GLUŠAC ANDJELKO
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
NOVI SAD

Tema: ULOGA SPIN-FONONSKE INTERAKCIJE U FEROELEKTRIČNOJ PARAMETARSKOJ REZONANCIJI

Novi Sad, juna 1978.

Zahvaljujem se na pomoći i sugestijama Dr RADOSLAVU ŽAKULI

koje mi je uputio pri izradi ovog diplomskog rada.

S A D R Ž A J

Strana

I UVOD 1

II PARAMETARSKA REZONANCIJA U KLASIČNOJ FIZICI 6

III PARAMETARSKA REZONANCIJA U MAGNETNIM POJAVAMA 11
(Klasičan prilaz)

- Jednačina Landau-Lifšica za magnetnu rezonanciju 11

IV RAST SPINSKIH TALASA PARAMETARSKOG POBUDJENJA U PRELAZNOM REŽIMU (kvantnomehanički tretman) 14

- disipacija je odsutna 17

- izračunavanje disipacije 18

V MOGUĆNOST PARAMETARSKE REZONANCIJE KOD FEROELEKTRIKA SA VODONIČNOM VEZOM 22

- Hamiltonijan 23

- Uslovi rezonancije 24

VI UTICAJ OSCILOVANJA REŠETKE NA POJAVU PARAMETARSKE REZONANCIJE KOD FEROELEKTRIKA SA POPREČNIM POLJEM 28

- Hamiltonijan 29

- Uslovi rezonancije 33

VII ZAKLJUČAK 36

VIII LITERATURA 37

I UVOD

U poslednjim godinama podigao se interes prema pojavama koje se dešavaju u nelinearnim sredinama pri pobudjivanju i interakciji talasa konačne amplitude kod tih sredina. Može se čak govoriti i o pojavi nove naučne discipline - fizike talasa u nelinearnim sredinama, gde se razmatranje vrši sa jedinstvene tačke gledišta i u plazmi, i u feromagneticima, u hidrodinamici i koji u sebi uključuju veliki deo nelinearne optike. Vrlo često u nelinearnim sredinama postoje situacije, kada su uvučeni u interakciju istodobno mnogi nekoherentni oscilujući stepeni slobode, pri čemu je distribucija energije po njima takva, da sistem uopšte nije blizak ni po čemu stanju termodinamičke ravnoteže.

Takve situacije, koje traže radi svoga opisa statističke metode, principijalno ipak nisu svodljivi na tradicionalne metode statističke fizike i mogu se svrstati pod pojam "talasna turbulencija". Ako pri tome faze pojedinih talasa možemo smatrati statistički nezavisne (kao minimalan uslov za to treba uzeti da je nivo nelinearnosti bio mali) tada ćemo govoriti o slaboj, a u suprotnom slučaju o jakoj turbulenciji. Definisana na ovaj način "talasna turbulencija" (i jaka i slaba) objedinjuje široku klasu raznoraznih fizičkih procesa i pojava čije sistematsko opisivanje tek počinje. "Talasna turbulencija" obično se javlja kao rezultat razvića ovog ili onog tipa nestabilnosti u sredini.

U ovom radu daće se izmedju ostalog pregled teorijskih i eksperimentalnih rezultata za jedan tip slabe talasne turbulencije, koja nastaje usled postojanja i razvitka parametarske nestabilnosti u sredini (parametarska rezonancija). Za taj tip turbulencije karakteristično je da je zadatak njenog opisa u najprostijoj varijanti čisto dinamički.

Parametarska nestabilnost se javlja pri periodičnoj promeni parametara u vremenu sredine ili pri rasprostranjenju u njoj monohromatskih talasa velike amplitude. Pojava parametarske rezonancije za oscilatore sa jedinim stepenom slobode otkrivena je još u XIX veku. U 20-im godinama našeg veka parametarska rezonancija intenzivno se izučavala kako se razvijala radio tehnika i u to vreme izgradjivani su prvi radio generatori (parametarski) i amplifikatori.

Pitanje o parametarskoj rezonanciji u neprekidnoj sredini rešavano je u 50-im godinama ovog veka u vezi sa ogledima Bloembergena, Deimova i Jonga na feromagnetnoj rezonanciji pri većim nivoima snage. Tu je otkriveno "dopunsko" apsorbovanje energije homogene precesije namagnetisanja, koja ima oštro izražen pragov karakter u amplitudi. Suet je objasnio tu pojavu kao parametarsku nestabilnost homogene precesije u odnosu na par spinskih talasa sa frekvencijama ω_1, ω_2 i talasnim vektorima $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ i prvi formulisao uslov parametarske rezonancije u neprekidnoj sredini. Za razliku od poznatog uslova parametarske rezonancije za oscilatore

$$n\,\omega_p = 2\omega$$

oni ovde imaju oblik

$$n\,\omega_p = \omega_1 + \omega_2 \qquad ; \quad \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0 \tag{1.1}$$

gde je ω_p- frekvencija homogene precesije. Pošto je $\vec{k}_1=-\vec{k}_2$, onda pri parametarskoj nestabilnosti radjaju se parovi talasa sa jednakim i suprotno orijentisanim talasnim vektorima. Broj n odredjuje stepen nestabilnosti.

1960. godine Morgenthaler, a nezavisno Schlömann, Green i Milano predskazali su (Milano je to eksperimentalno i otkrio) pojavu "paralelnog pumpanja". U poslednjim godinama paralelno pumpanje postalo je jedno od osnovnih načina generacije spinskih talasa u feromagneticima.

Od početka 60-ih godina počelo je izučavanje parametarske nestabilnosti u plazmi i u nelinearnoj optici. 1962. godine Oraevski i Sogdeev izgradili su teoriju raspadajuće nestabilnosti (prvog reda) monohromatskog talasa konačne amplitude u nelinearnoj sredini. Ta nestabilnost dovodi, (ako polazni talas ima frekvenciju ω, a talasni vektor $\vec{k}$ do pobudjenog para talasa čije frekvencije i talasni vektori stoje u relaciji:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \qquad ; \qquad \vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \tag{1.2}$$

Uslov (1.2) predstavlja očiglednu generalizaciju uslova (1.1) za n=1, za parametarsku nestabilnost prvog reda. Ta nestabilnost se tumači kao koherentno raspadanje kvanata polaznog talasa $(\vec{k},\omega)$ na par kvanata $(\vec{k}_1,\omega_1;\ \vec{k}_2,\omega_2)$, a odnos (1.2) kao zakon očuvanja pri tom raspadu. Uslovi (1.2) u nelinearnoj optici dobili su ime uslov sinhronizacije.

Danas linearnu teoriju parametarske nestabilnosti u homogenim neprekidnim sredinama možemo u opštim crtama smatrati završenom. Drugačije stoji stvar sa nelinearnom teorijom. U vezi toga od 60-ih godina imamo prve modele, koji su imali za cilj da opišu mehanizam koji ograničava rast amplitude nestabilnog spinskog talasa, a važan korak za razumevanje spinske turbulencije učinio je Schlömann (1) koji je obratio pažnju na neophodnost uračunavanja nelinearne interakcije parametarski pobudjenih talasa izmedju sebe i rekao da glavnu kontribuciju u toj interakciji daju nelinearni procesi koji zadovoljavaju uslove:

$$\omega_{\vec{k}} + \omega_{-\vec{k}} = \omega_{\vec{k}'} + \omega_{-\vec{k}'} \tag{1.3}$$

kod talasa koji ne izlaze iz procesa rezonancije. Pokazano je da interacija toga tipa objašnjava posmatrane efekte udvajanja frekvencije spinskih talasa; tada procesi (1.3) očuvavaju korelaciju faza unutar svakog parametarski pobudjenog para talasa sa suprotnim talasnim vektorima i dovode do samosaglasnog menjanja sumarne faze talasa kod svakog para. Ta promena sumarne faze dovodi do pogoršanja veze spinskog talasa sa "pumpom" i u konačnom rezultatu, k ograničenju njihove amplitude. Pri tome ti talasi se pokazuju pobudjenim čije prebrojavanje (prebrojavanje frekvencije) zadovoljava tačno uslov parametarske rezonancije. Takav "fazni" mehanizam ograničenja amplitude talasa, specifičan za neprekidnu sredinu, u čistom obliku ostvaruje se samo u sistemu sa granično velikim dimenzijama (u odnosu na talasnu dužinu) i pokazuje se kao glavni mehanizam ograničenja amplitude spinskog talasa pri paralelnom pumpanju. Proces (1.3) (toga tipa) sa zahtevom neophodnih faznim odnosa, dobro je i zgodno izučavati, kada se ostvari dijagonalizacija hamiltonijana interakcije talasa analogno BCS-aproksimaciji u teoriji superprovodljivosti. Teorija koja je zasnovana na toj dijagonalizaciji dobila je naziv S-teorija. U okviru te teorije i njene generalizacije omogućeno je da se dalje približimo kompletnosti izučavanja turbulencije spinskih talasa.

Ozbiljan probni kamen za S-teoriju bilo je pitanje o autooscilovanjima namagnetisanja pri parametarskom pobudjenju spinskih talasa. Još 1961. godine otkriveno je da se u odredjenim uslovima uočava neuspostavljanje stacionarnih režima i oscilovanje namagnetisanja oko srednje njegove vrednosti. U poslednjim godinama ta oscilovanja intenzivno su se istraživala i bilo je otkriveno da su njihova svojstva-amplituda i spektralni sastav - veoma oštljivi po svim parametrima eksperimenta, što je sve jako otežalo njihovu interpretaciju.

U ovom radu mi smo stavili sebi za cilj da ispitamo parametarsku rezonanciju u uslovima koji vladaju kod tipičnih feroelektrika, kao što su (PO_4-K), KDP sa vodoničnom vezom (KH_2PO_4). Spoljni agens je promenljivo električno polje kojim "paralelno pumpamo) kristal neograničenih dimenzija. Ispitaće se kritična vrednost polja u uslovima idealnog kristala i u uslovima kada su pobudjeni fononski stepeni slobode u harmonijskoj aproksimaciji. Pregled ovih problema zasniva se na modelu feroelektrika koji je dao de-Gennes (2), a takodje u radovima (3) i (4).

II PARAMETARSKA REZONANCIJA U KLASIČNOJ FIZICI

U klasičnoj fizici (5) efekat parametarske rezonancije se javlja u slučaju nezatvorenih sistema kod kojih se spoljašnje dejstvo svodi na promenu njihovih parametara u toku vremena.

