



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО – МАТЕМАТИЧКИ
ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА ФИЗИКУ



Провера Бернулијеве једначине анализом облика млаза течности

- дипломски рад -

Ментор:

Проф. др Федор Скубан

Кандидат:

Богдан Богдановић

Нови Сад, 2018.

Овом приликом се захваљујем ментору проф. др Федору Скубану на предложеној теми и помоћи током израде овог дипломског рада.

Захваљујем се и колегама са Департмана, посебно Катедре, на подршци.

Посебну захвалност дугујем породици на стрпљењу, помоћи и љубави.

Садржај

1. Увод	2
2. Историја Бернулијевог принципа	3
3. Бернулијева једначина	8
Извођење Бернулијеве једначине	8
Упутства за примену Бернулијеве једначине	10
Примена Бернулијеве једначине	13
4. Провера Бернулијеве једначине анализом облика млаза течности.....	14
Принцип.....	14
Експериментална поставка.....	16
Резултати мерења	19
5. Закључак	24
Литература	25
Кратка биографија кандидата	26
Кључна документацијска информација	27

1. Увод

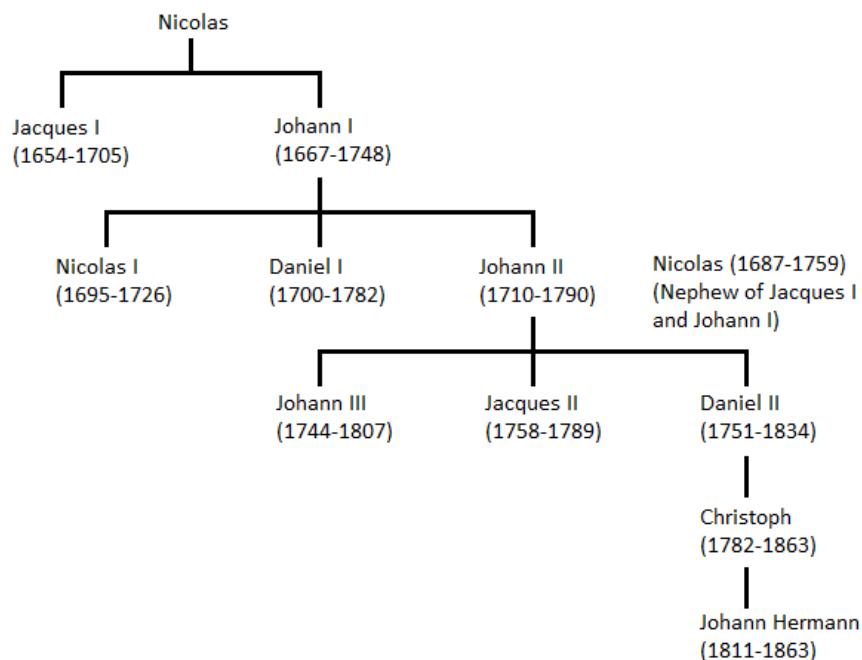
Физика је основна, природна, експериментална наука која се бави изучавањем материје (њене грађе, њених својстава, њеног кретања), као и законитости по којима се збивају појаве у природи. Већ у самој дефиницији физике, спомиње се експеримент као незаобилазан апарат у физици. Експеримент може бити покретач развоја нових теорија, али и потврда нових теоријских предвиђања у науци.

На факултету су највише заступљени демонстрациони експерименти и лабораторијске вежбе. Демонстрациони експерименти се изводе да би се нека физичка појава показала и објаснила. Не врше се мерења, запис и обрада резултата. За разлику од демонстрационих, лабораторијски експерименти се изводе са циљем да студенти добију конкретне резултате који ће и квантитативно потврдити одређену теорију, или им омогућити да одреде неку физичку величину. За лабораторијске вежбе су предвиђени часови у оквиру свих курсева везаних за општу и експерименталну физику. Најчешћи начин реализације ових вежби је рад у групама које чине два или три студента. На једном термину, појединачне групе изводе по један експеримент и током семестра се циклично мењају. Након што студенти покажу задовољавајуће предзнање потребно за успешну реализацију експеримента, добијају упутство за извођење мерења, као и сређивање резултата. Принцип експерименталног рада и добијене резултате записују у дневник експерименталних вежби.

Сврха овог дипломског рада је увођење новог лабораторијског експеримента Провера Бернулијеве једначине анализом облика млаза течности, као и приказивање резултата истог. Експеримент је погодан за студенте физике на почетним годинама студија.

2. Историја Бернулијевог принципа

У историји науке значајно место заузима изузетна породица истакнутих швајцарских математичара, Бернули. Посебно се истичу Жак Први (*Jacques I*), Јохан Први (*Johann I*) и Данијел Први (*Daniel I*). Захваљујући труду браће Жака и Јохана, калкулус је досегао највећу популарност у 18. веку, а Данијел је међу првима користио парцијалне диференцијалне једначине и њему се приписује да је међу „оснивачима математичке физике“. Четири члана ове породице је примљено у Париску академију наука, а најмање 11 њених чланова је дало значајан допринос математици (слика 1.). Ипак, презиме Бернули се не истиче само у математици, већ и у физици, астрономији, медицини, теологији, биологији, поезији, географији и праву...



Слика 1. Породично стабло швајцарских математичара породице Бернули

Бернулијева једначина је тако названа у част Данијела Бернулија (*Daniel Bernoulli*, 1700 – 1782). Он је остао упамћен по примени математике у маханици, посебно механици флуида, и по свом пионирском раду у области вероватноће и статистике. Био је и међу првима који су покушали да формулишу кинетичку теорију гасова.



