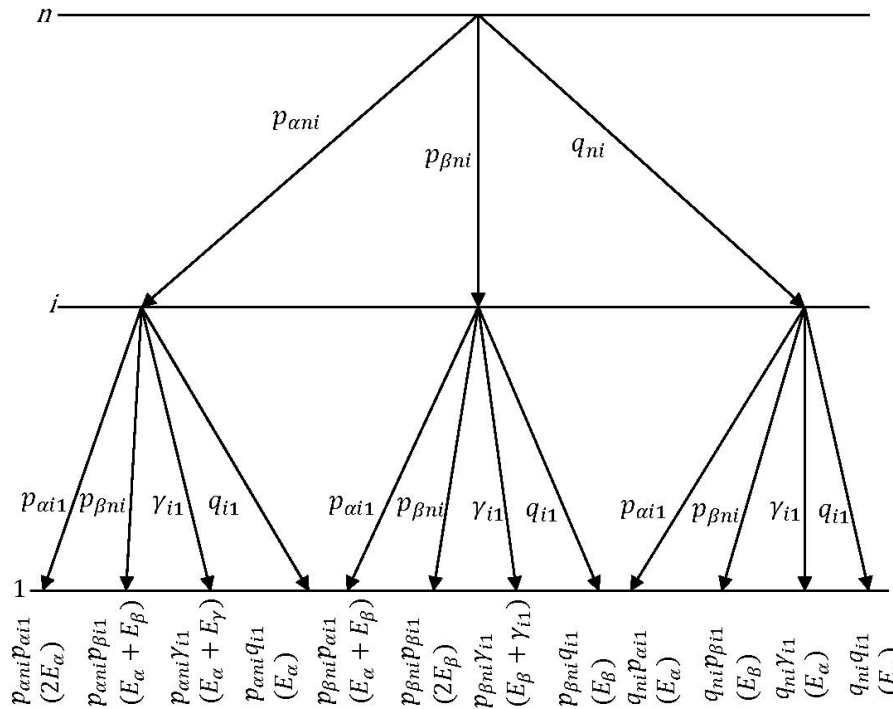
Prelaz $i \rightarrow j$, ($j < i < n$) je predstavljen listom od četiri elementa

$$y_{ni} = \{p_{\alpha ij}, p_{\beta ij}, \gamma_{ij}, q_{ij}\} \quad (2.14)$$

gdje γ_{ij} predstavlja vjerovatnoću za detekciju γ -fotona, emitovanog pri prelazu $i \rightarrow j$. Ove vjerovatnoće su funkcije efikasnosti vrha ukupne energije i totalne efikasnosti, koji su nepoznati kvantiteti i nuklearni parametri, koji mogu biti ekstrahovani iz odgovarajuće sheme nuklearnog raspada. Mogući izlazi puteva raspada mogu biti ilustrovani sa dijagramom na slici 2.2. Broj izlaza puteva raspada je uvećan tri puta pri $n \rightarrow i$ prelazima i četiri puta pri $i \rightarrow j$ prelazima, ($j < i < n$). Ako se radionuklidi dezintegrišu kroz m puteva raspada u k_1, k_2, \dots, k_m koraka, totalni broj izlaza, N , iznosi:

$$N = \sum_{i=1}^m 3 \times 4^{k_i-1} \quad (2.15)$$

Elementi liste (2.13) su vjerovatnoće detekcije K_x -fotona i za nedetekciju u procesu zahvata elektrona, dok lista (2.14) sadrži sve vjerovatnoće za detekciju K_x -fotona, γ -fotona, i vjerovatnoće za nedetekciju u prelazima jezgra potomka. Liste vjerovatnoća za (2.13) i



Slika 2.2: Izlazi puteva raspada: vjerovatnoće (deponovane energije)

(2.14) treba da budu korelisane sa mogućim deponovanim energijama emitovanih fotona u detektor. Prema tome, uvodimo liste energija z_{ni} i z_{ij} koje su korelisane sa y_{ni} i y_{ij} , respektivno:

$$z_{ni} = \{E_{\alpha}, E_{\beta}, 0\} \quad i < n, \quad (2.16)$$

$$z_{ij} = \{E_{\alpha}, E_{\beta}, E_{\gamma_{ij}}, 0\} \quad j < i < n \quad (2.17)$$

gdje su E_α i E_β energije od K_α i K_β fotona, respektivno, emitovanih pri elektronskom zahvatu ili internoj konverziji, $E_{\gamma ij}$ je energija fotona emitovana pri prelazu $i \rightarrow j$, a označava da nema detekcije. Prva lista (2.16) sadrži energije koje mogu biti detektovane u procesu elektronskog zahvata sa detektorom, dok druga lista (2.17) sadrži energije koje mogu biti detektovane pri prelazima u jezgru potomka. Na slici 2.2 možemo vidjeti sve moguće izlaze puteva raspada u dva koraka. Koincidentna sumiranja γ -zraka i X-zraka emitovanih pri elektronskom zahvatu i koincidentna sumiranja X-zraka emitovanih pri elektronskom zahvatu, zatim X-zraka emitovanih pri internoj konverziji su uključeni u shemu na slici 2.2.

Da bi razvili analitički pristup nalaženja svih mogućih izlaza puteva raspada, uvodimo operator \mathbf{M} , koji označava međusobnu multiplikaciju elemenata dvije liste i formiranjem nove liste sa $l_1 \times l_2$ elemenata, gdje su l_1 i l_2 broj elemata prve i druge liste respektivno. Nova lista sadrži sve moguće proizvode elemenata iz prve i druge liste. Multiplikacija dvije liste je slična multiplikaciji polinoma. Kao primjer uzimamo multiplikacije dvije liste (2.13) i (2.14):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(y_{ni}, y_{ij}) = & \{p_{\alpha ni}p_{\alpha ij}, p_{\alpha ni}p_{\beta ij}, p_{\alpha ni}\gamma_{ij}, p_{\alpha ni}q_{ij}, \\ & p_{\beta ni}p_{\alpha ij}, p_{\beta ni}p_{\beta ij}, p_{\beta ni}\gamma_{ij}, p_{\beta ni}q_{ij}, \\ & q_{ni}p_{\alpha ij}, q_{ni}p_{\beta ij}, q_{ni}\gamma_{ij}, q_{ni}q_{ij}\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Vjerovatnoće svih izlaza kaskadnih prelaza u dva koraka $n \rightarrow 1$ su sadržane u listi (2.18). Oni su proizvod odgovarajućih vjerovatnoća pri prelazima u jednom koraku. Da bi obuhvatili sve detektovane energije, uvodimo operator \mathbf{S} koji označava sumiranje elemenata lista i formiranje nove liste sa $l_1 \times l_2$ elementa, gdje su l_1 i l_2 brojevi elemenata prve i druge liste respektivno. Nova lista sadrži sve moguće sume dva elementa iz prve i druge liste. Operacija sumiranja mora biti pripremljena istim redom kao i multiplikacija u (2.18). Aplikiranjem operatora \mathbf{S} na liste (2.13) i (2.14), sve detektovane energije u tom prelazu su dobijene:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \{2E_\alpha, E_\alpha + E_\beta, E_\alpha + E_{\gamma ij}, E_\alpha, E_\beta + E_\alpha, \\ & 2E_\beta, E_\beta + E_{\gamma ij}, E_\beta, E_\alpha, E_\beta, E_{\gamma ij}, 0\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Multiplikacija lista vjerovatnoća u (2.18) i sumiranjem energetskih lista u (2.19) su pripremljene u istom redoslijedu, tako da je korelacija između vjerovatnoća za detekciju neke energije i energije sačuvana. Njihove pozicije u listama (2.18) i (2.19) su jednake. Na primjer, vjerovatnoća za nedetekciju bilo kojeg fotona znači da deponovana energija je jednaka 0, pozicija na listi (2.19) je pod brojem 12. Element $q_{ni}q_{ij}$ je smješten na poziciji pod brojem 12 liste (2.18). Vjerovatnoća za nedetekciju bilo kojeg fotona pri prelazu $n \rightarrow i \rightarrow j$ je jednaka $q_{ni}q_{ij}$. $E_\alpha + E_\beta$ označava istovremenu detekciju K_α i K_β fotona (pozicija pod brojevima 2 i 5 na listi (2.18)), elementi $p_{\alpha ni}p_{\beta ij}$ i $p_{\alpha ni}p_{\beta ij}$ liste (2.18) su smješteni na toj poziciji. Vjerovatnoća za simultanu detekciju K_α i K_β fotona pri prelazu $n \rightarrow i \rightarrow j$ je jednaka $p_{\alpha ni}p_{\beta ij} + p_{\beta ni}p_{\alpha ij}$. Ako put raspada sadrži više nego dva prelaza

ove operacije se moraju ponavljati na isti način. Put raspada u k koraka ima $3 \times 4^{k-1}$ izlaza, a jedan izlaz sadrži dva kvantiteta: vjerovatnoću i deponovanu energiju u detektor. Ista deponovana energija može biti posljedica više izlaza.