Parametri linearnog sistema su koeficijenti m i k u Lagrange-ovoj funkciji. Ako oni zavise od vremena, onda jednačina kretanja glasi:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0 \qquad (2.1)$$

U-koliko je m=const predhodnu jednačinu možemo napisati u obliku:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)x = 0 \qquad (2.2)$$

gde je oblik funkcije $\omega(t)$ dat uslovima zadatka. Pretpostavimo da je ta funkcija periodična sa nekom frekvencijom μ (tada je perioda $T=\frac{2\pi}{\mu}$. To znači da je $\omega(t+T)=\omega(t)$ te je zbog toga jednačina (2.2) invarijantna u odnosu na transformaciju $t \to t+T$, i odavde proizilazi, da ako je $x(t)$ rešenje jednačine, onda je i funkcija $x(t+T)$ takodje rešenje. Drugim rečima, ako su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ dva nezavisna integrala jednačine (2.2), onda se pri zameni $t \to t+T$ oni transformišu uzajamno linearno:

$$x_1(t+T) = f_{11}(t,T)x_1(t) + f_{12}(t,T)x_2(t)$$
$$x_2(t+T) = f_{21}(t,T)x_1(t) + f_{22}(t,T)x_2(t)$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} x_1(t+T) \\ x_2(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(t,T) & f_{12}(t,T) \\ f_{21}(t,T) & f_{22}(t,T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

pri čemu je moguće odabrati f_{ij} takvog oblika da se prethodno može napisati:

$$x_1(t+T) = \mu_1(t,T)x_1(t)$$
$$x_2(t+T) = \mu_2(t,T)x_2(t) \qquad (2.3)$$

Najopštiji oblik funkcija, koje imaju takvo svojstvo, biće:

$$x_1(t) = \mu_1^{\frac{t}{T}} \Pi_1(t) \quad , \quad x_2(t) = \mu_2^{\frac{t}{T}} \Pi_2(t) \qquad (2.4)$$

gde su: Π_1 (t) i Π_2(t) čisto periodične funkcije vremena (sa periodom T).

Konstante μ_1 i μ_2 u tim funkcijama moraju biti uzajamno povezane odredjenom relacijom.

Ako pomnožimo jednačine

$$\ddot{x}_1 + \omega^2(t) x_1 = 0 \qquad \text{sa } x_2$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2(t) x_2 = 0 \qquad \text{sa } x_1 \qquad \text{i}$$

i oduzimajući član po član dobijamo

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) = 0$$

ili

$$\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = const \qquad (2.5)$$

Za ma koje funkcije $x_1(t)$ i $x_2(t)$ oblika (2.4) izraz na levoj strani prethodne jednačine (2.5) množi se sa $\mu_1 \mu_2$ pri promeni argumenta t sa T. Zbog toga, za održavanje oblika jednačine (2.5) zahteva se da bude:

$$\mu_1 \mu_2 = 1 \qquad (2.6)$$

Dalje zajključke o konstantama μ_1 i μ_2 možemo stvoriti polazeći od činjenice realnosti koeficijenta jednačine (2.2). Ako je x(t) ma koji integral takve jednačine, onda i konjugovano kompleksna funkcija x*(t) mora zadovoljavati tu istu jednačinu. Odavde izlazi da se par konstanti μ_1 i μ_2 mora poklapati sa parom μ_1^*, μ_2^* , tj. moraju biti ili $\mu_1 = \mu_2^*$ ili da su μ_1 i μ_2 realni. U prvom slučaju uzimajući u obzir (2.6) imamo da je $\mu_1 = \frac{1}{\mu_1^*}$, tj. $|\mu_1|^2 = |\mu|^2 = 1$; konstante μ_1 i μ_2 su prema moduli jednake jedinici.

U drugom slučaju dva nezavisna integrala jednačine (2.2) imaju oblik:

$$x_1(t) = \mu^{\frac{t}{T}} \Pi_1(t) \quad , \quad x_2(t) = \mu^{\frac{t}{T}} \Pi_2(t) \qquad (2.7)$$

sa pozitivnim ili negativnim realnim brojem μ različitim od jedinice. Jedna od tih funkcija (prva ili druga kada je $|\mu|>1$ ili $|\mu|<1$ eksponencijalno raste sa vremenom. To znači da stanje mirovanja sistema (u položaju ravnoteže x=0) biće nestabilno: dovoljno je i malo odstupanje od toga stanja da bi nastalo pomeranje x počelo brzo da raste sa vremenom. Ova pojava se naziva parametarska rezonancija. Treba obratiti pažnju na to, da, ako su početne vrednosti x i $\dot{x}$ striktno jednake nuli, one ostaju jednake nuli i nadalje, za razliku od obične rezonancije u kojoj se porast pomeranja sa vremenom (koje je proporcionalno sa t) vrši i od početne vrednosti, koja je jednaka nuli.

Uslovi nastajanja parametarske rezonancije se mogu objasniti u jednom važnom slučaju kada se funkcija $\omega(t)$ malo razlikuje od neke konstantne veličine ω_0 i prosta je periodična funkcija:

$$\omega^2(t)=\omega_0^2(1+h\cos\mu t) \qquad (2.8)$$

gde je konstanta $h\ll 1$ (smatrajući da je h pozitivno, što se uvek može postići podesnim izborom početka računanja vremena). Kako će se dalje videti, najintenzivnije nastaje parametarska rezonancija, ako je frekvencija funkcije ω(t) bližu dvostrukoj frekvenciji ω_0.

Zbog toga ćemo staviti:

$$\mu=2\omega_0+\varepsilon \qquad \text{, gde je} \quad \varepsilon\ll\omega_0$$

Rešenje jednačine kretanja

$$\ddot{x}+\omega_0^2[1+h\cos(2\omega_0+\varepsilon)t]x=0 \qquad (2.9)$$

tražićemo u obliku:

$$x=a(t)\cos(\omega_0+\tfrac{\varepsilon}{2})t+b(t)\sin(\omega_0+\tfrac{\varepsilon}{2})t \qquad (2.10)$$

gde su a(t) i b(t) funkcije od vremena koje se sporo menjaju (u odnosu na faktore cos i sin). Takav oblik rešenja nije tačan, jer funkcija x(t) sadrži takodje članove sa frekvencijama, koje se razlikuju od $\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}$ za ceo multiplum ($2\omega_0+\varepsilon$); ali ti članovi su male veličine višeg reda u odnosu na h i u prvoj aproksimaciji ih možemo zanemariti.

Zamenićemo (2.10) u (2.9) i izvršiti izračunavanja zadržavajući samo članove prvog reda po ε. Pri tom pretpostavimo, da je $\dot{a} \approx \varepsilon a$, $\dot{b} \approx \varepsilon b$ (pravilnost ove pretpostavke u uslovima rezonancije se potvrdjuje rezultatom). Proizvode trigonometrijskih faktora treba razložiti u sumu.

$$\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\cos(2\omega_0+\varepsilon)t = \frac{1}{2}\cos\left(3\omega_0+\frac{3\varepsilon}{2}\right)t + \frac{1}{2}\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

$$\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\cos(2\omega_0+\varepsilon)t = \frac{1}{2}\sin\left(3\omega_0+\frac{3\varepsilon}{2}\right)t - \frac{1}{2}\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

odbacujući male članove višeg reda, tj. članove sa frekvencijom $3(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2})$.

Na osnovu svega prethodno rečenog tok rešavanja jednačine (2.9) će izgledati:

$$x = a\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t + b\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

$$\dot{x} = \dot{a}\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t - a\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t + \dot{b}\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t + b\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

$$\ddot{x} = \ddot{a}\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t - \dot{a}\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t - \dot{a}\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t - a\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t + \ddot{b}\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t + \dot{b}\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t + \dot{b}\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t - b\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\dot{a}\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t - \dot{a}\,\omega_0\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t - \\
&- \dot{a}\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t - \dot{a}\,\omega_0\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t - \dot{a}\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t - \\
&- a\omega_0^2\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t - a\,\omega_0\varepsilon\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t + \varepsilon\dot{b}\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t + \\
&+ 2\dot{b}\,\omega_0\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t + 2\dot{b}\frac{\varepsilon}{2}\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t - \\
&- b\,\omega_0^2\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t - b\varepsilon\,\omega_0\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t + \\
&+ \omega_0^2 a\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t + \omega_0^2 b\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t + \\
&+ h a\,\omega_0^2\frac{1}{2}\cos\left(3\omega_0+\frac{3\varepsilon}{2}\right)t + h a\,\omega_0^2\frac{1}{2}\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t + \\
&+ h a\,\omega_0^2\frac{1}{2}\sin\left(3\omega_0+\frac{3\varepsilon}{2}\right)t - h a\,\omega_0^2\frac{1}{2}\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t = 0
\end{aligned}$$

S obzirom na $\varepsilon\dot{a} = \varepsilon^2 a \to 0$; $\varepsilon\dot{b} = \varepsilon^2 b \to 0$

kao rezultat se dobija:

$$\begin{aligned}
&-\left(2\dot{a} + b\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}b\right)\omega_0\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t + \\
&+\left(2\dot{b} - a\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}a\right)\omega_0\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t = 0
\end{aligned}$$

Zadovoljenje ove jednakosti zahteva da su istovremeno koeficijenti uz svaki faktor sin i cos jednaki nuli. Odavde se dobija sistem od dve linearne diferencijalne jednačine za funkcije a(t) i b(t). Prema opštim pravilima tražićemo rešenje koje proporcionalno sa e^{st}. Tada je:

$$sa + \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}\right)b = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon - \frac{h\omega_0}{2}\right)a - sb = 0$$

i uslov jednovremenog važenja te dve jednačine daje

$$s^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - \varepsilon^2\right] \tag{2.11}$$

Uslov nastajanja parametarske rezonancije nalazi se u realnosti s (tj. $s^2 > 0$).

Na taj način on postoji u intervalu:

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \varepsilon < \frac{h\omega_0}{2} \tag{2.12}$$

oko frekvencije $2\omega_0$.

Širina toga intervala je proporcionalna sa h i istog su reda vrednosti izložitelja pojačanja oscilovanja s koja se u njemu ostvaruju. Parametarska rezonancija takodje postoji za frekvencije γ promene parametara sistima, koje imaju vrednosti približno $\frac{2\omega_0}{n}$, gde je n ma koji ceo broj. Medjutim širina rezonantnih oblasti (oblasti nestabilnosti) sa povećanjem n brzo se smanjuje - kao h^n. Takodje se smanjuju i vrednosti izložitelja pojačanja oscilovanja u njima.

Pojava parametarske rezonancije postoji i pri slabom trenju u sistemu, ali se oblast nestabilnosti pri tom nešto sužava. Trenje dovodi do slabljenja amplitude oscilovanja prema zakonu $e^{-\lambda t}$ (gde je λ eksponent prigušenja, iz $f_{tr} = -\alpha\dot{x}$). Zbog toga pojačanje oscilovanja pri parametarskoj rezonanciji nastaje kao $e^{(s-\lambda)t}$ (sa pozitivnim s koje je dato rešenjem zadatka bez trenja), a granica oblasti nestabilnosti se odredjuje jednačinom $s-\lambda=0$. Tako koristeći s iz (2.11) dobijamo za rezonantnu oblast umesto (2.12), nejednakosti:

$$-\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-4\lambda^2}<\varepsilon<\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-4\lambda^2} \qquad (2.13)$$

Ovde treba obratiti pažnju na činjenicu, da se rezonancija pri tom ispostavlja mogućnom za aplitude koje nisu ma koliko male, već samo počinjući sa odredjenim "pragom" h, koji u slučaju (2.13) iznosi:

$$h_k=\frac{4\lambda}{\omega_0}$$

Može se pokazati da je za rezonancije u blizini frekvencija $\frac{2\omega_0}{n}$ veličina praga h_k proporcionalna sa $\lambda^{\frac{1}{n}}$, tj. povećava se sa povećanjem n.

