



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



Uporedni prikaz Ginzburg-Landauove i BCS teorije superprovodnosti

- diplomski rad -

Mentor: dr Slobodan Radošević

Kandidat: Antonija Nikolić

Novi Sad, 2016

SADRŽAJ

Uvod	4
Glava 1. Superprovodnost	6
1.1 Pojava superprovodnosti	6
1.2 Superprovodni materijali	7
1.3 Kritična jačina magnetnog polja	8
1.4 Majsnerov efekat	9
1.5 Mešano ili vrtložno stanje superprovodnika II vrste	11
1.6 Energetski procep	11
1.7 Izotopski efekat	13
1.8 Londonove jednačine	13
Glava 2. Ginzburg-Landauova teorija	18
2.1 Kondenzaciona energija	18
2.2 Ginzburg-Landauova teorija homogenih sistema.....	21
2.3 Ginzburg-Landauova teorija nehomogenih sistema.....	25
2.4 Dužina koherencije.....	25
2.5 Ginzburg-Landauova teorija u magnetnom polju	27
2.6 Neke primene GL teorije.....	28
2.6.1 Ginzburg-Landau parametar	28
2.6.2 Kvantizacija magnetnog fluksa	30
2.6.3 Abrikosovljeva vorteksna rešetka.....	32
Glava 3. BCS-teorija	38
3.1 Kuperovi parovi.....	38
3.2 Frelihova transformacija.....	38
3.3 BCS-teorija.....	41
4. Zaključak	46

Prilozi: Glava 2.	50
Prilog A: Razlika entropije između superprovodnog i normalnog stanja kod superprovodnika I vrste	50
Prilog B: Nelinearna Šredingerova jednačina (2.33).....	51
Prilog C: Nalaženje rešenja jednačine (2.35)	52
Prilog D: Površinska raspodela Helmholtzove slobodne energije na površini superprovodnika na Sl. 2.6.....	54
Prilog E: Druga GL jednačina (2.45)	55
Prilog F: Određivanje $\lambda(r)$	57
Prilog G: Jednačina (2.60).....	57
Prilog H: Linearizacija i sređivanje prve GL jednačine u slučaju superprovodnika II vrste u unutrašnjosti namotaja kalema, tj. jednačine (2.65).....	58
Prilog I: Šredingerova jednačina za LHO pomećenog za x_0 , tj. jednačina (2.68)	59
Prilozi: Glava 3.	60
Prilog J: Izraz (3.8).....	60
Prilog K: Uslov $u_k^2 + v_k^2 = 1$, gde su u_k i v_k realne i parne funkcije	61
Prilog L: Hamiltonijan BCS-modela (3.12)	61
Prilog M: Određivanje funkcija u_k i v_k	63
Prilog N: Hamiltonijan BCS-modela (3.14).....	64
Prilog O: Uslov superfluidnog kretanja	65
Prilog P: Uslov (3.21).....	66
Literatura	68

Uvod

Ovaj rad se bavi pojavom i teorijama superprovodnosti. Superprovodnost je otkrivena pre oko 100 godina i još nije u potpunosti opisana i objašnjena. Dve opšteprihvaćene teorije superprovodnosti, Ginzburg-Landauova i BCS teorija su veoma značajne i uspešne, ali imaju i svoje nedostatke.

Prva glava je posvećena pojavi superprovodnosti. U ovoj glavi su date eksperimentalno opažene osobine superprovodnog stanja materijala kao što su skokovita promena električne otpornosti od neke konačne vrednosti do nule na kritičnoj temperaturi, kritični parametri, Majnsnerov efekat, kvantizacija magnetnog fluksa, skokovita promena specifične toplote na kritičnoj temperaturi i izotopski efekat. Data je još klasifikacija superprovodnih materijala i na kraju glave klasična „dvofluidna” teorija superprovodnosti, tj. teorija Londonovih (1935). Skokovite promene električne otpornosti i specifične toplote, kao i kvantizacija magnetnog fluksa su makroskopski kvantni efekti. Ono što čini superprovodnost tako interesantnom i neobičnom je upravo to što predstavlja makroskopsku kvantnu pojavu. Najspektakularnija osobina superprovodnog stanja materijala je sigurno iščezavanje električne otpornosti ispod kritične temperature. Proticanje električne struje bez električne otpornosti znači korišćenje električne energije bez gubitaka, pa je cilj naučnika dobijanje novih superprovodnih materijala sa što većom kritičnom temperaturom. Najveća poznata kritična temperatura je kritična temperatura jedinjenja H_2S pod velikim pritiskom i iznosi 203K (- 70 °C). Zatim sledi kritična temperatura keramike $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{8+\delta}$ koja iznosi 165K (- 108 °C) takođe pod velikim pritiskom. Očigledno je da je krajnji cilj, tj. sobno-temperaturska superprovodnost je još daleko. U vezi s tim postoji jedna stara šala među fizičarima: „Tim naučnika na Univerzitetu Aljaske je nedavno otkrio sobno-temperaturski superprovodnik.”

Druga glava je posvećena Ginzburg-Landauovoj teoriji superprovodnosti (1950). Videćemo da ova teorija lepo opisuje osobine superprovodnog stanja materijala koje su izložene u prvoj glavi i to bez objašnjenja mikroskopskog aspekta superprovodnosti. U tome leži njen veliki uspeh, ali i njen veliki nedostatak.

Treća glava je posvećena BCS-teoriji superprovodnosti (1957) koja je jedina danas prihvaćena mikroskopska teorija. I ova teorija lepo opisuje osobine superprovodnog stanja materijala, međutim videćemo da je njena primena ograničena na određene vrste superprovodnih materijala.

Na kraju sledi zaključak, gde je dato poređenje ove dve teorije sa njihovim prednostima i nedostacima.

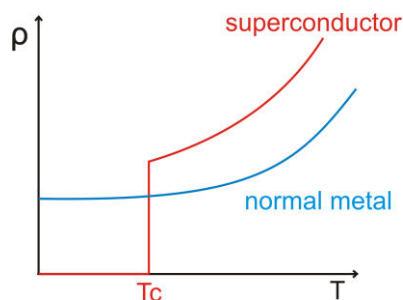
Glava 1.

Superprovodnost

1.1 Pojava superprovodnosti

Superprovodnost je pojava iščezavanja električne otpornosti kod izvesnih materijala ispod neke kritične temperature (T_c). Ovi materijali se nazivaju superprovodnici. Superprovodnost je otkrio Hajke Kamerling Ones 1911. godine. On je 1908. godine dobio tečni helijum, pa je bio u mogućnosti da proučava zavisnost električnog otpora žive od temperature na veoma niskim temperaturama. Otkrio je da pri temperaturi od 4.15K električni otpor žive odjednom nestaje [www.petvolta.com/nepoznato-o-poznatom/sto-je-supravodljivost/]. U svojim beleškama je zapisao: „Živa je prešla u novo stanje, koje se zbog svojih izvanrednih električnih svojstava može nazvati superprovodno stanje.” [www.petvolta.com/nepoznato-o-poznatom/sto-je-supravodljivost/]. Dakle, u superprovodnom stanju žive, električna struja je proticala bez ikakvog otpora.

Kod superprovodnika na kritičnoj temperaturi dolazi do skokovite promene specifične električne otpornosti od neke konačne vrednosti do nule [1], videti Sl. 1.1.



Sl. 1.1 Temperaturska promena specifične električne otpornosti superprovodnika i normalnog metala

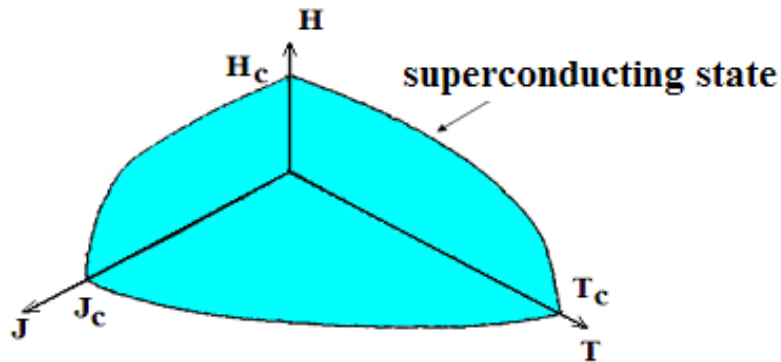
[<https://simpliphy.wordpress.com/2012/05/06/superconductivity/>]

Posledica iščezavanja električne otpornosti je tzv. istrajna struja [1, 2]. Električna struja indukovana u superprovodnom prstenu će teći beskonačno dugo zbog odsustva električne otpornosti [2].

Superprovodno stanje materijala ograničavaju tri kritična parametra [1]:

- kritična temperatura (T_c)
- kritična gustina električne struje (J_c)
- kritična jačina spoljašnjeg magnetnog polja (H_c),

videti Sl. 1.2. Ovi parametri su uzajamno zavisni, jedan zavisi od druga dva i to tako da se smanjuje sa povećanjem bilo kog od ta dva [1].



Sl. 1.2 Oblast superprovodnog stanja materijala u koordinatnom sistemu J - T - H
 [http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0048_VIVEM319EN/ch06.html]

U oblasti $J < J_c$, $T < T_c$, $H < H_c$ materijal se nalazi u superprovodnom stanju, izvan ove oblasti materijal se nalazi u normalnom stanju.

1.2 Superprovodni materijali

Superprovodni materijali koji superprovode do 30K su klasični ili niskotemperaturski superprovodnici [1]. Za hlađenje ovih superprovodnika mora se koristiti tečni helijum, tačka ključanja helijuma je 4.2K. Niskotemperaturski superprovodnici su superprovodni elementi, superprovodna jedinjenja i legure [1, 2].

Superconducting Elements

1		2																																	
1	H	He																																	
3	Li	4	Be	5	B	6	C	7	N	8	O	9	F	10	Ne																				
11	Na	12	Mg	13	Al	14	Si	15	P	16	S	17	Cl	18	Ar																				
19	K	20	Ca	21	Sc	22	Ti	23	V	24	Cr	25	Mn	26	Fe	27	Co	28	Ni	29	Cu	30	Zn	31	Ga	32	Ge	33	As	34	Se	35	Br	36	Kr
37	Rb	38	Sr	39	Y	40	Zr	41	Nb	42	Mo	43	Tc	44	Ru	45	Rh	46	Pd	47	Ag	48	Cd	49	In	50	Sn	51	Sb	52	Te	53	I	54	Xe
55	Cs	56	Ba	57	La	72	Hf	73	Ta	74	W	75	Re	76	Os	77	Ir	78	Pt	79	Au	80	Hg	81	Tl	82	Pb	83	Bi	84	Po	85	At	86	Rn
87	Fr	88	Ra	89	Ac	104	Rf	105	Ha	106	Sg	107	Bh	108	Hs	109	Mt	110	Ds	111	Rg	112	Uub												
58	Ce	59	Pr	60	Nd	61	Pm	62	Sm	63	Eu	64	Gd	65	Tb	66	Dy	67	Ho	68	Er	69	Tm	70	Yb	71	Lu								
90	Th	91	Pa	92	U	93	Np	94	Pu	95	Am	96	Cm	97	Bk	98	Cr	99	Es	100	Fm	101	Md	102	No	103	Lr								

Legend:

- In Bulk at Ambient Pressure (Red)
- At High Pressure (Green)
- In Modified Form (Yellow)

Sl. 1.3 Superprovodni elementi
 [https://nationalmaglab.org/education/magnet-academy/learn-the-basics/stories/superconductivity-101]

Među superprovodnim elementima, koji su prikazani na Sl. 1.3, najveću kritičnu temperaturu ima niobijum sa $T_c=9.3K$ [3]. Kod superprovodnih jedinjenja i legura možemo naći veće kritične temperature od ove vrednosti, videti Tabelu 1.1.

Jedinjenje	Nb ₃ Sn	Nb ₃ Si	V ₃ Sn	V ₃ Si	Cu ₂ Mo ₆ S ₈	PbMo ₆ S ₈	Cu ₂ Mo ₆ Se ₈	PbMo ₆ Se ₈
T _c [K]	18.1	19.0	3.8	17.1	10.7	14.7	5.9	3.8

Tabela 1.1 Kritične temperature nekih superprovodnih jedinjenja [2]

Do 1986. godine najveća poznata kritična temperatura je bila 23.2K, to je kritična temperatura jedinjenja Nb₃Ge [4]. Međutim, 1986. godine Georg Bednorc i Aleksander Miler su sintetisali novi superprovodni materijal La_{2-x}Ba_xCuO₄ sa T_c =38K za x≈0,15 [5]. Otkriće ove keramike je prvi korak u istoriji visokotemperaturske superprovodnosti. Nekoliko meseci kasnije je sintetizovana keramika YBa₂Cu₃O₇ sa T_c=92K [5]. To je prvi superprovodnik sa kritičnom temperaturom iznad tačke ključanja azota, tačka ključanja azota je 77.4K. Tečni azot je bolji rashladni agens od tečnog helijuma, jer je jeftiniji. Dakle, visokotemperaturska superprovodnost se dešava kada je T_c>77.4K [1, 6]. Među otkrivenim visokotemperaturskim superprovodnim keramikama, sistemi tipa Y-Ba-Cu-O, Bi-Sr-Ca-Cu-O, Tl-Ba-Ca-Cu-O, Hg-Ba-Ca-Cu-O [https://en.wikipedia.org/wiki/High-temperature_superconductivity], najveću kritičnu temperaturu ima HgBa₂Ca₂Cu₃O_{8+δ} sa T_c=135K (pod velikim pritiskom od 165K, što je postignuto 1994. godine) [5, 6].

Početak 1990-tih godina [2] je otkrivena posebna grupa superprovodnih materijala na bazi fulerena sa opštom formulom A₃C₆₀, gde je A alkalni metal [1]. Na primer: K₃C₆₀ sa T_c=19.5K, Rb₃C₆₀ sa T_c=29.5K, Cs₃C₆₀ sa T_c=47K, K₂RbC₆₀ sa T_c=23.0K [2].

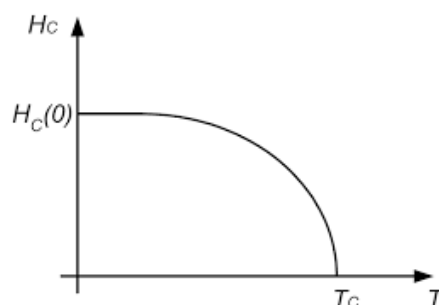
2008. godine Kamihara sa saradnicima je otkrio superprovodnost kod fluorom dopiranog jedinjenja LaFeAsO pri T_c=26K [7]. Zatim sledi otkriće niza superprovodnih jedinjenja na bazi gvožđa. Među njima najveću kritičnu temperaturu imaju Gd_{0,8}Th_{0,2}FeAsO, Sr_{0,5}Sm_{0,5}FeAsF i Ca_{0,4}Nd_{0,6}FeAsF sa T_c~56K [7].

1.3 Kritična jačina magnetnog polja

Dovoljno jako magnetno polje razara superprovodno stanje [3]. Kritična jačina magnetnog polja koja uzrokuje prelaz u normalno stanje zavisi od temperature prema relaciji [3]:

$$H_c(T) = H_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right], \quad (1.1)$$

što je prikazano na Sl. 1.4.



Sl. 1.4 Zavisnost H_c(T) [8]

Ova zavisnost je karakteristična za metale i oni se nazivaju superprovodnicima I vrste, izuzeci su Nb i V [3].

Metal	T_c [K]	$H_c(0)$ [Am ⁻¹]
Al	1.2	7900
Cd	0.5	2400
Hg	4.15	33000
In	3.4	23000
Mo	0.9	7800
Os	0.7	5200
Pb	7.2	64000
Sn	3.7	24000
Zr	0.8	3700

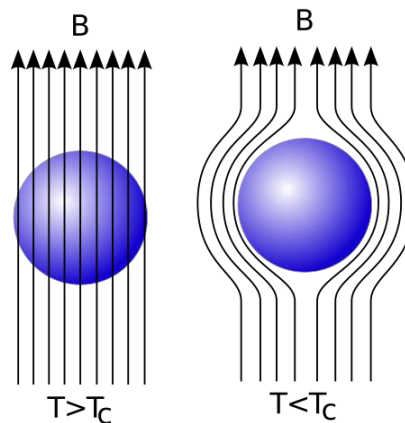
Tabela 1.2 Kritične temperature i kritične jačine magnetnog polja nekih metala [3]

Kod metala je $H_c(0) \sim (10^3 - 10^4) \text{Am}^{-1}$, videti Tabelu 1.2.

Materijali u kojima su za razaranje superprovodnosti potrebna znatno jača magnetna polja, reda veličine $(10^5 - 10^8) \text{Am}^{-1}$ [4], se nazivaju superprovodnicima II vrste [3]. Sva superprovodna jedinjenja i legure, kao i Nb i V su superprovodnici II vrste [1]. Visokotemperaturni superprovodnici, superprovodnici na bazi fullerena i superprovodnici na bazi gvožđa su takođe superprovodnici II vrste.

1.4 Majnsnerov efekat

1933. godine Valter Majnsner i Robert Oksenfeld su pokazali da je magnetna indukcija u unutrašnjosti superprovodnika uvek jednaka nuli bez obzira na vrednost koju je imala u normalnom stanju [3]. Ova pojava se naziva Majnsnerovim efektom, videti Sl. 1.5.



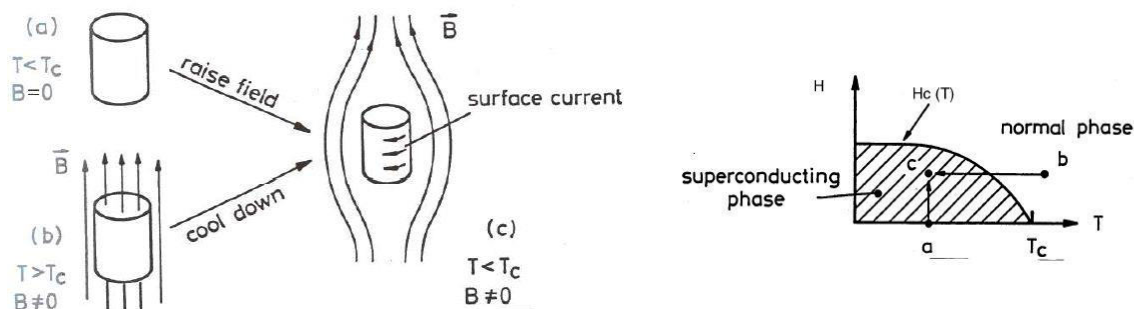
Sl. 1.5 Majnsnerov efekat

[https://en.wikipedia.org/wiki/Meissner_effect]

Dakle, superprovodnik se ponaša kao idealni dijamagnetik.

Superprovodno stanje sa $H > 0$ možemo postići na dva načina [3, 9], videti Sl. 1.6. Prvi način je da se uzorak ohladi ispod kritične temperature, a zatim povećavamo magnetno polje. Drugi način je da se uzorak stavi u magnetno polje iznad kritične temperature, a zatim smanjujemo temperaturu. Krajnje stanje je uvek isto, magnetna indukcija u unutrašnjosti uzorka je jednaka nuli.

Objašnjenje leži u tome da u uzorku postoji površinska električna struja čije indukovano magnetno polje u potpunosti kompenzuje u uzorku spoljašnje magnetno polje [4].



Sl. 1.6 Dva načina postizanja superprovodnog stanja sa $H > 0$: (a) \rightarrow (c) i (b) \rightarrow (c) i ova dva načina u koordinatnom sistemu T - H kod superprovodnika I vrste [9]

Magnetna indukcija u uzorku je data relacijom [2]:

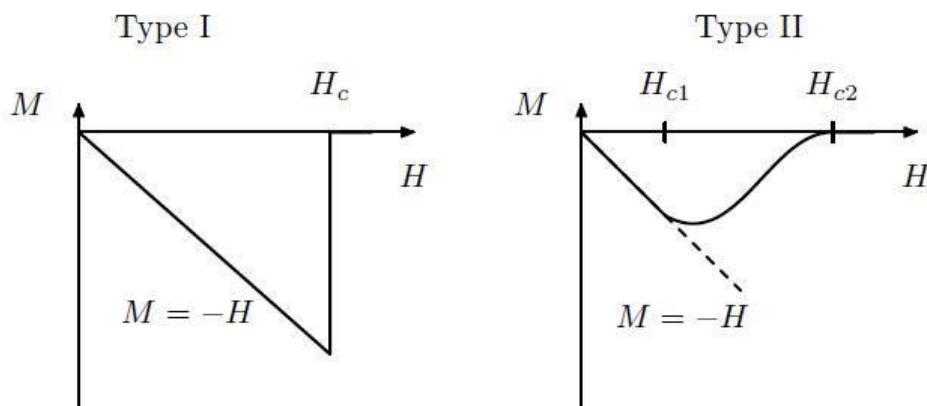
$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (1.2)$$

gde su \mathbf{H} -jačina spoljašnjeg magnetnog polja i \mathbf{M} -magnetizacija uzorka. Prema Majnsnerovom efektu leva strana je jednaka nuli, odakle izlazi [2, 3]:

$$\mathbf{H} + \mathbf{M} = 0,$$

$$\mathbf{M} = -\mathbf{H}. \quad (1.3)$$

Pošto je $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$, sledi da je $\chi = -1$, što odgovara idealnom dijamagnetiku [2, 3]. Takođe možemo zaključiti da magnetizacija uzorka je suprotnog smera od smera spoljašnjeg magnetnog polja i da sa povećanjem spoljašnjeg magnetnog polja povećava se magnetizacija uzorka. Pri $H = H_c(T)$ uzorak se vraća u normalno stanje i magnetizacija postaje jednaka nuli, videti Sl. 1.7.

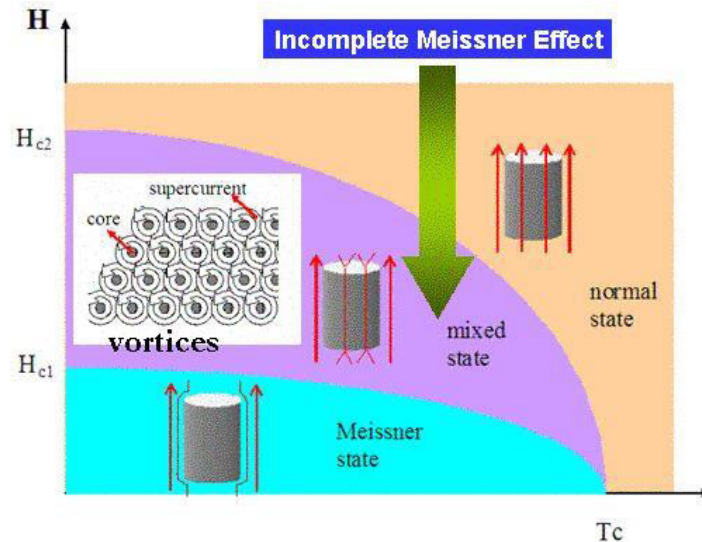


Sl. 1.7 Zavisnost magnetizacije od spoljašnjeg magnetnog polja kod superprovodnika I i II vrste [5]

Kod superprovodnika II vrste nema direktnog prelaza iz superprovodnog u normalno stanje, već postoji i tzv. mešano ili vrtložno stanje, oblast $H_{c1}(T) < H < H_{c2}(T)$, videti Sl. 1.7.

1.5 Mešano ili vrtložno stanje superprovodnika II vrste

U mešanom stanju magnetno polje delimično prodire u obliku vorteksa [5], Majnsnerov efekat nije potpun, ali svojstvo idealne električne provodnosti ostaje očuvano [3], videti Sl. 1.8.



Sl. 1.8 Kritična polja kod superprovodnika II vrste

[<http://lecb.physics.lsa.umich.edu/wl/carma/2003/fall-sat-morn-phys/20031206-annarbor-01-bernstein/real/thumb.htm>]

„Srce” vorteksa je normalna cilindrična oblast [1], kroz njega prolaze linije magnetnog polja. Oko „srca” vorteksa teku kružne superprovodne struje i one ekraniraju magnetno polje [1]. Prostor između „srca” vorteksa je superprovodna oblast, tamo je $\mathbf{B}=0$ [2].