2.4 Grupisanje elemenata vjerovatnoće sa energetskim izlazima

Matrični elementi $[\mathbf{Y}^k]_{n1}$, ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) nam služe za nalaženje svih puteva raspada. Oblik matričnih elementa je dat relacijom (2.9). Jedan put raspada, koji predstavlja dezintegraciju radionuklida u k koraka, sadrži k matričnih elemenata matrice \mathbf{Y} , koji se zamjenjuju sa (2.13) i (2.14) i pomnoženi kao što je prikazano u (2.18). Rezultat multiplikacije je nova lista od $3 \times 4^{k-1}$ elementa. Broj izlaza puteva raspada iznosi $3 \times 4^{k-1}$ samo za jedan put raspada u k -koraka. Ako dezintegracija sadrži nekoliko puteva raspada ova procedura se ponavlja m puta i rezultat je m novih lista koje su pridružene ujedinjenoj listi lP :

$$lP = \{p_1, p_2, \dots, p_N\} \quad (2.20)$$

elemenata koji su vjerovatnoće određenih izlaza. Jedan izlaz je okarakterisan sa dva kvantiteta, deponovanom energijom u detektoru i sa vjerovatnoćom za taj događaj. Da bi dobili liste energija deponovanih u detektor za sve izlaze puteva raspada, pripremamo sumiranje energetske liste z_{ni} i z_{ij} na isti način kako što je učinjeno pri dobijanju liste lP . Rezultujuća lista lE ima formu:

$$lE = \{e_1, e_2, \dots, e_N\} \quad (2.21)$$

Sa obzirom da multiplikacija liste vjerovatnoća i sumiranje energetske liste je pripremljeno u istom redoslijedu, korelacija između deponovane energije i vjerovatnoća za deponovanje ovih energija je sačuvana. Energetska lista lE ima istu vrijednost na različitim pozicijama u listi, to znači da isto deponovanje energije može da se desi iz različitih izlaza puteva raspada. Suma svih elemenata u listi lP koji imaju istu energiju u listi lE je totalna vjerovatnoća po jednom raspadu pojavljivanja vrha te energije u sačuvanom spektru. Produkt aktivnosti izmjenjenog izvora i totalne vjerovatnoće daje jednačinu brzine odbroja vrha. Grupisanje elemenata lP sa istom deponovanom energijom je pripremljeno sa pozicije te energije u listi lE . Opisani metod je razvijen za EC radionuklide, koji su praćeni sa dva X-fotona koja mogu biti detektovana sa germanijumskim spektrometrima. Jednostavno je adaptirati ovaj metod za EC radionuklide koji emituju više od dva X-fotona. U slučaju α i β -izvora (npr. Co-60 koji je β -emiter) adaptacija je još jednostavnija. Lista y_{ni} (n označava nuklearni nivo roditeljskog jezgra) se redukuje samo na jedan član $\{q_{ni}\}$, ($i = n - 1, n - 2, \dots, 1$). Isto tako energetska lista z_{ni} se redukuje na jedan član $\{0\}$, zbog toga pri $n \rightarrow i$ prelazu se ne detektuje foton. Ostala procedura ostaje potpuno ista.

Glava 3

Vjerovatnoće

Vjerovatnoće date u listama (2.13) i (2.14) mogu biti definisane sa poznatim nuklearnim i atomskim parametrima, sa nepoznatom efikasnošću vrha ukupne energije i totalnom efikasnošću. Ovako definisane vjerovatnoće omogućavaju formiranje jednačina za brzinu brojanja za svaki vrh kao i totalnu brzinu brojanja. Nepoznate varijable u ovim jednačinama su efikasnost vrha i totalna efikasnost.

3.1 Zahvat elektrona

Vjerovatnoća detekcije K_α i K_β fotona emitovanih pri zahvatu elektrona iz K -ljuske roditeljskog atoma i prelazu u pobuđeni nivo jezgra potomka označen sa i je:

$$\begin{aligned} p_{\alpha ni} &= x_{ni} \varepsilon_\alpha P_{ki} \omega_k g_\alpha \\ p_{\beta ni} &= x_{ni} \varepsilon_\beta P_{ki} \omega_k g_\beta \\ g_\alpha + g_\beta &= 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdje su ε_α i ε_β efikasnosti vrha ukupne energije za detekciju K_α i K_β fotona, respektivno, ω_k je fluorescentni prinos ¹ K -ljuske, g_α i g_β su njihove frakcije, P_{ki} je vjerovatnoća zahvata elektrona iz K -ljuske i prelaza u i -ti nivo jezgra potomka. Vjerovatnoća za nedetekciju bilo kojeg fotona, q_{ni} , je:

$$\begin{aligned} q_{ni} &= x_{ni} (1 - t_\alpha P_{ki} \omega_k g_\alpha - t_\beta P_{ki} \omega_k g_\beta) \\ &= x_{ni} (1 - t_x P_{ki} \omega_k) \\ t_x &= g_\alpha t_\alpha + g_\beta t_\beta \end{aligned} \tag{3.2}$$

gdje su t_α i t_β totalne efikasnosti za detekciju K_α i K_β fotona, respektivno.

¹Vjerovatnoća popunjavanja praznine u K, L, \dots ljusci koja rezultuje emisijom X zraka, a ne Ožeevog elektrona, zove se fluorescentni prinos $\omega_K, \omega_L, \dots$, na primjer $\omega_K = N(X_K)/N_0$, gdje je $N(X_K)$ broj emitovanih X_K zraka, a N_0 broj praznina u K ljusci.

3.2 Interna konverzija

Vjerovatnoća za detekciju K_α i K_β fotona kreiranih u internoj konverziji pri $i \rightarrow j$ prelazu je

$$\begin{aligned} P_{\alpha ij} &= x_{ij} \varepsilon_\alpha \frac{\alpha_{kij}}{1 + \alpha_{ij}} g_\alpha \omega_k \\ P_{\beta ij} &= x_{ij} \varepsilon_\beta \frac{\alpha_{kij}}{1 + \alpha_{ij}} g_\beta \omega_k \quad j < i < n \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdje je α_{kij} koeficijent interne konverzije K -ljuske za naznačeni prelaz, a α_{ij} je totalni koeficijent konverzije. Vjerovatnoća za detekciju γ -fotona emitovanih pri $i \rightarrow j$ prelazu je:

$$\gamma_{ij} = x_{ij} \varepsilon_{ij} 1 / (1 + \alpha_{ij}) \quad (3.4)$$

gdje ε_{ij} označava efikasnost vrha ukupne energije fotona emitovanog pri tom prelazu. Vjerovatnoća za nedetekciju bilo koja od tri emitovana fotona pri prelazima je:

$$q_{ij} = x_{ij} \left(1 - \frac{t_{ij}}{1 + \alpha_{ij}} - t_x \omega_k \frac{\alpha_{ij}}{1 + \alpha_{ij}} \right) \quad (6.5) \quad (3.5)$$

gdje t_{ij} označava totalnu efikasnost γ -fotona emitovanog pri $i \rightarrow j$ prelazu.

Glava 4

Primjer primjene metode na Ce-139

Najjednostavniji primjer za demonstraciju metoda je formiranje jednačina u raspadu Ce-139, [1]. Modifikovanu shemu raspada Ce-139 prikazujemo na slici 4.1. Jezgro Ce-139 se dezintegriše zahvatom elektrona (100%) u pobuđeni nivo La-139 energije 165.86 keV . X-zraci koji mogu biti detektovani sa Ge detektorima su K_α i K_β -zraci energija 33 keV i 38 keV , respektivno. Matrica vjerovatnoća prelaza je:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

gdje su $x_{21} = 1$ i $x_{32} = 1$. Putevi raspada bi trebalo da se odrede sa matricom \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_{21} & 0 & 0 \\ 0 & y_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Matrični elementi potrebni za identifikaciju svih puteva raspada su:

$$[\mathbf{Y}]_{31} = 0$$

$$[\mathbf{Y}^2]_{31} = y_{32}y_{21} \quad (4.3)$$

$$(4.4)$$

tj. postoji samo jedan put raspada, $y_{32} y_{21}$. Put raspada sadrži dva matrična elementa koje zamjenjujemo listama vjerovatnoća:

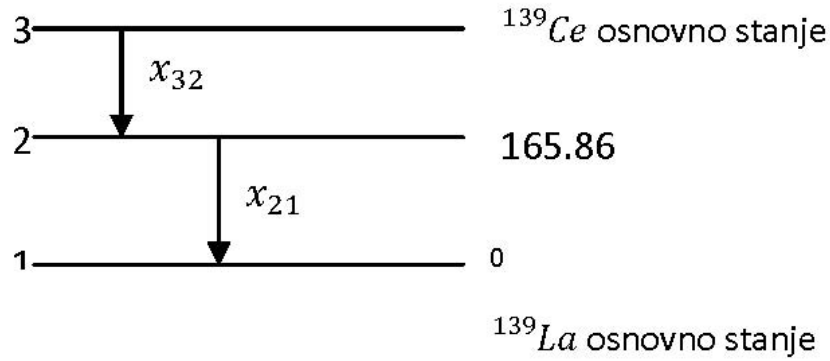
$$y_{32} = \{p_{\alpha 32}, p_{\beta 32}, q_{32}\}$$

$$y_{21} = \{p_{\alpha 21}, p_{\beta 21}, \gamma_{21}, q_{21}\} \quad (4.5)$$

gdje su $p_{\alpha 32}$ i $p_{\beta 32}$ vjerovatnoće za detekciju K_α i K_β fotoni emitovanih pri elektronskom zahvatu, respektivno; q_{32} je vjerovatnoća za nedetekciju bilo kojeg fotona pri elektronskom zahvatu; $p_{\alpha 21}$ i $p_{\beta 21}$ su vjerovatnoće za detekciju K_α i K_β fotona emitovanih pri internoj

konverziji, respektivno; γ_{21} je vjerovatnoća za detekciju γ -fotona energije 166 keV , i q_{21} je vjerovatnoća za nedetekciju bilo kojeg fotona emitovanog pri prelazu $2 \rightarrow 1$. Lista vjerovatnoće y_{32} i y_{21} , su povezane sa energetske listama z_{32} i z_{21} :

$$\begin{aligned} z_{32} &= \{33, 38, 0\} \\ z_{32} &= \{33, 38, 166, 0\} \end{aligned} \quad (4.6)$$



Slika 4.1: Shema raspada Ce-139

Multiplikacijom lista y_{32} i y_{21} dobija se ujedinjena lista vjerovatnoća:

$$\begin{aligned} lP = \mathbf{M}(y_{32}, y_{21}) = & \{p_{\alpha 32}p_{\alpha 21}, p_{\alpha 32}p_{\beta 21}, p_{\alpha 32}\gamma_{21}, p_{\alpha 32}q_{21}, \\ & p_{\beta 32}p_{\alpha 21}, p_{\beta 32}p_{\beta 21}, p_{\beta 32}\gamma_{21}, p_{\beta 32}q_{21}, \\ & q_{32}p_{\alpha 21}, q_{32}p_{\beta 21}, q_{32}\gamma_{21}, q_{32}q_{21}\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Lista deponovanih energija, lE , korelisanih sa listom lP je dobijena sumiranjem z_{32} i z_{21}

$$lE = S(z_{32}, z_{21}) = \{66, 71, 199, 33, 71, 76, 204, 38, 33, 38, 166, 0\} \quad (4.8)$$

Liste lP i lE su izlazi samo jednog puta raspada Ce-139, $y_{32}y_{21}$. Grupisanje elemenata lP sa istom energetske izlazima daje jednačine brzine brojanja vrha i jednačine totalne

brzine brojanja za Ce-139:

$$\begin{aligned}
N(33) &= R(p_{\alpha 32}q_{21} + q_{32}p_{\alpha 21}) && K_{\alpha} - \text{line} \\
N(38) &= R(p_{\beta 32}q_{21} + q_{32}p_{\beta 21}) && K_{\beta} - \text{line} \\
N(66) &= Rp_{\alpha 32}p_{\alpha 21} && 2K_{\alpha} - \text{line} \\
N(71) &= R(p_{\alpha 32}p_{\beta 21} + p_{\beta 32}p_{\alpha 21}) && K_{\alpha} + K_{\beta} - \text{line} \\
N(76) &= Rp_{\beta 32}p_{\beta 21} && 2K_{\beta} - \text{line} \\
N(166) &= R\gamma_{21}q_{32} && \gamma 166 - \text{line} \\
N(199) &= R\gamma_{21}p_{\alpha 32} && K_{\alpha} + \gamma 166 - \text{line} \\
N(204) &= R\gamma_{21}p_{\beta 32} && K_{\beta} + \gamma 166 - \text{line} \\
N_t &= (1 - q_{32}q_{21})R && \text{totalna brzina brojanja} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

U gornjim jednačinama, R označava aktivnost izmjerenog izvora. Prema izrazima (3.1)-(3.5) vjerovatnoće za jednačine (4.9) su:

$$\begin{aligned}
p_{\alpha 32} &= x_{32}\varepsilon_{\alpha}P_k g_{\alpha}\omega_k \\
p_{\beta 32} &= x_{32}\varepsilon_{\beta}P_k g_{\beta}\omega_k \\
q_{32} &= x_{32}(1 - t_x P_k \omega_k) \\
p_{\alpha 21} &= x_{21}\varepsilon_{\alpha} \frac{\alpha_{k21}}{1 + \alpha_{21}} g_{\alpha}\omega_k \\
p_{\beta 21} &= x_{21}\varepsilon_{\beta} \frac{\alpha_{k21}}{1 + \alpha_{21}} g_{\beta}\omega_k \\
\gamma_{21} &= x_{21}\varepsilon_{21} \frac{1}{1 + \alpha_{21}} \\
q_{21} &= x_{21} \left(1 - \frac{t_{21}}{1 + \alpha_{21}} - t_x \omega_k \frac{\alpha_{k21}}{1 + \alpha_{21}} \right) \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Ako zamjenimo vjerovatnoće date u (4.10) u (4.9) dobijamo nelinearni sistem jednačina gdje su efikasnosti varijable. Rješavanjem sistema jednačina koje sadrže $N(33)$, $N(66)$, $N(76)$, $N(199)$ i N_t dobijamo sljedeći izraz za aktivnost R :

$$R = N_t + \frac{N(33)N(66)}{N(199)} - \frac{N(66)N^2(166)}{N^2(199)} \quad (4.11)$$

Sljedeća dva izraza za aktivnost mogu biti izvedena iz jednačna za brzinu brojanja:

$$\begin{aligned}
R &= N_t + \frac{N(38)N(166)}{N(204)} - \frac{N(76)N^2(166)}{N^2(204)} \\
R &= N_t + \frac{N(33)N(166)}{N(199)} - \frac{N(71)N^2(166)}{2N(199)N(204)} \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Gornji izrazi mogu da se iskoriste za mjerenja aktivnosti Ce-139. Iz jednačina za $N(66)$, $N(76)$ i $N(199)$, efikasnost vrha ukupne energije K_{α} , K_{β} i γ -zraka su određene sljedećim

izrazima:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha &= \frac{1}{g_\alpha \omega_k} \sqrt{\frac{(1 + \alpha_{21})N(66)}{\alpha_{k21} P_k R}} \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{g_\beta \omega_k} \sqrt{\frac{(1 + \alpha_{21})N(76)}{\alpha_{k21} P_k R}}\end{aligned}\tag{4.13}$$

Glava 5

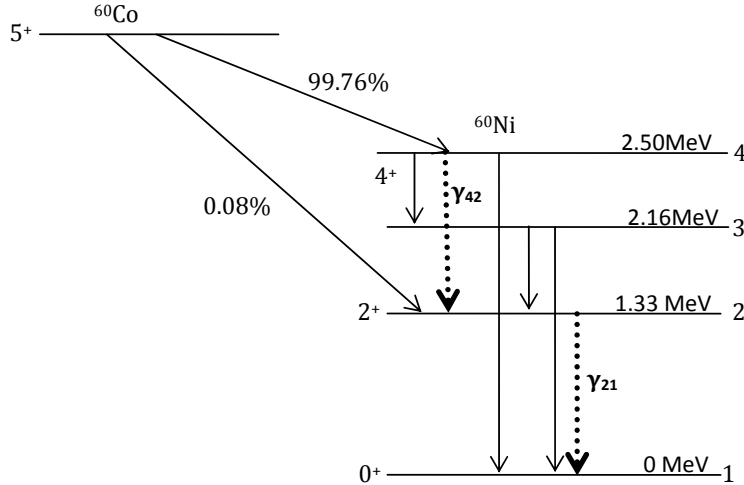
Primjena metoda na Co-60

5.1 Osnovne osobine Co-60

Kobalt je hemijski element koji u periodnom sistemu elemenata nosi simbol Co, atomski (redni) broj mu je 27, a atomska masa mu iznosi 58,933195(5). Kobalt se nalazi u mnogim rudama. Koristi se za legure koje trebada budu magnetične, otporne na habanje i jako čvrste. Važan je sastojak u industriji boja, tinti i lakova. Godine 1735. švedski hemičar Georg Brandt otkrio je do tada nepoznati element i dao mu ime kobalt. Simbol Co je izveden od dva početna slova latinskog naziva za kobalt - Cobaltum. Čisti kobalt je srebrnast, blistav, veoma tvrd metal, koji posjeduje feromagnetična svojstva. Zastupljen je u zemljinoj kori u količini od 20 ppm (eng. parts per million) u obliku dva minerala: smaltita i kobaltita koje obično prate rude bakra i nikla. Radioaktivni izotop kobalta, Co-60, koji se dezintegriše *beta*-emisijom u Ni-60 sa poluživotom od $1.66 \times 10^9 s$. Atomi Ni-60 se nalaze u pobuđenom stanju i skoro istovremenom emisijom γ -zraka prelaze u osnovno stanje. Na slici 5.1 imamo shemu raspada Co-60. Većina atoma Co-60 se raspada u 4^+ stanje Ni-60. Ovi atomi emituju dva fotona γ_{42} (1.17 MeV) i γ_{21} (1.33 MeV). Osnovni nuklearni i atomski podaci su prikazani u tabelama 5.1 i 5.2