Kao primer parametarske rezonancije u klasičnoj fizici može se posmatrati kod malih oscilovanja klatna u ravni čija tačka vešanja vrši vertikalno oscilovanje po zakonu $a\cos\gamma t$. Lagrange-ova funkcija za takvo klatno će imati oblik:

$$L=\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2+mla\gamma^2\cos\gamma t\cos\varphi+mgl\cos\varphi$$

Prema ovoj funkciji, za mala oscilovanja ($\varphi\ll 1$) imaćemo jednačinu kretanja:

$$\ddot{\varphi}+\omega_0^2\left[1+4\frac{a}{l}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t\right]\varphi=0$$

(gde je $\omega_0^2=\frac{g}{l}$). Odavde izlazi, da ulogu parametra h igra odnos $\frac{4a}{l}$

Uslov (2.12) parametarske rezonancije dobija oblik:

$$|\varepsilon|<\frac{2a\sqrt{g}}{l^{3/2}}$$

III PARAMETARSKA REZONANCIJA U MAGNETNIM POJAVAMA (Klasičan prilaz)

Jednačina Landau-Lifšica za magnetnu rezonanciju (6)

Feromagnetizam se ne može potpuno objasniti u okvirima klasičnog tretiranja. Glavnu ulogu u njemu igraju sopstveni (spinski) magnetni momenti elektrona i njihove medjusobne sile koje imaju kvantno poreklo. Ipak neke pojave kod feromagnetizma možemo dovoljno tačno posmatrati na osnovu klasične (tačnije kvaziklasične) teorije. Na taj način se objašnjava i feromagnetna rezonancija, koja se sastoji u sledećem.

Nepromenljivo magnetno polje, koje deluje na magnetni moment atoma ili posebno elektrona, izaziva larmorovnu precesiju tog momenta oko pravca polja. Tokom vremena to kretanje se gasi zbog toga, što energija larmorove precesije prelazi u toplotnu energiju. Ukoliko je spoljašnje polje dovoljno veliko to će se svi elementarni magnetni momenti orijentisati u pravcu spoljašnjeg polja. Takav feromagnetik se naziva zasićeni a magnetni moment jedinice zapremine, magnetni moment jedinice zapremine zasićenog feromagnetika. U ovoj glavi biće razmatran takav slučaj kada je feromagnetik uvek namagnetisan do zasićenja. Ako umesto nepromenljivog polja, na feromagnetik deluje promenljivo magnetno polje čiji je pravac normalan na pravac nepromenljivog, to će ono podržati precesiono kretanje. Pri podudarnosti frekvencije spoljašnjeg polja sa frekvencijom precesije nastupa feromagnetna rezonancija. Kretanje vektora namagnetisanosti u feromagnetiku opisuje se jednačinom Landau-Lifšica koja se može dobiti na sledeći način. Na magnetni moment $\vec{m}$ čestice (atoma ili posebno elektrona)

koja se nalazi u magnetnom polju $\vec{H}_{eff}$, deluje momenti sila $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{H}_{eff}$.
Posledica toga je da će se mehanički moment čestica (moment količine kretanja) $\vec{K}$ vladati po zakonu:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{N} = \vec{m} \times \vec{H}_{eff}$$

Magnetni i mehanički moment elektrona, kako proizilazi iz kvantne mehanike povezani su odnosom:

$$\vec{m} = -\mu \vec{K} \qquad ; \quad \mu = \frac{e_0}{mc}$$

gde je e - elementarno naelektrisanje, m - masa elektrona, c - brzina svetlosti u vakumu. Koristeći se tim odnosom i usrednjujući obe strane jednačine po fizički beskonačno maloj zapremini dobićemo jednačinu Landau-Lifšica:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\mu\left(\vec{M} \times \vec{H}_{eff}\right) \qquad (3.1)$$

gde je $\vec{M}$-vektor namagnetisanosti, $\vec{H}_{eff}$ - srednje magnetno polje, koje deluje na odredjeni elementarni magnetni moment. U neograničenoj, do zasićenja namagnetisanoj izotropnoj sredini, je:

$$\vec{H}_{eff} = \vec{H} - \lambda \vec{M} + q \nabla^2 \vec{M} \qquad (3.2)$$

gde je $\vec{H}$-srednje magnetno polje u sredini, λ, q - konstante. Drugi član (molekularno polje Vejsa) ne daje doprinos jednačini (3.2), pošto je $\vec{M} \times \vec{M} = 0$. Treći član postoji pri vrlo brzim promenama $\vec{M}$ u prostoru. Ovde se neće razmatrati takve promene $\vec{M}$ i zato ćemo staviti $\vec{H}_{eff} = \vec{H}$. Da bi jednačina (3.2) uzimala u obzir gubitak elektromagnetne energije u sredini, nju je potrebno dopuniti disipativnim članom. Obično se pretpostavlja da u $\vec{H}_{eff}$ uzali neko polje "sila trenja" $-p\,\frac{d\vec{M}}{dt}$, koje je proporcionalno brzini promene namagnetisanosti.

Tada jednačina (3.2) dobija oblik:

$$\frac{d\vec{M}}{dt}=-\mu(\vec{M}\times\vec{H})+\omega_r(\chi_0\vec{H}-\vec{M}) \tag{3.3}$$

gde je p - neki parametar (parametar gubitka). Ako je gubitak mali, a ukupno magnetno polje predstavlja sumu nepromenljivog polja H_0 i promenljivog polja h(t); $H=H_0+h(t)$; pri čemu je $|h|\ll H_0$, te će jednačina (3.3) dobiti prosti oblik:

$$\frac{d\vec{M}}{dt}=-\mu(\vec{M}\times\vec{H})+\omega_r(\chi_0\vec{H}-\vec{M}) \tag{3.4}$$

gde je:

$$\chi_0=\frac{M_0}{H_0}\quad,\quad \omega_r=\frac{p\mu^2M_0^2}{\chi_0}$$

$M_0=|\vec{M}|\rightarrow$ namagnetisanost zasićenja.

Zakon kretanja vektora namagnetisanosti $\vec{M}$ kada postoji trenje, nalazi se rešavajući jednačinu

$$\frac{d\vec{M}}{dt}=-\mu\vec{M}\times\vec{H_0}+\omega_r(\chi_0\vec{H_0}-\vec{M}) \tag{3.5}$$

Rešenje te jednačine nalazi se u obliku

$$M_x=m_x e^{-i\omega t},\ M_y=m_y e^{-i\omega t},\ M_z=M_0+m_z e^{-i\omega t}$$

gde je ω - nepoznata frekvencija, a osa z je usmerena duž $\vec{H_0}$.
Projektujući jednačinu (3.5) na ose koordinata i postavljajući $\vec{M}$, dobićemo sistem jednačina, koje imaju oblik:

$$\omega_0^2-(\omega+i\,\omega_r)^2=0$$

Frekvencija ω se javlja kao kompleksna veličina, $\omega=\omega_0-i\,\omega_r$; trenje kao i obično dovodi do zaustavljanja kretanja.
Vektor $\vec{M}$ koji se gasi vrši precesiju oko $\vec{H_0}$.

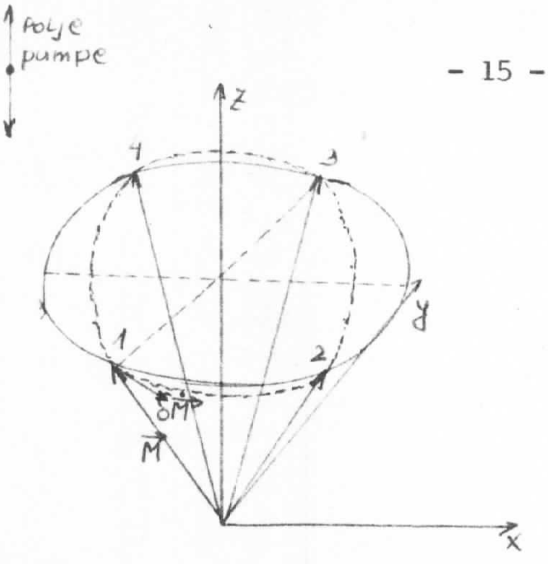
IV RAST SPINSKIH TALASA PARAMETARSKOG POBUDJENJA U PRELAZNOM REŽIMU

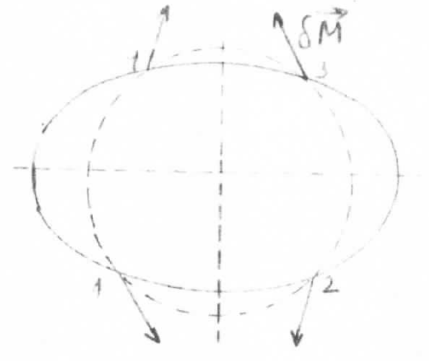
(kvantnomehanički tretman)

Poznato je, da u prisustvu dovoljno jakog visokofrekventnog magnetnog polja, može da dodje do parametarskog pobudjenja spinskih talasa kod fero i ferimagnetnih materijala. Situacija je naročito prosta ako je magnetno visokofrekventno polje (dalje se naziva "polje pumpe") paralelno konstantnom polju. Doskora su eksperimenti s takvom konfiguracijom polja široko korišćeni za proveru nekih značajnih teorija feromagnetne relaksacije (7).

U ovoj glavi ćemo opisati rezultate teorijskog ispitivanja prelaznih procesa koji se javljaju prilikom naglog dodavanja jakog visokofrekventnog polja na uzorak, s pretpostavkom da je polje pumpe paralelno konstantnom polju. Veliki broj teorijskih metoda korišćenih u ovom istraživanju primenljivo je takodje s velikom mogućnošću i u drugim eksperimentima, a neka teorijska predvidjanja dobijena za ovaj slučaj postaju još opštija.

Intuitivnom razumevanju fizičkih procesa koji se dešavaju u slučaju "paralelne pumpe" može pomoći data šema na slici, gde je pokazana precesija vektora momenta namagnetisanosti u nekoj tački uzorka. Kao neophodni preduslov parametarskog pobudjenja kod paralelne pumpe javlja se ta okolnost, da u odsustvu "polja pumpe" spin precesira, ne po kružnoj, već skoro po eliptičnoj putanji. Sa šeme se lako vidi da zbog eliptičnosti spinske precesije z-komponenta magnetnog momenta će biti zamenjena udvostručenom frekvencijom precesije. Polje pumpe koje ima takvu frekvenciju, može zato odavati energiju spinskom sistemu.





Ovo se detaljnije može razumeti ako se posmatra dopunski moment koji deluje od strane polja pumpe na vektor namagnetisanja. Taj dopunski moment dovodi do porasta brzine promene vektora namagnetisanja, $\delta\dot{\vec{M}}$. Shodno jednačinama kretanja, $\delta\dot{\vec{M}}$ treba da bude normalno, kako na vektor namagnetisanja, tako i na vektor polja pumpe. Ako se polje pumpe menja s frekvencijom precesije, to će vektor $\delta\dot{\vec{M}}$ imati pravac kako je pokazano na crtežu za različite tačke duž orbite precesije. Vidi se da je smer vektora od elipse precesije, i to znači da polje pumpe teži povećati ugao precesije, ako su fazni odnosi izmedju polja pumpe i namagnetisanja takvi, kao što je predstavljeno na slici. Podesnom formalnom teorijom prelaznog rasta spinskih talasa kod paralelnog pumpanja javlja se spin-talasni formalizam koji su razvili Holstein i Ahiezer.