Svaki vorteks nosi po jedan flukson-kvant magnetnog fluksa Φ_0 [5]:

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.07 \cdot 10^{-15} \text{Wb}. \quad (1.4)$$

Sa povećanjem spoljašnjeg magnetnog polja povećava se gustina vorteksa (N_v/A -broj vorteksa po jedinici površine poprečnog preseka superprovodnika [5]) i pri $H=H_{c2}(T)$ dolazi do prelaza iz mešanog u normalno stanje.

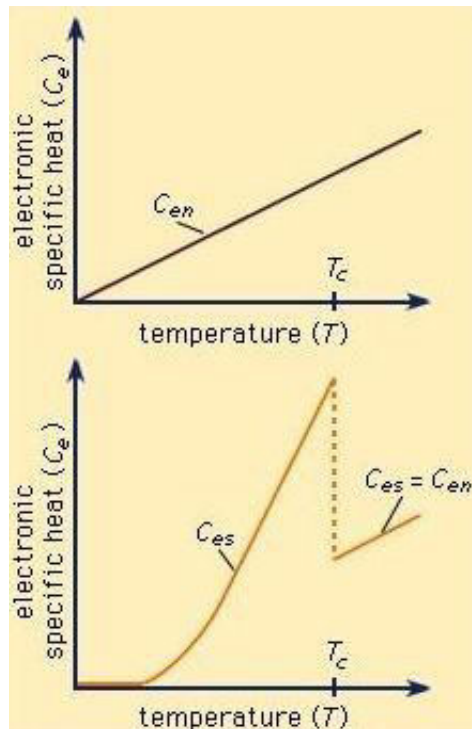
1.6 Energetski procep

Kada je metal u normalnom stanju ($H > H_c(0)$), elektronska specifična toplota¹ je linearna funkcija temperature [1, 3]: $C_{en} \propto T$, što je prikazano na Sl. 1.9. Takođe je prikazano da kada je metal u superprovodnom stanju ($H=0 \text{Am}^{-1}$), zavisnost elektronske specifične toplote od temperature nije linearna, u oblasti $T \ll T_c$ ova zavisnost je eksponencijalna [3]:

$$C_{es} = Ae^{-\frac{B}{T}}. \quad (1.5)$$

¹ C_e je toplota koju treba da apsorbuju elektroni jedinične zapremine metala da bi joj se temperatura povećala za 1K

Kada je temperatura jednaka T_c elektronska specifična toplota C_e trpi skok $C_{es} \rightarrow C_{en}$ [1], u oblasti $T > T_c$ je $C_{es} = C_{en}$.



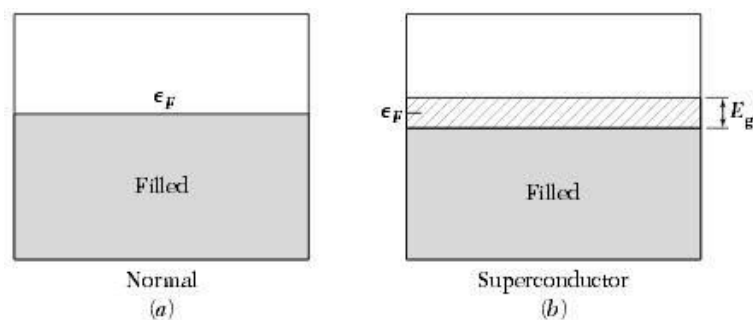
Sl. 1.9 Zavisnost elektronske specifične toplote metala od temperature u normalnom i u superprovodnom stanju

[<http://www.britannica.com/science/superconductivity>]

Zavisnost (1.5) (oblast $T \ll T_c$) nagoveštava da se elektroni ekscituju preko energetskog procepa širine [2, 10]:

$$2\Delta = 2k_B B \sim 2k_B T_c, \quad (1.6)$$

što je prikazano na Sl. 1.10.

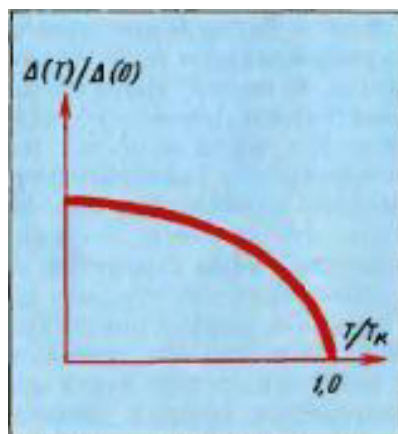


Sl. 1.10 (a) Provodna zona u normalnom stanju metala

(b) Energetski procep na Fermijevom nivou ϵ_F u superprovodnom stanju metala ($E_g = 2\Delta$)

[http://www2.phy.ilstu.edu/~marx/ph355/Kittel_Solid%20State%20Physics/c10.pdf]

Elektroni smešteni ispod energetskog procepa su superprovodni elektroni, a elektroni ekscitovani preko energetskog procepa su normalni elektroni. Na $T=0K$ svi elektroni su ispod energetskog procepa.



Sl. 1.11 Temperaturna promena širine energetskeg procepa [11]

Sa povećanjem temperature širina energetskeg procepa se smanjuje i pri $T=T_c$ postaje jednaka nuli, što je prikazano na Sl. 1.11.

1.7 Izotopski efekat

Razni izotopi jednog istog metala imaju različite kritične temperature T_c , pri čemu je ispunjena zavisnost:

$$T_c = \text{const. } M^{-\alpha}, \quad (1.7)$$

gde je M -masa jona izotopa od kojih je formirana kristalna rešetka, a α -parametar izotopskog efekta [1, 4].

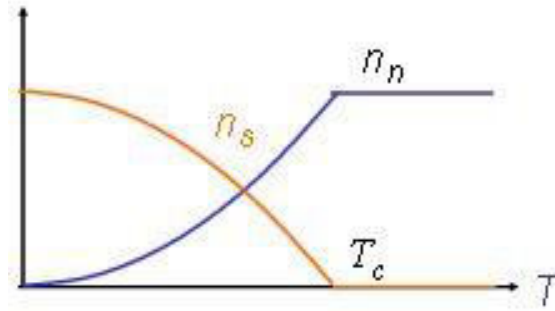
Metal	Cd	Hg	Mo	Os	Pb	Sn
α	0.50	0.50	0.37	0.21	0.48	0.47

Tabela 1.3 Eksperimentalne vrednosti parametra α nekih metala [2]

Kod većine metala vrednost parametra α je blizu 0.5, videti Tabelu 1.3. Izotopski efekat je imao odlučujuću ulogu u razvoju mikroskopske (BCS) teorije superprovodnosti [1], jer je ukazao na to da kristalna rešetka aktivno sudeluje u formiranju superprovodnog stanja [4].

1.8 Londonove jednačine

1935. godine Fric i Hajnc London su izneli klasičnu „dvofluidnu” teoriju [12] koja opisuje ponašanje superprovodnika u spoljašnjem magnetnom polju [4]. Ova teorija polazi od toga da u superprovodniku postoje dve vrste elektrona [4, 12]: superprovodni i normalni. Koncentracija slobodnih elektrona je $n=n_s+n_n$, gde je n_s koncentracija superprovodnih elektrona, a n_n koncentracija normalnih elektrona [4]. Električna struja pobuđena pomoću proizvoljno slabog nestacionarnog električnog polja [4] ima samo superprovodnu komponentu, normalna komponenta se može zanemariti. U prenosu električnog naboja sudeluju samo superprovodni elektroni [3] koji prolaze kroz metal bez otpora, ne rasejavajući se na kristalnoj rešetki [12]. Dakle, u narednom razmatranju normalni elektroni će biti zanemareni [4].



Sl. 1.12 Temperaturna promena n_s i n_n [13]

Pri promeni temperature od 0 do T_c veličina n_s se menja od n do 0 [4], a veličina n_n od 0 do n , što je prikazano na Sl. 1.12.

Jednačina kretanja jedinične zapremine superprovodnih elektrona koji se nalaze u električnom polju izražava se drugim Njutnovim zakonom [4]:

$$n_s m_e \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = -n_s e \mathbf{E}. \quad (1.8)$$

Gustina superprovodne struje je definisana sa [4]:

$$\mathbf{J}_s = -n_s e \mathbf{v}_s, \quad (1.9)$$

pa iz jednačina (1.8) i (1.9) se dobija prva Londonova jednačina:

$$\mathbf{E} = \frac{m_e}{n_s e^2} \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t}. \quad (1.10)$$

Odavde sledi da u stacionarnom stanju, kada je $\frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} = 0$, u superprovodniku ne postoji električno polje: $\mathbf{E} = 0$ [4]. Pošto je $\mathbf{E} = \rho_s \mathbf{J}_s$, sledi da je $\rho_s = 0$ [4]. Prvu Londonovu jednačinu upišemo u treću Maksimalovu jednačinu $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ i dobijamo [2]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot} \mathbf{J}_s + \frac{n_s e^2}{m_e} \mathbf{B} \right) = 0. \quad (1.11)$$

Londonovi su pretpostavili da u izraz u zagradi je jednak nuli [2]:

$$\text{rot} \mathbf{J}_s + \frac{n_s e^2}{m_e} \mathbf{B} = 0. \quad (1.12)$$

Jednačina (1.12) je druga Londonova jednačina, napišemo je tako da izrazimo \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = -\frac{m_e}{n_s e^2} \text{rot} \mathbf{J}_s. \quad (1.13)$$

Uvodimo smenu [2, 9]:

$$\lambda_L^2 = \frac{m_e}{n_s e^2 \mu_0}, \quad (1.14)$$

pa Londonove jednačine glase:

$$\mathbf{E} = \mu_0 \lambda_L^2 \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = -\mu_0 \lambda_L^2 \text{rot} \mathbf{J}_s. \quad (1.15)$$

Ako pretpostavimo da superprovodnik nema feromagnetna svojstva ($\mu_r \approx 1$) i da se električno polje sporo menja sa vremenom [12], onda četvrta Maksvelova jednačina ima oblik: $\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s$. Iz ove jednačine sledi $\text{rot} \text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \text{rot} \mathbf{J}_s$, pa se iz ove jednačine i druge Londonove jednačine (1.15) dobija [2]:

$$\text{rot} \text{rot} \mathbf{B} + \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} = 0. \quad (1.16)$$

Koristeći da je $\text{rot} \text{rot} \mathbf{B} = \text{grad} \text{div} \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B}$ i drugu Maksvelovu jednačinu $\text{div} \mathbf{B} = 0$ dobijamo [9]:

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} = 0. \quad (1.17)$$

Jednačina (1.17) za slučaj kada superprovodnik ispunjava ceo poluprostor $x \geq 0$, a \mathbf{B} ima pravac i smer y-ose ima oblik [9, 12]:

$$\frac{d^2 B_y(x)}{dx^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} B_y(x) = 0. \quad (1.18)$$

Opšte rešenje obične diferencijalne jednačine (1.19) je $B_y(x) = C_1 e^{\frac{x}{\lambda_L}} + C_2 e^{-\frac{x}{\lambda_L}}$, dok rešenje koje zadovoljava granične uslove $x=0, B_y(0)=B_0$ i $x=\infty, B_y(\infty)=0$ glasi:

$$B = B_y(x) = B_0 e^{-\frac{x}{\lambda_L}}, \quad (1.19)$$

što je prikazano na Sl. 1.13.



Sl. 1.13 Slika uz izraz (1.19) [11]

Sa Sl. 1.13 se vidi da Majnsnerov efekat je ispunjen samo približno, jer magnetna indukcija ipak prodire na izvesnu dubinu od površine superprovodnika [4]. Mera prodiranja magnetnog polja u superprovodnik je Londonova dubina prodiranja λ_L [12].

Iz jednačine $\text{rot}\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}_s$ i druge Londonove jednačine (1.15) dobija se [4]:

$$\text{rotrot}\mathbf{J}_s + \frac{1}{\lambda_L^2}\mathbf{J}_s = 0. \quad (1.20)$$

Koristeći da je $\text{rotrot}\mathbf{J}_s=\text{graddiv}\mathbf{J}_s - \Delta\mathbf{J}_s$ i da je $\text{div}\mathbf{J}_s=0$ (što sledi iz jednačine $\text{rot}\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}_s$) dobijamo [4]:

$$\Delta\mathbf{J}_s - \frac{1}{\lambda_L^2}\mathbf{J}_s = 0. \quad (1.21)$$

Jednačina (1.21) za prethodni slučaj polubeskonačnog superprovodnika ima oblik:

$$\frac{d^2J_{sz}(x)}{dx^2} - \frac{1}{\lambda_L^2}J_{sz}(x) = 0. \quad (1.22)$$

Rešenje obične diferencijalne jednačine (1.22) koje zadovoljava granične uslove $x=0$,

$J_{sz}(0) = J_0 = \frac{B_0}{\mu_0\lambda_L}$ (iz jednačine $\text{rot}\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}_s$) i $x=\infty$, $J_{sz}(\infty)=0$ je:

$$\mathbf{J}_s = J_{sz}(x) = \frac{B_0}{\mu_0\lambda_L} e^{-\frac{x}{\lambda_L}}. \quad (1.23)$$

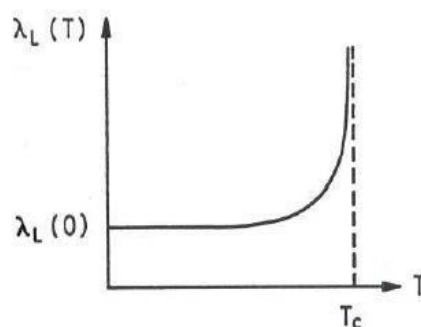
Ova struja teče u suprotnom smeru od smera z-ose.

Sada ćemo još diskutovati prethodno uvedenu veličinu, Londonovu dubinu prodiranja:

$\lambda_L = \sqrt{\frac{m_e}{n_s e^2 \mu_0}}$. Iz zavisnosti $\lambda_L=\lambda_L(n_s)$ i $n_s=n_s(T)$ sledi zavisnost $\lambda_L=\lambda_L(T)$ i važi da [2, 9]:

$$\begin{aligned} T=0\text{K}, & \quad n_s=n, \quad \lambda_L=\lambda_L(0) \\ T\rightarrow T_c, & \quad n_s\rightarrow 0, \quad \lambda_L\rightarrow\infty, \end{aligned}$$

što je prikazano na Sl. 1.14.



Sl. 1.14 Temperaturska promena Londonove dubine prodiranja [9]

Kod metala: $T=0\text{K}$, $n_s=n\sim 10^{28}\text{m}^{-3}$, $\lambda_L(0)\sim 100\text{nm}$ [2, 4].

Superprovodnik	Al	Cd	Pb	Sn	Nb	Nb ₃ Sn	V ₃ Si	PbMo ₆ S ₈
$\lambda_L(\mathbf{0})[\text{nm}]$	45	110	39	42	52	65	60	200

Tabela 1.4 Eksperimentalne vrednosti Londonove dubine prodiranja na $T=0\text{K}$ za neke superprovodnike (dobijene ekstrapolacijom) [2]

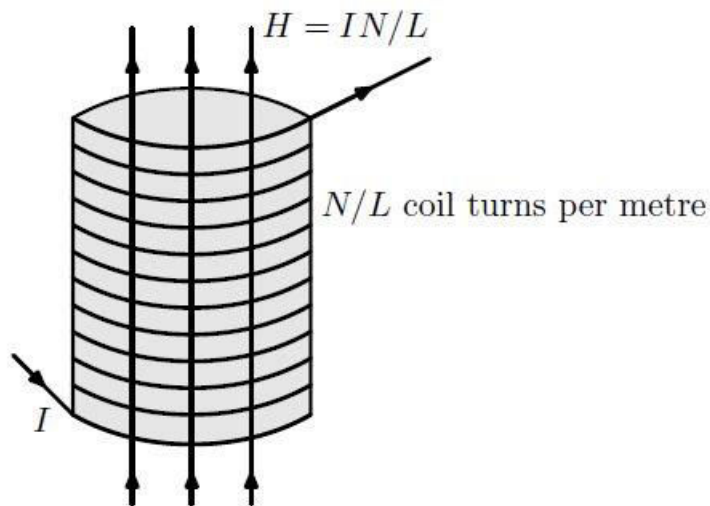
Elektrodinamika superprovodnika, tj. Maksvelove jednačine zajedno sa Londonovim jednačinama, uspešno opisuje odsustvo električne otpornosti i Majsnerov efekat, daje relativno dobro slaganje sa eksperimentom iz Tabele 1.4, ali ova teorija je fenomenološka i ne uzima u obzir kvantne efekte superprovodnosti [4].

Glava 2.

Ginzburg-Landauova teorija

2.1 Kondenzaciona energija

Posmatramo uzorak magnetnog materijala u obliku dugačkog cilindra, koji se nalazi u unutrašnjosti namotaja kalema [5], videti Sl. 2.1.



Sl. 2.1 Uzorak magnetnog materijala u unutrašnjosti solenoida [5]

Jačina magnetnog polja u uzorku je data relacijom $\mathbf{H} = \frac{N}{L} I \mathbf{e}_z$, gde su $\frac{N}{L}$ -broj namotaja kalema po jedinici dužine, I -jačina električne struje i \mathbf{e}_z -jedinичni vektor ose cilindra. Rad koji se izvrši pri povećanju jačine električne struje infinitezimalno od I do $I+dI$ [5]:

$$dW = -N \int \varepsilon I dt = N I A dB = \frac{N}{L} I A L dB = V \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = V \mathbf{H} \cdot \mu_0 d(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 V \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} + \mu_0 V \mathbf{H} \cdot d\mathbf{H}, \quad (2.1)$$

gde su A -površina poprečnog preseka kalema, $V=AL$ -zapremina kalema i $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ -elektromotorna sila indukovana u kalemu zbog promene magnetnog fluksa kroz uzorak Φ . Prvi član u jednačini (2.1) je magnetni rad (rad magnetizovanja) izvršen nad uzorkom, drugi član u jednačini (2.1) je rad koji bi bio izvršen u praznom kalemu [5]. Dakle, definišemo magnetni rad izvršen nad uzorkom po jedinici zapremine kao $\mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$ [5].

Sada možemo napisati prvi zakon termodinamike za magnetne materijale [5]:

$$dU = TdS + \mu_0 V \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}. \quad (2.2)$$

Odavde slede zavisnosti $U = U(S, \mathbf{M})$, $T = \frac{\partial U}{\partial S}$ i $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 V} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}}$.

Korisno je definisati Helmholtcovu i Gibsovu slobodnu energiju za magnetne materijale [5]:

$$F(T, \mathbf{M}) = U - TS, \quad (2.3)$$

$$G(T, \mathbf{H}) = U - TS - \mu_0 V \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}. \quad (2.4)$$

Iz jednačina (2.2) i (2.4) dobija se [5]:

$$dG = -SdT - \mu_0 V \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}. \quad (2.5)$$

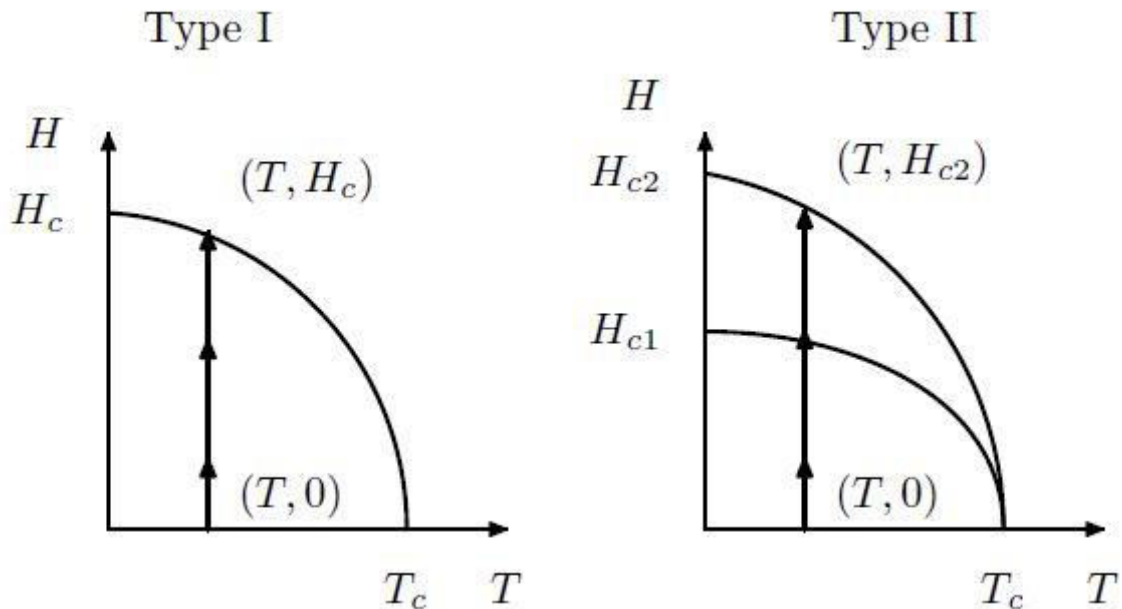
Odavde slede zavisnosti $G = G(T, \mathbf{H})$, $S = -\frac{\partial G}{\partial T}$ i $\mathbf{M} = -\frac{1}{\mu_0 V} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{H}}$.

Na osnovu jednačina (2.3) i (2.4) dobijamo [5]:

$$F = G + \mu_0 V \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}, \quad (2.6)$$

$$U = F + TS. \quad (2.7)$$

Prelaz između normalnog i superprovodnog stanja je reverzibilan, pa na njega možemo primeniti standardna termodinamička razmatranja [10].



Sl. 2.2 H, T fazni dijagrami superprovodnika I i II vrste [5]

Računamo razliku Gibsove slobodne energije između superprovodnog i normalnog stanja kod superprovodnika I i II vrste uz Sl. 2.2.

Prvo posmatramo slučaj superprovodnika I vrste [5]. Duž vertikalne linije je $dT=0$, pa jednačina (2.5) postaje:

$$dG = -\mu_0 V \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}. \quad (2.8)$$

Integralimo od $(T,0)$ do (T,H_c) , pa imamo:

$$G_s(T, H_c) - G_s(T, 0) = -\mu_0 V \int_0^{H_c} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}. \quad (2.9)$$

Iz Majnsnerovog efekta znamo da je $\mathbf{M} = -\mathbf{H}$, sledi:

$$G_s(T, H_c) - G_s(T, 0) = \mu_0 V \int_0^{H_c} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{H} = \mu_0 V \int_0^{H_c} H dH = \mu_0 V \frac{H_c^2}{2}. \quad (2.10)$$

Ako bi postojalo normalno stanje između (T, H_c) i $(T, 0)$ i integralili bismo između ove dve tačke, onda bi imali: $G_n(T, H_c) - G_n(T, 0) = -\mu_0 V \int_0^{H_c} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}$. Uzimamo da magnetne osobine superprovodnika u normalnom stanju su zanemarljive, tj. uzimamo da je $\mathbf{M} \approx 0$. Dakle:

$$G_n(T, H_c) - G_n(T, 0) \approx 0. \quad (2.11)$$

Iz jednačina (2.10) i (2.11) dobijamo:

$$G_n(T, H_c) - G_n(T, 0) - G_s(T, H_c) + G_s(T, 0) = -\mu_0 V \frac{H_c^2}{2}, \quad (2.12)$$

što s obzirom na jednakost $G_s(T, H_c) = G_n(T, H_c)$ postaje:

$$G_s(T, 0) - G_n(T, 0) = -\mu_0 V \frac{H_c^2}{2}. \quad (2.13)$$

Jednačina (2.13) predstavlja razliku Gibsove slobodne energije između superprovodnog i normalnog stanja pri $H=0$. $G_s(T, 0) < G_n(T, 0)$, pa superprovodno stanje je stabilno stanje. Koristeći jednačinu (2.6) i da je $\mathbf{H} = \mathbf{M} = 0$ gornji rezultat možemo napisati kao:

$$F_s(T, 0) - F_n(T, 0) = -\mu_0 V \frac{H_c^2}{2}. \quad (2.14)$$

Iz jednačina (2.13) i (2.14) sledi:

$$F_n(T, 0) - F_s(T, 0) = G_n(T, 0) - G_s(T, 0) = \mu_0 V \frac{H_c^2}{2}, \quad (2.15)$$

gde je $\frac{\mu_0 H_c^2}{2}$ kondenzaciona energija.

Zatim sprovodimo analogni postupak kod superprovodnika II vrste [5]. Imamo:

$$G_s(T, H_{c2}) - G_s(T, 0) = -\mu_0 V \int_0^{H_{c2}} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}. \quad (2.16)$$

Definišemo H_c za superprovodnik II vrste:

$$\frac{1}{2} H_c^2 \equiv \int_0^{H_{c2}} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}. \quad (2.17)$$

Konačno dobija se:

$$F_n(T, 0) - F_s(T, 0) = G_n(T, 0) - G_s(T, 0) = \mu_0 V \frac{H_c^2}{2}, \quad (2.18)$$

gde su $\frac{\mu_0 H_c^2}{2}$ kondenzaciona energija i H_c termodinamičko kritično polje. Treba napomenuti da ovde nema faznog prelaza pri H_c , samo pri H_{c1} i H_{c2} .

Kondenzaciona energija $\frac{\mu_0 H_c^2}{2}$ je magnetna energija koju treba dovesti jedinici zapremine superprovodnika da pređe u normalno stanje [4].

Na kraju napišemo izraz za razliku entropije između superprovodnog i normalnog stanja kod superprovodnika I vrste [5], (prilog A):

$$S_s(T, H_c) - S_n(T, H_c) = \mu_0 V H_c \frac{dH_c}{dT}. \quad (2.19)$$

Jednačina (2.19) pokazuje da je fazni prelaz u opštem slučaju prvog reda. Izuzetak je tačka $(T, H_c) = (T_c, 0)$, gde je $S_s(T, H_c) - S_n(T, H_c) = 0$, pa je fazni prelaz drugog reda [5].

2.2 Ginzburg-Landauova teorija homogenih sistema

1950. godine Vitalij Lazarevič Ginzburg i Lav Davidovič Landau su razvili fenomenološku teoriju superprovodnosti [2, 5]. Ova teorija je zasnovana na opštoj teoriji faznih prelaza drugog reda, koju je razvio Landau 1930-tih godina [2, 5].

Ginzburg i Landau su postulirali postojanje nekog parametra uređenja ψ koji karakteriše stanje sistema [5]:

$$\psi = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \psi(T) \neq 0 & T < T_c. \end{cases} \quad (2.20)$$

Oni su postulirali da je parametar uređenja ψ kompleksni broj, makroskopska talasna funkcija superprovodnika [5]. Fizičko značenje ovog parametra uređenja [5]: $|\psi|^2 = \psi^* \psi = \frac{n_s}{2}$, gde je n_s koncentracija superprovodnih elektrona.

Definišimo gustinu Helmholtcove slobodne energije kao $f = \frac{F}{V}$, što je Helmholtcova slobodna energija po jedinici zapremine [5]. Kada $T \rightarrow T_c$, onda $\psi(T) \rightarrow 0$, pa su Ginzburg i Landau pretpostavili da se $f_s(T)$ u okolini T_c može razviti u Tejlorov red po $|\psi|^2$ [5]:

$$f_s(T) = f_n(T) + a(T)|\psi|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi|^4 + \dots, \quad (2.21)$$

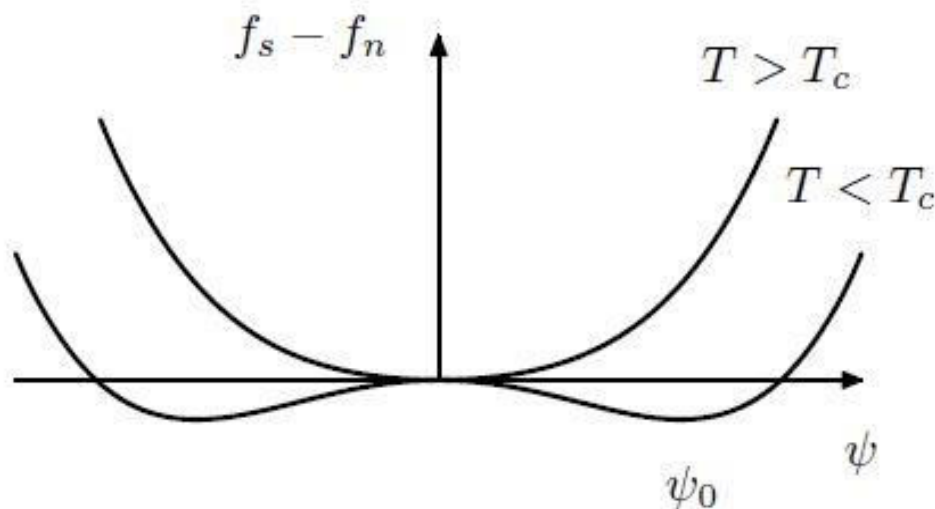
gde su i $a(T)$, $b(T)$ -fenomenološki parametri teorije. Dalje su pretpostavili da [2, 5]:

$$\begin{aligned} a(T) &= \dot{a}(T - T_c), \\ b(T) &= b, \end{aligned} \quad (2.22)$$

gde su \dot{a}, b -fenomenološke pozitivne konstante. Zamenom (2.22) u Tejlorov red (2.21) dobijamo [5]:

$$f_s(T) = f_n(T) + \dot{a}(T - T_c)|\psi|^2 + \frac{1}{2}b|\psi|^4 + \dots, \quad (2.23)$$

što je prikazano na Sl. 2.3.



Sl. 2.3 Slika uz izraz (2.23) [5]

Vidimo da:

za $T > T_c$, $f_s - f_n = 0$ pri $\psi = 0$
za $T < T_c$, $f_s - f_n$ ima minimum pri nekom $\psi_0 \neq 0$.

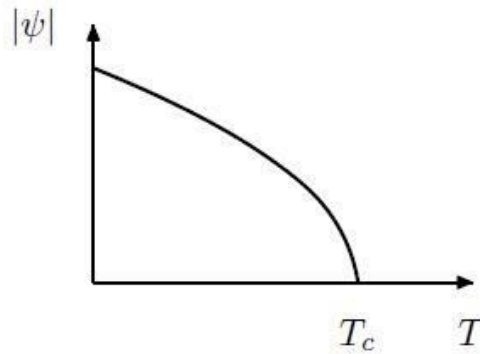
Određimo $|\psi_0|$, tako što tražimo minimum $f_s(T) - f_n(T)$ u izrazu (2.23) za $T < T_c$:

$$|\psi_0| = \sqrt{\frac{\dot{a}(T_c - T)}{b}}. \quad (2.24)$$

Modul parametra uređenja je:

$$|\psi| = \begin{cases} |\psi_0| = \sqrt{\frac{\dot{a}(T_c - T)}{b}} & T < T_c \\ 0 & T > T_c, \end{cases} \quad (2.25)$$

što je prikazano na Sl. 2.4.



Sl. 2.4 Slika uz izraz (2.25) [5]

Dakle, $f_s(T) - f_n(T)$ za $T < T_c$ ima minimum pri $\psi_0 = |\psi_0|e^{i\theta}$, gde je vrednost faze θ proizvoljna [5]. Od beskonačno mogućih rešenja priroda bira jedan [2].

Vrednost minimuma $f_s(T) - f_n(T)$ za $T < T_c$, koja se dobija zamenom $|\psi_0| = \sqrt{\frac{\dot{a}(T_c - T)}{b}}$ u Tejlorov red (2.23), je [5]:

$$f_s(T) - f_n(T) = -\frac{\dot{a}^2(T_c - T)^2}{2b}. \quad (2.26)$$

Iz jednačina (2.15) ili (2.18), (2.26) i $f = \frac{F}{V}$ dobijamo [5]:

$$H_c = \frac{\dot{a}(T_c - T)}{\sqrt{\mu_0 b}}. \quad (2.27)$$

Jednačina (2.27) daje H_c u blizini T_c [5]. Kod superprovodnika I vrste daje kritično polje H_c u blizini T_c , kod superprovodnika II vrste daje termodinamičko kritično polje H_c u blizini T_c .

Diferenciramo jednačinu (2.26) po T i dobijamo $\frac{df_s(T)}{dT} - \frac{df_n(T)}{dT} = \frac{\dot{a}^2 2(T_c - T)}{2b}$, tj. [5]:

$$s_s(T) - s_n(T) = -\frac{\dot{a}^2(T_c - T)}{b}, \quad (2.28)$$

gde je $s = \frac{S}{V}$ -entropija po jedinici zapremine. Za $T=T_c$ je $s_s(T_c) - s_n(T_c)=0$, zaključujemo da pri T_c nema diskontinuiteta u entropiji, što odgovara faznom prelazu drugog reda [5].

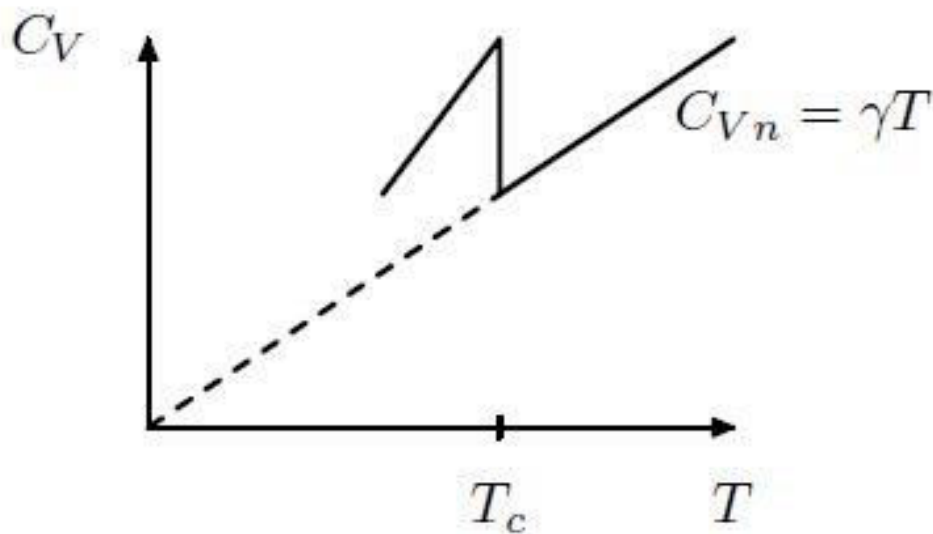
Diferenciramo jednačinu (2.28) po T i dobijamo $\frac{ds_s(T)}{dT} - \frac{ds_n(T)}{dT} = \frac{\dot{a}^2}{b}$. Množeći ovu jednačinu sa T imamo $T \frac{ds_s(T)}{dT} - T \frac{ds_n(T)}{dT} = T \frac{\dot{a}^2}{b}$, tj. [5]:

$$C_{Vs}(T) - C_{Vn}(T) = T \frac{\dot{a}^2}{b}. \quad (2.29)$$

C_V je specifična toplota, toplota koju treba da apsorbuje jedinična zapremina superprovodnika da bi joj se temperatura povećala za 1K, a pošto se radi o niskim temperaturama, to je u stvari elektronska specifična toplota (C_e u odeljku 1.6). Za $T=T_c$ je $C_{Vs}(T_c) - C_{Vn}(T_c) = T_c \frac{\dot{a}^2}{b}$, zaključujemo da ovde pri T_c postoji diskontinuitet [5]. Dakle, specifična toplota superprovodnika je [5]:

$$C_V = \begin{cases} C_{Vn} + T \frac{\dot{a}^2}{b} & T < T_c \\ C_{Vn} & T > T_c, \end{cases} \quad (2.30)$$

što je prikazano na Sl. 2.5.



Sl. 2.5 Specifična toplota superprovodnika u GL teoriji [5]

Pošto je Tejlorov red (2.21) razvijen u okolini T_c , izraz (2.30) važi u blizini T_c , kao što vidimo na Sl. 2.5.

Dosadašnja razmatranja se odnose na homogen sistem, za koji se u literaturi koristi i termin neograničena ili „balk” struktura [1]. Sledeći korak je razmatranje nehomogenog sistema bez i u prisustvu magnetnog polja.

2.3 Ginzburg-Landauova teorija nehomogenih sistema

Ginzburg i Landau su postulirali da u slučaju kada parametar uređenja zavisi od položaja, tj. u slučaju $\psi=\psi(\mathbf{r})$, Tejlorov red (2.21) ima novi član koji zavisi od gradijenta $\psi(\mathbf{r})$ [5]:

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + a(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi(\mathbf{r})|^4 + \dots, \quad (2.31)$$

gde m^* je novi parametar koji ima dimenziju mase i igra ulogu efektivne mase kvantnog sistema sa makroskopskom talasnom funkcijom $\psi(\mathbf{r})$, to je efektivna masa Kuperovog para. Novi član je gustina kinetičke energije superprovodnih elektrona, tj. Kuperovih parova u tački \mathbf{r} [<http://www.phy.kit.edu/ee2/lectures/Superconductivity-04.pdf> : 7. strana]. Prethodno smo uzeli da je $a(T) = \dot{a}(T - T_c)$, a $b(T) = b$.

Totalna Helmholtzova slobodna energija superprovodnog stanja nehomogenog sistema je data kao [5]:

$$F_s(T) = F_n(T) + \int \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + a(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi(\mathbf{r})|^4 \right) d^3r. \quad (2.32)$$

Da bi našli $\psi(\mathbf{r})$, tražimo minimum $F_s(T)$ iz uslova $\delta F_s(T)=0$ [5]. Tako dobijamo da $\psi(\mathbf{r})$ zadovoljava jednačinu (prilog B):

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + \left[a(T) + b(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 \right] \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.33)$$

Jednačinu (2.33) možemo uporediti sa vremenski nezavisnom Šredingerovom jednačinom:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + (V(\mathbf{r}) - E)\psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.34)$$

Jednačina (2.33) izgleda kao Šredingerova jednačina za česticu sa masom m^* i energijom $-a(T)$ u potencijalu $b(T)|\psi(\mathbf{r})|^2$, ali analogiju ne treba shvatiti bukvalno [14]. Jednačina (2.34) je linearna jednačina, a jednačina (2.33) je nelinearna jednačina zbog drugog člana u zagradi [5]. Takođe, Šredingerova jednačina (2.34) opisuje jednu kvantno-mehaničku česticu, a jednačina (2.33) opisuje sistem od beskonačno čestica. Jednačinu (2.33) nazivamo nelinearnom Šredingerovom jednačinom [5], iako je to u suštini jednačina za polje.

2.4 Dužina koherencije

Neka je granična površ između normalnog metala i superprovodnika yz ravan i normalni metal je u oblasti $x<0$, a superprovodnik je u oblasti $x>0$ [5]. Uzimajući u obzir prelaz $\psi=\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi=\psi(x)$, gde je $\psi(x)$ realan, nelinearna Šredingerova jednačina (2.33) ima oblik [5]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + a(T)\psi(x) + b(T)\psi^3(x) = 0. \quad (2.35)$$

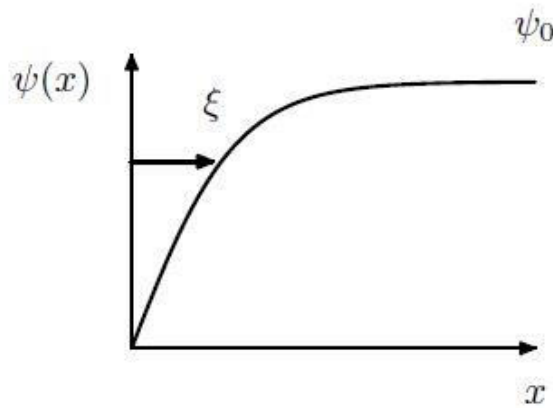
Za $\psi(x)$ važi:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \text{rešenje jednačine (2.35)} & x > 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Rešenje jednačine (2.35) uz uslov kontinualnosti $\psi(0)=0$ i uz uslov $\psi(\infty)=\psi_0$ je [5, 15], (prilog C):

$$\psi(x) = \psi_0 \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\zeta(T)}\right), \quad \text{gde je} \quad \zeta(T) = \sqrt{-\frac{\hbar^2}{2m^*a(T)}}. \quad (2.37)$$

što je prikazano je na Sl. 2.6.



Sl. 2.6 Parametar uređenja superprovodnika blizu granične površi [5]

Daleko od granične površi je $\psi(x)=\psi_0$, gde je ψ_0 parametar uređenja homogenog sistema.

Dakle, parametar $\zeta(T)$ je dat kao:

$$\zeta(T) = \sqrt{-\frac{\hbar^2}{2m^*a(T)}} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*|a(T)|}}. \quad (2.38)$$

$\zeta(T)$ je GL dužina koherencije, ima dimenziju dužine i predstavlja važan fizički parametar superprovodnika. To je mera rastojanja od granične površi iznad kojeg je $\psi(x)=\psi_0$ [5], tj. iznad kojeg imamo homogen sistem. GL dužina koherencije se pojavljuje u svim problemima nehomogenih superprovodnika: površine, granične površi, defekti i vorteksi [5]. Koristeći $a(T) = \dot{a}(T - T_c)$ možemo napisati $\zeta(T)$ kao $\zeta(T) = \zeta(0)|t|^{-\frac{1}{2}}$, gde je $t = \frac{T - T_c}{T_c}$, tj. imamo [5]:

$$\zeta(T) = \zeta(0) \left| \frac{T_c}{T - T_c} \right|^{\frac{1}{2}}. \quad (2.39)$$

Iz jednačine (2.39) možemo zaključiti da $\zeta(T)$ divergira pri T_c , tj. kada $T \rightarrow T_c$, onda $\zeta(T) \rightarrow \infty$. U BCS teoriji $\zeta(T)$ se odnosi na srednje rastojanje između elektrona Kuperovog para [5].

Površinska raspodela Helmholtcove slobodne energije na površini superprovodnika na Sl. 2.6 [5], (prilog D):

$$\sigma = \int_0^{\infty} \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + a(T)\psi^2(x) + \frac{1}{2}b(T)\psi^4(x) + \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \right) dx, \quad \psi(x) = \psi_0 \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi(T)}\right). \quad (2.40)$$

Pjer-Žil de Žen daje $\sigma = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \times 1.89\xi(T)$, σ je slobodna energija po jedinici površine [5].

2.5 Ginzburg-Landauova teorija u magnetnom polju

Gustinu Helmholtcove slobodne energije superprovodnog stanja u tački \mathbf{r} nehomogenog sistema u prisustvu magnetnog polja dobijamo tako što u izrazu (2.31) uzimamo u obzir efekte magnetnog polja [5]. Prvo izraz (2.31) napišemo u obliku:

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{1}{2m^*} \left| \frac{\hbar}{i} \nabla \psi(\mathbf{r}) \right|^2 + a(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi(\mathbf{r})|^4. \quad (2.41)$$

Zamena operatora impulsa zbog prisustva magnetnog polja je $\frac{\hbar}{i} \nabla \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}$, gde je $q = -2e$,

a \mathbf{A} -vektorski potencijal [5], pa imamo zamenu $\frac{\hbar}{i} \nabla \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla + 2e\mathbf{A}$. Novi član zbog prisustva

magnetnog polja je $\frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r})$ i predstavlja energiju magnetnog polja u tački \mathbf{r} ,

$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ [2]. Konačno dobijamo:

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + 2e\mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2 + a(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}), \quad (2.42)$$

gde je $f_n(T)$ -gustina Helmholtcove slobodne energije normalnog stanja u tački \mathbf{r} bez prisustva magnetnog polja. 1959. godine Lev P. Gorkov je izveo GL teoriju iz BCS teorije pri temperaturama blizu T_c [5, 14].

Totalna Helmholtcova slobodna energija superprovodnog stanja nehomogenog sistema u prisustvu magnetnog polja je [5]:

$$F_s(T) = F_n(T) + \int \left(\frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + 2e\mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2 + a(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi(\mathbf{r})|^4 \right) d^3r + \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B}^2(\mathbf{r}) d^3r, \quad (2.43)$$

gde je $F_n(T)$ -totalna Helmholtcova slobodna energija normalnog stanja bez prisustva magnetnog polja.

Dobili smo da $\psi(\mathbf{r})$ u slučaju nehomogenog sistema bez prisustva magnetnog polja mora zadovoljavati nelinearnu Šredingerovu jednačinu (2.33). Zamenom $\frac{\hbar}{i}\nabla \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla + 2e\mathbf{A}$ u ovoj jednačini dobijamo da $\psi(\mathbf{r})$ u slučaju nehomogenog sistema u prisustvu magnetnog polja mora zadovoljavati jednačinu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\nabla + \frac{2ei}{\hbar}\mathbf{A}\right)^2\psi(\mathbf{r}) + \left[a(T) + b(T)|\psi(\mathbf{r})|^2\right]\psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.44)$$

Nelinearna Šredingerova jednačina (2.44) je prva GL jednačina [2].

Gustina superprovodne struje je definisana sa $\mathbf{J}_s = -\frac{\partial F_s}{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r})}$, pa dobijamo [5], (prilog E):

$$\mathbf{J}_s = \frac{2e\hbar i}{2m^*}(\psi^*(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})\nabla\psi^*(\mathbf{r})) - \frac{(2e)^2}{m^*}\mathbf{A}|\psi(\mathbf{r})|^2. \quad (2.45)$$

Jednačina (2.45) je druga GL jednačina [2]. Uzimajući u obzir četvrtu Maksvelovu jednačinu ($\mu_r \approx 1$, stacionarno stanje) $\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}_s$, možemo pisati [2]:

$$\frac{1}{\mu_0}\text{rot}\mathbf{B} = \mathbf{J}_s = \frac{2e\hbar i}{2m^*}(\psi^*(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})\nabla\psi^*(\mathbf{r})) - \frac{(2e)^2}{m^*}\mathbf{A}|\psi(\mathbf{r})|^2. \quad (2.46)$$

Pretpostavimo sada da poznajemo rešenje GL jednačina, tj. parametar uređenja $\psi(\mathbf{r})$ i vektorski potencijal $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ [2]. $\psi(\mathbf{r})e^{i\theta(\mathbf{r})}$ i $\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\lambda(\mathbf{r})$ je takođe rešenje ovih jednačina i može se pokazati da je $\lambda(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2e}\theta(\mathbf{r})$ [5], (prilog F). Dakle, $\psi(\mathbf{r})e^{i\theta(\mathbf{r})}$ i $\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{\hbar}{2e}\nabla\theta(\mathbf{r})$ je takođe rešenje GL jednačina i daje istu slobodnu energiju, magnetnu indukciju i gustinu superprovodne struje kao $\psi(\mathbf{r})$ i $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ [2, 5]. Od beskonačno mogućih rešenja priroda bira jedan [2].

2.6 Neke primene GL teorije

2.6.1 Ginzburg-Landau parametar

Posmatramo dva primera [16]: 1) Polubeskonačni superprovodnik u magnetnom polju. Uzimajući u obzir prelaz $\psi = \psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi = \psi(x)$, druga GL jednačina (2.45) ima oblik:

$$\mathbf{J}_s = \frac{2e\hbar i}{2m^*}(\psi^*(x)\nabla\psi(x) - \psi(x)\nabla\psi^*(x)) - \frac{(2e)^2}{m^*}\mathbf{A}|\psi(x)|^2. \quad (2.47)$$

Aproksimacija pod uslovom $\xi \ll \lambda_L$ je $\psi(x) = |\psi(x)|e^{i\theta(x)} \rightarrow \psi_0 = |\psi_0|e^{i\theta}$, $|\psi(x)|^2 = |\psi_0|^2$ [2]:

$$\mathbf{J}_s = -\frac{(2e)^2}{m^*}\mathbf{A}|\psi_0|^2. \quad (2.48)$$

Zamenom $|\psi_0|^2 = \frac{|a(T)|}{b(T)}$ u jednačinu (2.48) dobijamo:

$$\mathbf{J}_s = -\frac{(2e)^2}{m^*} \mathbf{A} \frac{|a(T)|}{b(T)}. \quad (2.49)$$

Računanjem rotora obe strane gornje jednačine imamo $\text{rot}\mathbf{J}_s = -\frac{(2e)^2}{m^*} \frac{|a(T)|}{b(T)} \text{rot}\mathbf{A}$ i važi da $\mathbf{B}=\text{rot}\mathbf{A}$, pa sledi:

$$\text{rot}\mathbf{J}_s = -\frac{(2e)^2}{m^*} \frac{|a(T)|}{b(T)} \mathbf{B}. \quad (2.50)$$

Izrazimo \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = -\frac{m^*}{(2e)^2} \frac{b(T)}{|a(T)|} \text{rot}\mathbf{J}_s. \quad (2.51)$$

Upoređivanjem druge Londonove jednačine (1.15) i jednačine (2.51) dobijamo:

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m^*}{\mu_0(2e)^2} \frac{b(T)}{|a(T)|}}. \quad (2.52)$$

Koristeći da je $\frac{b(T)}{|a(T)|} = \frac{b}{\dot{a}(T_c - T)}$ imamo [5]:

$$\lambda_L(T) = \sqrt{\frac{m^*b}{\mu_0(2e)^2 \dot{a}(T_c - T)}} \sim \frac{1}{(T_c - T)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.53)$$

Ako stavimo da $m^*=2m_e$ i $|\psi_0|^2 = \frac{\dot{a}(T_c - T)}{b} = \frac{n_s}{2}$, sledi: $\lambda_L(T) = \sqrt{\frac{m_e}{\mu_0 e^2 n_s}}$. Iz jednačine (2.53)

vidimo da Londonova dubina prodiranja $\lambda_L(T)$ divergira pri T_c , tj. kada $T \rightarrow T_c$, onda $\lambda_L(T) \rightarrow \infty$. $\lambda_L(T)$ je mera rastojanja na kojem se menja magnetno polje \mathbf{B} .

2) Polubeskonačni superprovodnik bez prisustva magnetnog polja. U ovom slučaju $\mathbf{A}=0$, $\psi=\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi=\psi(x)$, pa prva GL jednačina (2.44) prelazi u jednačinu (2.35), što smo rešili u odeljku 2.4 i dobili smo da je dužina koherencije $\zeta(T)$ data izrazom:

$$\zeta(T) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*|a(T)|}} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*\dot{a}(T_c - T)}} \sim \frac{1}{(T_c - T)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.54)$$

Iz jednačine (2.54) vidimo da dužina koherencije $\zeta(T)$ divergira pri T_c , tj. kada $T \rightarrow T_c$, onda $\zeta(T) \rightarrow \infty$. $\zeta(T)$ je mera rastojanja na kojem se menja parametar uređenja $\psi(x)$.

Iz jednačina (2.53) i (2.54) sledi da bezdimenzioni odnos Londonove dubine prodiranja i dužine koherencije ne zavisi od temperature [5, 16]:

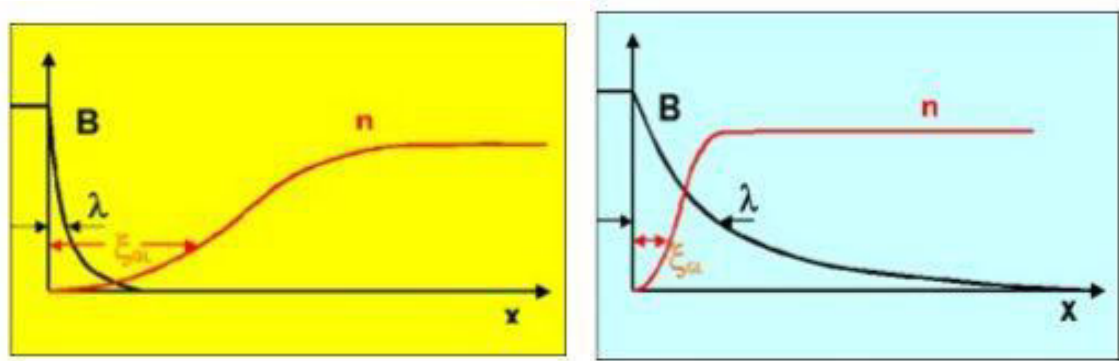
$$\kappa = \frac{\lambda_L(T)}{\xi(T)}, \quad (2.55)$$

gde je κ Ginzburg-Landau parametar.

Superprovodnik	Al	Sn	Pb	Nb	Nb ₃ Ge	YBa ₂ Cu ₃ O ₇	K ₃ C ₆₀
κ	0.03	0.23	0.48	1.3	30	95	95

Tabela 2.1 Vrednosti κ nekih superprovodnika [5]

Na osnovu Tabele 2.1 možemo zaključiti da je kod superprovodnika I vrste (Al, Sn, Pb) $\kappa < 1$ (teorija daje $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71$, što ćemo videti u odeljku 2.6.3), a kod superprovodnika II vrste (Nb, Nb₃Ge, YBa₂Cu₃O₇, K₃C₆₀) $\kappa > 1$ (teorija daje $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71$). Dakle, kod superprovodnika I vrste je $\lambda_L(T) < \xi(T)$, a kod superprovodnika II vrste je $\lambda_L(T) > \xi(T)$, videti Sl. 2.7.



Sl. 2.7 Odnos između Londonove dubine prodiranja i dužine koherencije kod superprovodnika I i II vrste
[<http://slideplayer.com/slide/6993496/>]

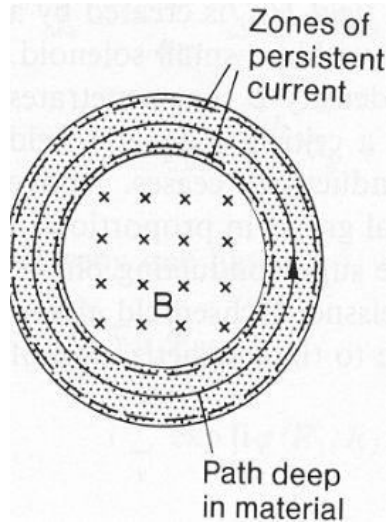
Na slici n je koncentracija Kuperovih parova na rastojanju x od granične površi superprovodnika i važi da je $n(x) = |\psi(x)|^2$.

2.6.2 Kvantizacija magnetnog fluksa

Fluks magnetnog polja istrajne struje kroz superprovodni prsten, videti Sl. 2.8, je jednak celobrojnom umnošku fluksa-kvanta magnetnog fluksa [1, 2]:

$$\Phi = n\Phi_0 = n\frac{h}{2e}, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad \Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.07 \cdot 10^{-15} \text{Wb}. \quad (2.56)$$

Ovo možemo pokazati polazeći od GL jednačina [2].



Sl. 2.8 Istrajna struja u superprovodnom prstenu [13]

Magnetni fluks kroz površ čija kontura je u superprovodnoj oblasti:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.57)$$

Stoksovu teoremu primenimo na jednačinu (2.57):

$$\Phi = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.58)$$

Iz druge GL jednačine (2.45) izrazimo \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \frac{\hbar i}{4e} \frac{1}{|\psi|^2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{m^*}{(2e)^2} \frac{1}{|\psi|^2} \mathbf{J}_s. \quad (2.59)$$

Kontura po kojoj integralimo se nalazi duboko u materijalu, daleko od zona istrajne struje. Apsolutna vrednost parametra uređenja odgovara ravnotežnoj vrednosti, ali faza se još može menjati: $\psi = |\psi_0| e^{i\theta}$. Tako jednačina (2.59) postaje (prilog G):

$$\mathbf{A} = -\frac{\hbar}{2e} \nabla \theta. \quad (2.60)$$

Jednačinu (2.60) uvrstimo u jednačinu (2.58):

$$\Phi = -\frac{\hbar}{2e} \oint_L \nabla \theta \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.61)$$

Pošto vrednost faze u nekoj tački nije jednoznačno određena:

$$\oint_L \nabla \theta \cdot d\mathbf{l} = \oint_L d\theta = \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = n2\pi. \quad (2.62)$$

Konačno:

$$|\Phi| = \frac{\hbar}{2e} n 2\pi = \frac{h}{2e 2\pi} n 2\pi = n \frac{h}{2e} = n \Phi_0. \quad (2.63)$$

Iz GL jednačina smo dobili da je fluks magnetnog polja istrajne struje kroz superprovodni prsten jednak celobrojnom umnošku fluksona.

2.6.3 Abrikosovljeva vorteksna rešetka

Posmatramo superprovodnik II vrste u unutrašnjosti namotaja kalema na Sl. 2.1. U superprovodniku II vrste termodinamički fazni prelaz pri H_{c2} je drugog reda, stoga [5]:

- $\psi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ neposredno ispod H_{c2} i $\psi(\mathbf{r})=0$ pri H_{c2}
- $M \rightarrow 0$ neposredno ispod H_{c2} i $M=0$ pri H_{c2} (Sl. 1.7)

Magnetna indukcija u uzorku je data izrazom $\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$. $M \approx 0$ neposredno ispod H_{c2} , pa prethodni izraz postaje $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$, gde je \mathbf{H} -primenjeno magnetno polje [5], $\mathbf{H}=(0, 0, H)$. Dakle, magnetna indukcija u uzorku je $\mathbf{B}=(0, 0, B)$ [5]. Landauova kalibracija odgovarajućeg vektorskog potencijala je [5]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=(0, xB, 0). \quad (2.64)$$

Prva GL jednačina (2.44) postaje [5]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla + \frac{2ei}{\hbar} Bx\mathbf{j} \right)^2 \psi(\mathbf{r}) + a(T)\psi(\mathbf{r}) + b(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.65)$$

gde je \mathbf{j} -jedinичni vektor y -ose.

Kada $H \rightarrow H_{c2}$, onda $\psi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$, $|\psi(\mathbf{r})|^2 \approx 0$, pa otpada zadnji član u jednačini (2.65) i tako smo je linearizovali [5], (prilog H):

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 - \hbar\omega_c ix \frac{\partial}{\partial y} + \frac{m^* \omega_c^2}{2} x^2 \right) \psi(\mathbf{r}) = |a(T)|\psi(\mathbf{r}), \quad (2.66)$$

gde je uvedena ciklotronska frekvencija $\omega_c = \frac{2eB}{m^*}$. Gornja jednačina je ekvivalentna

Šredingerovoj jednačini za talasnu funkciju naelektrisane čestice u magnetnom polju, njene svojstvene vrednosti karakterišu tzv. Landauovi nivoi [5]. Rešenje jednačine (2.66) tražimo u obliku [5]:

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i(k_y y + k_z z)} g(x), \quad (2.67)$$

gde su $e^{i(k_y y + k_z z)}$ -kombinacija ravnih talasa u y i z pravcima i $g(x)$ -nepoznata funkcija od x .

Rešenje (2.67) vratimo u samu jednačinu (2.66) da bi našli jednačinu za $g(x)$ [5], (prilog I):

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 g(x)}{dx^2} + \frac{m^* \omega_c^2}{2} (x - x_0)^2 g(x) = \left(|a(T)| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} \right) g(x), \quad \text{gde je } x_0 = -\frac{\hbar k_y}{m^* \omega_c}. \quad (2.68)$$

Jednačina (2.68) je upravo Šredingerova jednačina za LHO (linearni harmonijski oscilator) sa tim, što je ravnotežni položaj pomeren od $x=0$ do $x=x_0$ [5]. Energija ovog LHO je $\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c = |a(T)| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}$, što zamenom $|a(T)| = \dot{a}(T_c - T)$ i sređivanjem postaje [5]:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} = \dot{a}(T_c - T). \quad (2.69)$$

Rešenja jednačine (2.68) za $n=0,1,2, \dots$ su $g_0(x), g_1(x), g_2(x), \dots$ i to su talasne funkcije LHO pomerenog za x_0 [5].

Za $n=0, k_z=0$ izraz za energiju LHO pomerenog za x_0 (2.69) postaje $\frac{1}{2}\hbar\omega_c = \dot{a}(T_c - T)$ [5].

Zamenom $\omega_c = \frac{2eB}{m^*} = \frac{2e\mu_0}{m^*} H$ u prethodni izraz dobijamo:

$$\frac{2e\hbar\mu_0}{2m^*} H = \dot{a}(T_c - T). \quad (2.70)$$

Na osnovu jednačine (2.70) ćemo odrediti $T_c(H)$ i $\mu_0 H_{c2}(T)$ [5]. Prvo zamislimo da postepeno hladimo superprovodnik u spoljašnjem magnetnom polju H . Jednačina (2.70) neće biti zadovoljena za T_c , nego za neko $T_c(H)$: $\frac{2e\hbar\mu_0}{2m^*} H = \dot{a}(T_c(0) - T_c(H))$. Odavde izrazimo $T_c(H)$:

$$T_c(H) = T_c(0) - \frac{2e\hbar\mu_0}{2m^* \dot{a}} H. \quad (2.71)$$

Zatim zamislimo da postepeno smanjujemo spoljašnje magnetno polje od nekog $H > H_{c2}$ pri konstantnoj temperaturi T . Jednačina (2.70) će biti zadovoljena za neko $H_{c2}(T)$: $\frac{2e\hbar\mu_0}{2m^*} H_{c2}(T) = \dot{a}(T_c - T)$. Odavde izrazimo $\mu_0 H_{c2}(T)$:

$$\mu_0 H_{c2}(T) = B_{c2}(T) = \frac{2m^* \dot{a}(T_c - T)}{2e\hbar}. \quad (2.72)$$

Množeći desnu stranu gornje jednačine sa $\frac{\hbar}{h}$ i koristeći jednačine (2.54) i $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ dobijamo:

$$\mu_0 H_{c2}(T) = \frac{2m^* \dot{a}(T_c - T)}{\hbar^2} \frac{\hbar}{2e} = \frac{1}{\zeta^2(T)} \frac{h}{2\pi 2e} = \frac{\Phi_0}{2\pi \zeta^2(T)}. \quad (2.73)$$

Odavde se vidi da pri $H_{c2}(T)$ na svakoj jedinici površine $2\pi \zeta^2(T)$ nalazi se jedan flukson Φ_0 , tj. jedan vorteks.

Iz jednačina (2.39) i (2.73) sledi jednačina $\mu_0 H_{c2}(T) = \frac{\Phi_0}{2\pi \zeta^2(0)} \frac{T_c - T}{T_c}$, koja se koristi za eksperimentalno određivanje $\zeta(0)$ [5].

Na osnovu jednačina (2.53), (2.54) i (1.4) možemo napisati izraz za $H_c(T)$ (2.27) kao [5]:

$$H_c(T) = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\sqrt{2}\xi(T)\lambda_L(T)}. \quad (2.74)$$

$H_c(T)$ je kritično polje kod superprovodnika I vrste, odnosno termodinamičko kritično polje kod superprovodnika II vrste.

Iz jednačina (2.73), (2.74) i (2.55) dobijamo [5]:

$$H_{c2}(T) = \sqrt{2}\kappa H_c(T). \quad (2.75)$$

Iz jednačine (2.75) sledi [5]:

- superprovodnik sa $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$H_{c2}(T) > H_c(T)$, fazni prelaz drugog reda pri $H_{c2}(T)$, superprovodnik II vrste

- superprovodnik sa $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$H_{c2}(T) < H_c(T)$, fazni prelaz prvog reda pri $H_c(T)$, superprovodnik I vrste

Dakle, Abrikosovljeva teorija opisuje razliku između superprovodnika I i II vrste [5]:

$$\kappa = \begin{cases} < \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{superprovodnik I vrste} \\ > \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{superprovodnik II vrste.} \end{cases}$$

Linearizovana GL jednačina (2.66) daje rešenja pri H_{c2} : $n=0,1,2, \dots$ $\psi_0(\mathbf{r}), \psi_1(\mathbf{r}), \psi_2(\mathbf{r}), \dots$. Da bi našli rešenja neposredno ispod H_{c2} , treba rešiti nelinearnu GL jednačinu (2.65). To je veoma komplikovano, ali 1957. godine Aleksej A. Abrikosov je uspeo da nađe rešenje za nju. Sledi izlaganje njegove ideje [5].

On je pošao od rešenja linearizovane GL jednačine (2.66) u slučaju osnovnog stanja LHO pomereno za x_0 , tj. u slučaju $n=0, k_z=0$: $\psi_0(\mathbf{r}) = Ce^{ik_y y} g_0(x)$. C je konstanta normalizacije, a $g_0(x)$ je talasna funkcija osnovnog stanja LHO pomereno za x_0 i to je gausijan sa širinom $\xi(T)$: $g_0(x) = e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\xi^2(T)}}$. Dakle, rešenje linearizovane GL jednačine (2.66) u slučaju $n=0, k_z=0$ od kojeg je Abrikosov pošao:

$$\psi_0(\mathbf{r}) = Ce^{ik_y y} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\xi^2(T)}}, \quad (2.76)$$

gde je $x_0 = -\frac{\hbar k_y}{m^* \omega_c}$ i vrednost k_y može biti bilo kakva. Ograničio je vrednosti k_y :

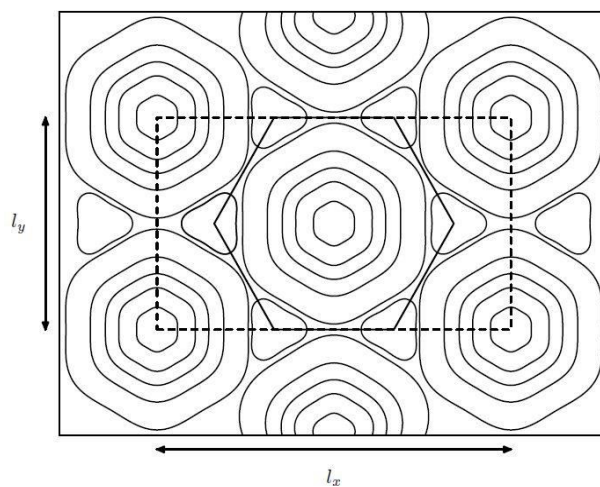
$$k_y = \frac{2\pi}{l_y} n, n = -\infty, \dots, \infty. \text{ Odgovarajuće vrednosti } x_0 \text{ su } x_0 = -\frac{\hbar k_y}{m^* \omega_c} = -\frac{2\pi \hbar}{m^* \omega_c l_y} n, n = -\infty, \dots, \infty,$$

što zamenom $\omega_c = \frac{2eB}{m^*}$, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ i na osnovu (1.4) postaje: $x_0 = -\frac{\Phi_0}{Bl_y} n, n = -\infty, \dots, \infty$.

Za rešenje je uzео kombinaciju:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \frac{2\pi n y}{l_y}} e^{-\frac{\left(x + \frac{\Phi_0 n}{Bl_y}\right)^2}{\xi^2(T)}}. \quad (2.77)$$

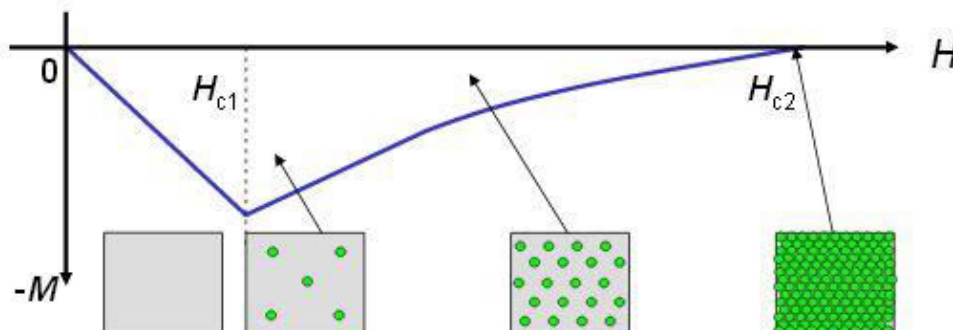
Ovo je periodično rešenje po y sa periodom l_y . Da bi bilo periodično po x sa periodom l_x treba da važi: $C_{n+v} = C_n, l_x = v \frac{\Phi_0}{Bl_y}$. Abrikosov je proučavao najprostiji slučaj $v=1$, koji odgovara kvadratnoj vorteksnoj rešetki. Kasnije je pokazano da za slučaj $v=2$ se dobija niža totalna energija, ovaj slučaj odgovara trougaonoj vorteksnoj rešetki-Abrikosovljevoj vorteksnoj rešetki, videti Sl. 2.9.



Sl. 2.9 Abrikosovljeva vorteksna rešetka [5]

U svakom pravougaoniku $l_x l_y$ parametar uređenja $\psi(\mathbf{r})$ je nula u centru i u uglovima, tamo su vorteksi i oni obrazuju periodičnu trougaonu rešetku.

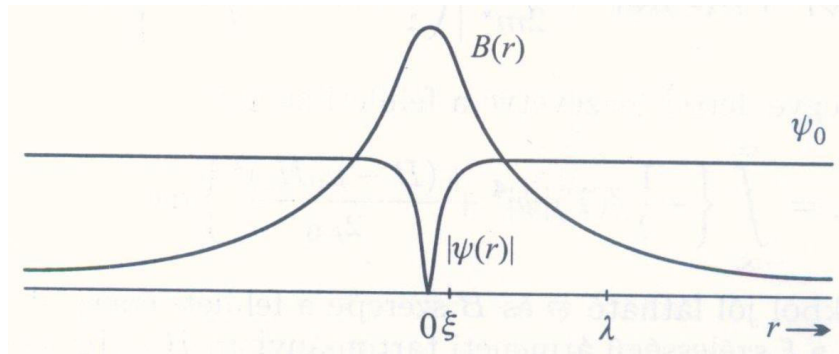
Abrikosovljevo rešenje (2.77) važi neposredno ispod H_{c2} . „Vorteksna slika” pri različitim vrednostima H je prikazana na Sl. 2.10.



Sl. 2.10 Vorteksi iznad H_{c1} , neposredno ispod H_{c2} i pri H_{c2} [13]

Iznad H_{c1} postoji samo nekoliko vorteksa u celom superprovodniku. Neposredno ispod H_{c2} imamo Abrikosovljevu vorteksnu rešetku. Pri H_{c2} vorteksi su tako gusto pakovani da se njihova „srca” praktično dodiruju. Ispod H_{c1} nema vorteksa.

„Struktura” jednog vorteksa pod uslovom $\zeta \ll \lambda_L$ je prikazana na Sl. 2.11.



Sl. 2.11 Prostorna promena magnetnog polja i parametra uređenja oko „srca” vorteksa, $\zeta \ll \lambda_L$ [2]

$B(r)$ je magnetna indukcija indukovanog magnetnog polja kružnih superprovodnih struja oko „srca” vorteksa. Na rastojanju $r \gg \lambda_L$ parametar uređenja je konstantan: $\psi_0 = |\psi_0| e^{i\theta}$.

Treba još naći izraz za donje kritično polje H_{c1} [5]. Energija jednog vorteksa po jedinici dužine je $E = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda_L^2} \ln \frac{\lambda_L}{\zeta}$. Ova energija potiče od kinetičke energije Kuperovih parova koji kruže oko „srca” vorteksa. Energija svih vorteksa po jedinici zapremine superprovodnika je $\frac{ELN_v}{AL} = \frac{EN_v}{A}$. Srednja vrednost magnetne indukcije u superprovodniku je $B = \frac{N_v\Phi_0}{A}$. Magnetni rad stečen prisustvom vorteksa po jedinici zapremine superprovodnika je $\mu_0 H dM = H dB$. Dakle, energijski bilans koji važi u prisustvu vorteksa je $\frac{EN_v}{A} < H \frac{N_v\Phi_0}{A}$, odavde sledi:

$$H_{c1} = \frac{E}{\Phi_0} = \frac{\Phi_0}{4\pi\mu_0\lambda_L^2} \ln \frac{\lambda_L}{\zeta} \quad (2.78)$$

Iz jednačina (2.74), (2.78) i $\kappa = \frac{\lambda_L}{\zeta}$ dobijamo:

$$H_{c1} = \frac{H_c}{\sqrt{2\kappa}} \ln \kappa, \quad \kappa \gg 1 \quad (2.79)$$

Na kraju istaknemo još jednom da jednačine dobijene u okviru GL teorije važe u blizini T_c , jer je polazni Tejlorov red (2.21) razvijen u okolini T_c .

Glava 3.

BCS-teorija

3.1 Kuperovi parovi

1938. godine Pjotr L. Kapica je otkrio superfluidnost na tečnom He^4 [17]. Superfluidnost je pojava iščezavanja unutrašnjeg trenja, viskoznosti kod izvesnih tečnosti ispod nekog T_c . Teoriju superfluidnosti dao je Nikolaj N. Bogoljubov [17] 1947. godine. Prema ovoj teoriji superfluidnost se objašnjava Boze-Ajnštajnovom kondenzacijom. To znači da se atomi He^4 , koji su bozoni, na temperaturama ispod T_c sakupljaju, kondenzuju na jednom energetsom nivou. Svaki sistem teži stanju najniže energije, pa će se atomi He^4 sakupljati u stanju sa $\vec{p} = 0$. Čestice sa $\vec{p} = 0$ obrazuju tzv. kondenzat. Zbog toga što je tečnost u kretanju, o impulsima jednakim nuli ima smisla govoriti samo ako je sistem reference vezan za tečnost.

Ova teorija superfluidnosti odigrala je presudnu ulogu u rešavanju problema superprovodnosti [17]. Nastojalo se da se i superprovodnost objasni Boze-Ajnštajnovom kondenzacijom. Međutim, elektroni su fermioni i zbog Paulijevog principa ne mogu se sakupljati na jednom energetsom nivou. Rešenje je u tome da se ne kondenzuju elektroni, već parovi elektrona koji imaju suprotne spinove. To su tzv. Kuperovi parovi i oni jesu bozoni, imaju nulti spin. Sada se postavlja pitanje: elektroni se odbijaju Kulonovim silama, pa koji mehanizam izazove privlačne sile između njih i time omogući da se vezuju u parove? Odgovor na ovo pitanje dao je Herbert Frelih 1950. godine. On je primetio da su metali koji u normalnoj fazi imaju veći specifični otpor bolji superprovodnici. Kako je uzrok pojave električnog otpora u normalnoj fazi elektron-fonon interakcija, zaključio je da pod izvesnim uslovima ova interakcija može da izazove upravo obrnut efekat-superprovodnost. Razradio je ovu ideju i pokazao da na niskim temperaturama elektron-fonon interakcija može da izazove privlačenje između elektrona suprotnih spinova i tako omogući da se vezuju u parove.

3.2 Frelihova transformacija

Prvo ćemo napisati hamiltonijan sistema koji sadrži elektrone, mehaničke oscilacije i njihovu uzajamnu interakciju [1, 17]:

$$\begin{aligned} H &= H_{\text{el}} + H_{\text{ph}} + H_{\text{el-ph}} = \\ &= \sum_{\vec{k}} X_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} Y_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} + N^{-\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} F_{\vec{k}\vec{q}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}} (b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+), \end{aligned} \quad (3.1)$$

gde su H_{el} -hamiltonijan elektronskog podsistema, H_{ph} -hamiltonijan fononskog podsistema i $H_{\text{el-ph}}$ -hamiltonijan interakcije elektronskog i fononskog podsistema u impulsnom prostoru.

$X_{\vec{k}}$ je energija elektrona (sa impulsom $\hbar\vec{k}$) koja se „očitava“ od energije Fermi-sfere [17]:

$$X_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}, \quad a_{\vec{k}}^+ \text{ i } a_{\vec{k}} \text{ su operatori kreacije i anihilacije elektrona u stanju sa talasnim}$$

vektorom \vec{k} [1]. $Y_{\vec{k}}$ je energija fonona [1]: $Y_{\vec{k}} = \hbar v_s k$, gde je $v_s \approx 5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ -brzina zvuka u

metal. $b_{\vec{k}}^+$ i $b_{\vec{k}}$ su kreacioni i anihilacioni operatori fonona sa kvaziimpulsom $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ [1].

Veličina $F_{\vec{k}\vec{q}}$ karakteriše kolektivne oscilacije jona (transverzalni i longitudinalni fononi), tj. njihov uticaj na kvazislobodne elektrone [1]. Za metale, provodnike na sobnim temperaturama, samo longitudinalni zvučni talasi daju doprinos ovoj interakciji, pa $F_{\vec{k}\vec{q}}$ zavisi samo od talasnog vektora fonona \vec{q} [1].

Rukovođen idejom da elektron-fonon interakcija može da izazove privlačenje između elektrona, Frelj je izvršio unitarnu transformaciju hamiltonijana (3.1) [1, 17]. Njegov cilj je bio da elektron-fonon interakciju zameni nekom ekvivalentnom elektron-elektron interakcijom [1, 17]. Unitarna transformacija hamiltonijana (3.1) se realizuje pomoću antihermitskog operatora \hat{S} na sledeći način [1, 17]:

$$\hat{H}_{\text{eq}} = e^{-\hat{S}} \hat{H} e^{\hat{S}}, \quad \hat{S}^+ = -\hat{S}. \quad (3.2)$$

Izraz (3.2) se može napisati u obliku operatorskog reda kao [1, 17]:

$$\hat{H}_{\text{eq}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \underbrace{[\hat{S}, [\hat{S}, [\dots [\hat{S}, \hat{H}]]]]}_{n\text{-puta}} \dots \quad (3.3)$$

Frelj se odlučio za aproksimaciju [17]:

$$\hat{H}_{\text{eq}} = \hat{H} - [\hat{S}, \hat{H}] + \frac{1}{2} [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]]. \quad (3.4)$$

Operator \hat{S} je odabrao u obliku [1, 17]:

$$\hat{S} = \hat{S}_1 - \hat{S}_1^+, \quad \hat{S}_1 = \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \lambda_{\vec{k}\vec{q}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}} b_{\vec{q}}. \quad (3.5)$$

Proizvoljna funkcija $\lambda_{\vec{k}\vec{q}}$ bira se tako da se iz ekvivalentnog hamiltonijana \hat{H}_{eq} , koji se dobija zamenom izraza (3.5) u (3.4), eliminiše deo linearan po fononskim operatorima b^+ i b [1]:

$$\lambda_{\vec{k}\vec{q}} = F_{\vec{q}} [\sqrt{N} (X_{\vec{k}-\vec{q}} - X_{\vec{k}} + Y_{\vec{q}})]^{-1}. \quad (3.6)$$

Dakle, na osnovu izraza (3.4), (3.5) i (3.6) dobija se izraz za ekvivalentni hamiltonijan \hat{H}_{eq} , to je rezultat unitarne transformacije originalnog hamiltonijana (3.1). U ovom ekvivalentnom hamiltonijanu \hat{H}_{eq} prvi i drugi član je isti kao u originalnom hamiltonijanu (3.1), a treći član predstavlja hamiltonijan elektron-elektron interakcije. Hamiltonijan elektron-fonon interakcije je dakle zamenjen ekvivalentnim hamiltonijanom elektron-elektron interakcije što je bio i cilj.

Sledeći korak je da se dobijeni izraz za \hat{H}_{eq} usrednji po fononskom vakuumu (posmatra se samo spontana emisija fonona, na niskim temperaturama broj fonona je mali) [1, 17]: $\hat{H}_{\text{eff}} = \langle 0 | \hat{H}_{\text{eq}} | 0 \rangle_{\text{ph}}$. Zatim se iz dobijenog efektivnog hamiltonijana \hat{H}_{eff} izdvoji samo onaj deo koji odgovara procesima između elektrona sa suprotnim impulsima (samo ovi procesi mogu da dovedu do sparivanja elektrona i do Boze-Ajnštajnovne kondenzacije) i konačno dobijamo [1, 17]:

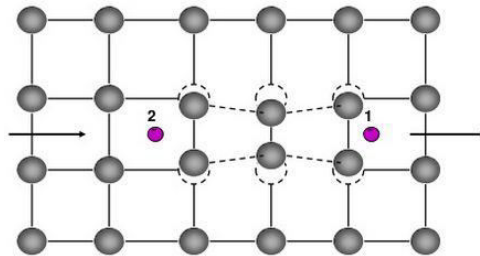
$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} X_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + N^{-1} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \frac{|F_{\vec{k}+\vec{q}}|^2 Y_{\vec{k}+\vec{q}}}{(X_{\vec{k}} - X_{\vec{q}})^2 - Y_{\vec{k}+\vec{q}}^2} a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^+ a_{-\vec{q}} a_{\vec{q}}, \quad (3.7)$$

gde je drugi član efektivni hamiltonijan elektron-elektron interakcije. Hamiltonijan (3.7) je krajnji rezultat Frelihove transformacije originalnog hamiltonijana (3.1) i vidimo da je elektron-fonon interakcija zamenjena efektivnom elektron-elektron interakcijom (i to na niskim temperaturama).

Sada treba ispitati pod kojim uslovima je efektivna elektron-elektron interakcija privlačna, tj. pod kojim uslovima je efektivni hamiltonijan elektron-elektron interakcije, a to je drugi član u izrazu (3.7), negativan. Znak drugog člana u izrazu (3.7) zavisi od znaka imenioca i na osnovu $X_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$ i $Y_{\vec{k}} = \hbar v_s k$ možemo pisati [17], (prilog J):

$$(X_{\vec{k}} - X_{\vec{q}})^2 - Y_{\vec{k}+\vec{q}}^2 = \frac{\hbar^4}{4m^2} [(k^2 - q^2)^2 - k_0^2 (\vec{k} + \vec{q})^2], \quad (3.8)$$

gde je $k_0 = \frac{2mv_s}{\hbar} \sim 10^8 \text{ m}^{-1}$. Za $|\vec{k} - \vec{q}| < k_0$ imenilac postaje negativan, pa je zato i drugi član u izrazu (3.7) negativan i dovodi do privlačenja elektrona [17], tj. efektivna elektron-elektron interakcija je privlačna. Zaključak [1, 17]: efektivna elektron-elektron interakcija, koja nastaje virtuelnom razmenom fonona, izaziva privlačenje između elektrona sa suprotnim impulsima u domenu gde važi: $|\vec{k} - \vec{q}| < k_0 = \frac{2mv_s}{\hbar} \sim 10^8 \text{ m}^{-1}$, tj. u domenu impulsa bliskih Fermijevom impulsu.



Sl. 3.1 Privlačna efektivna interakcija između 2 elektrona

[<http://www.slideshare.net/AllenHermann/lecture-4-microscopic-theory>]

Upravo opisani mehanizam je prikazan na Sl. 3.1. Elektron 1 prolazi između pozitivnih jona kristalne rešetke i privuče ove jone, pa tako dolazi do lokalne deformacije kristalne rešetke. Ovi pomereni joni zajedno sa elektronom 1 obrazuju jedan pozitivno naelektrisan skup čestica [12]. Elektron 2 će biti privučen ka ovom skupu čestica.

3.3 BCS-teorija

1957. godine Džon Bardin, Lion Nil Kuper i Džon Robert Šrifer su formulisali mikroskopsku teoriju superprovodnosti [3]. Oni su na osnovu Frelihovog rezultata (3.7) dali modelni hamiltonijan elektronskog sistema koji bi trebalo da objasni fenomen superprovodnosti [17]. U račun su uveli i elektronske spinove i ograničili su se samo na elektrone sa suprotnim spinovima i suprotnim impulsima [17]. Njihov modelni hamiltonijan ima oblik [1, 17]:

$$\hat{H}_{\text{BCS}} = \sum_{\vec{k}} X_{\vec{k}} [a_{\vec{k}\uparrow}^+ a_{\vec{k}\uparrow} + a_{-\vec{k}\downarrow}^+ a_{-\vec{k}\downarrow}] - \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} W_{\vec{k}\vec{q}} a_{\vec{k}\uparrow}^+ a_{-\vec{k}\downarrow}^+ a_{-\vec{q}\downarrow} a_{\vec{q}\uparrow}, \quad (3.9)$$

gde su sa \uparrow i \downarrow označeni spinovi i funkcija $W_{\vec{k}\vec{q}}$ definisana kao

$$W_{\vec{k}\vec{q}} = \begin{cases} W = \text{const.} > 0 & \text{za } k_{\text{F}} - k_{\text{G}} \leq k, q \leq k_{\text{F}} + k_{\text{G}} \\ 0 & \text{van ovog intervala.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Granični impuls $k_{\text{G}} < k_0 \sim 10^8 \text{ m}^{-1}$ [1]. Iz definicije funkcije $W_{\vec{k}\vec{q}}$ (3.10) vidimo da ona egzistira samo u uskoj oblasti oko Fermi-sfere [1].

Sada ćemo izvršiti kanoničku transformaciju Bogoljubova, tj. sa Fermi-operatora a^+ i a pređemo na nove operatore α^+ i α pomoću realnih i parnih funkcija $u_{\vec{k}}$ i $v_{\vec{k}}$ [1, 17]:

$$a_{\vec{k}\uparrow} = u_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}(1) + v_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^+(2), \quad a_{\vec{k}\uparrow}^+ = u_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^+(1) + v_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}(2) \quad (3.11)$$

$$a_{-\vec{k}\downarrow} = u_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}(2) - v_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^+(1), \quad a_{-\vec{k}\downarrow}^+ = u_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^+(2) - v_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}(1),$$

pri čemu je $u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 = 1$. Ovaj uslov za funkcije $u_{\vec{k}}$ i $v_{\vec{k}}$ se dobija iz zahteva da operatori α^+ i α budu takođe Fermi-operatori [17], (prilog K). Ako se izrazi (3.11) zamene u hamiltonijan (3.9) i iskoristi definicija (3.10) onda se hamiltonijan BCS-modela svodi na [17], (prilog L):

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{BCS}} = & \sum_{\vec{k}} (2X_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^2 - 2\Delta u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}) + \sum_{\vec{k}} [X_{\vec{k}} (u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2) + 2\Delta u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}] [\alpha_{\vec{k}}^+(1) \alpha_{\vec{k}}(1) + \alpha_{\vec{k}}^+(2) \alpha_{\vec{k}}(2)] + \\ & + \sum_{\vec{k}} [2X_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} - \Delta (u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2)] [\alpha_{\vec{k}}^+(1) \alpha_{\vec{k}}^+(2) + \alpha_{\vec{k}}(2) \alpha_{\vec{k}}(1)], \quad \Delta = \frac{W}{2N} \sum_{\vec{q}} u_{\vec{q}} v_{\vec{q}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Treba napomenuti da je hamiltonijan (3.12) dobijen tako što su zanemarene sve forme četvrtog reda po operatorima α^+ i α [17]. Stabilizacija ovog hamiltonijana zahteva eliminaciju članova proporcionalnih $\alpha^+ \alpha^+$ i $\alpha \alpha$, a to se postiže tako što se koeficijenti uz ovakve operatorske produkte izjednače sa nulom [17]: $2X_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} - \Delta (u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2) = 0$. Funkcije $u_{\vec{k}}$ i $v_{\vec{k}}$ se određuju iz sistema jednačina $u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 = 1$, $2X_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} - \Delta (u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2) = 0$ i tako dobijamo [17], (prilog M):

$$u_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{X_{\vec{k}}}{\sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} \right), \quad v_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{X_{\vec{k}}}{\sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} \right), \quad u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}}. \quad (3.13)$$

Na osnovu izraza (3.13) hamiltonijan (3.12) postaje [17], (prilog N):

$$\hat{H}_{\text{BCS}} = \sum_{\vec{k}} (X_{\vec{k}} - \sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}) + \sum_{\vec{k}} \sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2} [\alpha_{\vec{k}}^+(1)\alpha_{\vec{k}}^-(1) + \alpha_{\vec{k}}^+(2)\alpha_{\vec{k}}^-(2)]. \quad (3.14)$$

Dakle, dobili smo konačni izraz za hamiltonijan BCS-modela. Iz definicije (3.10) sledi da se odnosi samo na uski sloj impulsa debljine $2k_G$ oko graničnog impulsa k_F Fermi-sfere, tj. $k \in [k_F - k_G, k_F + k_G]$ i važi da je $k_G \leq 0.5k_0$ [1, 17]. Energija elementarnih ekscitacija je $\sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2} = E_{\vec{k}}$.

Pošto je $k_F \gg k_G$ i $k \in [k_F - k_G, k_F + k_G]$, tj. $k \approx k_F$ izraz za elektronsku energiju $X_{\vec{k}}$ postaje [17]:

$$X_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2}{2m} (k^2 - k_F^2) = \frac{\hbar^2}{2m} (k + k_F)(k - k_F) \approx \frac{\hbar^2}{m} k_F (k - k_F) = \frac{p_F}{m} (p - p_F). \quad (3.15)$$

Ako uvedemo promenljivu $v = p - p_F$, onda izraz (3.15) postaje $X_v = \frac{p_F}{m} v$, a izraz za energiju elementarnih ekscitacija će biti [17]:

$$E_v = \sqrt{\Delta^2 + \frac{p_F^2 v^2}{m^2}}. \quad (3.16)$$

U neposrednoj blizini granice Fermi-sfere je $v \approx 0$, pa je $\Delta^2 + \frac{p_F^2 v^2}{m^2} \approx \left(\Delta + \frac{p_F^2 v^2}{2m^2 \Delta} \right)^2$, jer je

$$\frac{p_F^4 v^4}{4m^4 \Delta^4} \approx 0 \text{ i možemo pisati [17]:}$$

$$E_v \approx \Delta + \frac{p_F^2 v^2}{2m^2 \Delta}. \quad (3.17)$$

Formiramo izraz za faznu brzinu elementarnih ekscitacija [17]:

$$v_\phi = \frac{E_v}{v} = \frac{\Delta}{v} + \frac{p_F^2 v}{2m^2 \Delta}. \quad (3.18)$$

Minimalna vrednost izraza (3.18) se dobija iz uslova $\frac{dv_\phi}{dv} = \frac{d}{dv} \left(\frac{E_v}{v} \right) = 0$ i iznosi [17]:

$$\min v_\phi = \min \left(\frac{E_v}{v} \right)_{v=v_{\min}} = \sqrt{2} \frac{p_F}{m}, \quad (3.19)$$

gde je $v_{\min} = \frac{m\Delta}{p_F} \sqrt{2}$.

Uslov superfluidnog kretanja je da elementarne ekscitacije imaju pozitivan minimum fazne brzine [17], (prilog O). Na osnovu izraza (3.19) vidimo da je minimum fazne brzine elementarnih ekscitacija, koje kreiraju operatori α^+ , pozitivan [1, 17]. Dakle, uslov za superfluidni transfer elektrona kroz metal, tj. za superprovodnost je ispunjen [1, 17]. Tako BCS-teorija objašnjava nestanak električnog otpora na temperaturama koje su nešto iznad apsolutne nule [17]. Operatori α^+ i α kreiraju i anihiliraju Kuperove parove, a do njihove kondenzacije, ako se o njoj uopšte može govoriti (operatori α^+ i α su takođe Fermi-operatori), dolazi ne u stanju sa nultim impulsom, već u stanju sa impulsom $p = p_F$ [17].

Veličina Δ igra bitnu ulogu u procesu superfluidnog transfera elektrona [17], tj. u procesu superprovodnosti. Ako je ovaj energetske procjep (gep, prag) jednak nuli, $\Delta=0$, onda ne važi izraz (3.18), pa ni kriterijum superfluidnog transfera elektrona-superprovodnosti (3.19) i u sistemu nastaje električni otpor [1, 17]. Drugim rečima, ako nema energetskeg procepa-nema superprovodnosti [4].

$$\text{S obzirom na izraze } \Delta = \frac{W}{2N} \sum_{\bar{q}} u_{\bar{q}} v_{\bar{q}} \quad (3.12) \text{ i } u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\sqrt{X_{\bar{k}}^2 + \Delta^2}} \quad (3.13) \text{ veličina } \Delta \text{ se}$$

određuje iz uslova [17]:

$$1 = \frac{W}{4N} \sum_{\bar{k}} \frac{1}{\sqrt{X_{\bar{k}}^2 + \Delta^2}}, \quad (3.20)$$

gde je W konstanta efektivne elektron-elektron interakcije [1]. Vidimo da uslov (3.20) ima smisla samo ako je $W > 0$, tj. ako između elektrona deluju privlačne sile [17]. Da bi dobili eksplicitni izraz za Δ potrebno je da u uslovu (3.20) pređemo od sumiranja na integraciju i iskoristimo izraz (3.15) [17], (prilog P):

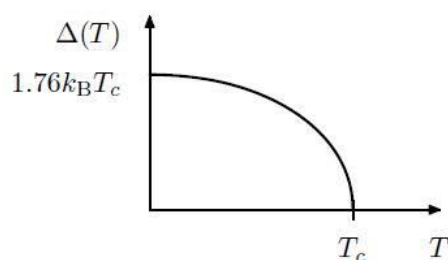
$$1 \approx \frac{W a^3 k_F^2}{8\pi^2 \hbar v_F} \ln \frac{4\hbar^2 v_F^2 k_G^2}{\Delta^2}, \quad v_F = \frac{p_F}{m}, \quad a^3 = \frac{V}{N}. \quad (3.21)$$

Odavde [1, 17]:

$$\Delta(0) = 2\hbar v_F k_G e^{-\frac{4\pi^2 \hbar v_F}{W a^3 k_F^2}} = 2 \frac{\hbar^2}{m} k_F k_G e^{-\frac{4\pi^2 \hbar^2}{W m k_F a^3}}. \quad (3.22)$$

Iz izraza (3.22) vidimo da Δ raste sa porastom konstante efektivne elektron-elektron interakcije W [1, 17]. Za karakteristične (metalne) vrednosti parametara, BCS-teorija daje [1]: $\Delta \sim 10^{-3}$ do 10^{-2} eV.

Ako se uzmu u obzir temperaturski efekti, onda se ispostavlja da Δ opada sa porastom temperature i da na nekoj kritičnoj temperaturi T_c postaje jednaka nuli [1, 17], videti Sl. 3.2.



Sl. 3.2 Δ kao funkcija temperature u BCS-teoriji [5]

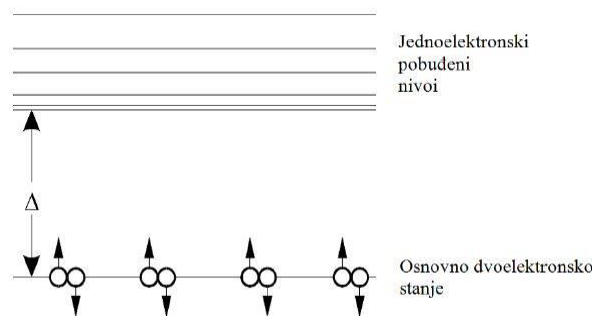
Izraz za T_c je dat kao [1]:

$$T_c = \left(\frac{\gamma}{\pi k_B} \right) \Delta(0) \sim (10-20)K, \quad (3.23)$$

gde je $\gamma = e^C$, $C = 0.577 \dots$ (γ je Ojlerova konstanta).

Energetski procep Δ predstavlja energiju veze Kuperovog para [1], to je energija koju treba uložiti za raskidanje Kuperovog para.

Kod superprovodnika energetski procep širine Δ odvaja osnovno dvoelektronsko stanje od jednoelektronskih stanja, videti Sl. 3.3.

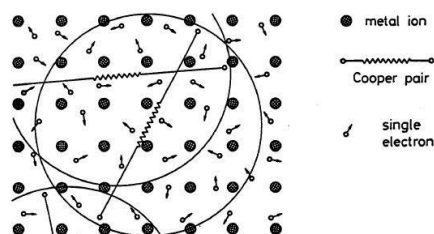


Sl. 3.3 Šema energetske nivoa superprovodnika [8]

Nespareni, normalni elektron ne može da postoji na osnovnom dvoelektronskom nivou i mora da zauzme prvi slobodan jednoelektronski nivo. Pri razrušenju Kuperovog para, oba elektrona moraju da se pobude na dozvoljene jednoelektronske nivoe, za šta je neophodan utrošak energije veći od 2Δ . Kuperovi parovi na najnižem energetske nivou, u osnovnom stanju opisuju se makroskopskom talasnom funkcijom, odnosno kompleksnim poljem $\psi(\vec{r})$, kao što je predvidela GL teorija. Ovi parovi čine kondenzat. Električna struja ovog kondenzata je superprovodna, tj. bezdisipativna.

Zašto ne dolazi do rasejanja Kuperovih parova na primesnom atomu ili nekom drugom defektu kristalne rešetke? Odgovor je da su zbog postojanja energetskog procepa Δ , tj. zabranjene zone Δ iznad Fermijevog nivoa mala pobuđenja kao što su rasejanja zabranjena [https://en.wikipedia.org/wiki/Cooper_pair], jer nema energetske nivoa na koji bi mogli da se raseju.

Dakle, između jona metala se nalaze Kuperovi parovi i nespareni elektroni, videti Sl. 3.4.



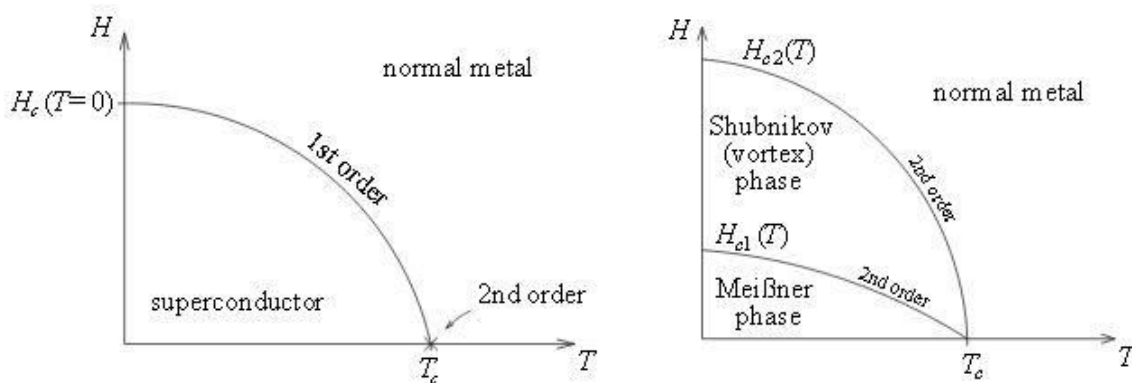
Sl. 3.4 Vizuelizacija Kuperovih parova i nesparenih elektrona u kristalnoj rešetki superprovodnika [9]

Dužina koherencije $\xi(T)$, tj. dimenzija Kuperovog para je reda 10^2 do 10^3 nm [1]. Između dva sparena elektrona se nalazi 10^6 do 10^7 drugih elektrona [1]. Kuperovi parovi stalno iščezavaju i ponovo se stvaraju u drugom obliku [12], nema trajne veze između dva određena elektrona.

4. Zaključak

GL teorija, tj. termodinamička teorija superprovodnosti smatra superprovodno i normalno stanje kao dve faze supstance, koje prelaze jedna u drugu pri određenim vrednostima temperature i jačine magnetnog polja [12]. Ova teorija je trijumf fizičke intuicije [15]. Superprovodno stanje (faza) u opštem slučaju je okarakterisano parametrom uređenja [2] $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\theta(\mathbf{r})}$ [5], pri čemu amplituda $|\psi(\mathbf{r})|$ ima neku konačnu vrednost [15]. U normalnom stanju (fazi) amplituda $|\psi(\mathbf{r})|$ je jednaka nuli [15]. U slučaju homogenog sistema parametar uređenja je konstantan, ne zavisi od vektora položaja: $\psi_0 = |\psi_0|e^{i\theta}$ [5].

Parametar uređenja $\psi(\mathbf{r})$ je smatran kao makroskopska talasna funkcija kvantne čestice (elektrona) sa efektivnom masom m^* i naelektrisanjem q [5, 15]. 1959. godine Gorkov je izveo GL teoriju iz BCS teorije pri temperaturama blizu T_c [5, 14]. To pokazuje da je $m^* = 2m$ i $q = -2e$ [5, 15], tj. da parametar uređenja $\psi(\mathbf{r})$ predstavlja makroskopsku talasnu funkciju Kuperovog para, odnosno kompleksno polje. Dakle, kvadrat modula parametra uređenja $|\psi(\mathbf{r})|^2$ predstavlja lokalnu koncentraciju Kuperovih parova: $|\psi(\mathbf{r})|^2 = \psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \frac{n_s(\mathbf{r})}{2}$, gde $n_s(\mathbf{r})$ je lokalna koncentracija superprovodnih elektrona. U slučaju homogenog sistema: $|\psi|^2 = \psi^*\psi = \frac{n_s}{2}$.



Sl. 4.1 Vrste faznog prelaza kod superprovodnika I i II vrste [18]

Sa Sl. 4.1 vidimo da je prelaz superprovodnika I vrste u normalno stanje pod dejstvom magnetnog polja pri temperaturama $T < T_c$ predstavlja fazni prelaz prvog reda, za koji je potreban određen utrošak energije [12]. Međutim, prelaz superprovodnika I vrste u normalno stanje na kritičnoj temperaturi u odsustvu magnetnog polja je fazni prelaz drugog reda, koji se vrši spontano, uz neizotermску razmenu energije [12]. Pošto je GL teorija zasnovana na opštoj teoriji faznih prelaza drugog reda [2, 5], ona je primenljiva samo u blizini T_c .

Takođe vidimo da je kod superprovodnika II vrste fazni prelaz u svakoj tački drugog reda. I kod njih teorija daje rezultate u blizini T_c , na primer jednačina (2.27). Generalno, jednačine i rezultati GL teorije važe u blizini T_c . Tako na primer, u Abrikosovljevoj teoriji prva GL jednačina je napisana za tačke duž $H_{c2}(T)$ u blizini T_c , pa i njeno rešenje ovde važi.

GL teorija je fenomenološka, kvantitativno opisuje makroskopsko ponašanje superprovodnika [15] bez objašnjenja mikroskopskog aspekta superprovodnosti [4]. Uspela je da uključi kvantne efekte superprovodnosti [4], kao što su skokovite promene električne otpornosti i specifične toplote i kvantizacija magnetnog fluksa [1]. Ova teorija je opšta, opisuje niskotemperaturske superprovodnike, visokotemperaturske superprovodnike, superprovodnike na bazi fulerena [5], kao i superprovodnike na bazi gvožđa.

BCS-teorija, tj. kvantna teorija superprovodnosti [12] je prva i jedina danas prihvaćena mikroskopska teorija superprovodnosti.

Bardin, Kuper i Šrifer su u okviru ove teorije odredili osnovno i pobuđena stanja superprovodnika, kritične parametre (gustinu električne struje, jačinu magnetnog polja, kritičnu temperaturu), izrazili dubinu prodiranja magnetnog polja, veličinu energetskog procepa i druge relevantne termodinamičke veličine superprovodnog stanja [1], kao na primer specifična toplota i njena skokovita promena [18].

BCS teorija je primenljiva samo na niskotemperaturske superprovodnike I vrste, tj. na metale [8] i uspela je da objasni superprovodnost u fulerenima [14].

Već smo spomenuli da je 1959. godine Gorkov izveo GL teoriju iz BCS teorije pri temperaturama blizu T_c . Funkcija $f_s - f_n = f(\Delta(T), T)$ se napiše u BCS-teoriji u slučaju homogenog i izotropnog sistema bez prisustva magnetnog polja, gde su f_s -gustina slobodne energije superprovodnog stanja, f_n -gustina slobodne energije normalnog stanja i $\Delta(T)$ -širina energetskog procepa [19]. Polazeći od ove funkcije, pod uslovom $\frac{\Delta(T)}{kT} < 1$, dobijaju se

jednačine za gustinu slobodne energije u GL teoriji u slučajevima: homogen i izotropan sistem bez i u prisustvu magnetnog polja, nehomogen i izotropan sistem bez i u prisustvu magnetnog polja, nehomogen i anizotropan sistem u prisustvu magnetnog polja [19]. Dobijeno je da je parametar uređenja GL teorije proporcionalan širini energetskog procepa BCS-teorije, što u opštem slučaju možemo napisati kao $\psi(\mathbf{r}, T) \sim \Delta(\mathbf{r}, T)$ [19, 15], a u slučaju homogenog i izotropnog sistema bez prisustva magnetnog polja kao $\psi(T) \sim \Delta(T)$ [19].



Nobelova nagrada za fiziku 2003:

Vitalij Lazarevič Ginzburg, Aleksej Aleksejevič Abrikosov, Entoni Džejms Leget
„za pionirski doprinos teoriji superprovodnika i superfluida”

Nobelova nagrada za fiziku 1962:

Lav Davidovič Landau

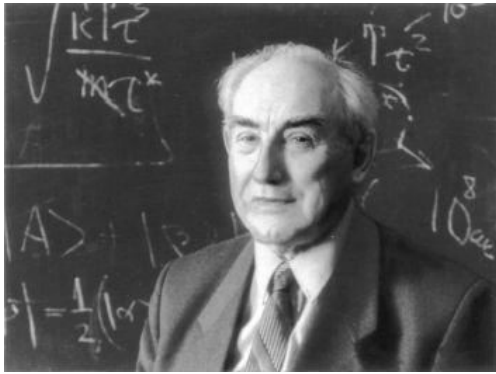
„za pionirske teorije u oblasti kondenzovane materije, naročito tečnog helijuma”

Nobelova nagrada za fiziku 1972:

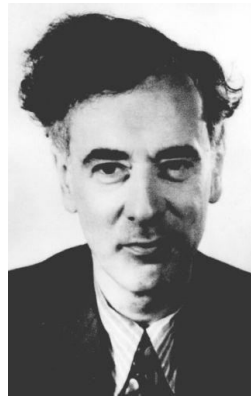
Džon Bardin, Lion Nil Kuper, Džon Robert Šrifer

„za zajednični razvoj teorije superprovodnika, poznatijoj kao BCS-teorija”

[https://sh.wikipedia.org/wiki/Nobelova_nagrada_za_fiziku]



Vitalij Lazarevič Ginzburg
1916-2009 [6]



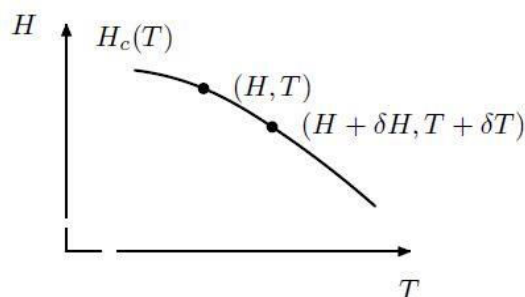
Lev Davidovič Landau
1908-1968 [6]



Džon Bardin 1908-1991, Lion Nil Kuper 1930, Džon Robert Šrifer 1931
[<http://www3.icmm.csic.es/superconductividad/investigacion/historia/>]

Prilozi: Glava 2.

Prilog A: Razlika entropije između superprovodnog i normalnog stanja kod superprovodnika I vrste



Sl. A.1 Slika uz računanje $S_s(T, H_c) - S_n(T, H_c)$ kod superprovodnika I vrste [5]

Znamo da je $G_s(T, H) = G_n(T, H)$ duž $H_c(T)$. Jednačinu $dG = -SdT - \mu_0 VMdH$ primenimo na tačke (T, H) i $(T + \delta T, H + \delta H)$:

$$G_s(T + \delta T, H + \delta H) - G_s(T, H) = -S_s \delta T - \mu_0 VM_s \delta H, \quad (\text{A.1})$$

$$G_n(T + \delta T, H + \delta H) - G_n(T, H) = -S_n \delta T - \mu_0 VM_n \delta H. \quad (\text{A.2})$$

Leve strane gornjih jednačina su jednake, pa su i desne:

$$-S_s \delta T - \mu_0 VM_s \delta H = -S_n \delta T - \mu_0 VM_n \delta H. \quad (\text{A.3})$$

Koristimo da je $M_s = -H$ i $M_n = 0$ i izrazimo $S_s - S_n$:

$$-S_s \delta T + \mu_0 VH \delta H = -S_n \delta T,$$

$$S_s - S_n = \mu_0 VH \frac{\delta H}{\delta T}. \quad (\text{A.4})$$

S obzirom da je $\frac{\delta H}{\delta T} = \frac{dH}{dT}$ imamo:

$$S_s(T, H_c) - S_n(T, H_c) = \mu_0 VH_c \frac{dH_c}{dT}. \quad (\text{A.5})$$

Prilog B: Nelinearna Šredingerova jednačina (2.33)

Tražimo minimum $F_s(T) = F_n(T) + \int \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + a(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi(\mathbf{r})|^4 \right) d^3r$ (2.32)

iz uslova $\delta F_s(T)=0$. Prvo ćemo odrediti δF_s varijacionim računom. Ako izvršimo prelaze $\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi(\mathbf{r}) + \delta\psi(\mathbf{r})$, $F_s(\psi) \rightarrow F_s(\psi + \delta\psi)$, onda sledi da je $\delta F_s = F_s[\psi + \delta\psi] - F_s[\psi]$:

$$\delta F_s = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla(\psi + \delta\psi)|^2 + a|\psi + \delta\psi|^2 + \frac{1}{2}b|\psi + \delta\psi|^4 \right) d^3r - \int \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi|^2 + a|\psi|^2 + \frac{1}{2}b|\psi|^4 \right) d^3r,$$

$$\delta F_s = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} (|\nabla(\psi + \delta\psi)|^2 - |\nabla\psi|^2) + a(|\psi + \delta\psi|^2 - |\psi|^2) + \frac{1}{2}b(|\psi + \delta\psi|^4 - |\psi|^4) \right) d^3r. \quad (\text{B.1})$$

Računamo $|\nabla(\psi + \delta\psi)|^2 - |\nabla\psi|^2$, $|\psi + \delta\psi|^2 - |\psi|^2$ i $|\psi + \delta\psi|^4 - |\psi|^4$:

$$|\nabla\psi|^2 = \nabla\psi^* \nabla\psi,$$

$$\begin{aligned} |\nabla(\psi + \delta\psi)|^2 &= \nabla(\psi^* + \delta\psi^*) \nabla(\psi + \delta\psi) = (\nabla\psi^* + \nabla\delta\psi^*)(\nabla\psi + \nabla\delta\psi) = \\ &= \nabla\psi^* \nabla\psi + \nabla\psi^* \nabla\delta\psi + \nabla\delta\psi^* \nabla\psi + \nabla\delta\psi^* \nabla\delta\psi, \end{aligned}$$

gde je $\nabla\delta\psi^* \nabla\delta\psi \approx 0$. Dakle:

$$|\nabla(\psi + \delta\psi)|^2 - |\nabla\psi|^2 = \nabla\psi^* \nabla\delta\psi + \nabla\delta\psi^* \nabla\psi, \quad (\text{B.2})$$

slično:

$$|\psi + \delta\psi|^2 - |\psi|^2 = \psi^* \delta\psi + \delta\psi^* \psi + 0 (\delta\psi^* \delta\psi). \quad (\text{B.3})$$

Takođe:

$$\begin{aligned} |\psi + \delta\psi|^4 &= |(\psi + \delta\psi)^2|^2 = |\psi^2 + 2\psi\delta\psi + \delta\psi^2|^2 = \\ &= |\psi^2 + 2\psi\delta\psi|^2 = \psi^* \psi^2 + 2(\psi^* |\psi|^2 \delta\psi + \delta\psi^* |\psi|^2 \psi) + 4\psi^* \psi \delta\psi^* \delta\psi, \end{aligned}$$

gde je $4\psi^* \psi \delta\psi^* \delta\psi \approx 0$, pa konačno dobijamo

$$|\psi + \delta\psi|^4 - |\psi|^4 = 2(\psi^* |\psi|^2 \delta\psi + \delta\psi^* |\psi|^2 \psi). \quad (\text{B.4})$$

Zamenom izraza (B.2), (B.3) i (B.4) u (B.1) nalazimo:

$$\delta F_s = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} (\nabla\psi^* \nabla\delta\psi + \nabla\delta\psi^* \nabla\psi) + a(\psi^* \delta\psi + \delta\psi^* \psi) + \frac{1}{2}b2(\psi^* |\psi|^2 \delta\psi + \delta\psi^* |\psi|^2 \psi) \right) d^3r. \quad (\text{B.5})$$

Pošto $\nabla\delta\psi\nabla\psi^* + \nabla\delta\psi^*\nabla\psi = \nabla(\delta\psi\nabla\psi^*) - \delta\psi\nabla^2\psi^* + \nabla(\delta\psi^*\nabla\psi) - \delta\psi^*\nabla^2\psi = -\delta\psi\nabla^2\psi^* - \delta\psi^*\nabla^2\psi$ imamo:

$$\delta F_s = \int \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \delta\psi\nabla^2\psi^* - \frac{\hbar^2}{2m^*} \delta\psi^*\nabla^2\psi + a\psi^*\delta\psi + a\delta\psi^*\psi + b\psi^*|\psi|^2\delta\psi + b\delta\psi^*|\psi|^2\psi \right) d^3r. \quad (\text{B.6})$$

Grupišemo članove tako što izdvajamo $\delta\psi^*$ i $\delta\psi$:

$$\delta F_s = \int \delta\psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\psi + a\psi + b\psi|\psi|^2 \right) d^3r + \int \delta\psi \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\psi^* + a\psi^* + b|\psi|^2\psi^* \right) d^3r. \quad (\text{B.7})$$

Važi da je $a\psi + b\psi|\psi|^2 = (a + b|\psi|^2)\psi$ i $a\psi^* + b|\psi|^2\psi^* = (a + b|\psi|^2)\psi^*$, pa možemo pisati:

$$\delta F_s = \int \delta\psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\psi + (a + b|\psi|^2)\psi \right) d^3r + \int \delta\psi \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\psi^* + (a + b|\psi|^2)\psi^* \right) d^3r. \quad (\text{B.8})$$

Konačno:

$$\delta F_s = \int \delta\psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\psi + (a + b|\psi|^2)\psi \right) d^3r + \int \delta\psi \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\psi^* + (a + b|\psi|^2)\psi^* \right) d^3r. \quad (\text{B.9})$$

Odredili smo δF_s . Uslov $\frac{\delta F_s}{\delta\psi} = 0$ daje:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\psi(\mathbf{r}) + \left[a(T) + b(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 \right] \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{B.10})$$

Prilog C: Nalaženje rešenja jednačine (2.35)

Rešavamo jednačinu $-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m^*a(T)}{\hbar^2}\psi(x) + \frac{2m^*b(T)}{\hbar^2}\psi^3(x) = 0$ (2.35) uvodeći smenu

$\zeta^2(T) = -\frac{\hbar^2}{2m^*a(T)}$. Tako dobijamo:

$$-\zeta^2(T) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \psi(x) - \frac{b(T)}{a(T)} \psi^3(x) = 0. \quad (\text{C.1})$$

Koristeći da je $\psi_0 = \sqrt{\frac{|a(T)|}{b(T)}}$, tj. $\psi_0^2 = \frac{|a(T)|}{b(T)} = -\frac{a(T)}{b(T)}$ možemo pisati:

$$-\zeta^2(T) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \psi(x) + \frac{1}{\psi_0^2} \psi^3(x) = 0. \quad (\text{C.2})$$

Uvodimo smenu $h(x) = \frac{\psi(x)}{\psi_0}$:

$$-\zeta^2(T)\psi_0 \frac{d^2h(x)}{dx^2} - \psi_0 h(x) + \frac{1}{\psi_0^2} \psi_0^3 h^3(x) = 0,$$

$$\zeta^2 \frac{d^2h}{dx^2} = h^3 - h. \quad (\text{C.3})$$

Gornju jednačinu množimo sa $\frac{dh}{dx}$ i tako dobijamo da je $\zeta^2 \frac{dh}{dx} \frac{d^2h}{dx^2} = (h^3 - h) \frac{dh}{dx}$. Ova jednačina s obzirom da je $d(dh)^2 = 2dh d^2h$, tj. $dh d^2h = \frac{d(dh)^2}{2}$ postaje:

$$\frac{\zeta^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = \frac{d}{dx} \left(\frac{h^4}{4} - \frac{h^2}{2} \right). \quad (\text{C.4})$$

Sledi:

$$\frac{\zeta^2}{2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = \frac{h^4}{4} - \frac{h^2}{2} + C_1. \quad (\text{C.5})$$

Treba odrediti konstantu C_1 : $x = \infty, \psi = \psi_0, h = \frac{\psi_0}{\psi_0} = 1, \frac{dh}{dx} = 0, C_1 = \frac{1}{4}$. Tako imamo:

$$\frac{\zeta^2}{2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = \frac{(1-h^2)^2}{4}. \text{ Odavde izrazimo } \frac{dh}{dx}:$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}\zeta} (1-h^2). \quad (\text{C.6})$$

Rešenje gornje jednačine je:

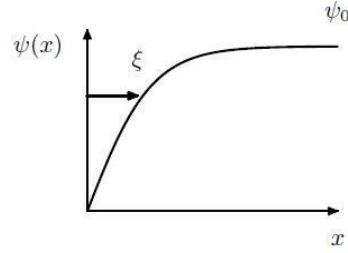
$$h = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\zeta}\right) + C_2. \quad (\text{C.7})$$

Treba odrediti konstantu C_2 : $x = 0, \psi = 0, h = 0, C_2 = 0$. Tako imamo: $h = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\zeta}\right)$, što,

imajući u vidu da je $h = \frac{\psi}{\psi_0}$, postaje $\frac{\psi}{\psi_0} = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\zeta}\right)$. Dakle, rešenje jednačine (2.35) je:

$$\psi(x) = \psi_0 \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\zeta(T)}\right), \quad \text{gde je} \quad \zeta(T) = \sqrt{-\frac{\hbar^2}{2m^* a(T)}}. \quad (\text{C.8})$$

Prilog D: Površinska raspodela Helmholtcove slobodne energije na površini superprovodnika na Sl. 2.6



Sl. 2.6 Parametar uređenja superprovodnika blizu granične površi [5]

Polazimo od izraza [2, 5]:

$$\sigma = \int_0^{\infty} (f_s(T) - f_n(T))_{\text{nehomogen sistem}} dx - \int_0^{\infty} ((f_s(T) - f_n(T))_{\text{homogen sistem}}) dx, \quad (\text{D.1})$$

gde je σ -slobodna energija po jedinici površine polubeskonačnog superprovodnika (yz ravan). Treba naći razliku $f_s(T) - f_n(T)$ za nehomogen i za homogen sistem. Za nehomogen sistem dobijamo tako što izvršimo prelaz $\psi = \psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi = \psi(x)$ u izrazu

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 + a(T) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} b(T) |\psi(\mathbf{r})|^4 + \dots \quad (2.31):$$

$$f_s(T) - f_n(T) = \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + a(T) \psi^2(x) + \frac{1}{2} b(T) \psi^4(x), \quad (\text{D.2})$$

gde je $\psi(x) = \psi_0 \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi(T)}\right)$ (2.37). Za homogen sistem dobijamo na osnovu izraza

$$f_s(T) - f_n(T) = -\frac{\dot{a}^2(T_c - T)^2}{2b} \quad (2.26) \text{ i } H_c = \frac{\dot{a}(T_c - T)}{\sqrt{\mu_0 b}} \quad (2.27):$$

$$f_s(T) - f_n(T) = -\frac{\mu_0 H_c^2}{2}. \quad (\text{D.3})$$

Zamenom izraza (D.2) i (D.3) u (D.1) dobijamo:

$$\sigma = \int_0^{\infty} \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + a(T) \psi^2(x) + \frac{1}{2} b(T) \psi^4(x) \right) dx - \int_0^{\infty} \left(-\frac{\mu_0 H_c^2}{2} \right) dx. \quad (\text{D.4})$$

Konačno:

$$\sigma = \int_0^{\infty} \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + a(T) \psi^2(x) + \frac{1}{2} b(T) \psi^4(x) + \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \right) dx, \quad \psi(x) = \psi_0 \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi(T)}\right). \quad (\text{D.5})$$

Prilog E: Druga GL jednačina (2.45)

Tražimo izraz za gustinu superprovodne struje prema formuli $\mathbf{J}_s = -\frac{\partial F_s(T)}{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r})}$, gde $F_s(T)$ je dat izrazom (2.43) koji glasi:

$$F_s(T) = F_n(T) + \int \left(\frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + 2e\mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2 + a(T) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} b(T) |\psi(\mathbf{r})|^4 \right) d^3r + \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B}^2(\mathbf{r}) d^3r. \quad (\text{E.1})$$

Prvo računamo parcijalni izvod drugog integrala u (E.1) po vektorskom potencijalu $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{A}} \int d^3r \mathbf{B}^2 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{B}^2. \quad (\text{E.2})$$

Važi da je:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} = \nabla_{\mathbf{A}} = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial A_{\alpha}}. \quad (\text{E.3})$$

Treba da nađemo \mathbf{B}^2 imajući u vidu da je $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j \mathbf{e}_k$, gde je $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} &= \sum_{ijk} \sum_{lmn} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} \partial_i A_j \partial_l A_m \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{ijk} \sum_{lmn} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} \partial_i A_j \partial_l A_m \delta_{n=k} = \\ &= \sum_{ijklm} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} \partial_i A_j \partial_l A_m = \\ &= \sum_{ijlm} \left(\sum_k \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \right) \partial_i A_j \partial_l A_m = \sum_{ijlm} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_i A_j \partial_l A_m = \\ &= \sum_{ijlm} \delta_{il} \delta_{jm} \partial_i A_j \partial_l A_m - \sum_{ijlm} \delta_{im} \delta_{jl} \partial_i A_j \partial_l A_m, \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}^2 = \sum_{ij} \partial_i A_j \partial_i A_j - \sum_{ij} \partial_i A_j \partial_j A_i. \quad (\text{E.4})$$

Na osnovu izraza (E.2), (E.3) i (E.4) dobijamo:

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{A}} \int d^3r \mathbf{B}^2 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{B}^2 = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial A_{\alpha}} \left[\sum_{ij} \partial_i A_j \partial_i A_j - \sum_{ij} \partial_i A_j \partial_j A_i \right] = 0, \quad (\text{E.5})$$

jer je $\frac{\partial}{\partial A_{\alpha}} (\partial_i A_{\beta}) = 0$. A_{α} i $\partial_i A_{\alpha}$ su nezavisne veličine u smislu Ojler-Lagranžovih promenljivih.

Pošto je i $\frac{F_n(T)}{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r})} = 0$, sledi da je izraz za gustinu superprovodne struje jednak negativnom parcijalnom izvodu prvog integrala u (E.1) po vektorskom potencijalu $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r})} \int \left(\frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + 2e\mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2 + a(T) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} b(T) |\psi(\mathbf{r})|^4 \right) d^3r = \\ &= -\frac{1}{2m^*} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r})} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + 2e\mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Računamo $\left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + 2e\mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2$:

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + 2e\mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2 &= \left(-\frac{\hbar}{i} \nabla + 2e\mathbf{A} \right) \psi^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + 2e\mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) = \\ &= \left(-\frac{\hbar}{i} \nabla \psi^*(\mathbf{r}) + 2e\mathbf{A} \psi^*(\mathbf{r}) \right) \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \psi(\mathbf{r}) + 2e\mathbf{A} \psi(\mathbf{r}) \right), \end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + 2e\mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2 &= \hbar^2 \nabla \psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) - \frac{2e\hbar}{i} \mathbf{A} \psi(\mathbf{r}) \nabla \psi^*(\mathbf{r}) + \frac{2e\hbar}{i} \mathbf{A} \psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) + \\ &+ (2e)^2 \mathbf{A}^2 \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Izraz (E.7) zamenimo u (E.6) i parcijalno diferenciramo po $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s &= -\frac{1}{2m^*} \frac{\partial \left(\hbar^2 \nabla \psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) - \frac{2e\hbar}{i} \mathbf{A} \psi(\mathbf{r}) \nabla \psi^*(\mathbf{r}) + \frac{2e\hbar}{i} \mathbf{A} \psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) + (2e)^2 \mathbf{A}^2 \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \right)}{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r})} = \\ &= -\frac{1}{2m^*} \left(-\frac{2e\hbar}{i} \psi(\mathbf{r}) \nabla \psi^*(\mathbf{r}) + \frac{2e\hbar}{i} \psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) + (2e)^2 2\mathbf{A} \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \right) = \\ &= -\frac{2e\hbar}{2m^* i} (\psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \nabla \psi^*(\mathbf{r})) - \frac{(2e)^2 2}{2m^*} \mathbf{A} \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

konačno:

$$\mathbf{J}_s = \frac{2e\hbar i}{2m^*} (\psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \nabla \psi^*(\mathbf{r})) - \frac{(2e)^2}{m^*} \mathbf{A} |\psi(\mathbf{r})|^2. \quad (\text{E.8})$$

Prilog F: Određivanje $\mathcal{A}(\mathbf{r})$

GL jednačine su dobijene iz izraza za totalnu Helmholtcovu slobodnu energiju superprovodnog stanja nehomogenog sistema u prisustvu magnetnog polja (2.43). U ovom izrazu operator impulsa $\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i}\nabla + 2e\mathbf{A}$ deluje na parametar uređenja $\psi(\mathbf{r})$. Možemo pisati:

$$\hat{\mathbf{p}}\psi(\mathbf{r}) = \left(\frac{\hbar}{i}\nabla + 2e\mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}). \quad (\text{F.1})$$

Sada izvršimo prelaz $\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi(\mathbf{r})e^{i\theta(\mathbf{r})}$ i imamo:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}\psi(\mathbf{r})e^{i\theta(\mathbf{r})} &= \left(\frac{\hbar}{i}\nabla + 2e\mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r})e^{i\theta(\mathbf{r})} = \frac{\hbar}{i}\nabla(\psi(\mathbf{r})e^{i\theta(\mathbf{r})}) + 2e\mathbf{A}\psi(\mathbf{r})e^{i\theta(\mathbf{r})} = \\ &= \frac{\hbar}{i}e^{i\theta(\mathbf{r})}\nabla\psi(\mathbf{r}) + \frac{\hbar}{i}\psi(\mathbf{r})\nabla e^{i\theta(\mathbf{r})} + 2e\mathbf{A}\psi(\mathbf{r})e^{i\theta(\mathbf{r})} = \\ &= \frac{\hbar}{i}e^{i\theta(\mathbf{r})}\nabla\psi(\mathbf{r}) + \frac{\hbar}{i}\psi(\mathbf{r})e^{i\theta(\mathbf{r})}i\nabla\theta(\mathbf{r}) + 2e\mathbf{A}\psi(\mathbf{r})e^{i\theta(\mathbf{r})} = \\ &= e^{i\theta(\mathbf{r})} \left(\frac{\hbar}{i}\nabla + \hbar\nabla\theta(\mathbf{r}) + 2e\mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{p}}\psi(\mathbf{r})e^{i\theta(\mathbf{r})} = e^{i\theta(\mathbf{r})} \left(\frac{\hbar}{i}\nabla + 2e \left(\mathbf{A} + \frac{\hbar}{2e}\nabla\theta(\mathbf{r}) \right) \right) \psi(\mathbf{r}). \quad (\text{F.2})$$

Na osnovu izraza $\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\mathcal{A}(\mathbf{r})$, (F.1) i (F.2) vidimo da je:

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2e}\theta(\mathbf{r}). \quad (\text{F.3})$$

Prilog G: Jednačina (2.60)

Jednačina $\mathbf{A} = \frac{\hbar i}{4e} \frac{1}{|\psi|^2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{m^*}{(2e)^2} \frac{1}{|\psi|^2} \mathbf{J}_s$ (2.59) uzimajući u obzir da je $\mathbf{J}_s = 0$ i

$\psi = |\psi_0|e^{i\theta}$ postaje $\mathbf{A} = \frac{\hbar i}{4e} \frac{1}{|\psi_0|^2} (|\psi_0|e^{-i\theta}\nabla|\psi_0|e^{i\theta} - |\psi_0|e^{i\theta}\nabla|\psi_0|e^{-i\theta})$, pa dalje imamo:

$$\mathbf{A} = \frac{\hbar i}{4e} \frac{1}{|\psi_0|^2} (|\psi_0|^2 e^{-i\theta} e^{i\theta} i\nabla\theta - |\psi_0|^2 e^{i\theta} e^{-i\theta} (-i)\nabla\theta) = \frac{\hbar i}{4e} (i\nabla\theta + i\nabla\theta) = \frac{\hbar i}{4e} 2i\nabla\theta. \quad (\text{G.1})$$

Dakle:

$$\mathbf{A} = -\frac{\hbar}{2e}\nabla\theta. \quad (\text{G.2})$$

Prilog H: Linearizacija i sređivanje prve GL jednačine u slučaju superprovodnika II vrste u unutrašnjosti namotaja kalema, tj. jednačine (2.65)

Prva GL jednačina u posmatranom slučaju, tj. jednačina (2.65):

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla + \frac{2ei}{\hbar} Bx\mathbf{j} \right)^2 \psi(\mathbf{r}) + a(T)\psi(\mathbf{r}) + b(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{H.1})$$

Kada $H \rightarrow H_{c2}$, onda $\psi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$, $|\psi(\mathbf{r})|^2 \approx 0$, sledi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla + \frac{2eBi}{\hbar} x\mathbf{j} \right)^2 \psi(\mathbf{r}) + a(T)\psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{H.2})$$

Gornja jednačina je linearna. Kvadiramo zagradu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla^2 + 2\frac{2eBi}{\hbar} x\mathbf{j}\nabla + \frac{(2eBi)^2}{\hbar^2} x^2 \right) \psi(\mathbf{r}) + a(T)\psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{H.3})$$

Imamo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla^2 + \frac{4eBi}{\hbar} x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{(2eB)^2}{\hbar^2} x^2 \right) \psi(\mathbf{r}) + a(T)\psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{H.4})$$

Posle sređivanja:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 - \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{4eBi}{\hbar} x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{(2eB)^2}{\hbar^2} x^2 \right) \psi(\mathbf{r}) = -a(T)\psi(\mathbf{r}). \quad (\text{H.5})$$

Uvodimo ciklotronsku frekvenciju $\omega_c = \frac{2eB}{m^*}$:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 - \hbar\omega_c ix \frac{\partial}{\partial y} + \frac{m^*\omega_c^2}{2} x^2 \right) \psi(\mathbf{r}) = -a(T)\psi(\mathbf{r}). \quad (\text{H.6})$$

S obzirom da je $-a(T) = |a(T)|$:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 - \hbar\omega_c ix \frac{\partial}{\partial y} + \frac{m^*\omega_c^2}{2} x^2 \right) \psi(\mathbf{r}) = |a(T)|\psi(\mathbf{r}). \quad (\text{H.7})$$

Prilog I: Šredingerova jednačina za LHO pomerenog za x_0 , tj. jednačina (2.68)

Rešenje jednačine $\left(-\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2 - \hbar\omega_c ix \frac{\partial}{\partial y} + \frac{m^*\omega_c^2}{2}x^2\right)\psi(\mathbf{r}) = |a(T)|\psi(\mathbf{r})$ (2.66) tražimo u obliku

$\psi(\mathbf{r}) = e^{i(k_y y + k_z z)} g(x)$ (2.67), a to znači zamenu izraza (2.67) u (2.66):

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2(e^{i(k_y y + k_z z)} g(x)) - \hbar\omega_c ix \frac{\partial}{\partial y}(e^{i(k_y y + k_z z)} g(x)) + \frac{m^*\omega_c^2}{2}x^2 e^{i(k_y y + k_z z)} g(x) = \\ &= |a(T)|e^{i(k_y y + k_z z)} g(x). \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

Računamo $\nabla^2(e^{i(k_y y + k_z z)} g(x))$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(e^{i(k_y y + k_z z)} g(x)) = e^{i(k_y y + k_z z)} \frac{d^2 g(x)}{dx^2} + g(x)e^{ik_z z} e^{ik_y y} i^2 k_y^2 + g(x)e^{ik_y y} e^{ik_z z} i^2 k_z^2,$$

$$\nabla^2(e^{i(k_y y + k_z z)} g(x)) = e^{i(k_y y + k_z z)} \frac{d^2 g(x)}{dx^2} - e^{i(k_y y + k_z z)} (k_y^2 + k_z^2) g(x). \quad (\text{I.2})$$

Zamenom izraza (I.2) u (I.1) dobijamo:

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2m^*} e^{i(k_y y + k_z z)} \frac{d^2 g(x)}{dx^2} + \frac{\hbar^2}{2m^*} e^{i(k_y y + k_z z)} (k_y^2 + k_z^2) g(x) - \hbar\omega_c ix g(x) e^{ik_z z} e^{ik_y y} i k_y + \\ &+ \frac{m^*\omega_c^2}{2} x^2 e^{i(k_y y + k_z z)} g(x) = |a(T)| e^{i(k_y y + k_z z)} g(x). \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Posle deljenja sa $e^{i(k_y y + k_z z)}$ i grupisanja članova imamo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 g(x)}{dx^2} + \left(\hbar\omega_c k_y x + \frac{m^*\omega_c^2}{2} x^2\right) g(x) = \left(|a(T)| - \frac{\hbar^2(k_y^2 + k_z^2)}{2m^*}\right) g(x). \quad (\text{I.4})$$

Zagrada na levoj strani gornje jednačine može da se napiše na sledeći način:

$$\left(\hbar\omega_c k_y x + \frac{m^*\omega_c^2}{2} x^2\right) = \frac{m^*\omega_c^2}{2} (x - x_0)^2 - \frac{m^*\omega_c^2}{2} x_0^2, \text{ gde je } x_0 = -\frac{\hbar k_y}{m^* \omega_c}.$$

Uzimajući ovo u obzir konačno dobijamo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 g(x)}{dx^2} + \frac{m^*\omega_c^2}{2} (x - x_0)^2 g(x) = \left(|a(T)| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}\right) g(x). \quad (\text{I.5})$$

Prilozi: Glava 3.

Prilog J: Izraz (3.8)

Računamo $(X_{\vec{k}} - X_{\vec{q}})^2 - Y_{\vec{k}+\vec{q}}^2$ znajući da je $X_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$ i $Y_{\vec{k}} = \hbar v_s k$:

$$\begin{aligned} (X_{\vec{k}} - X_{\vec{q}})^2 - Y_{\vec{k}+\vec{q}}^2 &= \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right)^2 - \hbar^2 v_s^2 (\vec{k} + \vec{q})^2 = \\ &= \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \right)^2 - \hbar^2 v_s^2 (\vec{k} + \vec{q})^2. \end{aligned} \quad (\text{J.1})$$

Kvadriramo prvu zagradu:

$$(X_{\vec{k}} - X_{\vec{q}})^2 - Y_{\vec{k}+\vec{q}}^2 = \frac{\hbar^4 k^4}{4m^2} - \frac{\hbar^4 k^2 q^2}{2m^2} + \frac{\hbar^4 q^4}{4m^2} - \hbar^2 v_s^2 (\vec{k} + \vec{q})^2. \quad (\text{J.2})$$

Izdvajamo $\frac{\hbar^4}{4m^2}$ i koristimo da je $k^4 - 2k^2 q^2 + q^4 = (k^2 - q^2)^2$, nalazimo:

$$\begin{aligned} (X_{\vec{k}} - X_{\vec{q}})^2 - Y_{\vec{k}+\vec{q}}^2 &= \frac{\hbar^4}{4m^2} \left[k^4 - 2k^2 q^2 + q^4 - \frac{4m^2 v_s^2}{\hbar^2} (\vec{k} + \vec{q})^2 \right] = \\ &= \frac{\hbar^4}{4m^2} \left[(k^2 - q^2)^2 - \frac{4m^2 v_s^2}{\hbar^2} (\vec{k} + \vec{q})^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{J.3})$$

Uvodeći $k_0 = \frac{2mv_s}{\hbar}$, dobijamo:

$$(X_{\vec{k}} - X_{\vec{q}})^2 - Y_{\vec{k}+\vec{q}}^2 = \frac{\hbar^4}{4m^2} [(k^2 - q^2)^2 - k_0^2 (\vec{k} + \vec{q})^2]. \quad (\text{J.4})$$

Vidimo da ako je $(k^2 - q^2)^2 < k_0^2 (\vec{k} + \vec{q})^2$, onda izraz (J.4) je negativan. Ovaj uslov možemo napisati kao $(k^2 - q^2)^2 = (\vec{k}^2 - \vec{q}^2)^2 < k_0^2 (\vec{k} + \vec{q})^2$, a pošto je $(\vec{k}^2 - \vec{q}^2)^2 = (\vec{k} + \vec{q})^2 (\vec{k} - \vec{q})^2$, ostaje: $(\vec{k} - \vec{q})^2 < k_0^2$, tj. $|\vec{k} - \vec{q}| < k_0$.

Prilog K: Uslov $u_{\bar{k}}^2 + v_{\bar{k}}^2 = 1$, gde su $u_{\bar{k}}$ i $v_{\bar{k}}$ realne i parne funkcije

Prvo ćemo matematički napisati da su funkcije $u_{\bar{k}}$ i $v_{\bar{k}}$ realne i parne: $u_{\bar{k}} = u_{\bar{k}}^* = u_{-\bar{k}}, v_{\bar{k}} = v_{\bar{k}}^* = v_{-\bar{k}}$. Uslov $u_{\bar{k}}^2 + v_{\bar{k}}^2 = 1$ se dobija iz zahteva da operatori α^+ i α budu takođe Fermi-operatori. Operatori a^+ i a su Fermi-operatori, pa važi na primer:

$$\{a_{\bar{k}\uparrow}^+, a_{\bar{k}\uparrow}\} = 1. \quad (\text{K.1})$$

Operatori $a_{\bar{k}\uparrow}^+$ i $a_{\bar{k}\uparrow}$ su dati u (3.11): $a_{\bar{k}\uparrow}^+ = u_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}^+(1) + v_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}(2)$, $a_{\bar{k}\uparrow} = u_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}(1) + v_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}^+(2)$. Njihovom zamenom u antikomutator (K.1) dobijamo:

$$\begin{aligned} \{a_{\bar{k}\uparrow}^+, a_{\bar{k}\uparrow}\} &= \{u_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}^+(1) + v_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}(2), u_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}(1) + v_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}^+(2)\} = \\ &= \{u_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}^+(1), u_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}(1)\} + \{u_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}^+(1), v_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}^+(2)\} + \{v_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}(2), u_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}(1)\} + \{v_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}(2), v_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}^+(2)\} = \\ &= u_{\bar{k}}^2 \{\alpha_{\bar{k}}^+(1), \alpha_{\bar{k}}(1)\} + u_{\bar{k}}v_{\bar{k}} \{\alpha_{\bar{k}}^+(1), \alpha_{\bar{k}}^+(2)\} + v_{\bar{k}}u_{\bar{k}} \{\alpha_{\bar{k}}(2), \alpha_{\bar{k}}(1)\} + v_{\bar{k}}^2 \{\alpha_{\bar{k}}(2), \alpha_{\bar{k}}^+(2)\} = \\ &= u_{\bar{k}}^2 + v_{\bar{k}}^2 = 1, \end{aligned}$$

jer je $\{\alpha_{\bar{k}}^+(1), \alpha_{\bar{k}}(1)\} = 1$, $\{\alpha_{\bar{k}}^+(1), \alpha_{\bar{k}}^+(2)\} = 0$, $\{\alpha_{\bar{k}}(2), \alpha_{\bar{k}}(1)\} = 0$ i $\{\alpha_{\bar{k}}(2), \alpha_{\bar{k}}^+(2)\} = 1$.

Dakle:

$$u_{\bar{k}}^2 + v_{\bar{k}}^2 = 1. \quad (\text{K.2})$$

Prilog L: Hamiltonijan BCS-modela (3.12)

Hamiltonijan $\hat{H}_{\text{BCS}} = \sum_{\bar{k}} X_{\bar{k}} [a_{\bar{k}\uparrow}^+ a_{\bar{k}\uparrow} + a_{-\bar{k}\downarrow}^+ a_{-\bar{k}\downarrow}] - \frac{1}{2N} \sum_{\bar{k}, \bar{q}} W_{\bar{k}\bar{q}} a_{\bar{k}\uparrow}^+ a_{-\bar{k}\downarrow}^+ a_{-\bar{q}\downarrow} a_{\bar{q}\uparrow}$ (3.9) s obzirom na

definiciju $W_{\bar{k}\bar{q}} = \begin{cases} W = \text{const.} > 0 & \text{za } k_{\text{F}} - k_{\text{G}} \leq k, q \leq k_{\text{F}} + k_{\text{G}} \\ 0 & \text{van ovog intervala} \end{cases}$ (3.10) prelazi u:

$$\hat{H}_{\text{BCS}} = \sum_{\bar{k}} X_{\bar{k}} [a_{\bar{k}\uparrow}^+ a_{\bar{k}\uparrow} + a_{-\bar{k}\downarrow}^+ a_{-\bar{k}\downarrow}] - \frac{W}{2N} \sum_{\bar{k}, \bar{q}} a_{\bar{k}\uparrow}^+ a_{-\bar{k}\downarrow}^+ a_{-\bar{q}\downarrow} a_{\bar{q}\uparrow}. \quad (\text{L.1})$$

Operatori a^+ i a : $a_{\bar{k}\uparrow} = u_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}(1) + v_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}^+(2)$, $a_{\bar{k}\uparrow}^+ = u_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}^+(1) + v_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}(2)$, $a_{-\bar{k}\downarrow} = u_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}(2) - v_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}^+(1)$, $a_{-\bar{k}\downarrow}^+ = u_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}^+(2) - v_{\bar{k}}\alpha_{\bar{k}}(1)$ (3.11). Sve forme četvrtog reda po operatorima α^+ i α su zanemarene, što znači da hamiltonijan (L.1) ima oblik:

$$\hat{H}_{\text{BCS}} = \sum_{\bar{k}} X_{\bar{k}} [a_{\bar{k}\uparrow}^+ a_{\bar{k}\uparrow} + a_{-\bar{k}\downarrow}^+ a_{-\bar{k}\downarrow}] - \Delta \sum_{\bar{k}} [a_{\bar{k}\uparrow}^+ a_{-\bar{k}\downarrow}^+ + a_{-\bar{k}\downarrow} a_{\bar{k}\uparrow}], \quad \Delta = \frac{W}{2N} \sum_{\bar{q}} u_{\bar{q}} v_{\bar{q}}. \quad (\text{L.2})$$

Računamo $a_{\bar{k}\uparrow}^+ a_{\bar{k}\uparrow}$, $a_{-\bar{k}\downarrow}^+ a_{-\bar{k}\downarrow}$, $a_{\bar{k}\uparrow}^+ a_{-\bar{k}\downarrow}^+$, $a_{-\bar{k}\downarrow} a_{\bar{k}\uparrow}$:

$$a_{\bar{k}\uparrow}^+ a_{\bar{k}\uparrow} = u_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}(1) + u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^+(2) + v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}(1) + v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2),$$

$$a_{-\bar{k}\downarrow}^+ a_{-\bar{k}\downarrow} = u_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}(2) - u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}^+(1) - v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^-(1) \alpha_{\bar{k}}(2) + v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(1) \alpha_{\bar{k}}^+(1),$$

$$a_{\bar{k}\uparrow}^+ a_{-\bar{k}\downarrow}^+ = u_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^+(2) - u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^-(1) + v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2) - v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^-(1),$$

$a_{-\bar{k}\downarrow} a_{\bar{k}\uparrow} = u_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^-(1) + u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2) - v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^-(1) - v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^+(2)$. Zamenom ovih izraza u hamiltonijan (L.2) dobijamo:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{BCS}} = & \sum_{\bar{k}} X_{\bar{k}} [u_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^-(1) + u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^+(2) + v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^-(1) + v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2) + \\ & + u_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}^-(2) - u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}^+(1) - v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^-(1) \alpha_{\bar{k}}^-(2) + v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(1) \alpha_{\bar{k}}^+(1)] - \\ & - \sum_{\bar{k}} \Delta [u_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^+(2) - u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^-(1) + v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2) - v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^-(1) + \\ & + u_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^-(1) + u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2) - v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^-(1) - v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^+(2)]. \end{aligned} \quad (\text{L.3})$$

U hamiltonijanu (L.3) članove $v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2)$, $v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(1) \alpha_{\bar{k}}^+(1)$, $v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2)$ i $u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2)$ ćemo napisati drugačije. Prvo gledamo član $v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2)$. Pošto su α^+ i α Fermi-operatori važi da je $\{\alpha_{\bar{k}}^-(2), \alpha_{\bar{k}}^+(2)\} = \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2) + \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}^-(2) = 1$, odavde sledi: $\alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2) = 1 - \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}^-(2)$. Dakle, član $v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2)$ možemo napisati kao:

$$v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2) = v_{\bar{k}}^2 (1 - \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}^-(2)),$$

$$v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2) = v_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}^-(2). \quad (\text{L.4})$$

Na sličan način se dobijaju i ostali članovi:

$$v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(1) \alpha_{\bar{k}}^+(1) = v_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^-(1), \quad (\text{L.5})$$

$$v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2) = v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} - v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}^-(2), \quad (\text{L.6})$$

$$u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^+(2) = u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} - u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}^-(2). \quad (\text{L.7})$$

Zamenom izraza (L.4), (L.5), (L.6) i (L.7) u hamiltonijan (L.3) dobijamo:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{BCS}} = & \sum_{\bar{k}} X_{\bar{k}} [u_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^-(1) + u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^+(2) + v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^-(1) + v_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}^-(2) + \\ & + u_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}^-(2) - u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}^+(1) - v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^-(1) \alpha_{\bar{k}}^-(2) + v_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^-(1)] - \\ & - \sum_{\bar{k}} \Delta [u_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^+(2) - u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^-(1) + v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} - v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}^-(2) - v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^-(1) + \\ & + u_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^-(2) \alpha_{\bar{k}}^-(1) + u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} - u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}^-(2) - v_{\bar{k}} u_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^-(1) - v_{\bar{k}}^2 \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^+(2)]. \end{aligned} \quad (\text{L.8})$$

Grupišemo članove:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{BCS}} &= \sum_{\bar{k}} (2X_{\bar{k}} v_{\bar{k}}^2 - 2\Delta u_{\bar{k}} v_{\bar{k}}) + \sum_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}(1) [X_{\bar{k}} u_{\bar{k}}^2 - X_{\bar{k}} v_{\bar{k}}^2 + 2\Delta u_{\bar{k}} v_{\bar{k}}] + \\
&+ \sum_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}(2) [-X_{\bar{k}} v_{\bar{k}}^2 + X_{\bar{k}} u_{\bar{k}}^2 + 2\Delta u_{\bar{k}} v_{\bar{k}}] + \sum_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^+(2) [2X_{\bar{k}} u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} + \Delta(v_{\bar{k}}^2 - u_{\bar{k}}^2)] + \\
&+ \sum_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}(2) \alpha_{\bar{k}}(1) [2X_{\bar{k}} u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} + \Delta(v_{\bar{k}}^2 - u_{\bar{k}}^2)], \\
\hat{H}_{\text{BCS}} &= \sum_{\bar{k}} (2X_{\bar{k}} v_{\bar{k}}^2 - 2\Delta u_{\bar{k}} v_{\bar{k}}) + \sum_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}(1) [X_{\bar{k}}(u_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2) + 2\Delta u_{\bar{k}} v_{\bar{k}}] + \\
&+ \sum_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}(2) [X_{\bar{k}}(u_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2) + 2\Delta u_{\bar{k}} v_{\bar{k}}] + \sum_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^+(2) [2X_{\bar{k}} u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} - \Delta(u_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2)] + \quad (\text{L.9}) \\
&+ \sum_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}(2) \alpha_{\bar{k}}(1) [2X_{\bar{k}} u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} - \Delta(u_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2)].
\end{aligned}$$

Konačno:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{BCS}} &= \sum_{\bar{k}} (2X_{\bar{k}} v_{\bar{k}}^2 - 2\Delta u_{\bar{k}} v_{\bar{k}}) + \sum_{\bar{k}} [X_{\bar{k}}(u_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2) + 2\Delta u_{\bar{k}} v_{\bar{k}}] [\alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}(1) + \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}(2)] + \\
&+ \sum_{\bar{k}} [2X_{\bar{k}} u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} - \Delta(u_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2)] [\alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^+(2) + \alpha_{\bar{k}}(2) \alpha_{\bar{k}}(1)], \quad \Delta = \frac{W}{2N} \sum_{\bar{q}} u_{\bar{q}} v_{\bar{q}}. \quad (\text{L.10})
\end{aligned}$$

Prilog M: Određivanje funkcija $u_{\bar{k}}$ i $v_{\bar{k}}$

Rešavamo sistem jednačina $u_{\bar{k}}^2 + v_{\bar{k}}^2 = 1$, $2X_{\bar{k}} u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} - \Delta(u_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2) = 0$, koji ćemo napisati kao:

$$u_{\bar{k}}^2 + v_{\bar{k}}^2 = 1 \quad (1), \quad u_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2 = \frac{2X_{\bar{k}} u_{\bar{k}} v_{\bar{k}}}{\Delta} \quad (2). \text{ Prvo kvadriramo jednačinu (1):}$$

$$u_{\bar{k}}^4 + 2u_{\bar{k}}^2 v_{\bar{k}}^2 + v_{\bar{k}}^4 = 1. \quad (\text{M.1})$$

Zatim kvadriramo jednačinu (2):

$$u_{\bar{k}}^4 - 2u_{\bar{k}}^2 v_{\bar{k}}^2 + v_{\bar{k}}^4 = \frac{4X_{\bar{k}}^2 u_{\bar{k}}^2 v_{\bar{k}}^2}{\Delta^2}. \quad (\text{M.2})$$

Iz jednačine (M.1) sledi da je $u_{\bar{k}}^4 + v_{\bar{k}}^4 = 1 - 2u_{\bar{k}}^2 v_{\bar{k}}^2$, ovo uvrstimo u jednačinu (M.2) i tako

imamo: $1 - 4u_{\bar{k}}^2 v_{\bar{k}}^2 = \frac{4X_{\bar{k}}^2 u_{\bar{k}}^2 v_{\bar{k}}^2}{\Delta^2}$. Odavde izrazimo $u_{\bar{k}}^2 v_{\bar{k}}^2$ i dobijamo: $u_{\bar{k}}^2 v_{\bar{k}}^2 = \frac{1}{4} \frac{\Delta^2}{X_{\bar{k}}^2 + \Delta^2}$. Dakle,

izraz za $u_{\bar{k}} v_{\bar{k}}$ je:

$$u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\sqrt{X_{\bar{k}}^2 + \Delta^2}}. \quad (\text{M.3})$$

Sabiranje jednačina (1) i (2) daje:

$$u_{\bar{k}}^2 = \frac{1}{2} + \frac{X_{\bar{k}} u_{\bar{k}} v_{\bar{k}}}{\Delta}. \quad (\text{M.4})$$

U gornji izraz uvrstimo izraz za $u_{\bar{k}} v_{\bar{k}}$ (M.3):

$$u_{\bar{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{X_{\bar{k}}}{\sqrt{X_{\bar{k}}^2 + \Delta^2}} \right). \quad (\text{M.5})$$

Oduzimanje jednačina (1) i (2) daje:

$$v_{\bar{k}}^2 = \frac{1}{2} - \frac{X_{\bar{k}} u_{\bar{k}} v_{\bar{k}}}{2\Delta}. \quad (\text{M.6})$$

U gornji izraz uvrstimo izraz za $u_{\bar{k}} v_{\bar{k}}$ (M.3):

$$v_{\bar{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{X_{\bar{k}}}{\sqrt{X_{\bar{k}}^2 + \Delta^2}} \right). \quad (\text{M.7})$$

Prilog N: Hamiltonijan BCS-modela (3.14)

Izraze $u_{\bar{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{X_{\bar{k}}}{\sqrt{X_{\bar{k}}^2 + \Delta^2}} \right)$, $v_{\bar{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{X_{\bar{k}}}{\sqrt{X_{\bar{k}}^2 + \Delta^2}} \right)$, $u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\sqrt{X_{\bar{k}}^2 + \Delta^2}}$ (3.13)

zamenimo u hamiltonijan BCS-modela (3.12) koji glasi:

$$\hat{H}_{\text{BCS}} = \sum_{\bar{k}} (2X_{\bar{k}} v_{\bar{k}}^2 - 2\Delta u_{\bar{k}} v_{\bar{k}}) + \sum_{\bar{k}} [X_{\bar{k}} (u_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2) + 2\Delta u_{\bar{k}} v_{\bar{k}}] [\alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}(1) + \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}(2)] +$$

$$+ \sum_{\bar{k}} [2X_{\bar{k}} u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} - \Delta (u_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2)] [\alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}^+(2) + \alpha_{\bar{k}}(2) \alpha_{\bar{k}}(1)], \quad \Delta = \frac{W}{2N} \sum_{\bar{q}} u_{\bar{q}} v_{\bar{q}}.$$

Tako dobijamo:

$$\hat{H}_{\text{BCS}} = \sum_{\bar{k}} \left(2X_{\bar{k}} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{X_{\bar{k}}}{\sqrt{X_{\bar{k}}^2 + \Delta^2}} \right) - 2\Delta \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\sqrt{X_{\bar{k}}^2 + \Delta^2}} \right) + \quad (\text{N.1})$$

$$+ \sum_{\bar{k}} \left[X_{\bar{k}} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{X_{\bar{k}}}{\sqrt{X_{\bar{k}}^2 + \Delta^2}} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{X_{\bar{k}}}{\sqrt{X_{\bar{k}}^2 + \Delta^2}} \right) \right) + 2\Delta \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\sqrt{X_{\bar{k}}^2 + \Delta^2}} \right] [\alpha_{\bar{k}}^+(1) \alpha_{\bar{k}}(1) + \alpha_{\bar{k}}^+(2) \alpha_{\bar{k}}(2)].$$

Dalje imamo:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{BCS}} &= \sum_{\vec{k}} \left(X_{\vec{k}} - \frac{X_{\vec{k}}^2}{\sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} - \frac{\Delta^2}{\sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} \right) + \\ &+ \sum_{\vec{k}} \left[\frac{X_{\vec{k}}^2}{\sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} + \frac{\Delta^2}{\sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} \right] [\alpha_{\vec{k}}^+(1)\alpha_{\vec{k}}^-(1) + \alpha_{\vec{k}}^+(2)\alpha_{\vec{k}}^-(2)], \\ \hat{H}_{\text{BCS}} &= \sum_{\vec{k}} \left(X_{\vec{k}} - \frac{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}{\sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} \right) + \sum_{\vec{k}} \frac{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}{\sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} [\alpha_{\vec{k}}^+(1)\alpha_{\vec{k}}^-(1) + \alpha_{\vec{k}}^+(2)\alpha_{\vec{k}}^-(2)].\end{aligned}\quad (\text{N.2})$$

Konačno:

$$\hat{H}_{\text{BCS}} = \sum_{\vec{k}} (X_{\vec{k}} - \sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}) + \sum_{\vec{k}} \sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2} [\alpha_{\vec{k}}^+(1)\alpha_{\vec{k}}^-(1) + \alpha_{\vec{k}}^+(2)\alpha_{\vec{k}}^-(2)]. \quad (\text{N.3})$$

Prilog O: Uslov superfluidnog kretanja

Sada ćemo izvesti uslov superfluidnog kretanja [17]. Ako se količina tečnosti čija je masa M kreće brzinom \vec{V} , onda je kinetička energija ove mase tečnosti:

$$E = \frac{\vec{Q}^2}{2M}, \quad \vec{Q} = M\vec{V}. \quad (\text{O.1})$$

Tečnost se kreće kroz cev i prilikom kretanja između zidova cevi i tečnosti dolazi do trenja. Usled trenja sa zidovima cevi molekuli tečnosti se eksitiraju, što drugim rečima znači da se efekti trenja demonstriraju pojavljivanjem elementarnih ekscitacija u tečnosti. Ako se usled trenja pojavi samo jedna elementarna ekscitacija, čiji je impuls \vec{p} i energija $\varepsilon_{\vec{p}}$, onda je energija posmatrane tečnosti:

$$E' = \frac{(\vec{Q} + \vec{p})^2}{2M} + \varepsilon_{\vec{p}} = \frac{\vec{Q}^2}{2M} + \frac{2\vec{Q} \cdot \vec{p}}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2M} + \varepsilon_{\vec{p}} = E + \vec{p} \cdot \vec{V} + \varepsilon_{\vec{p}} + \frac{\vec{p}^2}{2M}. \quad (\text{O.2})$$

Pošto se pri trenju gubi deo kinetičke energije tečnosti, očigledno je da energija E' mora biti manja od energije E , pa se uslov za kretanje sa trenjem može izraziti sledećom nejednakošću:

$$E' < E. \quad (\text{O.3})$$

Kada se zanemari mala veličina $\frac{\vec{p}^2}{2M}$, onda gornja nejednakost prelazi u:

$$\varepsilon_{\vec{p}} + \vec{p} \cdot \vec{V} < 0. \quad (\text{O.4})$$

Suprotna nejednakost, očigledno predstavlja uslov za kretanje bez trenja:

$$\varepsilon_{\vec{p}} + \vec{p} \cdot \vec{V} > 0. \quad (\text{O.5})$$

Kriterijum postaje najstrožiji ako su \vec{p} i \vec{V} suprotno usmereni, tj. ako je $\vec{p} \cdot \vec{V} = -pV$. Tada se uslov za nastanak superfluidnog kretanja svodi na:

$$\frac{\varepsilon_{\vec{p}}}{p} > V, \quad p = |\vec{p}|, \quad V = |\vec{V}|. \quad (\text{O.6})$$

Da bi superfluidno kretanje moglo biti realizovano pri svim mogućim impulsima elementarnih pobuđenja, potrebno je da minimum veličine $\frac{\varepsilon_{\vec{p}}}{p}$ bude pozitivan, jer će onda, s obzirom da se V može u eksperimentu učiniti proizvoljno malim, uslov (O.6) važiti za sve impulse p . Zato je konačna forma uslova za nastanak superfluidnog kretanja:

$$\min \frac{\varepsilon_{\vec{p}}}{p} > 0. \quad (\text{O.7})$$

Prilog P: Uslov (3.21)

U uslovu $1 = \frac{W}{4N} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{X_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}}$ (3.20) pređemo sa sumiranja na integraciju prema formuli

$$\sum_{\vec{k}} F(\vec{k}) \rightarrow \frac{V}{2\pi^2} \int F(k) k^2 dk, \quad \text{gde je } V = a^3 N, \text{ i iskoristimo izraz } X_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2}{m} k_F (k - k_F) \quad (3.15):$$

$$1 = \frac{W}{4N} \frac{a^3 N}{2\pi^2} \int_{k_F - k_G}^{k_F + k_G} \frac{k^2 dk}{\sqrt{\frac{\hbar^4}{m^2} k_F^2 (k - k_F)^2 + \Delta^2}}. \quad (\text{P.1})$$

Znamo da je $\hbar k_F = p_F$ i $\frac{p_F}{m} = v_F$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{W a^3}{8\pi^2} \int_{k_F - k_G}^{k_F + k_G} \frac{k^2 dk}{\sqrt{\hbar^2 v_F^2 (k - k_F)^2 + \Delta^2}} = \\ &= \frac{W a^3}{8\pi^2 \hbar v_F} \int_{k_F - k_G}^{k_F + k_G} \frac{k^2 dk}{\sqrt{(k - k_F)^2 + \frac{\Delta^2}{\hbar^2 v_F^2}}}. \end{aligned} \quad (\text{P.2})$$

Uvodimo smenu $x = k - k_F$ (x je malo, jer je $k \approx k_F$), pa imamo: $dx = dk$ i $k^2 = x^2 + 2xk_F + k_F^2 = (x + k_F)^2 \approx k_F^2$. Granice integracije postaju: za $k = k_F - k_G$, $x = -k_G$ i za $k = k_F + k_G$, $x = k_G$.

Sledi:

$$1 \approx \frac{Wa^3}{8\pi^2\hbar v_F} \int_{-k_G}^{k_G} \frac{k_F^2 dx}{\sqrt{x^2 + \frac{\Delta^2}{\hbar^2 v_F^2}}}. \quad (\text{P.3})$$

Integralimo:

$$1 \approx \frac{Wa^3 k_F^2}{8\pi^2\hbar v_F} \ln \frac{\sqrt{k_G^2 + \frac{\Delta^2}{\hbar^2 v_F^2}} + k_G}{\sqrt{k_G^2 + \frac{\Delta^2}{\hbar^2 v_F^2}} - k_G}. \quad (\text{P.4})$$

Možemo uzeti aproksimacijo $\sqrt{k_G^2 + \frac{\Delta^2}{\hbar^2 v_F^2}} \approx \sqrt{\left(k_G + \frac{\Delta^2}{2\hbar^2 v_F^2 k_G}\right)^2} = k_G + \frac{\Delta^2}{2\hbar^2 v_F^2 k_G}$,
zanemarujemo član $\frac{\Delta^4}{4\hbar^4 v_F^4 k_G^2}$, pa imamo:

$$\ln \frac{\sqrt{k_G^2 + \frac{\Delta^2}{\hbar^2 v_F^2}} + k_G}{\sqrt{k_G^2 + \frac{\Delta^2}{\hbar^2 v_F^2}} - k_G} \approx \ln \frac{k_G + \frac{\Delta^2}{2\hbar^2 v_F^2 k_G} + k_G}{k_G + \frac{\Delta^2}{2\hbar^2 v_F^2 k_G} - k_G} = \ln \frac{2k_G + \frac{\Delta^2}{2\hbar^2 v_F^2 k_G}}{\frac{\Delta^2}{2\hbar^2 v_F^2 k_G}} = \ln \left(\frac{4\hbar^2 v_F^2 k_G^2}{\Delta^2} + 1 \right), \quad (\text{P.5})$$

odnosno:

$$\ln \frac{\sqrt{k_G^2 + \frac{\Delta^2}{\hbar^2 v_F^2}} + k_G}{\sqrt{k_G^2 + \frac{\Delta^2}{\hbar^2 v_F^2}} - k_G} \approx \ln \left(\frac{4\hbar^2 v_F^2 k_G^2}{\Delta^2} + 1 \right) \approx \ln \frac{4\hbar^2 v_F^2 k_G^2}{\Delta^2}, \quad (\text{P.6})$$

jer je $\frac{4\hbar^2 v_F^2 k_G^2}{\Delta^2} \gg 1$. Dakle, na osnovu izraza (P.4) i (P.6) dobijamo:

$$1 \approx \frac{Wa^3 k_F^2}{8\pi^2\hbar v_F} \ln \frac{4\hbar^2 v_F^2 k_G^2}{\Delta^2}. \quad (\text{P.7})$$

Literatura

- [1] J. P. Šetrajčić, Superprovodnost, Zmaj, Novi Sad (2001)
- [2] J. Sólyom, A modern szilárdtest-fizika alapjai II., Elte Eötvös Kiadó, Budapest (2010)
- [3] I. Supek, Teorijska fizika i struktura materije. Dio 2, Školska knjiga, Zagreb (1990)
- [4] D. Raković, Fizičke osnove i karakteristike elektrotehničkih materijala, Akademska misao, Beograd (2000)
- [5] J. F. Annett, Superconductivity, Superfluids and Condensates, Oxford University Press (2003)
- [6] V. L. Ginzburg, Nobel Lecture: On superconductivity and superfluidity (what I have and have not managed to do) as well as on the „physical minimum” at the beginning of the XXI century, P.N. Lebedev Physics Institute, Moscow (2004), Rev. Mod. Phys. **76**, 981 (2004)
- [7] G. R. Stewart, Superconductivity in iron compounds, University of Florida, Gainesville (2011), Rev. Mod. Phys. **83**, 1589 (2011)
- [8] Elektrotehnički fakultet, Beograd, Materijali u elektrotehnici/Superprovodnici, link: <http://nobel.etf.bg.ac.rs/studiranje/kursevi/of2mue/materijali/2014/09%20-%20Superprovodnici.pdf>
- [9] P. Schmüser, Superconductivity, Universität Hamburg, link: <http://www.desy.de/~pschmues/Superconductivity.pdf>
- [10] C. Kittel, Uvod u fiziku čvrstog stanja, Savremena administracija, Beograd (1970)
- [11] М. Г. Мнѐян, Сверхпроводники в современном мире, Просвещение, Москва (1991)
- [12] Đ. Mušicki, Uvod u teorijsku fiziku III/2, Prirodno-matematički fakultet, Beograd (1987)
- [13] M. C. Chang, Superconductivity, link: http://phy.ntnu.edu.tw/~changmc/Teach/SS/SS_note/chap10.pdf
- [14] L.-P. Lévy, Magnetism and Superconductivity, Springer, New York (2000)
- [15] M. Suzuki, I. S. Suzuki, Lecture Note on Solid State Physics/Ginzburg-Landau Theory of Superconductivity, State University of New York at Binghamton, Binghamton (2007), link: <http://www.binghamton.edu/physics/docs/ginzburg-landau.pdf>

[16] J. E. Sonier, The Magnetic Penetration Depth and the Vortex Core Radius in Type-II Superconductors/2.4 The GL Penetration Depth and Coherence Length, link:
<http://musr.ca/theses/Sonier/PhD/node15.html#SECTION00540000000000000000>

[17] B. S. Tošić, Statistička fizika, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad (1978)

[18] C. Timm, Theory of Superconductivity, TU Dresden, Dresden (Wintersemester 2011/2012), link:
https://www.physik.tu-dresden.de/~timm/personal/teaching/thsup_w11/Theory_of_Superconductivity.pdf

[19] L. Xu, Z. Shu, S. Wang, From BCS theory for isotropic homogeneous systems to the complete Ginzburg-Landau equations for anisotropic inhomogeneous systems, Phys. Rev. B **57**, 11654 (1998), link:
<http://folk.uio.no/dansh/pdf/author/xu-prb98.pdf>

KRATKA BIOGRAFIJA



Antonija Nikolić je rođena 25.12.1980. u Subotici, Srbija. Osnovnu školu „Hunjadi Janoš” je završila u Čantaviru, a zatim gimnaziju „Svetozar Marković”, prirodno-matematički smer, u Subotici. 1999. godine je upisala Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer diplomirani fizičar. 5 godina je predavala fiziku u školama u Čantaviru i Subotici.

Novi Sad, 2016

Antonija Nikolić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa:

Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada:

Diplomski rad

VR

Autor:

Antonija Nikolić, br. dos. 372/99

AU

Mentor:

Dr. Slobodan Radošević

MN

Naslov rada:

Uporedni prikaz Ginzburg-Landauove i BCS teorije superprovodnosti

NR

Jezik publikacije:

srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda:

srpski/engleski

JI

Zemlja publikovanja:

Srbija

ZP

Uže geografsko područje:

Vojvodina

UGP

Godina:

2016

GO

Izdavač:

Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa:

Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

MA

Fizički opis rada:

FO

Naučna oblast:

Fizika

NO

Naučna disciplina:

Teorijska fizika kondenzovanog stanja

ND

Predmetna odrednica/ ključne reči:

Superprovodnost, Ginzburg-Landauova teorija, BCS teorija

PO

UDK

Čuva se:

Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

nema

VN

Izvod:

IZ

Datum prihvatanja teme od NN veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik:

Dr. Milica Pavkov-Hrvojević

član:

Dr. Slobodan Radošević

član:

Dr. Milan Pantić

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

Monograph publication

DT

Type of record:

Textual printed material

TR

Content code:

Final paper

CC

Author:

Antonija Nikolić

AU

Mentor/comentor:

Dr. Slobodan Radošević

MN

Title:

Comparative study of Ginzburg-Landau and BCS theories of superconductivity

TI

Language of text:

Serbian (Latin)

LT

Language of abstract:

English

LA

Country of publication:

Serbia

CP

Locality of publication:

Vojvodina

LP

Publication year:

2016

PY

Publisher:

Author's reprint

PU

Publication place:

Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

PP

Physical description:

5/182/32/0/71/0/3

PD

Scientific field:

Physics

SF

Scientific discipline:

Solid state theory

SD

Subject/ Key words:

Superconductivity, Ginzburg-Landau theory, BCS theory

SKW

UC

Holding data:

Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4

HD

Note:

none

N

Abstract:

AB

Accepted by the Scientific Board:

ASB

Defended on:

DE

Thesis defend board:

DB

President:

Dr. Milica Pavkov-Hrvojević

Member:

Dr. Slobodan Radošević

Member:

Dr. Milan Pantić