Tabela 5.1: Nuklearni podaci za γ -prelaze Co-60

| γ -zruci | Energija (keV) | Vjerovatnoća ($IC + \gamma \times 100$) | x_{ij} | α_{kij} (10^{-4}) | α_{ij} (10^{-4}) |
|-----------------|-------------------|--|------------|---------------------------------|--------------------------------|
| γ_{43} | 347.14(7) | 0.0075(4) | 0.000075 | 49.9(15) | 55.7(17) |
| γ_{32} | 826.10(3) | 0.0076(8) | 0.863664 | 3.0(4) | 3.4(4) |
| γ_{42} | 1173.240(3) | 99.85(3) | 0.9985 | 1.51(7) | 1.68(4) |
| γ_{21} | 1332.508(4) | 99.9988(2) | 1 | 1.15(5) | 1.28(5) |
| γ_{31} | 2158.61(3) | 0.0012(2) | 0.136368 | 0.445(14) | 0.495(15) |
| γ_{41} | 2505.748(5) | 0.0000020(4) | 0.00000002 | 0.780(3) | 0.86(3) |



Slika 5.1: Shema raspada Co-60

Tabela 5.2: Emisije X-zraka

| | Otežana srednja energija (keV) | Relativna vjerovatnoća | Normalizovana vjerovatnoća g | Fluorescentni prinos ω_k |
|------------|--------------------------------|------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| K_α | 7.5 | 151.24 | 0.90744 | 0.421 |
| K_β | 8.3 | 20.84 | 0.9256 | 0.421 |

5.2 Konstrukcija matrica

Prema jednačini (2.1) i tabeli 5.1 dobijamo matricu vjerovatnoće prelaza \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.136368 & 0.863664 & 0 & 0 \\ 0.000075 & 0.9985 & 0.00000002 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Prema jednačini 2.8 dobijamo matricu puteva raspada \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{21} & 0 & 0 & 0 \\ y_{31} & y_{32} & 0 & 0 \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Prelazi u osnovno stanje Ni-60 se mogu desiti kroz alternativne pravce. Ti pravci su predstavljeni matričnim elementima $[Y^k]_{n1}$. Na osnovu matrice (5.2) možemo da napravimo tabelu puteva raspada i njihovih vrijednosti. Iz tabele 5.3 vidimo da je kaskadni prelaz u tri koraka $4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ malo vjerovatan. Za prelaze u dva koraka $[Y^2]_{41}$ imamo kaskadne prelaze $4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Ako pogledamo vjerovatnoće, vidimo da je

Tabela 5.3: Putevi raspada i njihove vjerovatnoće za Co-60

| k -koraka | Vjerovatnoća | Put raspada |
|-------------|-------------------|-------------------------------|
| 2 | 0.86366 | $y_{32}y_{21}$ |
| 2 | 0.9985 | $y_{43}y_{31} + y_{42}y_{21}$ |
| 3 | $2 \cdot 10^{-8}$ | $y_{43}y_{32}y_{21}$ |

kaskadni prelaz $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ mnogo vjerovatniji od prelaza $4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ gdje je vjerovatnoća reda veličine 10^{-9} . Ako izostavimo prelaze sa malom vjerovatnoćom, dva glavna γ -zraka koja nastaju pri deeksitaciji Ni-60 su γ_{42} (1.17 MeV) i γ_{32} (1.33 MeV), praćeni karakterističnim X-zracima. U takvom slučaju formiramo sljedeće energetske liste:

$$\begin{aligned} Z_{42} &= \{7.5, 8.3, 1173.2, 0\} \\ Z_{21} &= \{7.5, 8.3, 1332.5, 0\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Kako je Co-60 *beta*-emiter pri $n \rightarrow i$ prelazu se ne detektuje foton pa je energetska lista za taj prelaz jednostavno $\{0\}$. Prelazi $i \rightarrow j, (j < i < n)$ su predstavljeni listom od četiri elementa (izlazima puteva raspada):

$$y_{ij} = \{p_{\alpha ij}, p_{\beta ij}, \gamma_{ij}, q_{ij}\} \quad (5.4)$$

gdje p_{ni} i p_{ni} predstavljaju vjerovatnoće detekcije K_{α} i K_{β} fotona, respektivno, nastalih pri internoj konverziji, a q_{ni} je vjerovatnoća za nedetekciju bilo kojeg fotona; γ_{ij} predstavlja vjerovatnoću za detekciju γ -fotona, emitovanog pri prelazu $i \rightarrow j$. U našem primjeru možemo formirati sljedeću listu koja se sastoji od četiri navedena događaja:

$$\begin{aligned} y_{42} &= \{p_{\alpha 42}, p_{\beta 42}, \gamma_{42}, q_{42}\} \\ y_{21} &= \{p_{\alpha 21}, p_{\beta 21}, \gamma_{21}, q_{21}\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Kada ih izmnožimo dobijamo $\mathbf{M}(y_{42}, y_{21})$ listu:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(y_{42}, y_{21}) &= \{p_{\alpha 42}p_{\alpha 21}, p_{\alpha 42}p_{\beta 21}, p_{\alpha 42}\gamma_{21}, p_{\alpha 42}q_{21}, \\ & p_{\beta 42}p_{\alpha 21}, p_{\beta 42}p_{\beta 21}, p_{\beta 42}\gamma_{21}, p_{\beta 42}q_{21}, \\ & \gamma_{42}p_{\alpha 21}, \gamma_{42}p_{\beta 21}, \gamma_{42}\gamma_{21}, \gamma_{42}q_{21}, \\ & q_{42}p_{\alpha 21}, q_{42}p_{\beta 21}, q_{42}\gamma_{21}, q_{42}q_{21}\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Vjerovatnoće svih izlaza kaskadnih prelaza u dva koraka $n \rightarrow i \rightarrow 1$ su sadržane u listi (5.6). Oni su proizvodi odgovarajućih vjerovatnoća pri prelazima u jednom koraku. Aplikiranjem operatora \mathbf{S} na energetske liste (5.3) dobijamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(z_{42}, z_{21}) &= \{15, 15.8, 1340, 7.5, 15.8, 16.6, 1340.8, 8.3, \\ & 1180.7, 1181.5, 2505.7, 1173.2, 7.5, 8.3, 1332.5, 0\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.3 Jednačine brzine brojanja

Grupisanjem elemenata dobijamo jednačine brzine brojanja:

$$\begin{aligned}
N(7.5) &= R(p_{\alpha 42}q_{21} + q_{42}p_{\alpha 21}) && K_{\alpha} - \text{line} \\
N(8.3) &= R(p_{\beta 42}q_{21} + q_{42}p_{\beta 21}) && K_{\beta} - \text{line} \\
N(15) &= Rp_{\alpha 42}p_{\alpha 21} && 2K_{\alpha} - \text{line} \\
N(15.8) &= R(p_{\alpha 42}p_{\beta 21} + p_{\beta 42}p_{\alpha 21}) && K_{\alpha} + K_{\beta} - \text{line} \\
N(16.6) &= Rp_{\beta 42}p_{\beta 21} && 2K_{\beta} - \text{line} \\
N(1173.2) &= R\gamma_{42}q_{21} && \gamma 1173 - \text{line} \\
N(1180.7) &= R\gamma_{42}p_{\alpha 21} && K_{\alpha} + \gamma 1173 - \text{line} \\
N(1181.5) &= R\gamma_{42}p_{\beta 21} && K_{\beta} + \gamma 1173 - \text{line} \\
N(1332.5) &= Rq_{42}\gamma_{21} && \gamma 1332 - \text{line} \\
N(1340) &= Rp_{\alpha 42}\gamma_{21} && K_{\alpha} + \gamma 1332 - \text{line} \\
N(1340.8) &= Rp_{\beta 42}\gamma_{21} && K_{\beta} + \gamma 1332 - \text{line} \\
N(2505.7) &= R\gamma_{42}\gamma_{21} && \gamma 1173 + \gamma 1332 - \text{line} \\
N_t &= (1 - q_{42}q_{21})R && \text{totalna brzina brojanja} \quad (5.8)
\end{aligned}$$