U početku izrazimo komponente namagnetisanja preko operatora kreacije i anihilacije a^+ i a, te dobijamo:

$$\left.\begin{aligned} M_x + iM_y &= (2g\mu_B M_0)^{1/2} a^+ \left(1 - \frac{g\mu_B}{2M_0} a^+ a\right)^{1/2} \\ M_z &= M_0 - g\mu_B a^+ a \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

gde su: g - žiromagnetni faktor (Landeov faktor)

μ_B - Borov magneton

M_0 - namagnetisanje zasićenja,

a zatim izrazimo energiju preko furje komponenata $a_{\vec{n}} \Rightarrow a_{\vec{k}}$.

Uzimajući u obzir energiju izmene, zemanovsku i dipolnu energiju, hamiltonijan za mala pobudjenja dobija oblik:

$$\mathcal{H}=\sum_{k}\left\{A_k(t)a_k^+a_k+\frac{1}{2}B_k\left[e^{-2i\phi_k}a_ka_{-k}+\underset{(ES)}{e^{2i\phi_k}a_k^+a_{-k}^+}\right]\right\} \quad (4.2)$$

gde je:

$$\left.\begin{aligned} A_k(t)&=g\mu_B\left[H(t)+Dk^2+2\pi M_0\sin^2\theta_k\right] \\ B_k&=g\mu_B 2\pi M_0\sin^2\theta_k \end{aligned}\right\} \quad (4.3)$$

$|\vec{k}|=k$

θ_k, ϕ_k - sferne koordinate vektora položaja $\vec{r}$

D - fenomenološka konstanta izmene

Pretpostavimo da je:

$$H(t)=H_0+h\cos\omega t$$

Poznato je da od vremena nezavisni deo hamiltonijana (tj. za h=0), može biti preobličen u zbir članova koji odgovaraju harmonijskim oscilatorima. Oblik za to preobličenje izgleda:

$$\tilde{a}_k=\lambda_k a_k+\mu_k a_k^+ \quad (4.5)$$

Ako su λ_k i μ_k odabrani na odgovarajući način, hamiltonijan (4.2) dobija oblik:

$$\mathcal{H}=\sum_k \hbar\left\{\omega_k\tilde{a}_k^+\tilde{a}_k-\cos\omega t\left[(\rho_k\tilde{a}_k^+a_{-k}^+ + ES)+\sigma_k\tilde{a}_k^+\tilde{a}_k\right]\right\} \quad (4.6)$$

gde je:

$$\left.\begin{aligned} \omega_k&=\gamma\left[(H_0+Dk^2+4\pi M_0\sin^2\theta_k)(H_0+Dk^2)\right]^{1/2} \\ \rho_k&=\gamma h\lambda_k\mu_k=\gamma h\omega_M\sin^2\theta_k\exp(2i\phi_k)/4\omega_k \end{aligned}\right\} \quad (4.7)$$

i $\quad \gamma=\frac{g\mu_B}{\hbar}$ → žiromagnetski odnos

U izrazu (4.6) eliminisan je aditivni član koji ne zavisi od promenljivih $\tilde{a}_k$, i shodno tome on je ovde nevažan. Jednačine kretanja koje slede iz hamiltonijana (4.6) ne mogu se lako integraliti, ali ako ga na sledeći način preobličimo može biti tačno prointegraljen. Posljednji član u hamiltonijanu (4.6) predstavlja modulaciju rezonantnih frekvencija ω_k spinskih talasa i ne utiče na nestabilnost. Odgovarajućim postupkom u članu proporcionalnom $\tilde{a}_k^+ \tilde{a}_{-k}^+$, množitelj $\cos \omega t$ može biti bez veće greške zamenjen sa $(1/2)e^{i\omega t}$.

Posle tih svih postupaka, u ovom slučaju opravdanih i ispravnih, ukoliko je Q spinskih talasa dovoljno veliko, tada "skraćeni" hamiltonijan dobija oblik:

$$H = \sum_k \hbar \left\{ \omega_k \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_k - \frac{1}{2}\left[g_k \exp(i\omega t) \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_{-k}^+ + ES \right] \right\} \tag{4.8}$$

Disipacija je odsutna

Jednačine kretanja za operatore $\tilde{a}_k$ dobijene iz hamiltonijana (4.8) imaju sledeći oblik:

$$\dot{\tilde{a}}_k = i\left[\omega_k \tilde{a}_k - g_k \exp(i\omega t) \tilde{a}_{-k}^+ \right] \tag{4.9}$$

Da bi smo dobili rešenja u početku ćemo napisati jednačinu s novim promenljivim b_k, odredjene odnosom:

$$\tilde{a}_k = b_k e^{\frac{1}{2} i\omega t} \tag{4.10}$$

Tada je:

$$\begin{aligned} b_k(t) = b_k(0)\left[ch\, \varkappa_k t + i\left(\omega_k - \frac{\omega}{2}\right)\frac{1}{\varkappa_k} sh\, \varkappa_k t - \right. \\ \left. - b_{-k}^+(0)\, i g_k \frac{1}{\varkappa_k} ch\, \varkappa_k t \right] \end{aligned} \tag{4.11}$$

gde je:

$$\varkappa_k = \left[|g_k|^2 - \left(\omega_k - \frac{\omega}{2}\right)^2 \right]^{1/2} \tag{4.12}$$

Rešenje (4.11) je ispravno kako za realno, tako i za imaginarno $\varkappa_k$. Ovde nas interesuje samo realno $\varkappa_k$. Uz pomoć opšteg rešenja moguće je izračunati različite interesantne nam veličine, kao na primer konstantni i promenljivi magnetni moment, ili naprimer snagu koju je apsorbovao uzorak. Sve te veličine zavise od početnih vrednosti amplituda spinskih talasa $b_k(0)$. Ako se uzorak na početku nalazi u toplotnoj ravnoteži na temperaturi T, tada za srednje vantno-mehaničke vrednosti veličina $b_k^+(0)\, b_k(0)$ po ansamblu imamo:

$$\langle b_k^+(0)\, b_k(0) \rangle = n_k^0 = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_k}{K_B T}} - 1} \tag{4.13}$$

gde je: K_B - Bolcmanova konstanta

T - apsolutna temperatura

Analogno takodje dobijamo:

$$\langle b_k(0)\, b_{-k}(0) \rangle = 0 \tag{4.14}$$

ukoliko su kod toplotne ravnoteže odgovarajuće faze $b_k(0)$ $b_{-k}(0)$ rasporedjene haotično. Uz pomoć izraza (4.11), (4.12) i (4.13) možemo dobiti izraz za izračunavanje snage koju je uzorak apsorbovao, tj.:

$$P_{aps} = \frac{2}{V} \sum_k \left(n_k^{(0)} + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_k |g_k|^2 \frac{sh\, \varkappa_k t}{\varkappa_k} \tag{4.15}$$

gde je V zapremina uzorka.

Izračunavanje disipacije

U većini eksperimentalnih slučajeva nije moguće zanemariti disipacione efekte, kao što je bilo uradjeno u prethodnom razmatranju, te će taj nedostatak biti odstranjen u ovom delu. U izbegavanju nepotrebnog usložnjavanja računa radiće se klasično a ne kvantno-mehanički. Na taj način ćemo promenljive $\tilde{a}_k$ i $\tilde{b}_k$ posmatrati kao brojeve i mesto ermitskog sprežućeg operatora a_k^+ pojaviće se odgovarajuće kompleksne sprežuće veličine a_k^*. U jednačini (4.9) disipacija se uzima u obzir pomoću pripisivanja imaginarnog dela rezonatnoj frekvenciji i dodavanja desnoj strani te jednačine toplotnu pobudjujuću silu $f_k(t)$. Nova jednačina kretanja ima oblik:

$$\dot{\tilde{a}}_k = i\left[(\omega_k + i\eta_k)\tilde{a}_k - \rho_k e^{i\omega t}\tilde{a}^{+}_{-k}\right] + f_k(t) \tag{4.16}$$

gde je η_k - frekvencija relaksacije k-tog spinskog talasa. Toplotna ~~izmu-~~ pobu- ~~djena~~ djuća sila $f_k(t)$ nastaje zbog uzajamnog dejstva spinskog talasa s ostalim sistemom i menja se haotično s vremenom. Vrednost joj je tolika da obezbedjuje pobudjivanje svakog oscilatora prosečno do nivoa koji odgovara toplotnoj ravnoteži. Da se pokazati da je to ekvivalentno pretpostavci:

$$f_k(t) f_k^*(t') = 2\eta_k |a_k^{(0)}|^2 \delta(t-t') \tag{4.17}$$

Ova osobina označava usrednjavanje po ansamblu, a $|a_k^{(0)}|^2 = \dfrac{K_B T}{\hbar\omega_k}$

klasičnu granicu $n_k^{(0)}$ (v. (4.13))

Takodje pretpostavljamo da je

$$\left.\begin{array}{l} f_k(t) f_{-k}(t') = 0 \\ f_k(t)\, \tilde{a}_k^*(0) = 0 \\ f_k(t)\, \tilde{a}_{-k}(0) = 0 \end{array}\right\} \tag{4.18}$$

tj. da su pobudjujuće sile za različite oscilatore medjusobno statistički nezavisne, i da je pobudjujuća sila za svaki oscilator statistički nezavisna od početnog pobudjenja.

Pri rešavanju novih jednačina kretanja (4.16), zgodno ih je napisati sa promenljivim b_k, odredjene odnosom (4.10), i uvesti preobličenu pobudjujuću silu $g_k(t)$ uz pomoć:

$$f_k(t) = g_k(t)\, e^{\frac{1}{2} i\omega t} \tag{4.19}$$

Dalje, zgodno je iskoristiti sledeće "vektorske" oznake:

$$b_k = \begin{pmatrix} b_k \\ b_{-k}^* \end{pmatrix} \qquad g_k = \begin{pmatrix} g_k \\ g_{-k}^* \end{pmatrix}$$

$$M_k = \begin{pmatrix} i\left(\omega_k - \frac{\omega}{2}\right) - \eta_k & -i\rho_k \\ i\rho_k^* & -i\left(\omega_k - \frac{\omega}{2}\right) - \eta_k \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

Jednačina kretanja tada dobija oblik:

$$\dot{\hat{b}}_k = \hat{M}_k \hat{b}_k + \hat{g}_k(t) \tag{4.21}$$

i za njeno rešenje uz odgovarajuće početne vrednosti b_k (0) dobijamo:

$$\hat{b}_k(t) = \exp(\hat{M}_k t)\left\{\int \exp(-\hat{M}_k \tau) g_k(\tau) d\tau + \hat{b}_k(0)\right\} \tag{4.22}$$

gde je matrica $\exp\{M_k t\}$ data izrazom (v. (4.11))

$$\exp(\hat{M}_k t) = e^{-\eta_k t}\begin{bmatrix} ch\varkappa_k t + i(\omega_k - \frac{\omega}{2})\frac{sh\varkappa_k t}{\varkappa_k}, & -i\rho_k \frac{sh\varkappa_k t}{\varkappa_k} \\ i\rho_k^* \frac{1}{\varkappa_k} sh\varkappa_k t, & ch\varkappa_k t - i(\omega_k - \frac{\omega}{2})\frac{sh\varkappa_k t}{\varkappa_k}\end{bmatrix} \tag{4.23}$$

Uz pomoć opšteg rešenja jednačine kretanja možemo ponovo izračunati konstantni i promenljivi magnetni moment, a takodje i apsorbovanu snagu, koristeći statistička svojstva toplotne iznudjene sile, izražene formulama (4.17) i (4.18). Posle prostih mada - dugih izračunavanja dobićemo apsorbovanu snagu:

$$\overline{P}_{aps} = \frac{2}{V}\sum_k |a_k^{(0)}|^2 \hbar\omega_k |\rho_k|^2 \left\{\frac{\eta_k}{\eta_k^2 - \varkappa_k^2} + \frac{1}{2} e^{-2\eta_k t}\left[\frac{e^{2\varkappa_k t}}{\varkappa_k - \eta_k} - \frac{e^{-2\varkappa_k t}}{\varkappa_k + \eta_k}\right]\right\} \tag{4.24}$$

Može se primetiti, da za $\eta_k \to 0$ (4.24) se svodi tačno klasičnoj granici $n_k^{(0)} >> \frac{1}{2}$ izraza (4.15). Kao što sledi iz (4.24) vremenska promena P_{aps} jako zavisi od razlike izmedju $\varkappa_k$ (smatrajući ih apsolutnim) i η_k. Ako je $\varkappa_k - \eta_k < 0$ za sve k, tada svi eksponenti koji se nalaze u izrazu (4.24) gase se, tako da sistem prelazi u stacionarno stanje, tj. $P_{aps} \neq P_{aps}(t)$. U stacionarnom stanju samo prvi član u vitičastoj zagradi u (4.24) daje doprinos u apsorpciji snage. Ta apsorpcija u stacionarnom stanju se povećava s porastom polja pumpe i postaje beskonačna kada je $\varkappa_k - \eta_k = 0$ barem za dati spinski talas. Da bismo dobili brzo povećanje apsorpcije, razlika $\varkappa_k - \eta_k$ treba da bude dovoljno velika i pozitivna na neke spinske talase.

Sasvim analogno ovom postupku mogu se izučiti kritični parametri kod feroelektrične rezonancije i to je predmet koji je ispitan u sledećim glavama ovog diplomskog rada.

V MOGUĆNOST PARAMETARSKE REZONANCIJE KOD FEROELEKTRIKA SA VODONIČNOM VEZOM

U poslednje vreme teorija feroelektrika koja se bazira na formalizmu pseudospina vrlo dobro je razvijena dajući dovoljno dobre rezultate. Fizička suština tih feroelektrika i pseudospinskog hamiltonijana koji u sebi sadrži efekat tuneliranja protona unutar vodonične veze (izmedju tetraedara fosfata) daje dobar primer teorijske mogućnosti postojanja parametarske rezonancije. Po analogiji sa magnetnom rezonancijom koja je dobro izučena, do sada ne postoje radovi eksperimentalnog karaktera koji bi mogli potvrditi feroelektričnu rezonanciju kod takvih feroelektrika kod kojih bi pošlo za rukom izučavanje putem rasejavanja neutrona na KDP. Potvrda postojanja tog mogućeg fenomena poboljšala bi ispitivanje dinamike atomskog kretanja u feroelektricima s tim što bi sama rezonancija bila nešto novo, do sada ne izučavano. Mogućnost postojanja tog fenomena u KDP ogleda se u nelinearnim jednačinama kretanja gustine dipolnog momenta koji povezuje oscilovanje dipolnog momenta kompleksa ($K-PO_4$) jona i pseudo--dipola kod vodonične veze. Takva moguća pobudjenja nazivaju se stoga parametarski polarizovanim. Mi ćemo razmotriti slučaj neograničenog medijuma (s periodičnim graničnim uslovima) s pretpostavkom da kolektivne pseudospinske ekscitacije mogu biti dobro predstavljene ravnim talasima koji se gase. Za preliminarnu teoriju ta aproksimacija je dovoljno dobra za eliminaciju depolarizirajućih efekata koji se takodje mogu izračunati, ali suviše složenim putem. U analogiji s feromagneticima, promenljivo električno polje $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 \cos\omega t$ koje je usmereno pod uglom α u odnosu na osu polarizacije (z-osa) KDP feroelektrika, moguće je očekivati kumulativni rast pseudo-spinskih talasa odredjene energije.

Hamiltonijan

Efektivni hamiltonijan sistema može biti napisan u obliku (3):

$$\mathcal{H}=-2\Omega\sum_i S_i^x-[\mu_c(E_0+\mathcal{E}\cos\alpha)+\mu_H\mathcal{E}\sin\alpha]\sum_i S_i^z-$$
$$-\sum_{ij}J_{ij}S_i^z S_j^z+\sum_{ij}D_{ij}S_i^z S_j^z \tag{5.1}$$

Ovde je S_i^x i S_i^z (i, j oznake položaja protona) x- i z-komponente pseudo-spina u pseudo-spinskom prostoru; 2Ω - energetski parametar tuneliranja protona u potencijalima sa dva minimuma koji opisuje interakcije kratkog dometa izmedju protona i teških jona (K, P, O); μ_C- dipolni moment za svaki pojedinačni teški jon kompleksa (K-PO_4), i μ_H- pseudodipolni moment protona. E_0 je konstantno spoljašnje polje usmereno u pravcu z-ose, i $\mathcal{E}\cos\alpha$, $\mathcal{E}\sin\alpha$ su z i x komponente promenljivog električnog polja u realnom fizičkom prostoru; J_{ij} je integral izmene izmedju protona i

$$D_{ij}=|\vec{R}_{ij}|^{-3}[(\mu_C+\mu_H)^2-3(\mu_C\cos\theta_{ij}+\mu_H\sin\theta_{ij})^2] \tag{5.2}$$

predstavlja efektivnu dvočestičnu interakciju dugog domena (dipol-dipol tip) koji odgovara za anizotropiju, tj. zavisnost energije feroelektrika od usmerenja polarizacije; θ_{ij} je ugao izmedju $\vec{R}_{ij}$ i ose polarizacije.

Da bi smo izvršili dijagonalizaciju hamiltonijana zgodno je preći na nove od temperature zavisne ose x', y, z' u pseudospinskom prostoru tako da je srednja vrednost $\langle\vec{S}_i\rangle$ usmerena u pravcu z'-ose (koja sa z-osom čini ugao φ), odredjena razlikom $\delta\vec{S}_i=\vec{S}_i-\langle\vec{S}_i\rangle$ i operatorima $S_i^{\pm}=S_i^{x'}\pm iS_i^{y}$ u pseudospin-talasnoj aproksimaciji. Hamiltonijan tada dobija oblik:

$$\mathcal{H}=\sum_{\vec{k}}\{[H_0+(\mu_c\cos\alpha+\mu_H\sin\alpha)\mathcal{E}\cos\varphi-\langle S^{z'}\rangle(J_{\vec{k}}-D_{\vec{k}})\sin^2\varphi]a_{\vec{k}}^+a_{\vec{k}}+$$
$$+\frac{1}{2}\langle S^{z'}\rangle(J_{\vec{k}}-D_{\vec{k}})\sin^2\varphi(a_{\vec{k}}^+a_{-\vec{k}}^++a_{\vec{k}}a_{-\vec{k}})\} \tag{5.3}$$

Treba očekivati da pseudospinski hamiltonijan (5.1) sadrži dodatak koji vremenski zavisi od molekularnog polja, $\mathcal{H}$ (t). Kao posledica toga u hamiltonijanu figurišu izrazi:

$$H(t) = H_0 + (\mu_c \cos\alpha + \mu_H \sin\alpha) \mathcal{E}_0 \cos\varphi \cos\omega t \tag{5.4}$$

gde je:

$$\left.\begin{aligned} H_0 &= \{(2\Omega)^2 + [(2G + \mu_c E_0)\langle S^z\rangle]^2\}^{1/2} \\ G &= J_0 + \frac{4\pi}{V_0}\frac{(\mu_c + \mu_H)^2}{3} \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

i Furije transformacije

$$J_{\vec{k}} = \sum_{ij} J_{ij} e^{i\vec{k}(\vec{R}_i - \vec{R}_j)}, \quad D_{\vec{k}} = \sum_{ij} D_{ij} e^{i\vec{k}(\vec{R}_i - \vec{R}_j)} \tag{5.6}$$

Aproksimirajući pravu strukturu vodoničnih veza pomoću kubičnih ćelija, $J_{\vec{k}}$ za malo k dobija izgled:

$$J_{\vec{k}} \approx J_0 \left(1 - \frac{a^2}{g}\vec{k}^2\right) \tag{5.7}$$

gde je a odgovarajuća konstanta ćelije, i

$$D_{\vec{k}} = \begin{cases} \frac{4\pi}{V_0}\left[(\mu_c \cos\chi_{\vec{k}} + \mu_H \sin\chi_{\vec{k}})^2 - \frac{1}{3}(\mu_c + \mu_H)^2\right], & \vec{k} \neq 0 \\ -\frac{4\pi}{V_0}\frac{(\mu_c + \mu_H)^2}{3} & \vec{k} = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

gde je $V_0 = a^3$ zapremina efektivne ćelije, $\chi_{\vec{k}}$ je ugao izmedju $\vec{k}$ i polarizacione ose.

Uslovi rezonancije

Sada jednačina kretanja izgleda

$$i\dot{S}_i^{\pm} = [\mathcal{H}, S_i^{\pm}(t)], \quad (\hbar = 1) \tag{5.9}$$

Radeći preko bozonskih operatora i uvodeći transformacije Bogoljubova

$$b_{\vec{k}} = u_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}^* a_{-\vec{k}}^+ \tag{5.10}$$

$$u_{\vec{k}} = \left(\frac{A_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}}}{2\omega_{\vec{k}}}\right)^{1/2}, \quad v_{\vec{k}} = -\frac{B_{\vec{k}}}{|B_{\vec{k}}|}\left(\frac{A_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}}}{2\omega_{\vec{k}}}\right)^{1/2}$$

$$A_{\vec{k}} = H_0 - B_{\vec{k}}, \quad B_{\vec{k}} = \langle S^{x'}\rangle (J_{\vec{k}} - D_{\vec{k}}) \sin^2\varphi \tag{5.11}$$

$$\omega_{\vec{k}} = (A_{\vec{k}}^2 - |B_{\vec{k}}|^2)^{1/2} \approx \sqrt{P + Q\vec{k}^2}$$

gore spomenuta jednačina (5.9) dobija izgled:

$$\dot{b}_{\vec{k}} = i\left[\varepsilon_{\vec{k}} + d_{\vec{k}}\cos\omega t\right) b_{\vec{k}} - C_{\vec{k}}\cos\omega t\, b^{+}_{-\vec{k}}\right] \tag{5.12}$$

gde je sa $\varepsilon_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}} + i\Gamma_{\vec{k}}$ uzeto u račun i disipacija, ($\Gamma_{\vec{k}}$ je širina energije). Sa $d_{\vec{k}}$, $C_{\vec{k}}$ označeno je

$$d_{\vec{k}} = \frac{A_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}}\mathcal{E}_0 L,\ C_{\vec{k}} = \frac{B_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}}\mathcal{E}_0 L\ ;\ L = (\mu_c\cos\alpha + \mu_H\sin\alpha)\cos\varphi \tag{5.13}$$