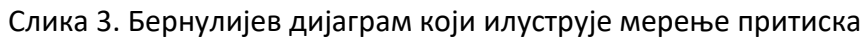
Слика 2. Данијел Бернули

Данијел Бернули је рођен 1700. године у Гронингену у Холандији. Његов отац Јохан, познати математичар, је био одлучан у томе је за његовог сина најбоље да постане трговац, јер није било новца у математици. Данијел је ипак наставио да проводи много времена учећи математику и упорно је одбијао да постане трговац. На крају, када је имао 13 година, његов отац је коначно одустао, али је ипак одбио да му дозволи да постане математичар па је Данијел уписао медицину. Док је студирао медицину, Данијел је био заинтересован за дело Вилијама Харвија (*William Harvey*, 1578 – 1657) о раду срца и циркулацији крви (*Exercitatio Anatomica de Motu Cordis et Sanguinis in Animalibus*), где се сугерише да је срце попут пумпе што „гура“ крв да тече као флуид кроз артерије. То је био почетак Данијеловог истраживања основних правила кретања флуида. Његово интересовање за математику наставило се током његових студија медицине

Једна од области које је Данијел проучавао је био закон о конзервацији „живе силе“ („*Vis viva*“), односно закон о очувању енергије. Тим проблемом се бавио и на студијама медицине. Писао је докторску дисертацију о механици дисања, примењујући математичку физику у медицини. Док је студирао у Венецији, објавио је књигу Математичке вежбе (*Mathematical Exercises*). Са 23 године био је у Падови у Италији и док се опорављао од болести, дизајнирао је поуздан пешчани сат за бродове, чији рад не би пореметило ни олујно време. Добио је прву награду Француске академије 1725. године. Међутим, Смит у Историји математике наводи да је Бернули као једно од својих највећих признања издвајао ситуацију у којој се нашао када се возио кочијом са ученим сапутником. Пошто су водили пријатан разговор, сапутник га је једног тренутка упитао

Након завршених медицинских студија у 21. години, тражио је академску позицију како би могао даље истраживати основна правила по којим се течности крећу. Данијел се пријавио на два места које су, у Базелу, нудиле катедре за анатомију и ботанику.

Данијел Бернули и Ојлер су покушали да открију више о протоку флуида. Посебно су желели да схвате однос између брзине кретања крви и њеног притиска. Да би то истражили, Данијел је експериментисао тако што је пробушио зид цеви са малом сламком отвореном на другом крају (слика 3.). Приметио је да је висина до које се течност у сламки подигла била везана за притисак флуида у цеви.



5

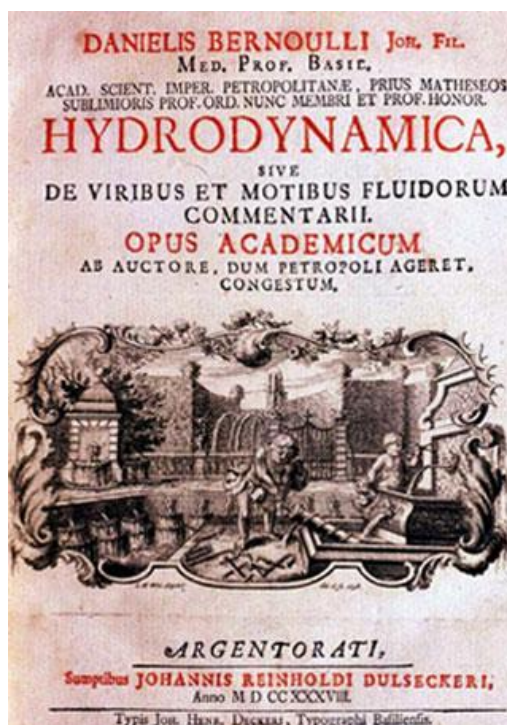
У даљем истраживању, Данијел Бернули се вратио свом ранијем раду о одржању енергије. Било је познато да се кинетичка енергија тела у покрету трансформише у потенцијалну како се тело подиже на неку висину. Данијел је схватио да се на сличан начин, код флуида у покрету његова „кинетичка енергија“ (што би одговарало динамичком притиску) трансформише у притисак (статички притисак). Овај закон се може исказати математички:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{const.}$$

где је ρ густина флуида, v брзина протока, а p притисак.

Са око 30 година је радио на свом делу Хидродинамика (Hydrodynamica). У међувремену, настојао је да се, упркос безуспешним покушајима да се избори за академску позицију, врати у Базел. То му је пошло за руком 1734. године. Због ривалства које је постојало у породици, његов отац Јохан је био неспреман да призна да му је Данијел раван, Данијел се није вратио у породичну кућу.

У наредне три године привео је крају Хидродинамику. Наводећи „Хидродинамика, дело Данијела Бернулија, сина Јохановог“, покушао је да поправи однос са оцем. Међутим његов отац је објавио дело Хидраулика (Hydraulics), које се чинило да има превише сличности са Хидродинамиком. Након догађаја у породици, Данијел се више посветио медицини и физиологији. Остао је у Базелу до своје смрти.



Слика 4. Хидродинамика

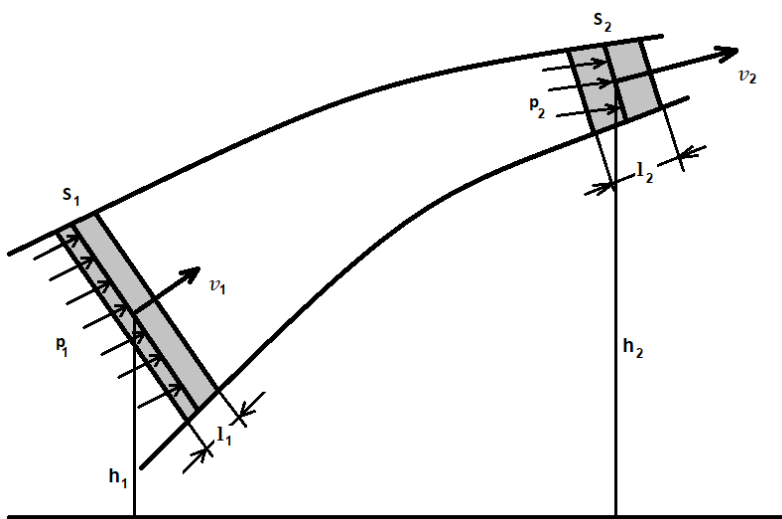
Хидродинамика је објављена 1738. године, то је теоријска и практична студија равнотеже, притиска и брзине течности. Данијел Бернули је представио идеју потенцијалне енергије и дао тачну анализу воде која истиче кроз отвор на суду, засновану на принципу очувања енергије. У делу су између осталог садржане и теорија о Архимедовом вијку и почетак кинетичке теорије гасова, као и примитивни облик Бернулијеве једначине. Његово сазнање се применило за производњу вакуума у хемијским лабораторијама повезивањем посуде са цеви кроз коју се оствари брз проток воде.

3. Бернулијева једначина

Бернулијева једначина заузима значајно место у области динамике флуида, која проучава стање флуида у кретању.