gdje je R aktivnost izvora. Rješavanjem sistema jednačina (5.8) koje sadrže $N(1173.2)$, $N(1332.5)$, $N(2505.7)$ i N_t dobijamo sljedeću jednačinu za aktivnost R :

$$R = N_t + \frac{N(1332.5)N(1173.2)}{N(2505.7)} \quad (5.9)$$

Vjerovatnoće se mogu izračunati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
p_{\alpha 42} &= x_{42}\varepsilon_{\alpha} \frac{\alpha_{k42}}{1 + \alpha_{42}} g_{\alpha}\omega_k \\
p_{\beta 42} &= x_{42}\varepsilon_{\beta} \frac{\alpha_{k42}}{1 + \alpha_{42}} g_{\beta}\omega_k \\
p_{\alpha 21} &= x_{21}\varepsilon_{\alpha} \frac{\alpha_{k21}}{1 + \alpha_{21}} g_{\alpha}\omega_k \\
p_{\beta 21} &= x_{21}\varepsilon_{\beta} \frac{\alpha_{k21}}{1 + \alpha_{21}} g_{\beta}\omega_k \\
\gamma_{42} &= x_{42}\varepsilon_{42} \frac{1}{1 + \alpha_{42}} \\
q_{21} &= x_{21} \left(1 - \frac{t_{21}}{1 + \alpha_{21}} - t_x\omega_k \frac{\alpha_{k21}}{1 + \alpha_{21}} \right) \\
q_{42} &= x_{42} \left(1 - \frac{t_{42}}{1 + \alpha_{42}} - t_x\omega_k \frac{\alpha_{k42}}{1 + \alpha_{42}} \right) \quad (5.10)
\end{aligned}$$

S obzirom na rezoluciju detektora linije koje su dosta bliske se ne mogu razdvojiti, pa imamo sljedeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
N(15) + N(15.9) + N(16.6) &= n_{16} \\
N(1173.2) &= n_{1173} \\
N(1180.8) + N(1181.5) &= n_{1180} \\
N(1332.5) &= n_{1332} \\
N(1340) + N(1340.8) &= n_{1340} \\
N(2505.7) &= n_{2505} \\
N_t &= n_t
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Mijenjajući odgovarajuće vjerovatnoće dobijamo:

$$\begin{aligned}
n_{16} &= Rx_{21}x_{42} \frac{\alpha_{k21}\alpha_{k42}}{1 + \alpha_{21}} \omega_k^2 (g_\alpha t_\alpha + g_\beta t_\beta) \\
n_{1173} &= Rx_{42}\varepsilon_{42} \frac{1}{1 + \alpha_{42}} x_{21} \left(1 - \frac{t_{21}}{1 + \alpha_{21}} - t_x \omega_k \frac{\alpha_{k21}}{1 + \alpha_{21}} \right) \\
n_{1180} &= Rx_{42}\varepsilon_{42} \frac{1}{1 + \alpha_{21}} x_{21} \frac{\alpha_{k21}}{1 + \alpha_{21}} \omega_k (g_\alpha t_\alpha + g_\beta t_\beta) \\
n_{1332} &= Rx_{21}\varepsilon_{21} \frac{1}{1 + \alpha_{21}} x_{42} \left(1 - \frac{t_{42}}{1 + \alpha_{42}} - t_x \omega_k \frac{\alpha_{k42}}{1 + \alpha_{42}} \right) \\
n_{1340} &= Rx_{21}\varepsilon_{21} \frac{1}{1 + \alpha_{21}} x_{42} \frac{\alpha_{k42}}{1 + \alpha_{42}} \\
n_{2505} &= Rx_{21}\varepsilon_{21} \frac{1}{1 + \alpha_{21}} \varepsilon_{42} \frac{1}{1 + \alpha_{42}} \\
n_t &= R \left[1 - x_{42} \left(1 - \frac{t_{42}}{1 + \alpha_{42}} - t_x \omega_k \frac{\alpha_{k42}}{1 + \alpha_{42}} \right) \cdot x_{21} \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(1 - \frac{t_{21}}{1 + \alpha_{21}} - t_x \omega_k \frac{\alpha_{k21}}{1 + \alpha_{21}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Sada imamo sljedeće nepoznate: ε_α , ε_β , $\varepsilon_{42}, \varepsilon_{21}, t_{42}, t_{21}$, t_x . Međutim, detektor ne može da snimi prvu, treću i petu liniju (jednačinu), i snimljeni spektar Slika (5.2), ne sadrži te linije. Uzimajući da je $t_x \omega_k \frac{\alpha_{k21}}{1 + \alpha_{21}} \approx 0$ zbog male vjerovatnoće detekcije X-zraka, zatim $x_{21} = x_{42} = 1$ i $1/(1 + \alpha_{42}) \approx 1/(1 + \alpha_{21}) \approx 1$ redukujemo sistem jednačina na sljedeći sistem:

$$\begin{aligned}
n_{1173} &= R\varepsilon_{42} [1 - t_{21}] \\
n_{1332} &= R\varepsilon_{21} [1 - t_{42}] \\
n_{2505} &= R\varepsilon_{42}\varepsilon_{21} \\
n_t &= R\{1 - [1 - t_{42}] \cdot [1 - t_{21}]\}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

U principu, svaki korekcionni član na koincidentna sumiranja treba biti pomnožen sa usrednjenim korelacionim koeficijentima γ -zraka, $\overline{W}_{ji,lk} \cdots (0^0)$. U gornjim jednačinama smo izostavili efekat angularnih korelacija iz sljedećih razloga: prvo, angularno-korelacioni član se mijenja u smjeru, suprotnom od smjera korekcionnih članova na efekte koincidentnih sumiranja, tj. za bliske geometrije, gdje je efekat koincidentnih sumiranja veliki, angularne korelacije su male i obrnuto; drugo, angularne korelacije teže usrednjavanju ako nema specifičnih koincidencija sa neuobičajno visokim angularnim korelacijama. Isto tako korekcija na efekat nasumičnih sumiranja je zanemaran jer nisu primjećene veće posljedice efekata na brzine brojanja u vrhovima od interesa.

5.4 Određivanje efikasnosti

U sistemu jednačina (5.13) poznata nam je aktivnost R koju možemo da dobijemo sljedećim izrazom:

$$R = n_t + \frac{n_{1173}n_{1332}}{n_{2505}} \quad (5.14)$$

Uvodimo sljedeće oznake radi preglednosti:

| | |
|------------------------------------|--|
| $n_{1173} = n_1$ | brzina brojanja na energiji 1173 keV |
| $n_{1332} = n_2$ | brzina brojanja na energiji 1332 keV |
| $n_{2505} = n_{12}$ | brzina brojanja u sumacionom vrhu 2505 keV |
| $\varepsilon_{42} = \varepsilon_1$ | efikasnost vrha ukupne energije za γ -zrak 1173 keV |
| $\varepsilon_{21} = \varepsilon_2$ | efikasnost vrha ukupne energije za γ -zrak 1332 keV |
| $t_{42} = t_1$ | totalna efikasnost za γ -zrak 1173 keV |
| $t_{42} = t_1$ | totalna efikasnost za γ -zrak 1332 keV |

Iz sistema jednačina (5.13) na lak način dobijemo efikasnosti ε_{21} , t_1 i t_2 pomoću efikasnosti za vrh ukupne energije ε_{42} i izmjerenim brzinama brojanja:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{n_{12}}{R\varepsilon_1} \\ t_1 &= 1 - \frac{\varepsilon_1 n_2}{n_{12}} \\ t_2 &= 1 - \frac{n_1}{R\varepsilon_1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Za HPGe detektore vrijedi da za γ -zrake energija viših od 200 keV postoje sljedeća ograničenja:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &> \varepsilon_2 \\ t_1 &> t_2 \\ t_2/\varepsilon_2 &> t_1/\varepsilon_1 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Jednačine opisuju činjenicu da totalna efikasnost prema efikasnosti za vrh ukupne energije, porastom energije opada, međutim, njihov odnos raste. Formuliramo uslov da pri datoj energiji γ -zraka totalna efikasnost bude uvijek veća od efikasnosti za vrh ukupne energije, ali uslovima, postavljenim gornjim sistemom jednačina, tako da taj uslov pri nižim intervalima mogućih vrijednosti ε_1 nije potrebno razmatrati. Prve dvije nejednakosti omogućavaju određivanje gornje i donje granice dopuštenih vrijednosti ε_1 . Uvodimo sljedeće oznake:

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{min}^a)^2 &= n_{12}/R \\ (\varepsilon_{max}^a)^2 &= n_1 \cdot n_{12}/R \cdot n_2\end{aligned}\tag{5.17}$$

iz čega slijedi:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^2 &> (\varepsilon_{min}^a)^2 \\ \varepsilon_1^2 &< (\varepsilon_{max}^a)^2\end{aligned}\tag{5.18}$$

Treću jednačinu sistema (5.15) prepisemo kao:

$$R\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1(n_2 - n_1) - n_{12} > 0\tag{5.19}$$

Jednačinu (5.19) možemo dalje da oblikujemo i na taj način dobijemo sljedeći uslov:

$$R(\varepsilon_1 - \varepsilon_{max}^b)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{min}^b) > 0\tag{5.20}$$

pri čemu smo uveli oznake:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{min}^b &= \frac{(n_1 - n_2) - \sqrt{(n_1 - n_2)^2 + 4Rn_{12}}}{2R} \\ \varepsilon_{max}^b &= \frac{(n_1 - n_2) + \sqrt{(n_1 - n_2)^2 + 4Rn_{12}}}{2R}\end{aligned}\tag{5.21}$$

Kako je $R > 0$ i $\varepsilon_1 > 0$, slijedi iz uslova (5.20) da ε_1 mora biti manje od ε_{min}^b i veći od ε_{max}^b . Takođe, važi da je $n_1 > n_2$, što nam govori da je ε_{min}^b negativan pa važi da je $\varepsilon_1 > \varepsilon_{max}^b$. Upotrebom definicije (5.17) u jednačinama (5.21) dolazimo do zaključka da mora biti $\varepsilon_{max}^a > \varepsilon_{max}^b$ i $\varepsilon_{max}^b > \varepsilon_{min}^a$, sa čime možemo odrediti granice vrijednosti efikasnosti ε_1 :

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_{max}^a, \quad \varepsilon_{min} = \varepsilon_{max}^b\tag{5.22}$$

Pretpostavljajući da je pronađeni interval $[\varepsilon_{min}, \varepsilon_{max}]$ dozvoljenih vrijednosti dovoljno uzak, i za ravnomjernu raspodjelu vjerovatnoće, ocjenimo ε_1 sa:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{min} + \varepsilon_{max}}{2}\tag{5.23}$$

Kada procjenimo ε_1 onda pomoću sistema jednačina (5.15) izračunamo ostale efikasnosti. Nesigurnost ε_1 , koja izvire iz same metode, za ravnomjernu raspodjelu vjerovatnoće, ocjenjena je sa:

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{min} - \varepsilon_{max}}{2\sqrt{3}} \quad (5.24)$$

Taj izraz je jednak nuli, ako je $n_1 = n_2$, pa $\Delta\varepsilon_1$ možemo razviti u red po $(n_1 - n_2)$. Prva dva člana reda su:

$$\Delta\varepsilon_1 \approx \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{4} \left(\frac{n_1 - n_2}{n_2} \right) \left(1 - \frac{n_2}{\sqrt{R \cdot n_{12}}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{8} \left(\frac{n_1 - n_2}{n_2} \right)^2 \quad (5.25)$$

Vidimo da je tačnost određivanja ε_1 sa ovom metodom tim bolja što su bolje izražene koincidentne pojave. Međutim, opadanje efekta sa porastom udaljenosti izvora od detektora nije presudno. Da bi to pokazali, pretpostavimo, da u takvom primjeru obe efikasnosti za vrh ukupne energije i za totalne efikasnosti smanjene za isti faktor f , koji u sebi sadrži, uglavnom, promjenu prostornog ugla, pod kojim se sa položaja izvora vidi detektor. Izraz (5.25) ostane pri takvoj transformaciji konstantan, što znači da se tačnost određivanja ε_1 ne može mnogo oslabiti smanjenjem odbroja u sumacionom vrhu. Zapravo metoda se za velike razdaljine izvor-detektor ulazi u normalni postupak određenja ε_1 iz n_1 . U tom slučaju vrijedi da $\varepsilon_1, \varepsilon_2, t_1, t_2 \rightarrow 0$ i u definiciji ε_{min} i ε_{max} lako zanemarimo produkte oblika εt , sa čime dobijamo:

$$\Delta\varepsilon_1 = 0 \text{ i } \varepsilon_{min} = \varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = n_1/R \quad (5.26)$$

Istina, da je dobijena nesigurnost ε_1 jednaka nuli samo zato, jer nisu uračunate nesigurnosti određivanja površine vrhova u spektru, nego nesigurnost same metode. Iz proračunate nesigurnosti ε_1 koja proističe iz same metode možemo izračunati nesigurnosti za ostale efikasnosti:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\varepsilon_2}{\varepsilon_2} &= \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{n_{12}}{R\varepsilon_1} \frac{\Delta\varepsilon_1}{\varepsilon_1} = \frac{\Delta\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \\ \frac{\delta t_1}{t_1} &= \frac{1}{t_1} \frac{n_2}{n_{12}} \Delta\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{t_1} - 1 \right) \frac{\Delta\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \approx \frac{1}{t_1} \frac{\Delta\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \\ \frac{\delta t_2}{t_2} &= \frac{1}{t_2} \frac{n_1}{R\varepsilon_1} \frac{\Delta\varepsilon_1}{\varepsilon_1} = \left(\frac{1}{t_2} - 1 \right) \frac{\Delta\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \approx \frac{1}{t_2} \frac{\Delta\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Za tipične vrijednosti t_1 i t_2 relativne nesigurnosti totalnih efikasnosti same metode su reda veličine odgovarajućih nesigurnosti ε_1 . Opazimo da je za vrlo velike udaljenosti izvor-detektor da sa jedne strane $\Delta\varepsilon_1 \rightarrow 0$, dok sa druge strane $\varepsilon_1, \varepsilon_2, t_1, t_2 \rightarrow 0$, te zbog takvih okolnosti nesigurnosti totalnih efikasnosti mogu narasti izvan svojih granica.

Ukupnu nesigurnost ε_1 dobijamo uračunavajući nesigurnost metode $\Delta\varepsilon_1$ te statističke nesigurnosti određivanja površine ispod vrhova tj. brzina brojanja. Uobičajnim izrazom

za propagaciju nesigurnosti dobijamo ukupnu nesigurnost za ε_1 :

$$\begin{aligned} \sigma^2(\varepsilon_1) = & \Delta^2\varepsilon_1 + \left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial n_1}\right)^2 \sigma^2(n_1) + \left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial n_2}\right)^2 \sigma^2(n_2) + \\ & + \left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial n_{12}}\right)^2 \sigma^2(n_{12}) + \left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial R}\right)^2 \sigma^2(R) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Sa $\sigma(n_1)$, $\sigma(n_2)$ i $\sigma(n_{12})$ smo označili nesigurnosti brzine brojanja u relevantnim vrhovima u spektru, a sa $\sigma(A)$ nesigurnost aktivnost izvora, koja je navedena od strane proizvođača. Kada jednom odredimo ukupnu nesigurnost ε_1 , pravilo za propagaciju nesigurnosti upotrijebimo za određivanje ukupne nesigurnosti ostalih efikasnosti.

Da bi provjerili našu metodu eksperimentalno odredićemo brzine brojanja i na osnovu formule (1.10) direktno odrediti efikasnosti iz intenziteta fotovrhova. Jednačina (1.10) pretpostavlja da je brzina brojanja korigovana na koincidentne gubitke. Da bi izvršili korekcije odbroja pod vrhom pune energije vrtićemo se na diskusiju iz poglavlja 1.4. Dakle moramo poznavati totalne efikasnosti da bi bilo moguće izvršiti korekciju odbroja na koincidentne efekte. Za eksperimentalno određivanje totalnih efikasnosti kao funkciju od E , najbolje je upotrijebiti radionuklide koji emituju γ -zrak jedne energije. Međutim, većina radionuklida emituju γ -zrake sa jednom ili više energija, koje prate i odgovarajući X-zraci nastali elektronskim zahvatom ili internom konverzijom. Ako imamo odgovarajući radionuklid koji emituje jedan γ -zrak, kao npr. Cs-137(661 keV) totalnu efikasnosti dobijamo iz:

$$t = \frac{N_t}{B} \quad (5.29)$$

gdje je N_t ukupna brzina brojanja, a $B = R \cdot p$, gdje je R aktivnost izvora a p vjerovatnoća emisije γ -zraka. Za radionuklide koji emituje fotone sa dvije ne tako različite energije, možemo za p koristiti sumu individualnih vjerovatnoća emisije γ -zraka i pridružiti t srednjoj energiji \bar{E} . Ova procedura može biti korištena za Co-60, za energiju $\bar{E} = 1253 \text{ keV}$ [12],[13]. Dakle, Co-60 koristimo kao nuklid sa jednom linijom koji emituje dva γ -zraka srednje energije 1253 keV. Doprinos γ_1 može biti oduzet od totalne brzine brojanja N_t da bi dobili t_2 :