Za niske temperature i za malo $\vec{k}$ je:

$$\begin{gathered} \langle S^{z'}\rangle \frac{1}{2} - f(T),\ \langle S^{z}\rangle = \frac{\sqrt{P}}{F}\langle S^{z'}\rangle \\ f(T) \approx \frac{V_0}{(2\pi)^2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2K_BT}{Q}\right)^{3/2}\zeta_{3/2}\left(\frac{\sqrt{P}}{K_BT}\right) \\ P = |F^2 - (2\Omega)^2|,\ Q = G(2\Omega)^2\frac{a^2}{P^{1/2}g},\ F = G + \frac{\mu_c E_0}{2} \end{gathered} \tag{5.14}$$

(Γ je gama funkcija i ζ Rimanova ζ- funkcija). Uz gore pomenute formule dobijamo:

$$\left.\begin{aligned} A_{\vec{k}} &= \{F^2 - 4f(T)[F^2 - (2\Omega)^2]\}^{1/2} - B_{\vec{k}} \\ B_{\vec{k}} &= \{F^2 - 4f(T)[F^2 - (2\Omega)^2]\}^{-1}(2\Omega)^2\langle S^{z'}\rangle\left[J_0 - J_0\frac{a^2k^2}{g} - D_{\vec{k}}\right] \end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

Jednačina (5.12) predstavlja sistem linearnih diferencijalnih jednačina čiji koeficijenti zavise od vremena. Poznato je da se rešenja takvih jednačina mogu pokazati nesigurnim. Zbir vremensko-zavisnih članova, može voditi ka vremenskoj varijaciji rezonantne frekvencije $\omega_{\vec{k}}$. Pošto je to nevažno za nestabilni pseudo-spinski sistem, $d_{\vec{k}}$ je izostavljeno jer ima zaista malu vrednost. Zadnji član može biti posmaran kao vodeći. Pošto on mora sadržavati varijaciju od $b^{+}_{\vec{k}}$ kao $exp(-i\omega_{\vec{k}}t)$ rezonancija se očekuje kod:

$$\omega_{\vec{k}} = \frac{\omega}{2} \tag{5.16}$$

Smatrajući da $\Gamma_{\vec{k}}/\omega_{\vec{k}} \ll 1$, rešenje jednačine (5.12) je predstavljeno u obliku:

$$b_{\vec{k}} \sim \exp\left(\frac{1}{2}i\omega - \gamma\right)t \tag{5.17}$$

gde konstanta μ može biti odredjena. Jasno je da za $\mu > 0$ amplituda inicira sa termičkim fluktuacijama, i opada eksponencijalno ka nuli.

Ubacivanjem (5.16) u (5.12) i zanemarujući nerezonantnu komponentu $\exp\left\{-\frac{3}{2}(\omega-\mu)t\right\}$, dobijamo:

$$\left[\omega_{\vec{k}} - \frac{\omega}{2} + i\left(\Gamma_{\vec{k}} - \mu\right)\right] b_{\vec{k}} = \frac{1}{2} C_{\vec{k}} b^{+}_{-\vec{k}} \tag{5.18}$$

Odatle i njihova kompleksno konjugovana jednačina, $\vec{k}$ zamenivši sa $-\vec{k}$, dobijamo

$$\left[\left(\omega_{\vec{k}} - \frac{1}{2}\omega\right)^2 + \left(\Gamma_{\vec{k}} - \mu\right)^2 - \frac{1}{4}\left|C_{\vec{k}}\right|^2\right] b_{\vec{k}} b^{+}_{-\vec{k}} = 0 \tag{5.19}$$

Ako su amplitude $b_{\vec{k}} \neq 0$, tada je:

$$\mu = \Gamma_{\vec{k}} \pm \left[\frac{1}{4}\left|C_{\vec{k}}\right|^2 - \left(\omega_{\vec{k}} - \frac{\omega}{2}\right)\right]^{1/2} \tag{5.20}$$

Nestabilnost ($\mu < 0$) je dobra za $\omega_{\vec{k}} = \frac{\omega}{2}$, te je kritično polje

$$\left(\mathcal{E}_0\right)_{crit} = \frac{2\Gamma_{\vec{k}}}{L} \left|\frac{\omega_{\vec{k}}}{B_{\vec{k}}}\right| \tag{5.21}$$

Za $\vec{k} = 0$, i $T \approx 0$ to će kritično polje biti procenjeno kao:

$$\left(\mathcal{E}_0\right)_{crit|_{\substack{k=0\\T=0}}} \approx \frac{\Gamma_0 F\left|F^3 - G(2\Omega)^2\right| \cos\varphi}{2G^2(2\Omega)^2\left|F^2 - (2\Omega)^2\right| L} \tag{5.22}$$

Posmatrajući (5.15) i (5.20) vidi se da je prag električnog polja dalje komplikovana funkcija od temperature, parametara energije (upotrebljavajući pseudo-spinski hamiltonijan), kao i intenziteta $\vec{k}$ i njegove orijentacije u odnosu na polarizacione ose. Pošto analiza prigušenja ravnih talasa ima fizičko značenje samo ako je njegova talasna dužina mnogo manja u poredjenju sa dimenzijama uzorka jer je $\vec{k} = 0$ može se dobiti konstantno električno polje

$$\left(E_0\right)_c = \frac{2}{\mu_c}\left\{\left[h + \left(h^2 - \left(\frac{\omega^2}{12}\right)^3\right)^{1/2}\right]^{1/3} + \left[h - \left(h^2 - \left(\frac{\omega^2}{12}\right)^3\right)^{1/2}\right]^{1/3} - G\right\} \tag{5.23}$$

Iz uslova da rešenje (5.23) mora biti realno, dobijamo da frekvencija spoljašnjeg polja je ograničena nejednakošću:

$$\omega \leqq \sqrt{3}\,[8h]^{1/3}$$

što je u saglasnosti sa kriterijumom za primenu metode ravnih talasa.

VI UTICAJ OSCILOVANJA REŠETKE NA POJAVU PARAMETARSKE REZONANCIJE KOD FEROELEKTRIKA SA POPREČNIM POLJEM

U prethodnom razmatranju razvijena je teorije mogućnosti parametarske rezonancije kod feroelektrika sa vodoničnom vezom, na osnovu pseudo-spinskog formalizma. Prema ovoj teoriji fizički uslovi za pojavu parametarske rezonancije mogli bi se realizovati pod uticajem statičkog električnog polja, sa veličinama manjim nego što je karakteristično, prema kome je mikro talas električne stimulacije dovoljno velike amplitude, postavljen pod proizvoljnim uglom prema polarizacionoj osi kristala. Medjutim, dinamičke posledice su uzrok prisustva teških jona koje nisu eksplicitno uzete u obzir izuzev u indirektnoj renormalizaciji protonske konstante izmene kod trougla (K-PO_4) grupe Ising tipa. Ovde smo se pridržavali odgovarajućih metoda feromagnetizma koristeći Paulijevu reprezentaciju za pseudospinske operatore. Takav pristup je bolji zbog činjenice što omogućava da se izbegne aproksimacija standardnog molekularnog polja, i da se bolje opiše termalni nelinearni efekat u sistemu. Ovi efekti što se tiče sopstvene energije delova hibridiziranih stanja uzeti su u obzir, ali disipativni procesi, mada veoma značajni u odgovarajućim eksperimentima, su izostavljeni u sadašnjoj analizi kao kratki mikroefekat sistema. Kao što je poznato, postojanje parametarske rezonancije kod feroelektrika sa vodoničnom vezom je u vezi sa nelinearnošću jednačina kretanja za električni dipolni moment gustine operatora koji udružuje homogene električne dipolne momente oscilacija sa nehomogenim, dovodeći do toga da se traženo homogeno električno polje može ostvariti samo za elipsoidne uzorke ili druge srodne oblike. Kao što je rečeno razmotrićemo slučaj neograničenog medijuma (periodični granični uslovi) pretpostavljajući da se hibridizirana stanja mogu predstaviti sa dobrom aproksimacijom pomoću prigušenih ravnih talasa. Za našu poboljšanu teoriju fenomena, ova aproksimacija je još uvek dobra pošto eliminiše depolarizacione efekte. Ovaj efekat mogao bi se uzeti u obzir takodje ako bi se izvršila komplikovanija procedura.

Hemiltonijan

Jake interakcije sistema protona kod vodonične veze teških jona može biti opisan pomoću pseudo-spin fononskog hamiltonijana (4).

$$H = H_p + H_l + H_{pl} \tag{6.1}$$

Hp je efektivni pseudo spinski hamiltonijan De-Gennes-ovskog tipa

$$H_p = -2\Omega \sum_{\vec{f}} S^x_{\vec{f}} - \sum_{\vec{f} \neq \vec{g}} L_{\vec{f}\vec{g}} S^z_{\vec{f}} S^z_{\vec{g}} - (\mu_c E_0 + \mu_{eff} \mathcal{E}_0 \cos\omega t) \sum_{\vec{f}} S^z_{\vec{f}} \tag{6.2}$$

2Ω je parametar tuneliranja protona; $L_{\vec{f}\vec{g}} = J_{\vec{f}\vec{g}} - D_{\vec{f}\vec{g}}$ efektivna dvojna protonska interakcija Ising tipa; $\mu_{eff} = \mu_c \cos\alpha + \mu_p \sin\alpha$ gde je μ_c električni dipolni moment (K-PO_4) kompleksa, i μ_p efektivni električni pseudo-dipolni moment protona, dok je α definisano pravcem promenljivog električnog polja u odnosu na polarizacionu osu; $S^x_{\vec{f}}$ i $S^z_{\vec{f}}$, x i z komponente pseudospinskih operatora, a ω je frekvencija električnog polja.

Posle uvodjenja unitarne transformacije (rotacije koordinatnog sistema za ugao φ oko y ose u pseudospinskom prostoru) i uvodjenja Paulijevih pseudospinskih operatora, budući da su ekvivalentni sa bozonskom reprezentacijom pri niksim temperaturama, Furje transformacija hamiltonijana u kvadratnoj aproksimaciji postaje

$$H_p = H'_p + V_p\,(t) \tag{6.3}$$

gde je

$$H'_p=\sum_{\vec{k}}\left(\frac{2\Omega}{\sin\varphi}-\frac{\sin^2\varphi}{2}L_{\vec{k}}\right)B^+_{\vec{k}}B_{\vec{k}}-\frac{\sin^2\varphi}{4}\sum_{\vec{k}}L_{\vec{k}}\left(B^+_{\vec{k}}B^+_{-\vec{k}}+B_{\vec{k}}B_{-\vec{k}}\right) \qquad (6.4)$$

$$V_p(t)=\mu_{eff}\mathcal{E}_0\cos\omega t\cos\varphi\sum_{\vec{k}}B^+_{\vec{k}}B_{\vec{k}}+\frac{\mu_{eff}\mathcal{E}_0\cos\omega t\cos\varphi}{2}N^{1/2}\sum_{\vec{k}}\delta_{\vec{k}0}\left(B^+_{\vec{k}}+B_{\vec{k}}\right) \qquad (6.5)$$

$$L_{\vec{k}}=J_{\vec{k}}-D_{\vec{k}} \quad , \quad L_0=\sum_{\vec{g}}L_{\vec{g}}$$

$$J_{\vec{k}}=\sum_{\vec{g}}J_{\vec{g}}e^{i\vec{k}\vec{g}}\approx J_0\left[1-\frac{(ak)^2}{6}\right]; \quad (ak)\ll 1 \qquad (6.6)$$

(aproksimirajući pravu strukturu vodonične veze pomoću kubičnih ćelija, a je odgovarajuća konstanta ćelije) i

$$D_{\vec{k}}=\begin{cases}\dfrac{4\pi}{V_0}\left[\left(\mu_c\cos\chi_{\vec{k}}+\mu_p\sin\chi_{\vec{k}}\right)^2-\dfrac{1}{3}(\mu_c+\mu_p)^2\right]; & \vec{k}\neq 0\\[2mm] -\dfrac{4\pi}{V_0}\dfrac{1}{3}(\mu_c+\mu_p)^2 ; & \vec{k}=0\end{cases} \qquad (6.7)$$

$V_0=a^3$ je zapremina efektivne ćelije, $\chi_{\vec{k}}$ je ugao izmedju $\vec{k}$ i polarizacione ose. Ugao φ je odredjen jednačinom:

$$-2\Omega\cos\varphi+L_0\sin\varphi\cos\varphi+\mu_c E_0\sin\varphi=0 \qquad (6.8)$$

koje se nalazi Ferrari rešenjem:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\Omega}{\mu_c E_0}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{L_0}{\mu_c E_0}\right)^2+y_1-1\right]^{1/2}+\left\{\left(\frac{2\Omega}{\mu_c E_0}\left[\left(\frac{L_0}{\mu_c E_0}\right)^2+1\right]\times\right.\right.$$
$$\left.\times\left[\left(\frac{L_0}{\mu_c E_0}\right)^2+y_1-1\right]^{-1/2}+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{L_0}{\mu_c E_0}\right)^2-y_1-1\right]\right\}^{1/2} \qquad (6.9)$$

gde je:

$$y_1=\frac{1}{3}(1+A)+\left\{\left(\frac{1+A}{3}\right)^3+2B^2+2B\left[\left(\frac{1+A}{3}\right)^3+B^2\right]^{1/2}\right\}^{1/3}+$$
$$+\left\{\left(\frac{1+A}{3}\right)^3+2B^2-2B\left[\left(\frac{1+A}{3}\right)^3+B^2\right]^{1/2}\right\}^{1/3} \qquad (6.10)$$

odnosno:

$$A=\frac{(2\Omega)^2-L_0^2}{(\mu_c E_0)^2} \quad ; \quad B=\frac{2\Omega L_0}{(\mu_c E_0)^2} \qquad (6.11)$$

Za podsistem teških jona mi uvodimo standardni formalizam fonona (za očuvanje pozicija ravnoteže jona u paraelektričnoj fazi) pretpostavljajući da je kristal beskonačno velik, te je fononski hamiltonijan dat izrazom:

$$H_1 = \sum_{j\vec{q}} \lambda_{j\vec{q}} c^+_{j\vec{q}} c_{j\vec{q}} \tag{6.12}$$

gde je $\lambda_{j\vec{q}}$ energija fonona, j oznaka za j-granu oscilovanja, $\vec{q}$ kvazi impuls fonona, $c^+_{j\vec{q}}$, $c_{j\vec{q}}$ su kreacioni i anihilacioni fononski operatori. Uobičajena forma pseudospinskih interakcija je ovde nešto promenjena. Posle Fourier-ovih transformacija, pseudo spin-fononska interakcija u harmonijskoj aproksimaciji izgleda:

$$H_{pl} = H'_{pl} + V_{pl}(t) \tag{6.13}$$

gde je:

$$\begin{aligned} H'_{pl} = \sum_{\vec{k}\vec{q}j} \Big\{ \Big[-\frac{2\Omega}{\sin\varphi}(\vec{q}, \vec{e}_{j\vec{q}}) + \frac{\sin^2\varphi}{2} L_{\vec{k}+\vec{q}}(\vec{k}+\vec{q}, \vec{e}_{j\vec{q}}) - \\ - \frac{\sin^2\varphi}{2} L_{\vec{k}}(\vec{k}, \vec{e}_{j\vec{q}}) \Big] F_{j\vec{q}} B^+_{\vec{k}+\vec{q}} B_{\vec{q}} (c_{j\vec{q}} + c^+_{j-\vec{q}}) - \\ - \frac{\sin^2\varphi}{2} L_{\vec{k}} F_{j\vec{q}} (\vec{k}, \vec{e}_{j\vec{q}}) (B^+_{\vec{k}+\vec{q}} B^+_{-\vec{k}} + B_{\vec{k}} B_{-\vec{k}-\vec{q}}) (c_{j\vec{q}} + c^+_{j-\vec{q}}) \Big\} \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} V_{pl}(t) = -\frac{\mu_{eff}\mathcal{E}_0 \cos\omega t \cos\varphi}{2} N^{1/2} \sum_{j\vec{q}} F_{j\vec{q}} (\vec{q}, e_{j\vec{q}}) (B^+_{\vec{q}} + B_{-\vec{q}}) (c_{j\vec{q}} + \\ + c^+_{j-\vec{q}}) - \mu_{eff}\mathcal{E}_0 \cos\omega t \cos\varphi \sum_{j\vec{q}\vec{k}} F_{j\vec{q}} (\vec{q}, \vec{e}_{j\vec{q}}) B^+_{\vec{k}+\vec{q}} B_{\vec{k}} (c_{j\vec{q}} + c^+_{j-\vec{q}}) \end{aligned} \tag{6.15}$$

($F_{j\vec{q}} = i[2mN\lambda_{j\vec{q}}]^{-\frac{1}{2}}$ i $m = \frac{m_{PO_4} m_K}{m_{PO_4} + m_K}$ je redukovana masa (PO_4 - K) kompleksa).

Izvodeći Bogoljubovske koeficijente unitarne transformacije i zadržavajući kvadratne članove u novim boze operatorima $b_{\vec{k}}$ i $c_{\vec{k}}$, totalni hamiltonijan postaje:

$$H = H_0 + \sum_{\vec{k}} \Omega_{\vec{k}} b^+_{\vec{k}} b_{\vec{k}} + \sum_{\vec{q}} \Lambda_{\vec{q}} c^+_{\vec{q}} c_{\vec{q}} +$$
$$+ \sum_{\vec{q}} F_{\vec{q}} (\vec{q}, \vec{e}_{\vec{q}}) (u_{\vec{q}} + v_{\vec{q}}) (b^+_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}) (c_{\vec{q}} + c^+_{-\vec{q}}) + \tag{6.16}$$
$$+ \mu_{eff} \mathcal{E}_0 \cos\omega t \cos\varphi \sum_{\vec{k}} \left[b^+_{\vec{k}} b_{\vec{k}} + \sin^2\varphi \frac{L_{\vec{k}}}{4\omega_{\vec{k}}} (b^+_{\vec{k}} b^+_{-\vec{k}} + b_{\vec{k}} b_{-\vec{k}}) \right] +$$
$$+ \frac{1}{2} \mu_{eff} \mathcal{E}_0 \cos\omega t \cos\varphi N^{1/2} (u_0 + v_0)(b^+_0 + b_0)$$

pri čemu su izvršena sledeća logička uprošćenja. Pri paralelnom pumpanju logitudinalni fononi su dominantni ((j=1); j=2, 3 ne dolaze u obzir). U popravku za bozonsku energiju uračunati su i kinematički i dinamički faktori trećeg i četvrtog stepena, tako da je analogno proceduri u (8)

$$\begin{aligned} \Omega_{\vec{k}} &= \tilde{\omega}_{\vec{k}} - i\Gamma_{\vec{k}}, & \tilde{\omega}_{\vec{k}} &= \omega_{\vec{k}} + \Delta\omega_{\vec{k}} \\ \Delta\omega_{\vec{k}} &= \mathrm{Re}\,\Sigma^p(\vec{k}), & \Gamma_{\vec{k}} &= \mathrm{Im}\,\Sigma^p(\vec{k}) \\ \Lambda_{\vec{q}} &= \tilde{\lambda}_{\vec{q}} - i\gamma_{\vec{q}}, & \tilde{\lambda}_{\vec{q}} &= \lambda_{\vec{q}} + \Delta\lambda_{\vec{q}} \\ \Delta\lambda_{\vec{q}} &= \mathrm{Re}\,\Sigma^{ph}(\vec{q}), & \gamma_{\vec{q}} &= \mathrm{Im}\,\Sigma^{ph}(\vec{q}) \end{aligned} \tag{6.17}$$

gde je

$$\omega_{\vec{k}} = \left[\left(\frac{2\Omega}{\sin\varphi} \right)^2 - 2\Omega L_{\vec{k}} \sin\varphi \right]^{1/2} \tag{6.18}$$

Bogoljubovski koeficijenti imaju oblik:

$$u_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\frac{2\Omega}{\sin\varphi} - \frac{\sin^2\varphi}{2} L_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}} + 1 \right]^{1/2}, \quad v_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\frac{2\Omega}{\sin\varphi} - \frac{\sin^2\varphi}{2} L_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}} - 1 \right]^{1/2} \tag{6.19}$$

H_0 - obeležava nevažne za našu svrhu delove hamiltonijana koji čine osnovno stanje sistema.

Uslovi rezonancije

U cilju nalaženja parametara koji odvode energiju pri spoljašnjem paralelnom pumpanju kristala električnim oscilatornim poljem, kao i uslove pod kojima se to maksimalno dešava, polazimo od zakona kretanja za spinske talase i zakone kretanja za pobudjenja rešetke preko jednačina (9):

$$i\dot{b}_{\vec{k}} = [b_{\vec{k}}, H] \quad ; \quad i\dot{c}_{\vec{k}} = [c_{\vec{k}}, H] \tag{6.20}$$

koji dovode do sistema linearnih diferencijalnih jednačina prvog tepena po vremenu kao promenljivom:

$$\begin{aligned} i\dot{b}_{\vec{k}} &= \Omega_{\vec{k}} b_{\vec{k}} + X_{\vec{k}} e^{-i\omega t} b^{+}_{-\vec{k}} - Y_{\vec{k}} e^{-i\omega t} c^{+}_{-\vec{k}} \\ i\dot{c}_{\vec{k}} &= \Lambda_{\vec{k}} c_{\vec{k}} + Y_{\vec{k}} e^{-i\omega t} b^{+}_{-\vec{k}} \end{aligned} \tag{6.21}$$

gde su uvedene sledeće zamene:

$$\begin{aligned} X_{\vec{k}} &= \mathcal{E}_0 f_{\vec{k}} \;; & f_{\vec{k}} &= \frac{\mu_{eff} L_{\vec{k}} \sin^2\varphi \cos\varphi}{4\tilde{\omega}_{\vec{k}}} \\ Y_{\vec{k}} &= i\mathcal{E}_0 h_{\vec{k}} \;; & h_{\vec{k}} &= \frac{\mu_{eff} (\vec{k}, \vec{e}_{\vec{k}}) \cos\varphi}{4 m^{1/2} \sin^{1/2}\varphi} \left(\frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}} \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{6.22}$$

pri čemu je učinjena smena $\cos\omega t$ sa $\exp(-i\omega t)$ jer nas interesuje rešenje amplitude u blizini rezonance $\tilde{\omega}_{\vec{k}} = \omega/2$ tako da operatore možemo pisati ističući njihovu vremensku zavisnost kao:

$$b_{\vec{k}}(t) = b_{\vec{k}}(0)\, e^{\beta_{\vec{k}} t - i\frac{\omega t}{2}} \quad ; \quad c_{\vec{k}}(t) = c_{\vec{k}}(0)\, e^{\beta_{\vec{k}} t - i\frac{\omega t}{2}} \tag{6.23}$$

pri čemu parametar $\beta_{\vec{k}}$ treba tek odrediti. Uzimajući konjugovane (ermitski konjugovane) relacije od (6.21) i posle smene $\vec{k}$ sa $-\vec{k}$ i relacije (6.23) dobijamo sledeći homogen sistem od četiri algebarske jednačine po amplitudama $b_{\vec{k}}(0), b^{+}_{-\vec{k}}(0), c_{\vec{k}}(0), c^{+}_{-\vec{k}}(0)$ tj.:

$$
\begin{aligned}
&b_{\vec k}(0)[X_{\vec k}] + b^{+}_{-\vec k}(0)[\alpha_{\vec k}+i\xi_{\vec k}] + c_{\vec k}(0)[-Y_{\vec k}] + c^{+}_{-\vec k}(0)[0] = 0\\
&b_{\vec k}(0)[Y_{\vec k}] + b^{+}_{-\vec k}(0)[0] + c_{\vec k}(0)[0] + c^{+}_{-\vec k}(0)[\varrho_{\vec k} - i(\Gamma_{\vec k}-\xi_{\vec k})] = 0\\
&b_{\vec k}(0)[0] + b^{+}_{-\vec k}(0)[Y_{\vec k}] + c_{\vec k}(0)[\varrho_{\vec k} + i(\Gamma_{\vec k}-\xi_{\vec k})] + c^{+}_{-\vec k}(0)[0] = 0 \qquad (6.24)\\
&b_{\vec k}(0)[\alpha_{\vec k}-i\xi_{\vec k}] + b^{+}_{-\vec k}(0)[X_{\vec k}] + c^{+}_{-\vec k}(0)[-Y_{\vec k}] = 0
\end{aligned}
$$

gde je:

$$
\alpha_{\vec k} = \tilde{\omega}_{\vec k} - \frac{\omega}{2}, \qquad \xi_{\vec k} = \beta_{\vec k} + \tilde{\Gamma}_{\vec k}
$$

$$
\varrho_{\vec k} = \tilde{\lambda}_{\vec k} - \frac{\omega}{2}, \qquad \tilde{\Gamma}_{\vec k} = \Gamma_{\vec k} + \gamma^{\mu}_{\vec k} \qquad (6.25)
$$

Parametar $\beta_{\vec k}$ je odredjen uslovom za koji gornji sistem jednačina nema trivijalna rešenja, vodeći ka algebarskoj jednačini četvrtog stepena po $\xi_{\vec k}$:

$$
\begin{aligned}
&\xi^4_{\vec k} - 2\tilde{\Gamma}_{\vec k}\xi^3_{\vec k} + (\varrho^2_{\vec k} + \alpha^2_{\vec k} + \tilde{\Gamma}^2_{\vec k} - X^2_{\vec k} + 2Y^2_{\vec k})\xi^2_{\vec k} -\\
&-2\tilde{\Gamma}_{\vec k}(\alpha^2_{\vec k} + Y^2_{\vec k} - X^2_{\vec k})\xi_{\vec k} + Y^4_{\vec k} + 2\alpha_{\vec k}\varrho_{\vec k}Y^2_{\vec k} - \varrho^2_{\vec k}X^2_{\vec k} +\\
&+\alpha^2_{\vec k}\varrho^2_{\vec k} + (\alpha^2_{\vec k} - X^2_{\vec k})\tilde{\Gamma}^2_{\vec k} = 0
\end{aligned} \qquad (6.26)
$$

Četiri rešenja:

$$
\begin{aligned}
\beta_{\vec k} = -\Gamma_{\vec k} \pm \Bigg\{ &\frac{\mathcal{E}_0^2(f^2_{\vec k} - 2h^2_{\vec k}) - (\alpha^2_{\vec k} + \varrho^2_{\vec k})}{2} \pm \Bigg[\mathcal{E}_0^4\left(\frac{f^4_{\vec k}}{4} - f^2_{\vec k}h^2_{\vec k}\right) +\\
&+ \mathcal{E}_0^2\left(\frac{f^2_{\vec k}}{2}(\varrho^2_{\vec k} - \alpha^2_{\vec k}) + h^2_{\vec k}(\varrho^2_{\vec k} + \alpha^2_{\vec k})\right) + \left(\frac{\varrho^2_{\vec k} - \alpha^2_{\vec k}}{2}\right)^2\Bigg]^{1/2}\Bigg\}^{1/2}
\end{aligned} \qquad (6.27)
$$

su dobijena zanemarivanjem članova proporcionalnih sa $\tilde{\Gamma}_{\vec k}$ i $\tilde{\Gamma}^2_{\vec k}$ u (6.26). Kod izvodjenja $\beta_{\vec k}$ i praga amplitude kod spoljašnjeg promenljivog električnog polja, zanemarujemo fononsko prigušenje ($\gamma^{\mu}_{\vec k} \approx 0$). Provera rešenja pokazuje da pod rezonantnim uslovima, parametar koji nam je potreban izgleda:

$$
\beta_{\vec k} \approx -\Gamma_{\vec k} + \Bigg\{\frac{\mathcal{E}_0^2(f^2_{\vec k} - 2h^2_{\vec k}) - \varrho^2_{\vec k}}{2} + \left[\mathcal{E}_0^4\left(\frac{f^4_{\vec k}}{4} - f^2_{\vec k}h^2_{\vec k}\right) + \mathcal{E}_0^2\varrho^2_{\vec k}\left(\frac{f^2_{\vec k}}{2} + h^2_{\vec k}\right) + \frac{\varrho^4_{\vec k}}{4}\right]^{1/2}\Bigg\}^{1/2} \qquad (6.28)
$$

Prag spoljašnjeg promenljivog električnog polja je odredjen uslovima: $\beta_{\vec k} = 0$.

Fizičko rešenje koje nam je potrebno za prag nestabilnosti proteonskog stanja je:

$$\mathcal{E}_0^{crit} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{f_{\vec{k}}}{h_{\vec{k}}^2}\rho_{\vec{k}}\left\{1-\left[1-\left(\frac{2\Gamma_{\vec{k}}h_{\vec{k}}^2}{\rho_{\vec{k}}f_{\vec{k}}^2}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \tag{6.29}$$

Posle ekspanzije u snazi malog parametra ($2\Gamma_{\vec{k}}h_{\vec{k}}^2/\rho_{\vec{k}}f_{\vec{k}}^2$) i zamenjujući $f_{\vec{k}}$ sa $h_{\vec{k}}$ iz (6.22) dolazimo do:

$$\mathcal{E}_0^{crit} \approx \frac{2\omega\Gamma_{\vec{k}}}{\mu_{eff}L_{\vec{k}}\sin^2\varphi\cos\varphi}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{\Gamma_{\vec{k}}^2}{\rho_{\vec{k}}^2}\left[\frac{(2\Omega)\omega(\vec{k}_1,\vec{e}_{\vec{k}})^2}{4\tilde{\lambda}_{\vec{k}}L_{\vec{k}}^2 m\sin^5\varphi}\right]^2\right\} \tag{6.30}$$

Uslov realnosti za gornji prag polja nameće restrikciju frekventnosti pumpanja:

$$\omega \leq \frac{2m\rho_{\vec{k}}\tilde{\lambda}_{\vec{k}}L_{\vec{k}}^2\sin^5\varphi}{(2\Omega)(\vec{k}_1,\vec{e}_{\vec{k}})^2\Gamma_{\vec{k}}} \tag{6.31}$$

Može se videti iz (6.30) da je prag električnog polja komplikovana funkcija parametara energije, intenziteta $\vec{k}_1$ i njegove orijentacije u odnosu na ose polarizacije. Pošto analiza prigušenja ravnih talasa ima fizičko značenje samo ako imaju talasnu dužinu mnogo manju nego dimenzije uzorka, jer je $\vec{k}=0$ može se dobiti karakteristika konstantnog električnog polja:

$$\mu_0 E_0^{ch} \approx \left[\frac{2\Omega}{\sqrt[3]{\frac{2\Omega}{L_0}-\frac{(\omega/2-\overline{\Delta\omega_0})^2}{6\Omega L_0}}}-L_0\right]\left\{1-\left[\sqrt[3]{\frac{2\Omega}{L_0}-\frac{(\omega/2-\overline{\Delta\omega_0})^2}{6\Omega L_0}}\right]^2\right\}^{1/2} \tag{6.32}$$

Izvodivši gornju jednačinu izbegavamo neke algebarske komplikacije uvodeći efektivni φ - nezavisni deo, protonski frekventni razmak $\overline{\Delta\omega_0}$, i tako uzimajući u obzir uticaj vibracije rešetke kroz sastavni deo energije proton-fononske interakcije $\vec{k}=0$.

VII ZAKLJUČAK

Zaključujući sa ovim diplomskim radom, treba napomenuti da su električni dipolni momenti kod vodonične veze mnogo manji nego električni dipolni momenti teških jona, tako da parametarska rezonancija može biti očekivana, praktično uglavnom kada je uspostavljena paralelna stimulacija ($\vec{\mathcal{E}}_0 \parallel \vec{E}_0$).

Dinamičke posledice jake izmene izmedju protonski tuneliranih stanja i longitudinalnih optičkih stanja rešetkinih oscilovanja duž polarizacionih osa pokazuje se dobrim stabilizacionim efektom na pojavu feroelektrične parametarske rezonancije. U rezultatima poslednje glave je uzet u obzir uticaj teških jona, te je intenzitet parametra $\beta_{\vec{k}}$ sada manji u (6.28) i stoga je kritično spoljašnje električno polje (6.29) povećano. Ovaj prag spoljašnjeg polja raste kada je frekvencija rezonancije bliža fononskoj frekvenciji.

VIII LITERATURA

(1) E. Schlömann, Phys. Dev. 116, 829 (1959).

(2) P.D. de Gennes, Solid State Commun. 1, 132 (1963)

(3) S. Stamenković and R.B. Žakula, Phus. stat. sol. (b) 67, 471 (1975).

(4) S. Stamenković, S.D. Stojanović, and R.B. Žakula, Phys. stat. sol. (b) 80, 661 (1977)

(5) L.D. Landau i E.M. Lifšic: Mehanika (prevod sa ruskog) Beograd, (1961)

(6) B.B. Batigin i V.N. Toptigin: Sbornik zadač no elektrodinamike, "Nauka", Moskva 1970.

(7) E. Schlömann, Phys. Soc. Japan 17, 406 (1962)

(8) S. Stamenković and S. Novaković, Phys. stat. sol. 41, 135 (1970)

(9) A.S. Davidov: Kvantovaja mehanika "Nauka", Moskva 1973.