Извођење Бернулијеве једначине

Ако посматрамо струјну цев малог пресека, за њу важи да је интензитет брзине честица у сваком датом пресеку, нормалном на осу цеви, једнак за сваку тачку тог пресека. У том случају, запремина течности која протиче кроз било који пресек цеви остаје константна у јединици времена, пошто се кретање честице течности врши само дуж осе цеви.



Слика 5. Струјна цев

На слици 5. је означен елемент запремине у два положаја (из положаја 1 се преместио у положај 2). За одабрану елементарну запремину може се сматрати да све честице у њој имају исти интензитет брзине и да се налазе на истој висини у односу на изабрани нулти ниво. Брзина, висина и попречни пресек су v_1 , h_1 и S_1 ; и v_2 , h_2 и S_2 , у положајима 1 и 2, респективно.

Рад силе притиска у положајима 1 и 2 се може записати као $A_1 = p_1 S_1 l_1$ и $A_2 = p_2 S_2 l_2$. При томе су одговарајуће запремине: $V_1 = S_1 l_1$ и $V_2 = S_2 l_2$, па се рад може изразити преко притиска и запремине, у положају 1 као $A_1 = p_1 V_1$ и у положају 2 као $A_2 = p_2 V_2$. Ако је у питању стационарно струјање нестишљиве течности, онда је $V_1 = V_2 = \dots = V$, па је $A_1 = p_1 V$ и $A_2 = p_2 V$.

Пошто је $p_1 > p_2$, онда је и $A_1 > A_2$. На основу тога се може закључити да је течност у одабраном елементу запремине при преласку из положаја 1 у положај 2 добила одређену енергију која потиче од разлике рада сила притиска у посматраним положајима:

$$A_1 - A_2 = p_1 V - p_2 V.$$

Пошто та разлика одговара раду спољашњих сила које делују на флуид (јер је то рад који врши флуид изван запремине коју ограничавају пресеци 1 и 2, па је у тачки 1 позитиван, а у тачки 2 негативан) једнака је промени укупне енергије система, односно одговарајућој промени кинетичке и потенцијалне енергије. На основу тога може се записати следећа једначина:

$$p_1 V - p_2 V = \left(\frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2 \right) - \left(\frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 \right).$$

Ако ту једначину поделимо са V , пошто је специфична густина течности $\rho = \frac{m}{V}$, преуређивањем чланова једначине, она се може записати у следећем облику:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$

Пошто су пресеци, односно положаји 1 и 2, одабрани произвољно, онда горњи збир чланова остаје сталан за ма који пресек цеви, односно важи да је:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{const.}$$

Претходни запис је општепознати облик Бернулијеве једначине.

У Бернулијевој једначини фигуришу:

p - статички притисак: специфична потенцијална енергија силе притиска у течности, односно потенцијална енергија силе притиска у јединици запремине;

$\rho g h$ - гравитациона потенцијална енергија по јединичној запремини флуида: последица положаја флуида и гравитационом пољу Земље и

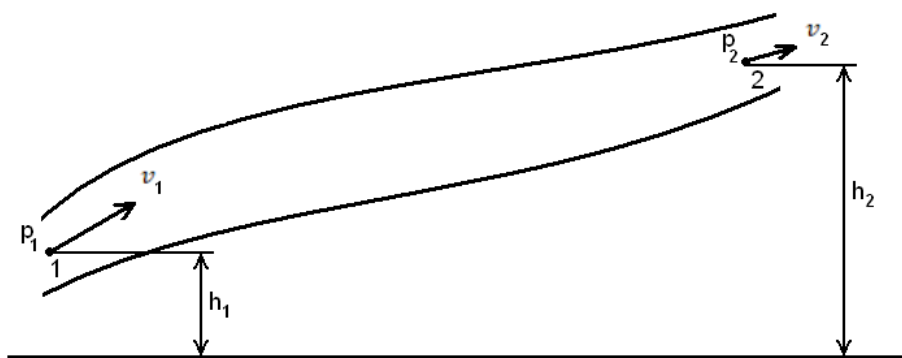
$\frac{1}{2} \rho v^2$ - динамички притисак: специфична кинетичка енергија, односно кинетичка енергија у јединици запремине.

Бернулијева једначина изражава закон који се односи на укупни притисак у флуиду: *при стационарном протицању идеалне нестишљиве течности кроз струјне цеви укупни притисак, једнак суми статичког, висинског и динамичког притиска, остаје константан у сваком попречном пресеку струјне цеви.*

Упутства за примену Бернулијеве једначине

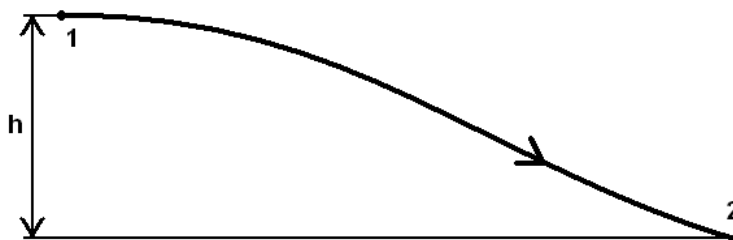
Да би се ефикасно применила Бернулијева једначина, потребно је поштовати одређена упутства:

1. Бернулијева једначина се увек пише само за два пресека, по правилу се са леве стране записују величине које карактеришу „први“ пресек одакле тече струја (1), а са десне стране оне које карактеришу „други“ пресек ка коме се струјање врши (2) (слика 6). Испред Бернулијеве једначине се наводи податак (на пример, 1-2) којим је означено за које тачке је написана Бернулијева једначина.



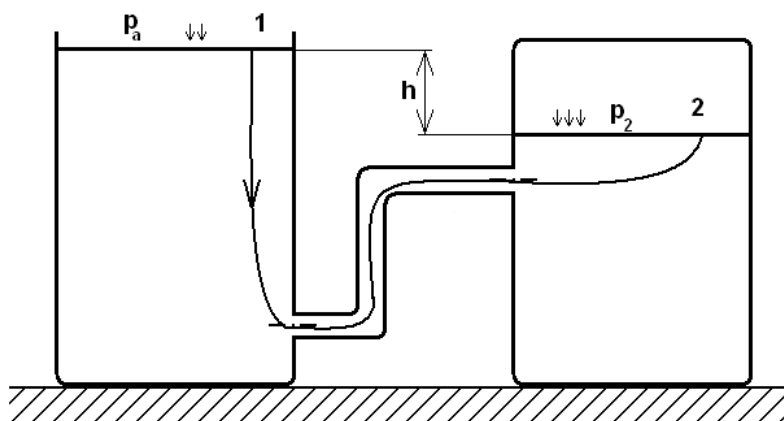
Слика 6. Уочени струјни пресеци и њихове карактеристике

Треба водити рачуна о томе да се чланови Бернулијеве једначине односе на делић течности који се налази у одређеном положају. У складу са тим, ако се посматрају делићи флуида који се налазе у тачкама на различитим висинама, онај у вишој тачки има већи висински притисак. За њихову висинску разлику h , разлика висинских притисака износи ρgh (слика 7).



Слика 7. Висинска разлика флуидних делића

2. Бернулијева једначина се може написати и пуноважна је за било које две тачке које се могу повезати замишљеном или стварном струјницом (слика 8).



Слика 8. Повезивање две тачке замишљеном или стварном струјницом

3. Уз Бернулијеву једначину увек се везује и једначина континуитета. За стишљиви флуид, када је масени проток константан, једначина континуитета гласи $\rho vS = const$. За нестишљиви флуид, када је запремински проток константан, ова једначина гласи $vS = const$.

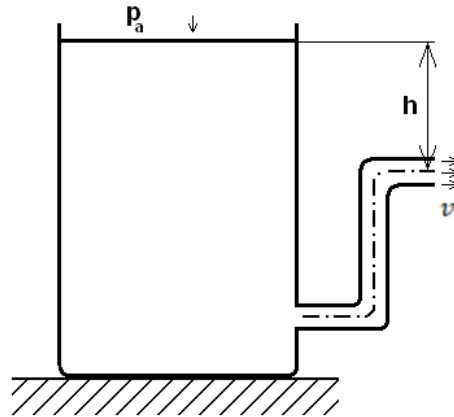
Ова једначина у Бернулијевој једначини може елиминисати једну непознату брзину. Ако се висина одређује у односу на ниже означен пресек, у Бернулијевој једначини уместо висина h_1 и h_2 јавља се њихова разлика као једна непозната.

Увођење једначине континуитета и реперног нивоа (који се бира тако да одговара нижој тачки), у Бернулијевој једначини се могу елиминисати две непознате величине. Ипак, мора се посветити посебна пажња избору карактеристичних тачака 1 и 2, да би једначина могла да доведе до решења. Пресеке (тачке 1 и 2) треба узимати на местима за која постоји највећи број познатих података.

За случај претакања (без губитака) из једног резервоара у други (слика 8), уколико је у резервоарима површина течности много већа од површине пресека спојне цеви, за карактеристичне тачке Бернулијеве једначине погодно је одабрати слободне нивое течности у резервоарима. У тим тачкама су динамички притисци делића течности занемарљиве, односно $v_1 = v_2 = 0$, а статички притисак $p_1 = p_a$. Тада Бернулијева једначина 1-2 има облик:

$$p_a + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

$$\rho gh = p_2 - p_a$$



Слика 9. Слободно истицање у атмосферу

Уколико је у питању случај слободног истицања течности у атмосферу (без губитака) (слика 9), погодне карактеристичне тачке 1 и 2 су ниво течности у резервоару и завршни пресек цевовода у коме влада атмосферски притисак p_a . У том случају може се поставити Бернулијева једначина 1-2 која гласи:

$$p_a + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = p_a + \frac{\rho v_2^2}{2}$$
$$h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

4. У случају да се за неки струјни проблем поред постојеће Бернулијеве једначине могу написати и друге Бернулијеве једначине, такве да се у њима јављају нове непознате величине, оне су такође пуноважне. То је случај када се решавају проблеми сложених цевовода.

5. Пре постављања Бернулијеве једначине треба да се изврши анализа проблема: потребно је схватити и потврдити његов физички смисао, одабрати одговарајуће карактеристичне тачке и редослед решавања једначина. Резултат нумеричког решења биће квантитативни односи тражених и познатих величина и потврдиће се оправданост постављеног задатка. Када се добије решење треба утврдити да ли добијена вредност има физичког смисла.

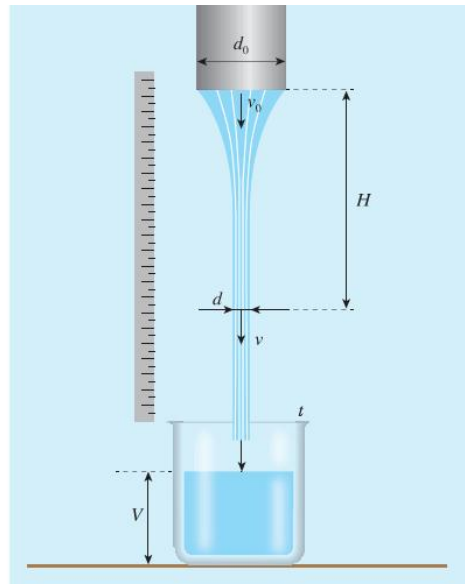
Примена Бернулијеве једначине

Бернулијева једначина се користи код неких специјалних случајева, као што су Торичелијева теорема (мерење брзине истицања течности кроз отвор на суду), Питоова цев (мерење брзине струјања флуида), Вентуријева цев (мерење брзине, или протока флуида), и други. Такође, последица Бернулијевог закона је да се смањењем притиска брзина повећава, што се користи код дизајнирања профила авионских крила. Велики број практичних задатака у инжењерској анализи струјних проблема решава се применом Бернулијеве једначине са њеним пратећим условом – једначином континуитета.

4. Провера Бернулијеве једначине анализом облика млаза течности

Принцип

Провера Бернулијеве једначине може се извршити анализом промене пречника млаза течности на одређеним висинама, мерећи од краја млазнице, кроз коју течност излази.



Слика 10. Истицање млаза течности

Ако применимо Бернулијеву једначину на два сегмента млаза на различитим висинама, један на самом крају млазнице који има пречник d_0 и други на растојању H од краја млазнице, који има пречник d добијамо

$$p_{at} + \frac{\rho v_0^2}{2} + \rho g H = p_{at} + \frac{\rho v^2}{2}$$

где је p_{at} атмосферски притисак, ρ густина течности (воде), а v_0 и v су брзине течности на крају млазнице, односно на висини H . Из предходне релације нам следи

$$v_0^2 + 2gH = v^2$$

односно

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = 1 + \frac{2gH}{v_0^2}$$

За нестишљиве флуиде у које спада и вода, важи једначина континуитета

$$S_0 v_0 = S v = \text{const}$$

$$\frac{\pi d_0^2}{4} v_0 = \frac{\pi d^2}{4} v$$

Одавде следи

$$\frac{v}{v_0} = \left(\frac{d_0}{d}\right)^2$$

односно

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = \left(\frac{d_0}{d}\right)^4$$

Уколико добијену релацију уврстимо у релацију $\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = 1 + \frac{2gH}{v_0^2}$, добијамо

$$\left(\frac{d_0}{d}\right)^4 = 1 + \frac{2gH}{v_0^2}$$

односно

$$\frac{d_0}{d} = \sqrt[4]{1 + \frac{2gH}{v_0^2}}$$

Добијена релација се може приказати и у облику

$$\left(\frac{d_0}{d}\right)^4 - 1 = \frac{2g}{v_0^2} H$$

Релација је добијена из Бернулијеве једначине и провером исте, доказујемо важење Бернулијеве једначине. За ову проверу потребно нам је да измеримо колики је унутрашњи пречник млазнице d_0 , као и колико је растојање H и колики је пречник млаза течности на том растојању d . Такође потребно је да знамо и колика је почетна брзина истицања течности v_0 . Да би одредили почетну брзину истицања течности v_0 , потребно је да измеримо запремину воде V која излази кроз цев у времену t . С обзиром да је површина попречног пресека цеви

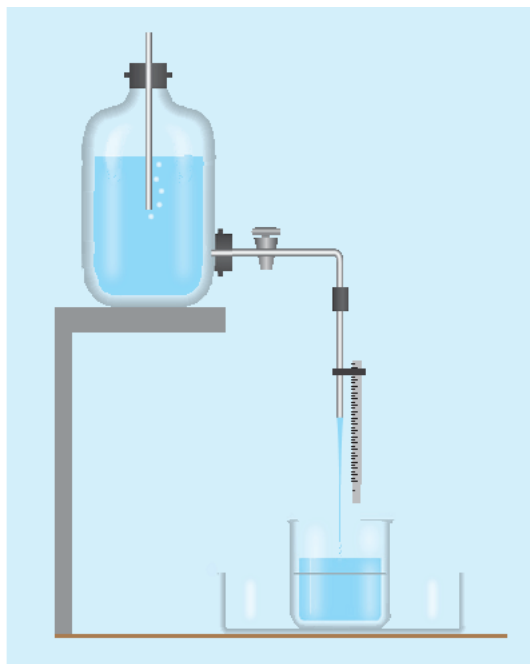
$$S_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}$$

за почетну брзину истицања течности добијамо

$$v_0 = \frac{V}{S_0 t} = \frac{4V}{\pi d_0^2 t}$$

Експериментална поставка

За експеримент нам је потребна Мариотова боца која ће нам обезбедити константну брзину истицања течности, млазница, нонијус којим ћемо измерити пречник млазнице, штоперица, мензура и лењир (слика 11 и слика 12). Такође нам је потребан и фотоапарат, како би могли забележити фотографски снимак млаза који истиче кроз млазницу.



Слика 11. Експериментална поставка

Пре почетка мерења брзине истицања течности, потребно је нонијусом измерити унутрашњи пречник млазнице. Затим се помоћу мензуре и штоперице одређује за које време ће истећи одређена запремина воде. На тај начин долазимо до података потребних за израчунавање почетне брзине истицања течности.

Тада се приступа другом делу експеримента. Млазница се поставља на крај гуменог црева које излази из Мариотове боце. Помоћу држача, млазница се поставља у вертикалан положај, а иза млазнице се фиксира тамнија позадина. Потребно је поставити лењир уз млазницу, тако да нула лењира буде поравната са крајем млазнице како не бисмо правили грешку приликом читавања растојања H .



Слика 12. Реализација експеримента

Након тога се приступа фотографисању млаза воде који истиче из млазнице. Анализом фотографија, долази се до пречника млаза воде на различитим растојањима од краја млазнице.



Слика 13. Фотографије два млаза за које је вршена провера Бернулијеве једначине

Резултати мерења

У табелама (1) и (2) су дати резултати мерења помоћу којих су израчунате вредности почетних брзина.

За обе млазнице, мерено је време за које ће истећи 800ml течности. Мерење времена је вршено тако што је штоперица стартована тек када би се мензура напунила до 200ml, а заустављана када се напунила до 1000ml.

Табела (1) Мерено време истицања течности за прву млазницу

$d_0(mm)$	$V(ml)$	$t(s)$
8	800	22,61
8	800	22,68
8	800	23,03
8	800	22,70
8	800	23,07
8	800	22,60
8	800	23,00
8	800	22,55
8	800	22,77
8	800	22,49

Табела (2) Мерено време истицања течности за другу млазницу

$d_0(mm)$	$V(ml)$	$t(s)$
6	800	26,98
6	800	26,78
6	800	26,52
6	800	26,99
6	800	27,27
6	800	26,84
6	800	26,97
6	800	27,18
6	800	26,72
6	800	27,32

За млазницу пречника 8mm, средње време за које истекне 800ml износи 22,75s, док за млазницу пречника 6mm то време износи 26,96s. Добијени резултати за почетне брзине истицања течности за обе млазнице су дати у табелама (3) и (4). Осим ових података, у истим табелама су наведене вредности за пречнике за оба млаза, као и односи почетних пречника и пречника на различитим растојањима H . Такође, дате су теоријске вредности односа пречника рачунате преко растојања H и вредности почетних брзина v_0 . У табелама су приказана релативна одступања ових односа.

Уведен је и коефицијент сразмере k , чија теоријска вредност износи 1. Дат је изразом:

$$k = \frac{\frac{d_0}{d}}{\sqrt[4]{1 + \frac{2gH}{v_0^2}}}$$

Табела (3) Одређивање коефицијента сразмерности за прву млазницу

d_0 (mm)	d (mm)	$\frac{d_0}{d}$	$\left(\frac{d_0}{d}\right)^4 - 1$	H (cm)	v_0 $\left(\frac{m}{s}\right)$	$\sqrt[4]{1 + \frac{2gH}{v_0^2}}$	$k = \frac{\frac{d_0}{d}}{\sqrt[4]{1 + \frac{2gH}{v_0^2}}}$	δ (%)
8	7,28	1,10	0,46	2	0,7	1,16	0,95	5,17
8	6,98	1,15	0,75	4	0,7	1,27	0,90	9,45
8	6,38	1,25	1,44	6	0,7	1,36	0,92	8,09
8	5,72	1,40	2,84	8	0,7	1,43	0,98	2,10
8	5,32	1,50	4,06	10	0,7	1,50	1,01	0,00
8	5,22	1,53	4,48	12	0,7	1,55	0,99	1,29
8	5,00	1,60	5,55	14	0,7	1,60	1,00	0,00
8	4,92	1,63	6,06	16	0,7	1,65	0,99	1,21
8	4,46	1,79	9,27	18	0,7	1,69	1,06	5,92
8	4,46	1,79	9,27	20	0,7	1,73	1,04	3,47

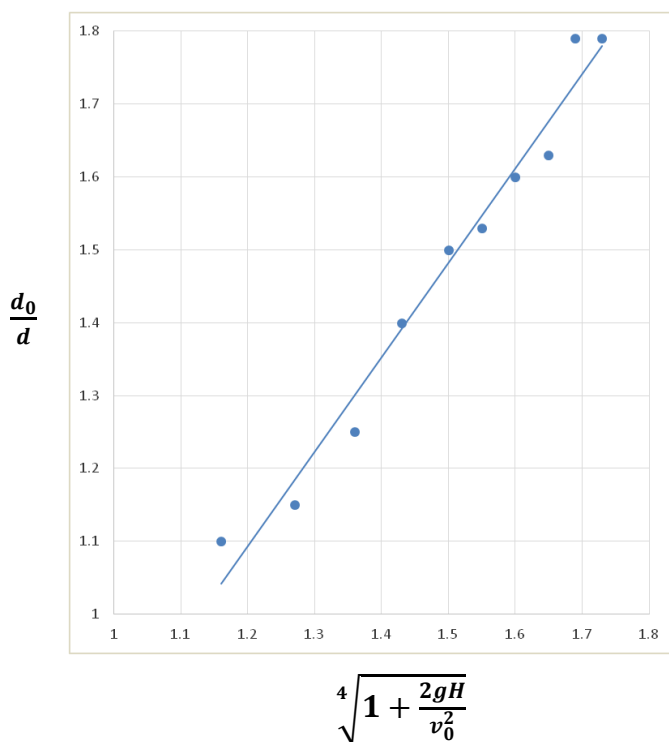


График 1. Приказ коефицијента сразмере k за прву млазницу

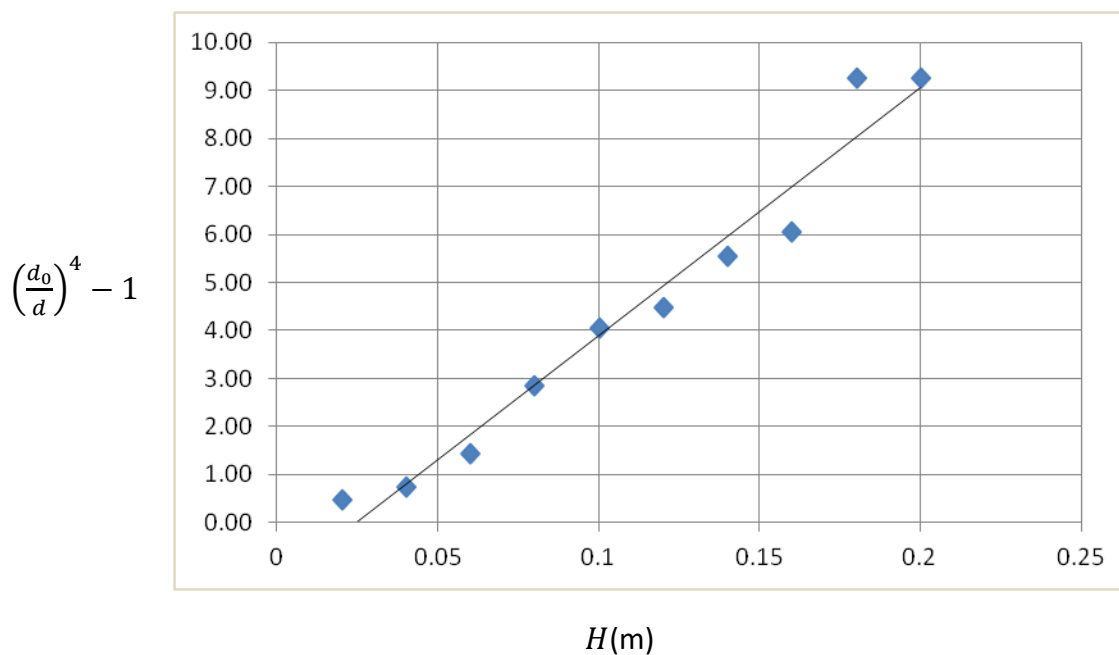


График 2. Приказ зависности функције $\left(\frac{d_0}{d}\right)^4 - 1$ од H за прву млазницу

Табела (4) Одређивање коефицијента сразмерности за другу млазницу

d_0 (mm)	d (mm)	$\frac{d_0}{d}$	$\left(\frac{d_0}{d}\right)^4 - 1$	H (cm)	v_0 $\left(\frac{m}{s}\right)$	$\sqrt[4]{1 + \frac{2gH}{v_0^2}}$	$k = \frac{\frac{d_0}{d}}{\sqrt[4]{1 + \frac{2gH}{v_0^2}}}$	δ (%)
6	5,55	1,07	0,31	2	1,05	1,08	1,00	0,93
6	5,42	1,11	0,52	4	1,05	1,14	0,97	2,70
6	5,08	1,18	0,94	6	1,05	1,20	0,98	1,69
6	4,70	1,28	1,68	8	1,05	1,25	1,02	2,34
6	4,58	1,31	1,94	10	1,05	1,29	1,01	1,53
6	4,46	1,35	2,32	12	1,05	1,33	1,01	1,48
6	4,38	1,37	2,52	14	1,05	1,36	1,00	0,73
6	4,16	1,44	3,30	16	1,05	1,40	1,03	2,78
6	3,90	1,54	4,62	18	1,05	1,43	1,07	7,14
6	3,84	1,56	4,92	20	1,05	1,46	1,07	6,41

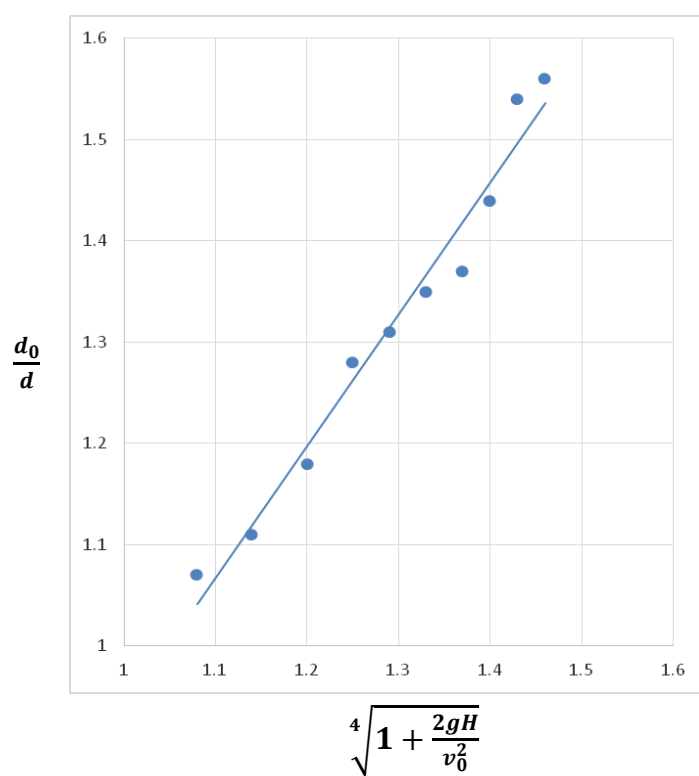


График 3. Приказ коефицијента сразмере k за другу млазницу

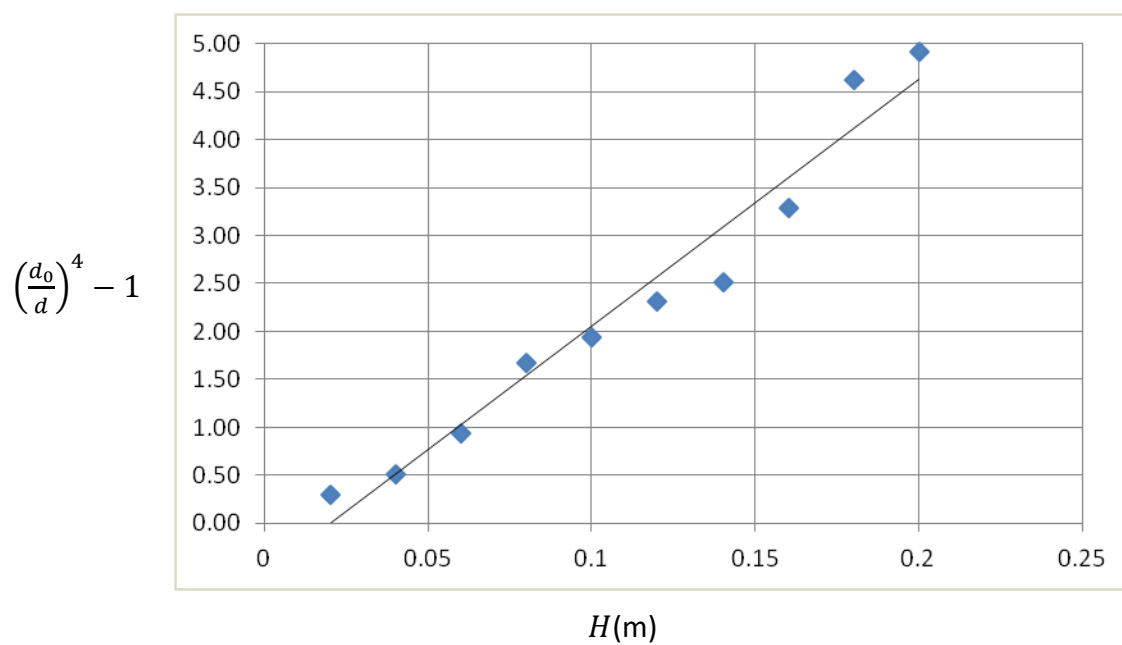


График 4. Приказ зависности функције $\left(\frac{d_0}{d}\right)^4 - 1$ од H за другу млазницу

Графици 1 и 2 представљају приказ коефицијента сразмере k за две млазнице. На ординату се наносе вредности односа пречника рачунате преко растојања H и вредности почетних брзина v_0 . На апсцису се наносе вредности односа пречника млаза течности мерених са дигиталних фотографија. Коефицијент правца праве представља коефицијент сразмере. За прву млазницу пречника 8mm коефицијент сразмере износи 1,26, док за другу млазницу пречника 6mm износи 1,29.

На графицима 3 и 4 је представљена линеарна зависност функције $\left(\frac{d_0}{d}\right)^4 - 1$ од растојања H . Коефицијенти правца за ове линеарне зависности рачунати су са датих графика и износе $51,6\text{m}^{-1}$ и $25,7\text{m}^{-1}$, респективно. Помоћу ових коефицијената израчунате су почетне брзине за обе млазнице. Добијене вредности почених брзина су $0,62\frac{\text{m}}{\text{s}}$ за прву, односно $0,89\frac{\text{m}}{\text{s}}$ за другу млазницу. Ове вредности су упоредиве са вредностима почетних брзина истицања датих у табелама (3) и (4).

За нека појединачна мерења, релативна грешка износи близу 10%. Да би се испитао утицај грешке мерења за леву, односно за десну страну једначине $\frac{d_0}{d} = \sqrt[4]{1 + \frac{\pi^2 d_0^4 t^2 g H}{8V^2}}$ анализирана је средња квадратна грешка за функције $\frac{d_0}{d}$ и $\sqrt[4]{1 + \frac{\pi^2 d_0^4 t^2 g H}{8V^2}}$. За одабрано мерење за прву млазницу, где је $\frac{d_0}{d} = \sqrt[4]{1 + \frac{\pi^2 d_0^4 t^2 g H}{8V^2}} = 1,6$, за грешке су добијене вредности $1 \cdot 10^{-2}$ за леву и $4 \cdot 10^{-5}$ за десну страну једначине. На основу добијених грешака може се закључити да је утицај грешке одређивања односа пречника млаза значајно већи од утицаја грешке за десну страну једначине (где поред грешке мерења пречника млазнице, фигуришу и грешке мерења висине, времена и запремине воде која је истекла). Пошто за израчунато $\frac{d_0}{d}$ грешка која има већу вредност износи мање од 1% израчунате величине, велика релативна грешка појединачних мерења може бити последица несавршености млаза течности. Трење између млаза течности и ваздуха је мало, па не постоји значајан утицај трења на резултате мерења. Неопходно је истаћи важност поседовања одговарајуће фотографске опреме ради добијања довољно квалитетне фотографије.

5. Закључак

Приказани експеримент је одговарајућ за увођење на курс Механика флуида. Нарочито је занимљив јер се од студената тражи мултидисциплинарност. Владање техником фотографије, као и обрада резултата применом софтвера за обраду дигиталних фотографија при обради резултата, поједине су вештине које студенти немају прилике да покажу приликом извођења експерименталних вежби које су тренутна поставка на нашем департману. Из тог разлога предложени експеримент може додатно привући пажњу студената и повећати њихову мотивацију за рад.

Литература

Lick, Dale W: The remarkable Bernoulli family. *The Mathematics Teacher*, 62 (5), 401-409, 1969.

Smith, David Eugene: *Hystory of Mathematics*, Vol. I; II, New York: Dover Publications; Boston: Ginn and Co, 1951.

<https://plus.maths.org/content/daniel-bernoulli-and-making-fluid-equation>

<http://www.intellectualventureslab.com/invent/scientists-in-history-daniel-bernoulli>

Žižić, Božidar: *Kurs opšte fizike*, Beograd: Građevinska knjiga, 1988.

Raspopović, Milan; Božin, Svetozar i Danilović, Emilo: *Fizika za II razred gimnazije prirodno-matematičkog smera*, Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, 1996.

<https://www.khanacademy.org/science/physics/fluids/fluid-dynamics/a/what-is-bernoullis-equation>

Kapor, Agneš; Skuban, Sonja i Nikolić, Dragan: *Eksperimentalne vežbe iz termodinamike*, Novi Sad: Prirodno-matematički fakultet, Departman za fiziku, 2008.

Ivanov, Dragia; Nikolov, Stefan i Petrova, Hristina: Testing Bernoulli's Law. *Physics Education*, 49 (4), 436-442, 2014.

Кратка биографија кандидата



Богдан Богдановић је рођен 01.04.1987. у Новом Саду. Основну школу „Јован Јовановић Змај“ у Сремској Каменици завршава 2002. године, када уписује Електротехничку школу „Михајло Пупин“ у Новом Саду, смер Електротехничар рачунара. 2006. године уписује Природно-математички факултет у Новом Саду, смер Професор физике. Од 2012. године ради на Катедри за општу физику и методику наставе физике Природно-математичког факултета као технички сарадник.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Кључна документацијска информација

Редни број:

РБР

Идентификациони број:

ИБР

Тип документације:

Монографска документација

ТД

Тип записа:

Текстуални штампани материјал

ТЗ

Врста рада:

Дипломски рад

ВР

Аутор:

Богдан Богдановић

АУ

Ментор:

Др Федор Скубан

МН

Наслов рада:

Провера Бернулијеве једначине анализом облика млаза течности

НР

Језик публикације:

српски (ћирилица)

ЈП

Језик извода:

српски/енглески

ЈИ

Земља публикавања:

Република Србија

ЗП

Уже географско подручје:	Војводина
угп	
Година:	2018
го	
Издавач:	Ауторски репринт
из	
Место и адреса:	Природно-математички факултет, Трг Доситеја Обрадовића 4, Нови Сад
ма	
Физички опис рада:	број поглавља: 5 / број страна: 34 / број литерарних навода: 9 / број табела: 4 / број слика: 13 / број графика: 4 / број прилога: 0
фо	
Научна област:	Физика
но	
Научна дисциплина:	Методика наставе физике
нд	
Предметна одредница/ кључне речи:	Експеримент, Бернулијева једначина, провера закона
по	
удк	
Чува се:	Библиотека департмана за физику, ПМФ-а у Новом Саду
чу	
Важна напомена:	нема
вн	
Извод:	У раду је дат предлог за увођење новог лабораторијског експеримента: Провера Бернулијеве једначине анализом облика млаза течности, као и приказивање резултата истог. Експеримент је погодан за студенте физике на почетним годинама студија.
из	
Датум прихватања теме од НН већа:	23.10.2018.
дп	

Датум одбране:

26.10.2018.

ДО

Чланови комисије:

КО

Председник:

Др Мирјана Шиљековић

члан:

Др Федор Скубан

члан:

Др Маја Стојановић

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

Key words documentation

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

Monograph publication

DT

Type of record:

Textual printed material

TR

Content code:

Final paper

CC

Author:

Bogdan Bogdanović

AU

Mentor/comentor:

Ph.D. Fedor Skuban

MN

Title:

Testing Bernoulli's equation by analyzing the shape of a liquid jet

TI

Language of text:

Serbian (Cyrillic)

LT

Language of abstract:

English

LA

Country of publication:

Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2018

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

PP

Physical description: 5 / 34 / 9 / 4 / 13 / 4 / 0

PD

Scientific field: Physics

SF

Scientific discipline: Methodology of physics teaching

SD

Subject/ Key words: Experiment, Bernoulli's equation, testing law

SKW

UC

Holding data: Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4

HD

Note: none

N

Abstract: The introduction of a new laboratory experiment: *Testing Bernoulli's equation by analyzing the shape of a liquid jet* is proposed in this paper. Besides, the results of this experiment are presented. The experiment is appropriate for physics students in the early years of studies.

AB

Accepted by the Scientific Board:

23.10.2018.

ASB

Defended on:

26.10.2018.

DE

Thesis defend board:

DB

President:

Ph.D. Mirjana Šiljegović

Member:

Ph.D. Fedor Skuban

Member:

Ph.D. Maja Stojanović