$$t_2 = \frac{N_t - Rp_1t_1}{Rp_2}$$

Za Co-60 moramo primjeniti korekcije na koincidentana sumiranja. Ako N_t sadrži sve događaje do $E_1 + E_2$, dobijamo:

$$N_t = R(p_1t_1 + p_2t_2 - p_1p_2t_1t_2)$$

i

$$t_2 = \frac{N_t - Rp_1t_1}{Rp_2(1 - p_1t_1)}$$

Za naš slučaj, tj. tačkasti izvor Co-60, možemo da stavimo $t_1 = t_2 = t$ i $p_1 = p_2 = 1$, pa

dobijamo

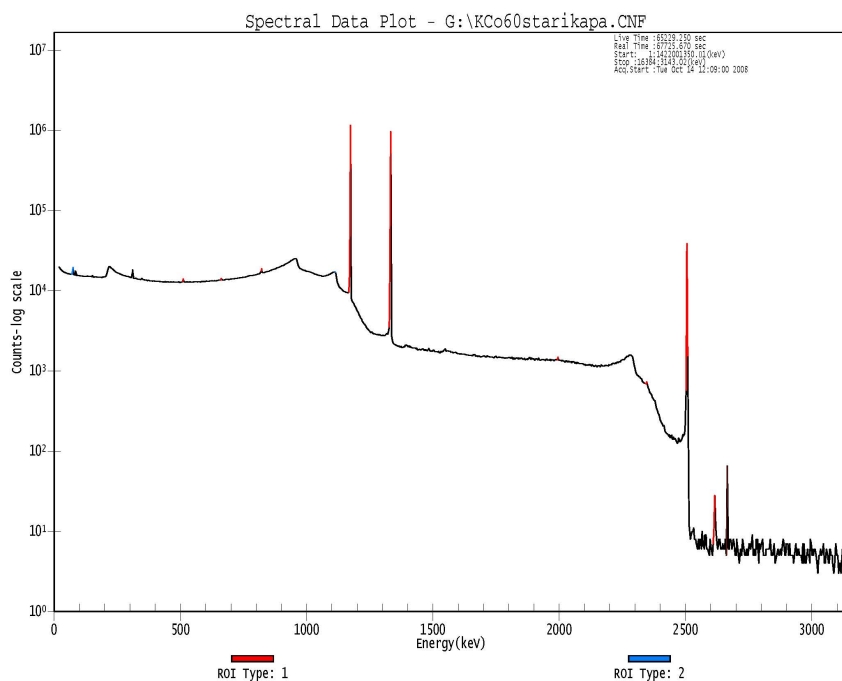
$$\begin{aligned}
 t &= \frac{N_t - Rt}{R(1 - t)} \\
 t &= 1 - \sqrt{1 - N_t/R}
 \end{aligned}
 \tag{5.30}$$

Relacije (5.30) nam omogućavaju procjenu totalne efikasnosti odakle možemo da korigujemo brzine brojanja za direktan proračun efikasnosti, te zatim usporedbu sa rezultatima dobijenim metodom.

Ako je razdaljine izvor-detektor mala kao u našem slučaju gdje je tačkasti izvor postavljen na kapi detektora, N_t je značajno redukovana koincidentnim sumiranjima. Druga komplikacija koja bi mogla da se desi je emisija β -čestica koje bi mogle da doprinesu totalnoj brzini brojanja. Co-60 emituje β -čestice sa maksimalnom energijom od 318 keV, tako da se većina ovih čestica za HPGGe detektore apsorbuje u detektorskom prozoru ili mrtvim slojevima, tako da je doprinos N_t zanemarljiv, [12].

5.5 Rezultati

Provjera metode je izvršena sa tačkastim izvorom Co-60 postavljenog na kapi detektora na njegovu osu. Mjerenje je trajalo približno 65 ks. U našem primjeru smo izmjerene brzine brojanja u vrhovima spektra upotrijebili za određivanje efikasnosti po jednačinama (5.13), (5.23) i (5.28). Na vrhovima 2664 keV i 2346 keV možemo ocijeniti veličinu efekta nasumičnog sumiranja i ako je velik korigovati brzine brojanja odbijajući dvostruku brzinu brojanja u tim vrhovima. U tabeli 5.4 su date izmjerene brzine brojanja sa mjernim nesigurnostima izračunate softverom Genie 2k. Spektar Co-60 (slika 5.2) koji je korišten



Slika 5.2: Vizuelni prikaz spektra Co-60 dobijen pomoću HPGe detektora u laboratoriji za nuklearnu fiziku u Novom Sadu

za provjeru metode mjeren je laboratoriji Instituta za fiziku u Novom Sadu. To je spektar tačkastog izvora Co-60. Izvor je postavljen na kapi detektora. Podaci koje možemo da pročitamo sa spektra su sljedeći:

Tabela 5.4: Podaci iz snimljenog spektra

| E (keV) | Brzina brojanja n | CPS |
|---------|---------------------|------------------|
| 1173 | n_1 | $180 \pm 0.03\%$ |
| 1332 | n_2 | $160 \pm 0.03\%$ |
| 2505 | n_{12} | $8.2 \pm 0.14\%$ |
| total | n_t | $1900 \pm 2.3\%$ |

Na osnovu podataka za brzine brojanja u vrhovima spektra Co-60 (slika 5.2), opisanom metodom smo proračunali aktivnost izvora pomoću jednačine (5.14) i efikasnost vrha

ukupne energije, te totalne efikasnosti za date energije γ -zraka. Efikasnosti koje smo označili kao eksperimentalne smo direktno dobili iz intenziteta fotopikova. Efikasnost za svaki ne-koincidentni foton dobijamo za bilo koju geometriju izvor-detektor pomoću $\varepsilon = n/Rp$ gdje je n neto brzina brojanja, R aktivnost izvora i p prinos γ -fotona.

Na osnovu intenziteta fotopikova u spektru i korigovane aktivnosti izvora na da-

Tabela 5.5: Proračunate mjerne nesigurnosti i koeficijenti osjetljivosti efikasnosti i aktivnosti izvora

| koeficijenti osjetljivosti | ε_1 | ε_2 | t_1 | t_2 | ε_{exp1} | ε_{exp2} | R |
|--|-----------------|-----------------|----------|----------|----------------------|----------------------|------|
| $\Delta^2\varepsilon$ | 2,08E-08 | 2.08E-08 | - | - | - | - | - |
| $\left(\frac{\partial}{\partial n_1}\right)^2 \sigma^2(n_1)$ | 3.40E-11 | - | - | 6.04E-08 | 9.78E-11 | - | 1.11 |
| $\left(\frac{\partial}{\partial n_2}\right)^2 \sigma^2(n_2)$ | 2.60E-11 | - | 2.15E-05 | - | - | 7.73E-11 | 1.11 |
| $\left(\frac{\partial}{\partial n_{12}}\right)^2 \sigma^2(n_{12})$ | 7.87E-10 | 2.73E-09 | 5.65E-08 | - | - | - | 24.2 |
| $\left(\frac{\partial}{\partial R}\right)^2 \sigma^2(R)$ | 5.06E-15 | 5.67E-07 | - | 2.73E-04 | 4.41E-07 | 3.49E-07 | - |
| $\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)^2 \sigma^2(\varepsilon)$ | - | 8.45E-09 | 3.81E-06 | 4.07E-06 | - | - | - |
| Σ | 2.17E-08 | 5.78E-07 | 2.54E-05 | 2.77E-04 | 4.41E-07 | 3.49E-07 | 69.4 |
| $\sqrt{\Sigma}$ | 1.00E-04 | 8.00E-04 | 5.00E-03 | 1.70E-02 | 6.64E-04 | 5.90E-04 | 8.33 |

tum merenja, moguće je direktno odrediti efikasnosti detektora za datu geometriju izvor-detektor na 1173 keV i 1332 keV i uporediti ih sa vrijednostima koje su dobijene metodom koincidencija, kao što je dato u tabeli 5.6

Tabela 5.6: Usporedba izračunatih efikasnosti detektora i aktivnost izvora metodom koincidencija i direktnim mjerenjem

| Veličina | Metoda | Mjerenje | Odnos |
|-----------------|-----------|-----------|-------|
| ε_1 | 0.0406(1) | 0.0408(7) | 1.01 |
| ε_2 | 0.0373(8) | 0.0363(6) | 0.97 |
| t_1 | 0.208(5) | 0.193(11) | 0.93 |
| t_2 | 0.181(17) | 0.193(11) | 1.06 |
| Aktivnost R(Bq) | 5412(8) | 5460(110) | 1.01 |

Glava 6

Zaključak

Opisan je generalni pristup za određivanje efikasnosti detektora sa prisustvom efekata pravih koincidentnih sumiranja za HPGe detektore. Teoretski model omogućava formiranje jednačina brzina brojanja za vrhove ukupnih energija, kao i za sumacione vrhove. Dobijene jednačine su nelinearne i nepoznate varijable su efikasnost vrha ukupne energije, totalna efikasnost i aktivnost izvora. Jednačine brzine brojanja (5.8) nam omogućavaju izvođenje analitičkog izraza za proračun aktivnosti izvora, koji ne sadrži druge podatke osim brzina brojanja vrhova ukupne energije, sumacionog vrha i totalne brzine brojanja. Koeficijenti u jednačinama su dobijeni iz nuklearnih i atomskih parametara radionuklida [3]. Metoda omogućava neposredno određivanje efikasnosti za vrh ukupne energije, kao i za totalne efikasnosti za tačkasti izvor Co-60. Jednačine brzine brojanja smo mogli riješiti simultanim nalaženjem korjena jednačina sistema. Pristup je urađen nešto drugačije tako što su uvedena smisljena ograničenja koje uključujemo u sistem jednačina i na taj način dobijamo sistem koji je analitički rješiv. Spektar koji je razmatran je spektar tačkastog izvora Co-60 postavljenog na kapu detektora na njegovu osu, izmjeren u laboratoriji za nuklearnu fiziku PMF-a, Novi Sad. Da bi se dobila dobra statistika vrijeme brojanja mora biti veće od 10 ks. Spektar izvora je zatim analiziran u laboratoriji za γ -spektrometriju Instituta za zaštitu zdravlja RS u Banjaluci pomoću softvera GENIE 2k. U čitavom proračunu zanemarene su su angularne korelacije jer za bliske geometrije efekti angularnih korelacija su zanemarljivi, [8]. Efekti nasumičnog sumiranja nisu značajni kao što može vidjeti u sumacionim vrhovima 2346 KeV i 2664 keV. Analiza nesigurnosti, ignorišući sistematske greške, uključuje nesigurnost same metode, koju smo diskutovali u (5.4), zatim statistička nesigurnost brojanja pod vrhom ukupne energije koja prati Poissonovu raspodjelu i u svom najjednostavnijem obliku iznosi $\sigma = \sqrt{N}$, gdje je N zapaženi odbroj. Ukupnu nesigurnost dobijemo zakonom propagacije nesigurnosti.

Ispitivanjem rezultata predstavljenim u tabelama vidimo da se rezultati, izračunati metodom koincidencija i direktnim određivanjem iz intenziteta fotovrhova, ne razlikuju mnogo. Pravilnom analizom površina ispod vrhova možemo da odredimo totalne efikasnosti kao i efikasnosti vrha ukupne energije. Možemo da zaključimo da je metoda korisna i uopštena tako da je možemo koristiti za određivanje aktivnosti izvora kao i osnovnih osobina detektora i za druge radionuklide sa komplikovanim shemama raspada.

Bibliografija

- [1] D. Novković, A. Kandić, M. Đurašević, I. Vukanec, Z. Milošević, L. Nađđerđ, Nuc. Instr. and Meth. A 578 (2007) 207,
- [2] D. Novković, A. Kandić, M. Đurašević, I. Vukanec, Z. Milošević, L. Nađđerđ, Nuc. Instr. and Meth. A 578 (2007) 592,
- [3] KRI/V.P Chechev, N.K. Kuzmenko, Internet information: Laboratorie National Henri Becquerel
- [4] I. J. Kim, C. S. Park and H. D. Choi, Applied Radiation and Isotopes, Volume 58, Issue 2 (2003) 227,
- [5] Richard M. Lindstrom and Ronald F. Fleming, Radioactivity & Radiochemistry, Vol. 6, No. 2, (1995) 20,
- [6] Menno Blaauw, Nuc. Instr. and Meth. A 332 (1993) 493,
- [7] Ahmad Saat, Science Letters 1 (2004) 29,
- [8] Thomas M. Semkow, G. Mehmood, P.P. Parekh, M. Virgil, Nuc. Instr. and Meth. A 290 (1990) 437,
- [9] M.Korun, R. Martinčić, Nuc. Instr. and Meth. A 355 (1995) 600,
- [10] J. Slivka, I. Bikit, M. Vesković, Lj. Čonkić: Gama spektrometrija, specijalne metode i primene, Univerzitet u Novom Sadu, 2000,
- [11] Gordon Gilmore, John D. Hemigway: Practical Gamma-Ray Spectrometry, John Wiley & Sons, 1995,
- [12] K. Debertin, R.G. Helmer, Gamma and X ray Spectrometry with Semiconductor Detectors, North-Holland , New York, 1988,
- [13] K. Debertin, U Schotzig, Nuc. Instr. and Meth. 158 (1979) 471-477,
- [14] ORTEC, Internet information: Loss Free Counting with Uncertainty Analysis Using ORTEC's Innovative Zero Dead Time Technique,
- [15] Sjored J. Gelsema, Internet information: Advanced γ -ray spectrometry dealing with coincidence and attenuation effects, A three curves approach,

- [16] Tim Vidmar, Merjenje in modeliranje umeritvene krivulje izkoristka v spektrometriji gama, Disertacija, Ljubljana 2002.



Bojan Štrbac je rođen 10.01.1976. godine u Banjaluci. Prirodno-matematički fakultet upisuje 1997. u Banjaluci, i nakon diplomiranja na odsjeku za fiziku radi jedno vrijeme u Gimnaziji. Zaposljenjem u Institutu za zaštitu zdravlja Republike Srpske počinje da se bavi zaštitom od zračenja i monitoringom radionuklida u životnoj sredini. U saradnji sa IAEA završio je niz projekata od značaja za monitoring radionuklida u Republici Srpskoj i Bosni i Hercegovini.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

TD

Monografska dokumentacija

Tip zapisa:

TZ

Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada:

VR

Magistarski rad

Autor:

AU

Bojan Štrbac

Mentor:

MN

Dr Ištvan Bikit

Naslov rada:

NR

Primjena efekta pravih koincidentnih sumiranja gama spektrometriji za proračun efikasnosti vrha ukupne energije detektora i aktivnosti tačkastog izvora Co-60 srpski (latinica)

Jezik publikacije:

JP

srpski/engleski

Jezik izvoda:

JI

Zemlja publikovanja:

ZP

Srbija

Uže geografsko područje:

UGP

Vojvodina

Godina:

GO

2009

Izdavač:

IZ

Autorski reprint

Mesto i adresa:

MA

Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

Fizički opis rada:

FO

(broj poglavlja/strana/lit. Citata/tabela/slika/grafika/priloga)(6/37/16/8/8/0)

Naučna oblast:

NO

Naučna disciplina:

ND

Nuklearna fizika

Predmetna odrednica/ ključne reči:

PO

Gama-spektrometrija, HPGe, Co-60, koincidentna sumiranja, efikasnost detektora

Čuva se:

ČU

Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu

Važna napomena:

VN

nema

Izvod:

IZ

Cilj istraživanja je pokazati da na osnovu relativno malog broja podataka iz snimljenog spektra, kao što su brzine brojanja, da je moguće odrediti osnovna svojstva detektora i mjenog izvora. Metoda je pokazana na tačkastom izvoru Co-60 čiji je spektar snimljen na Odsjeku za fiziku PMF Novi Sad.

Datum prihvatanja teme od NN veća:

DP

14. aprila 2009.

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik:

član:

član:

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

Monograph publication

DT

Type of record:

Textual printed material

TR

Content code:

Final paper

CC

Author:

Bojan Štrbac

AU

Mentor/comentor:

Dr Ištvan Bikit, full professor, Faculty of Sciences, Novi Sad

MN

Title:

The use of coincidence summing effect in gamma-rays spectrometry for the determination of full energy photopeak efficiency and activity of the Co-60 point source

TI

Language of text:

Serbian (Latin)

LT

Language of abstract:

English

LA

Country of publication:

Serbia

CP

Locality of publication:

Vojvodina

LP

Publication year:

2009

PY

Publisher:

Author's reprint

PU

Publication place:

Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

PP

Physical description:

(6/42/16/8/8/0)

PD

Scientific field:

Nuclear physics

SF

Scientific discipline:

SD

Subject/ Key words:

Gamma spectrometry, HPGe, coincidence summing, efficiency of detector

SKW

UC

Holding data:

Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4

HD

Note:

none

N

Abstract:

AB

There is theoretical model developed for coincidence summing of X and gamma rays for radionuclides with complex decay scheme. This models enables to write equation for single peaks, the coincidence sum peaks and total count rate. The efficiency of detection and the activity of Co-60 source are the unknowns in the count rate equation system. They can be determined by simultaneously finding the roots of the equation system.

Accepted by the Scientific Board:

ASB

Defended on:

DE

Thesis defend board:

14. aprila 2009

DB

President:

Member:

Member: