



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



EFEKTI PROMENA EKSCENTRICITETA ORBITA PLANETEZIMALA

-master rad-

Kandidat
Veljko Nikolić

Mentor
dr Lazar Gavanski

Novi Sad, 2026.

Zahvalnica

Želeo bih da se zahvalim članovima Laboratorije za primenu računara u nauci pri Institutu za fiziku u Beogradu na izuzetnom gostoprimstvu tokom trajanja moje stručne prakse. Posebno se zahvaljujem dr Mariji Janković, koja je bila moj mentor na stručnoj praksi, na osnovu koje je nastao ovaj rad.

Sadržaj

UVOD	9
1 Teorijska osnova	10
1.1 Protoplanetarni disk	10
1.2 Jakobijeva energija	10
1.3 Formiranje planetezimala	11
1.4 Ekscentricitet orbita planetezimala	11
1.5 Sila otpora gasa	12
1.6 Gravitaciono uskomešavanje	12
2 Model protoplanetarnog diska (MMSN)	12
2.1 Šta je MMSN	12
2.2 Površinska gustina	13
2.3 Veza između površinske i zapreminske gustine	13
2.4 Visinska skala i midplane gustina prema MMSN	13
3 Parametri modela	14
4 Sila otpora gasa	14
4.1 Opšti oblik sile otpora	14
4.2 Bezdimenzioni parametri koji određuju režim	15
4.3 Režimi sile otpora	15
4.4 Opšta formula za koeficijent otpora	16
5 Vremenska skala otpora gasa	17
5.1 Jednačine promene orbitalnih elemenata	17
5.2 Karakteristična vremenska skala prigušivanja ekscentriciteta	18
5.3 Numerički rezultati za MMSN	18
6 Slučaj opadanja radijusa orbite	19
7 Gravitaciono uskomešavanje planetezimala	20

7.1	Viscous stirring	20
7.2	Širina zagrejane oblasti	20
7.3	Disperziona dominantni i shear-dominantni režim	20
7.4	Zavisnost od odnosa masa M/m	21
8	Karakteristično vreme gravitacionih interakcija	22
8.1	Izvođenje	22
8.2	Numerički prefaktor	22
8.3	Aproksimacija za visoke ekscentricitete	23
8.4	Granične mase	23
8.5	Veza sa Čandrasekarovim vremenom relaksacije	23
9	Analiza režima sile otpora gasa	24
9.1	MMSN parametri	24
9.2	Ekstrasolarna nebula	25
10	Numeričke simulacije	25
10.1	Metoda	25
10.2	Parametri integracije	25
10.3	Poređenje sa analitičkom aproksimacijom	26
11	Rezultati: MMSN parametri	26
11.1	Vremenska skala otpora gasa	26
11.2	Poređenje sa gravitacionim uskomešavanjem	27
11.3	Evolucija ekscentriciteta: varijacija e_0	28
11.4	Evolucija ekscentriciteta: varijacija ρ	29
11.5	Evolucija ekscentriciteta: varijacija a	30
11.6	Rezultati sa opštom formulom za koeficijent otpora	31
12	Rezultati: ekstrasolarna nebula	31
12.1	Parametri ekstrasolarne nebule	31
12.2	Evolucija ekscentriciteta za ekstrasolarne parametre	32
12.3	Rezultati sa opštom formulom za koeficijent otpora	33

13 Diskusija: veza sa teorijom rasta protoplaneta	33
13.1 Ograničenja i pretpostavke modela	34
Zaključak	36
Literatura	37
Biografija kandidata	38

UVOD

Danas znamo da svaka planeta počinje kao sitno zrno prašine, veličine mikrometra, u disku gasa i prašine koji okružuje mladu zvezdu. Ta zrnca se potom sudaranjem spajaju u nešto veće deliće, veličine od milimetra do centimetra. Dalji rast prostim sudarima je, međutim, ograničen. Komadi ove veličine i nešto veće se pri sudarima pre razbijaju nego što se spajaju. Takođe, otpor gasa u disku bi tela veličine oko jednog metra uvukao ka zvezdi za svega hiljadu godina, pre nego što bi ona stigla značajnije da porastu [9].

Zbog toga se veruje da ti delići ne rastu dalje postepenim sudaranjem, već se najpre koncentrišu u guste filamente, izdužene niti u kojima je gustina čvrstih čestica znatno veća nego u okolini. Naime, čestice se kreću brže od okolnog gasa, pa ga otporom pri kretanju malo ubrzavaju u sopstvenom smeru. Tamo gde ih ima više, taj efekat je jači: gas se tu više ubrza, razlika brzine između čestica i gasa se smanji, pa te čestice osećaju slabiji otpor i duže se zadržavaju na istom poluprečniku orbite (ne poniru ka zvezdi). To ih dodatno zgušnjava, sve dok se ne formiraju filamenti. Unutar tako nastalih filamenata gustina čestica naraste dovoljno da sopstvena gravitacija preuzme kontrolu i sažme ih pravo u tela veličine od stotinak metara do nekoliko stotina kilometara [9]. Takva tela se zovu planetezimale; to su gradivne jedinice od kojih vremenom mogu da se formiraju prave planete.

Dalji rast do veličine planeta odvija se kroz dva paralelna mehanizma. Prvi su međusobni sudari planetezimala: ako se sudaraju dovoljno sporo, one se spajaju u sve veća tela. Drugi je akrecija šljunka, u kojoj veće telo, dok gas još uvek nije nestao iz diska, gravitaciono prikuplja sitnije, milimetarske do centimetarske komade koji promiču pored njega. Ovaj drugi mehanizam je posebno važan na većim rastojanjima od zvezde [9].

Planetezimale se ne kreću oko zvezde po potpuno kružnim putanjama. Svaka orbita ima određeni stepen izduženosti, koji se izražava veličinom koja se zove ekscentricitet orbite. Što je ekscentricitet bliži nuli, orbita je kružnija; što je veći, orbita je izduženija. Ova naizgled sitna fizička veličina pokazuje se kao ključna za to da li će proces formiranja planeta uopšte moći da se nastavi do kraja. Ako se planetezimale kreću sporo jedna u odnosu na drugu, što znači mali ekscentricitet, lakše se privlače gravitacijom i spajaju u veće komade. Ako se, pak, kreću većim relativnim brzinama, sudari među njima postaju toliko siloviti da ih razbijaju umesto da ih spajaju [9].

Šta, onda, određuje koliki će ekscentricitet da ima planetezimala? Postoje dva suprotstavljena fizička procesa. Prvi je otpor gasa: gas u disku kreće se i dalje sporije od planetezimala, pa on ipak značajno utiče na nju, usporava je i vremenom smiruje, odnosno prigušuje njen ekscentricitet [1]. Drugi proces ide u suprotnom smeru: gravitaciono uskomešavanje. Kada jedna planetezimala naraste dovoljno da postane znatno veća od ostalih, reč je o tzv. protoplaneti. Ona svojom gravitacijom povlači i otklanja okolne manje planetezimale sa njihovih dotadašnjih putanja, nasumično im menjajući brzinu pri svakom bliskom prolasku, i tako postepeno povećava njihov ekscentricitet [3].

Ova dva procesa, otpor gasa koji smanjuje ekscentricitet i gravitaciono uskomešavanje koje ga povećava, deluju istovremeno, ali u suprotnim smerovima. Cilj ovog rada je upravo da odredi koji od ova dva procesa, pod datim uslovima, preovlađuje: da li će otpor gasa stići da smiri orbite planetezimala pre nego što gas iz diska nestane, ili će gravitaciono uskomešavanje biti brže i trajno

povećati njihov ekscentricitet.

Da bismo ovo kvantitativno odredili, u radu poredimo dve karakteristične vremenske skale: jednu koja govori posle koliko vremena otpor gasa značajno smanjuje ekscentricitet, i drugu koja govori posle koliko vremena gravitaciono uskomešavanje protoplanete taj ekscentricitet značajno povećava. Ovo poređenje radimo za dva različita scenarija: jedan koji odgovara uslovima u ranom Sunčevom sistemu, i drugi koji odgovara pojasu planetezimala na mnogo većem rastojanju od znatno masivnije zvezde.

Rad je organizovan tako da svako sledeće poglavlje postepeno uvodi potrebne fizičke pojmove i predstavlja rezultate. Prvo će detaljnije biti objašnjena struktura diska i oba fizička mehanizma (Poglavljje 1), zatim će biti uveden konkretan model gustine gasa u disku (Poglavljje 2) i parametri koji će se koristiti u proračunu (Poglavljje 3). Potom slede poglavlja posvećena otporu gasa i veličini koja opisuje brzinu njegovog delovanja (Poglavljja 4 do 6), zatim gravitacionom uskomešavanju i odgovarajućoj vremenskoj skali (Poglavljja 7 i 8). Pre prelaska na rezultate, proverava se u kom se režimu otpora gasa nalaze razmatrane planetezimale i opisuje se metoda numeričke integracije (Poglavljja 9 i 10), nakon čega slede rezultati za oba razmatrana scenarija (Poglavljja 11 i 12), diskusija (Poglavljje 13) i zaključak.

1 Teorijska osnova

1.1 Protoplanetarni disk

Protoplanetarni diskovi nastaju kao prirodna posledica rotacije molekularnog oblaka tokom gravitacionog kolapsa. Materijal blizu ose rotacije ima mali moment impulsa, pa tokom kolapsa gotovo direktno formira centralnu protozvezdu, dok materijal dalje od ose rotacije, usled centrifugalnog efekta, ne može direktno da padne u centar, već se zadržava na određenom rastojanju i formira rotirajući disk u ravni normalnoj na osu rotacije. Tipičan protoplanetarni disk ima masu od 10^{-3} do 10^{-1} solarnih masa, radijus i do nekoliko stotina astronomskih jedinica, i traje između otprilike 1 i 10 miliona godina pre nego što ga fotoevaporacija i akrecija na centralnu zvezdu iscrpi.

Disk se sastoji pretežno od vodonika i helijuma ($\sim 99\%$ mase), sa primesama prašine koja čini preostali $\sim 1\%$. Temperatura u disku opada sa rastojanjem od zvezde, tipično kao $T \propto r^{-1/2}$ za pasivne diskove koji se zagrevaju zračenjem centralne zvezde, što neposredno određuje gustinu gasa i lokalnu brzinu zvuka, a preko njih i sve dinamičke procese kojima se ovaj rad bavi.

1.2 Jakobijeva energija

Adachi i saradnici [1] ističu da se, u poslednjoj fazi formiranja planeta, kretanje planetezimale najbolje opisuje kao rešenje restringovanog problema tri tela, gde Sunce i jedna protoplaneta dominiraju gravitacionim poljem. Oko svake protoplanete postoji oblast, tzv. Hilova sfera, poluprečnika $R_H = a(M/3M_\odot)^{1/3}$ (Hilov radijus), unutar koje sopstvena gravitacija protoplanete nadjačava plimsko

dejstvo Sunca, pa telo koje u nju uđe više ne kruži samo oko Sunca već biva zahvaćeno ili snažno rasejano od strane protoplanete. U rotirajućem referentnom sistemu vezanom za Sunce i protoplanetu postoji očuvana veličina, Jakobijeva konstanta, koja određuje da li planetezimala uopšte može da uđe u tu Hilovu sferu.

Ovaj koncept je detaljnije razrađen u radu Ide i Makina [3], koji uvode Jakobijevu energiju E_J kao veličinu očuvanu tokom susreta planetezimale i protoplanete, definisanu (u skaliranim, bezdimenzionim Hilovim jedinicama) kao:

$$E_J = \frac{1}{2} (\tilde{e}_m^2 + \tilde{i}_m^2) - \frac{3}{8} \tilde{b}^2 + \frac{9}{2}, \quad (1.2.1)$$

gde su $\tilde{e}_m = e_m/h_M$ i $\tilde{i}_m = i_m/h_M$ bezdimenzioni ekscentricitet i inklinacija planetezimale skalirani Hilovim radijusom protoplanete h_M , a $\tilde{b} = (a_m - a_M)/(h_M a_M)$ je bezdimenziono rastojanje velikih poluosa. Planetezimale mogu ući u Hilovu sferu protoplanete samo ukoliko je $E_J > 0$, čime se definiše takozvana „zona hranjenja“ (feeding zone) protoplanete.

1.3 Formiranje planetezimala

Formiranje planetezimala iz prašine u protoplanetarnom disku prolazi kroz nekoliko faza. U prvoj fazi, mikroskopske čestice prašine rastu kolizijama i lepljenjem, a potom se postepeno talože ka ekvatorijalnoj ravni diska usled gravitacije zvezde i trenja sa gasom. Kada površinska gustina prašine postane dovoljno velika, razvija se gravitaciona nestabilnost koja direktno formira kilometarska tela, planetezimale. Alternativno, mehanizam streaming instability (nestabilnost strujanja gasa i čestica) može koncentrisati prašinu u gustim vlaknima, a naknadna gravitaciona nestabilnost tada formira planetezimale. U oba slučaja, planetezimale nastaju sa orbitama koje su bliske kružnim, a naknadna gravitaciona međudelovanja postepeno povećavaju njihov ekscentricitet.

1.4 Ekscentricitet orbita planetezimala

Ekscentricitet orbite planetezimale meri koliko se ta orbita razlikuje od kružne. Za $e = 0$ orbita je savršeno kružna; za $e = 0.1$, razlika između perihela i afela iznosi oko 20% velike poluose orbite. Ekscentricitet direktno utiče na relativne brzine sudaranja planetezimala, a time i na efikasnost njihovog rasta akrecijom.

Walmswell i saradnici [4] pokazuju da tokom self-gravitating faze diska (faze u kojoj je sopstvena gravitacija samog gasa dovoljno jaka da izazove spiralnu nestabilnost, umesto da bude samo pasivan pratilac zvezdine gravitacije), gravitaciona nestabilnost samog diska može povećati ekscentricitet planetezimala na desetinama astronomskih jedinica do vrednosti $e \gtrsim 0.1$, na vremenskoj skali za koju disk ostaje u tom režimu. Ovo je dovoljno veliko da može sprečiti efikasnu akreciju, osim ukoliko sila otpora gasa naknadno ne smanji ekscentricitet na manje vrednosti pre nego što gas nestane iz diska. Ovo pitanje čini centralni predmet ovog rada.

1.5 Sila otpora gasa

Planetezimala koje orbitiraju oko zvezde ne kreću se tačno Keplerovom brzinom, jer je gas u disku delimično podržan gradijentom pritiska i rotira nešto sporije od Keplerove brzine. Zbog ove razlike brzina, planetezimala oseća efektivni „vetar“ koji se suprotstavlja njenom kretanju i dovodi do disipacije energije i momenta impulsa. Ovaj efekat je detaljno izveden u radu Adachija, Hayashija i Nakazawe [1], i predstavlja glavni mehanizam prigušivanja ekscentriciteta razmatran u ovom radu (Poglavlja 4-6).

1.6 Gravitaciono uskomešavanje

Tokom formiranja planeta, protoplanete, tela veća od planetezimala koja su već akretovala deo materijala, gravitaciono rasejavaju okolne planetezimala. Ovaj mehanizam, koji Ida i Makino [3] nazivaju „viscous stirring“, povećava nasumičnu komponentu brzina planetezimala, što se manifestuje kao povećanje ekscentriciteta i inklinacije njihovih orbita. Ovaj efekat detaljno se razmatra u Poglavljima 7-8.

2 Model protoplanetarnog diska (MMSN)

2.1 Šta je MMSN

MMSN (Minimum Mass Solar Nebula) model protoplanetarnog diska konstruiše se na sledeći način. Pošto planete danas sadrže pretežno teže, čvrste elemente (stene, metale), dok je disk iz kog su nastale bio sastavljen pretežno ($\sim 99\%$ mase) od vodonika i helijuma, masi svake planete se prvo dodaje dovoljno lakih elemenata (vodonik, helijum) da bi odnos teških i lakih elemenata dostigao vrednost kakvu ima Sunce („solarni hemijski sastav“, gde vodonik i helijum čine $\sim 98\%$ ukupne mase). Time se procenjuje kolika je bila ukupna (dopunjena) masa diska potrebna da se ta planeta formira.

Ta dopunjena masa se zatim „razmazuje“ po tankom, dvodimenzionalnom prstenu oko orbite planete, čije se granice uzimaju na pola rastojanja do susednih planeta. Deljenjem dopunjene mase površinom tog prstena dobija se lokalna površinska gustina Σ na rastojanju te planete. Ponavljanjem ovog postupka za svaku planetu Sunčevog sistema dobija se niz tačaka (a, Σ) , po jedna za svaku planetu, koje se zatim ucrtavaju na grafik površinske gustine u zavisnosti od rastojanja od Sunca, u logaritamskoj skali na obe ose. Fitovanjem prave linije kroz te tačke na tom log-log grafiku (što odgovara stepenoj funkciji oblika $\Sigma \propto r^{-p}$ na običnoj skali) dobija se konačna formula za površinsku gustinu gasa. Model su razvili Weidenschilling [6] i Hayashi [2], i predstavlja minimalnu masu koja je morala biti prisutna u disku da bi se formirale planete na svojim sadašnjim orbitama.

MMSN model nije jedinstven, različiti autori dobijaju nešto različite vrednosti u zavisnosti od pretpostavki o hemijskom sastavu i raspodeli mase planeta (npr. Weidenschilling [6] dobija veće vrednosti od Hayashija). Ipak, kao standardna referentna tačka u literaturi najčešće se koristi MMSN prema Hayashiju [2], koju usvaja i ovaj rad.

2.2 Površinska gustina

Hayashi [2] daje sledeću formulu za površinsku gustinu gasa:

$$\Sigma(r) = 1700 \left(\frac{r}{1 \text{ au}} \right)^{-3/2} \text{ g cm}^{-2}. \quad (2.2.1)$$

Na $r = 1 \text{ au}$: $\Sigma_{\text{MMSN}} = 1700 \text{ g cm}^{-2}$. EkspONENT $-3/2$ odgovara raspodeli mase koja je konzistentna sa posmatranim planetama Sunčevog sistema.

2.3 Veza između površinske i zapreminske gustine

Disk ima vertikalnu strukturu gustine oblika Gausijana, što je direktna posledica hidrostatičke ravnoteže u vertikalnom pravcu i izotermne jednačine stanja. Jednačina hidrostatičke ravnoteže glasi:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \omega_K^2 z. \quad (2.3.1)$$

Za izotermni gas važi $P = c_s^2 \rho$, pa je

$$c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho \omega_K^2 z \implies \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\omega_K^2}{c_s^2} z dz.$$

Integraljenjem po z dobija se

$$\rho(r, z) = \rho_{\text{mid}}(r) \exp\left(-\frac{z^2}{2h^2}\right), \quad h = \frac{c_s}{\omega_K}, \quad (2.3.2)$$

gde se veličina h naziva visinska skala diska. Površinska gustina predstavlja integral zapreminske gustine po vertikalnoj koordinati:

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(r, z) dz = \rho_{\text{mid}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2h^2} dz.$$

Smenom $u = z/(\sqrt{2}h)$ dobija se $\Sigma = \rho_{\text{mid}} \cdot \sqrt{2\pi}h$, odakle

$$\rho_{\text{mid}} = \frac{\Sigma}{\sqrt{2\pi}h}. \quad (2.3.3)$$

2.4 Visinska skala i midplane gustina prema MMSN

Temperatura u MMSN modelu je $T(r) = 280 (r/1 \text{ au})^{-1/2} \text{ K}$, pa je na $r = 1 \text{ au}$: $T = 280 \text{ K}$. Brzina zvuka za idealni gas sa srednjom molekularnom masom $\mu = 2.34$ (pretežno H_2) iznosi

$$c_s = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_H}} \approx 1.03 \times 10^5 \text{ cm s}^{-1}.$$

Keplerova ugaona brzina na $r = 1$ au je $\omega_K = \sqrt{GM_\odot/r^3} \approx 2.0 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$, pa je visinska skala $h = c_s/\omega_K \approx 5.15 \times 10^{11} \text{ cm}$. Iz jednačine (2.3.3) sledi zapreminska gustina u središnjoj ravni diska:

$$\rho_{\text{mid}}^{\text{MMSN}}(1 \text{ au}) = \frac{1700}{\sqrt{2\pi} \cdot 5.15 \times 10^{11}} \approx 1.4 \times 10^{-9} \text{ g cm}^{-3}. \quad (2.4.1)$$

3 Parametri modela

U radu se razmatraju planetezimale u orbiti oko Sunca u referentnoj ravni diska ($i = 0$), sa sledećim parametrima:

- Radijus planetezimale: $r_p = 5 \text{ km} = 5 \times 10^5 \text{ cm}$;
- Gustina planetezimale: $\rho_s = 3 \text{ g cm}^{-3}$;
- Velika poluosa: $a = 1 \text{ au} = 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$;
- Parametar pritiska: $\eta = 2 \times 10^{-3}$;
- Keplerova perioda na $a = 1 \text{ au}$: $T_K = 1 \text{ god}$.

Masa planetezimale iznosi

$$m = \frac{4}{3}\pi r_p^3 \rho_s = \frac{4}{3}\pi (5 \times 10^5)^3 \cdot 3 \approx 1.57 \times 10^{18} \text{ g}. \quad (3.0.1)$$

Ovaj izbor odgovara vrednosti mase kod koje Adachi i saradnici razdvajaju planetezimale ($m \gtrsim 10^{18} \text{ g}$) od sitnijih čestica prašine, za koje bi bio potreban drugačiji tretman opisan u Odeljku 6. Radijus $r_p = 5 \text{ km}$ tipičan je za planetezimale nastale gravitacionom nestabilnošću, a gustina $\rho_s = 3 \text{ g cm}^{-3}$ odgovara silikatnom sastavu, karakterističnom za unutrašnji deo Sunčevog sistema, a ujedno je i vrednost koju usvajaju Adachi i saradnici [1] za gustinu čvrstog tela u čitavom svom radu.

4 Sila otpora gasa

4.1 Opšti oblik sile otpora

Planetezimala koja se kreće kroz gas diska oseća silu otpora koja se generalno može zapisati u obliku:

$$f_D = \frac{1}{2} C_D \pi r_p^2 \rho u^2, \quad (4.1.1)$$

gde je u relativna brzina planetezimale u odnosu na gas, ρ gustina gasa, a C_D bezdimenzioni koeficijent otpora koji zavisi od režima strujanja [1]. Ova formula je analogna aerodinamičkom otporu poznatom iz klasične mehanike fluida.

4.2 Bezdimenzioni parametri koji određuju režim

Koeficijent C_D generalno zavisi od bilo koja dva od tri bezdimenziona parametra:

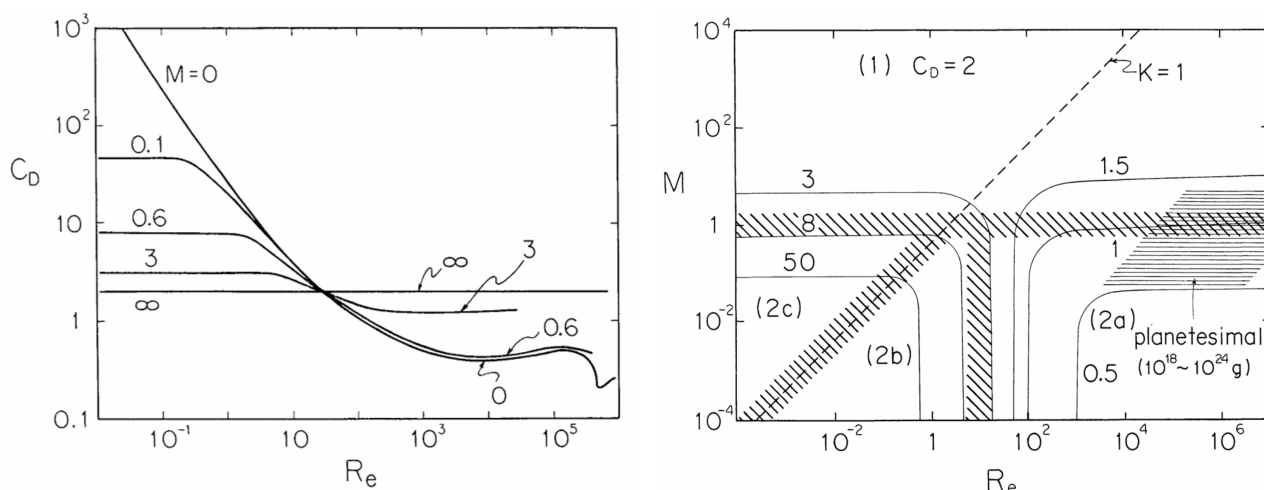
- Mahov broj $M = u/c$, gde je c brzina zvuka u gasu;
- Knudsenov broj $K = l/r_p$, gde je l srednja slobodna putanja molekula gasa;
- Reynoldsov broj $Re = 2\rho ur_p/\mu$, gde je μ viskoznost gasa.

Ova tri broja nisu nezavisna, postoji jedna relacija među njima, jednačina (3.12) u Adachi et al. (1976):

$$Re = 4.4 M K^{-1}. \quad (4.2.1)$$

4.3 Režimi sile otpora

Adachi i saradnici [1] razlikuju nekoliko graničnih režima strujanja gasa oko planetezimala, u zavisnosti od vrednosti M , K i Re (videti Sliku 4.1):



Slika 4.1: Koeficijent otpora C_D kao funkcija Mahovog broja M i Reynoldsovog broja Re , prema Adachi et al. (1976). Levo: zavisnost $C_D(Re)$ za nekoliko fiksnih vrednosti M . Desno: konture konstantnog C_D u $M-Re$ dijagramu, sa naznačenim granicama režima (1), (2a), (2b) i (2c) i osenčenom oblašću koja odgovara planetezimalima mase $10^{18}-10^{24}$ g.

- **Režim (1)**, $M \gg 1$ - supersonični otpor. Ovde je $C_D = 2$ nezavisno od K i Re , pa je $f_D = \pi r_p^2 \rho u^2$.
- **Režim (2)**, $M \ll 1$, koji se dalje deli na tri podslučaja:
 - **(2a)** $K \ll 1$ i $Re \gtrsim 10^3$ - turbulentni (kvadratni) otpor. Koeficijent C_D je približno konstantan, u uskom opsegu između 0.4 i 0.5, pa se koristi $f_D \approx 0.25 \pi r_p^2 \rho u^2$.
 - **(2b)** $K < 1$ i $Re \lesssim 10$ - Stoksov (linearan) otpor. Ovde je $C_D = 24/Re$, pa sila otpora postaje linearna u brzini: $f_D = 6\pi \mu r_p u$.

– (2c) $K > 1$ - molekularni (Epstein) otpor. Koeficijent iznosi $C_D = 16/(KR_e)$, a sila otpora je $f_D = (4\pi/3)r_p^2\rho c_m u$, gde je c_m srednja termalna brzina molekula gasa.

- **Prelazna oblast**, $M \simeq 1$ - ovde C_D jako zavisi od M , i za $1 \lesssim R_e \lesssim 10^2$ menja se u širokom opsegu (videti Sliku 4.1).

Da bi se ove formule mogle primeniti, potrebno je izraziti l , r_p i K preko gustine gasa ρ i mase planetezimale m . Pod pretpostavkom da je gas pretežno sastavljen od vodoničnih molekula sa poprečnim presekom sudara $2 \times 10^{-15} \text{ cm}^2$ i da je gustina čvrstog tela 3 g cm^{-3} , Adachi i saradnici dobijaju:

$$l = 1.7 \times 10^{-9} \rho^{-1} \text{ cm}, \quad r_p = 0.43 m^{1/3} \text{ cm}, \quad K = 3.9 \times 10^{-9} \rho^{-1} m^{-1/3}. \quad (4.3.1)$$

Za planetezimale mase između 10^{18} i 10^{24} g (Slika 4.1), pri gustinama gasa relevantnim za protoplanetarne diskove (10^{-10} - $10^{-8} \text{ g cm}^{-3}$), Mahov broj se kreće u opsegu $0.05 \lesssim M \lesssim 5$, a Knudsenov broj u opsegu $4 \times 10^{-9} \lesssim K \lesssim 4 \times 10^{-5}$. To znači da se ovakve planetezimale gotovo uvek nalaze u okolini režima (2a) ili u prelaznoj oblasti $M \sim 1$, pri čemu je koeficijent otpora ograničen na uzak interval $0.5 \lesssim C_D \lesssim 1.5$. Ova činjenica opravdava korišćenje $C_D \approx 0.5$ kao konzervativnu polaznu aproksimaciju u proračunima koji slede, uz naknadnu proveru preko tačnije, kontinualne formule (Odeljak 4.4).

4.4 Opšta formula za koeficijent otpora

Za planetezimale u razređenijim ili udaljenijim delovima diska (npr. ekstrasolarna nebula razmatrana u Poglavlju 12), situacija je komplikovanija jer se javljaju vrednosti K i R_e van jednostavnih graničnih režima. Vatanabe i Ida (1997), kako je preneto u radu Tanigawe, Marute i Machide [5], daju opštu kontinualnu formulu za C_D koja glatko interpolira između svih režima:

$$C_D \simeq \left[\left(\frac{24}{R_e} + \frac{40}{10 + R_e} \right)^{-1} + 0.23M \right]^{-1} + \frac{(2.0 - w)M}{1.6 + M} + w, \quad (4.4.1)$$

gde je $w = 0.4$ za $R_e < 2 \times 10^5$ i $w = 0.2$ za $R_e > 2 \times 10^5$. Ova formula omogućava proračun C_D bez potrebe da se unapred utvrdi u kom se od graničnih režima planetezimala nalazi, što je posebno korisno za ekstrasolarne parametre gde više nije unapred jasno da li važi $C_D \approx 0.5$.

5 Vremenska skala otpora gasa

5.1 Jednačine promene orbitalnih elemenata

U opštem slučaju, promena velike poluose a i ekscentriciteta e usled dejstva male poremećajne sile $\vec{F}$ opisuje se sistemom jednačina:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n(1-e^2)^{1/2}} \left\{ F_R e \sin \psi + F_\psi \frac{a(1-e^2)}{R} \right\}, \quad (5.1.1)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na} \left\{ F_R \sin \psi + F_\psi (\cos E + \cos \psi) \right\}, \quad (5.1.2)$$

gde su F_R i F_ψ komponente poremećajne sile u radijalnom i tangencijalnom pravcu, ψ prava anomalija, a E ekscentrična anomalija [1]. Usrednjavanjem ovih jednačina po jednoj Keplerovoj periodi i razvojem po malim veličinama e , i i η , za slučaj $i = 0$, dobija se [1]:

$$-\frac{\tau_0}{e} \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = 0.77e + \eta, \quad (5.1.3)$$

odnosno

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dt} = -\frac{1}{\tau_0} (0.77e + \eta), \quad (5.1.4)$$

gde je τ_0 karakteristična vremenska skala definisana jednačinom [1]:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{A\rho(a)v_K(a)} = \frac{2m}{\pi C_D r_p^2 \rho(a)v_K(a)} \\ &= 365 \cdot \frac{1}{C_D} \left(\frac{m}{10^{21} \text{ g}} \right)^{1/3} \left(\frac{a}{1.5 \times 10^{13} \text{ cm}} \right)^{-1} \left(\frac{\rho}{10^{-9} \text{ g cm}^{-3}} \right)^{-1} T_K. \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Dimenziona analiza jednačine (5.1.5) pokazuje da τ_0 raste sa masom planetezimale (teža tela je teže usporiti), opada sa gustinom gasa (gušći gas efikasnije usporava kretanje) i opada sa Keplerovom periodom (kraća perioda znači veći broj orbita u jedinici vremena, a time i više interakcije sa gasom po jedinici vremena).

Vredi napomenuti da je perturbacioni metod korišćen u izvođenju jednačine (5.1.3) validan samo ukoliko su relativne promene a , e i i unutar jedne Keplerove periode mnogo manje od jedinice, što se svodi na uslov [1]:

$$\frac{T_K(e+i+\eta)}{\tau_0} = 2\pi A a \rho (e+i+\eta) < 1. \quad (5.1.6)$$

Za parametre razmatrane u ovom radu ($m \gtrsim 10^{18} \text{ g}$, $\rho \lesssim 10^{-8} \text{ g cm}^{-3}$), ovaj uslov je zadovoljen, čime se opravdava korišćenje perturbacione formule (5.1.3) umesto tretmana spiralne orbite iz Odeljka 6.

5.2 Karakteristična vremenska skala prigušivanja ekscentriciteta

Iz jednačine (5.1.3) sledi karakteristična vremenska skala prigušivanja ekscentriciteta:

$$t_{\text{otpor}} = \left| \frac{1}{e} \frac{de}{dt} \right|^{-1} = \frac{\tau_0}{0.77e + \eta}. \quad (5.2.1)$$

Ova veličina opisuje karakteristično vreme u kome ekscentricitet opadne za faktor $e^{-1} \approx 2.72$. Za $e \gg \eta/0.77 \approx 2.6 \times 10^{-3}$, dominira prvi član u imeniocu i $t_{\text{otpor}} \approx \tau_0/(0.77e) \propto e^{-1}$, veći početni ekscentricitet se prigušuje relativno brže (u apsolutnom smislu opadanja de/dt , iako je relativna stopa $|de/dt|/e$ veća). Za $e \ll \eta$, naprotiv, $t_{\text{otpor}} \approx \tau_0/\eta$ postaje nezavisno od e , prigušivanje je tada dominantno determinisano samim gradijentom pritiska gasa, a ne ekscentricitetom same planetezimale.

5.3 Numerički rezultati za MMSN

Ubacivanjem $C_D = 0.5$, $m = 1.57 \times 10^{18}$ g, $a = 1.5 \times 10^{13}$ cm, $T_K = 1$ god u jednačinu (5.1.5) dobija se

$$\tau_0 = 730 \cdot (1.57 \times 10^{-3})^{1/3} \cdot \left(\frac{10^{-9}}{\rho} \right) \text{ god} = 84.7 \cdot \left(\frac{10^{-9}}{\rho} \right) \text{ god}. \quad (5.3.1)$$

Za MMSN gustinu $\rho = 1.4 \times 10^{-9}$ g cm $^{-3}$ sledi $\tau_0 = 60.5$ god = 6.05×10^{-5} Myr, pa je

$$t_{\text{otpor}}^{\text{MMSN}} [\text{Myr}] = \frac{6.05 \times 10^{-5}}{0.77e + 0.002}. \quad (5.3.2)$$

Za $e_0 = 0.1$ dobija se $t_{\text{otpor}} \approx 7.66 \times 10^{-4}$ Myr $\ll t_{\text{ppd}} = 10$ Myr.

Tabela 1 prikazuje vrednosti t_{otpor} za različite gustine gasa, pri $e_0 = 0.1$ i $a = 1$ au.

Tabela 1: Vremenska skala prigušivanja ekscentriciteta za različite gustine gasa, za $e_0 = 0.1$, $a = 1$ au.

ρ (g cm $^{-3}$)	τ_0 (god)	t_{otpor} (god)	t_{otpor} (Myr)	Poređenje sa t_{ppd}
10^{-8}	8.47	107	$\sim 10^{-4}$	$\ll t_{\text{ppd}}$
1.4×10^{-9} (MMSN)	60.5	766	$\sim 7.7 \times 10^{-4}$	$\ll t_{\text{ppd}}$
10^{-10}	847	10720	~ 0.01	$\ll t_{\text{ppd}}$
10^{-12}	8.47×10^4	1.07×10^6	~ 1	$< t_{\text{ppd}}$

Za sve fizički relevantne gustine gasa (od 10^{-12} do 10^{-8} g cm $^{-3}$), t_{otpor} je daleko ispod $t_{\text{ppd}} = 10$ Myr, što znači da gas efikasno smanjuje ekscentricitet planetezimala tokom celog trajanja diska u okviru MMSN modela.

6 Slučaj opadanja radijusa orbite

Kada je sila otpora gasa dovoljno velika (za male čestice ili gušće diskove) da perturbacioni uslov (5.1.6) nije zadovoljen, formula (5.2.1) prestaje da važi. Adachi i saradnici u Odeljku 5 svog rada razmatraju ovaj suprotan granični slučaj: ekscentricitet i inklinacija opadaju brže nego velika poluosa, pa čestica ubrzo prelazi u kvazistacionarnu spiralnu orbitu sa gotovo kružnim kretanjem i postepenim smanjenjem radijusa.

Uvođenjem bezdimenzionih promenljivih $x = v_r/(\eta v_K)$, $y = v'_\theta/(\eta v_K)$, $z = u/(\eta v_K)$ i $g = F/(u\omega_K)$, jednačine kretanja u spiralnom režimu svode se na algebarski sistem

$$2y = gx, \quad \frac{x}{2} = -g(1+y), \quad z = \{x^2 + (1+y)^2\}^{1/2}, \quad (6.0.1)$$

čije je rešenje

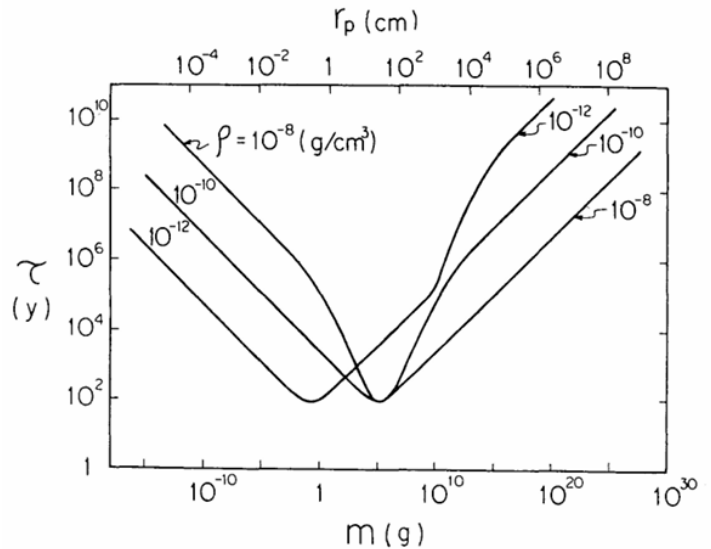
$$x = \frac{-2g}{1+g^2}, \quad y = \frac{-g^2}{1+g^2}, \quad z = \frac{(1+4g^2)^{1/2}}{1+g^2}. \quad (6.0.2)$$

Vreme opadanja (decay time) radijusa spiralne orbite definiše se kao

$$\tau = -\frac{r}{v_r} = \frac{1}{\eta\omega_K x} = \frac{T_K}{2\pi\eta} \cdot \frac{1+g^2}{2g}, \quad (6.0.3)$$

sa minimalnom vrednošću $T_K/(2\pi\eta)$ (npr. ~ 80 godina za $a = 1$ au i $\eta = 2 \times 10^{-3}$) koja se dostiže pri $g = 1$.

Ovaj rezultat je relevantan za razumevanje granica primenljivosti proračuna u ovom radu: za planetezimale veće od $\sim 10^{18}$ g pri gustinama gasa relevantnim za MMSN i ekstrasolarni model (Poglavlja 11-12), uslov (5.1.6) je zadovoljen i formula za t_{otpor} iz Odeljka 5 važi bez ograničenja. Spiralni režim postaje relevantan tek za znatno manje čestice (reda 10^3 - 10^8 g, prema Slici 6.1), gde otpor gasa dominira nad Keplerovim kretanjem, a vreme opadanja radijusa orbite može biti kratko koliko 10^2 - 10^3 godina. Ovo naglašava da je efekat gasa na dinamiku tela u disku izrazito zavistan od veličine (mase) tela: i najmanje čestice prašine i najveće planetezimale kreću se gotovo zajedno sa gasom (spore promene), dok tela srednje veličine osećaju najveći relativni efekat otpora.



Slika 6.1: Vreme opadanja radijusa spiralne orbite u funkciji mase čestice m (odnosno radijusa čestice r_p), za $r = 1$ au i $\eta = 2 \times 10^{-3}$, preuzeto iz Adachi et al. (1976).

7 Gravitaciono uskomešavanje planetezimala

7.1 Viscous stirring

Ida i Makino [3] razvijaju teoriju gravitacionih interakcija između protoplanete mase M i skupa planetezimala mase $m \ll M$, u režimu dominiranom disperzijom brzina (gde su nasumične brzine planetezimala veće od razlike u orbitalnim brzinama usled diferencijalne rotacije). Ovaj mehanizam, poznat kao „viscous stirring“, povećava nasumičnu komponentu brzina planetezimala, što se manifestuje kao rast ekscentriciteta i inklinacije njihovih orbita.

Autori su ovu teoriju verifikovali direktnim trodimenzionim simulacijama sistema N -tela od jedne protoplanete i 800 planetezimala jednakih masa, koristeći GRAPE hardver, specijalizovani računar konstruisan isključivo za brzo izračunavanje gravitacionih sila između mnogo čestica, koji je u to vreme omogućavao ubrzanje ovakvih simulacija za nekoliko redova veličine u odnosu na standardne procesore. U simulacijama, planetezimale u okolini protoplanete formiraju karakterističnu „krilastu“ strukturu u prostoru $(\tilde{e}^2 + \tilde{i}^2)^{1/2}$ nasuprot $\tilde{b}$, koja prati konture konstantne Jakobijeve energije $E_J \sim 0$: planetezimale sa $E_J > 0$ prilaze protoplaneti i bivaju snažno rasejane, bez promene sopstvene E_J , ali difuzijom kroz međusobne susrete postepeno se „zagrevaju“ i udaljavaju od krive $E_J = 0$, prenoseći deo stečene nasumične energije na susedne planetezimale. Ovako definisana oblast oko protoplanete u kojoj su e_m i i_m značajno povećani naziva se *zagrejana oblast* (heated region).

7.2 Širina zagrejene oblasti

Iz definicije zone hranjenja preko Jakobijeve energije, širina zagrejene oblasti (normalizovana Hilovim radijusom protoplanete) iznosi (Ida & Makino 1993):

$$\Delta \tilde{a} = 4 \left[\frac{4}{3} (\tilde{e}_m^2 + \tilde{i}_m^2) + 12 \right]^{1/2}, \quad (7.2.1)$$

odnosno fizička širina $\Delta a = \Delta \tilde{a} \cdot h_M a$, gde je $h_M = (M/3M_\odot)^{1/3}$ bezdimenzioni Hilov radijus. Za male vrednosti ekscentriciteta i inklinacije ($\tilde{e}_m, \tilde{i}_m \ll 1$), ova širina svodi se na konstantnu vrednost bliskoj minimalnoj širini zone hranjenja definisane preko Hilovog radijusa; ista širina, u fizičkim (nenormalizovanim) jedinicama, poznata je u literaturi i kao dvostruka širina „zona hranjenja“ protoplanete. Ova širina koristi se za definisanje efektivne površinske gustine protoplaneta u disku:

$$n_{sM} = \frac{1}{2\pi a \Delta a}. \quad (7.2.2)$$

7.3 Disperziono dominantni i shear-dominantni režim

Ida i Makino razlikuju dva karakteristična režima gravitacionih susreta, zavisno od odnosa disperzije brzina planetezimale (engl. *velocity dispersion*) i brzine smicanja (engl. *shear*), tj. relativnog klizanja susednih kružnih orbita usled diferencijalne Keplerove rotacije, pri čemu bliži sloj diska kruži

brže od udaljenijeg:

- **Disperziona dominantni režim** ($\tilde{e}_m \gtrsim 2$): nasumične brzine planetezimala su veće od razlike orbitalnih brzina, pa se svaki susret tretira nezavisno preko klasične Čandrasekarove relaksacione teorije. Ovaj režim je relevantan za planetezimale sa ekscentricitetom $e \gtrsim 0.03-0.1$, koje čine glavni predmet ovog rada.
- **Shear-dominantni režim** ($\tilde{e}_m \lesssim 1$): pri malim ekscentricitetima, relativno kretanje planetezimala u odnosu na protoplanetu je pretežno određeno smicanjem usled diferencijalne Keplerove rotacije, a ne nasumičnim brzinama. U ovom režimu, prema Ida & Makino (1993), karakteristično vreme uskomešavanja $T_{VS}^{M-m}|_{\text{shear}}$ iznosi

$$T_{VS}^{M-m}|_{\text{shear}} = \frac{1}{C'_e} \left(\frac{\Omega^2 a^3}{GM} \right)^{4/3} \frac{\langle e^2 \rangle}{n_{sM} a^2 \Omega}, \quad (7.3.1)$$

gde je $C'_e \approx 20$ bezdimenziona konstanta dobijena poređenjem sa simulacijama N -tela (za poređenje, u disperzionom režimu korišćena konstanta iznosi $C_e \approx 40$, jednačina 8.1.1). Ključna razlika u odnosu na disperzioni režim je eksponent zavisnosti od mase protoplanete: disperzioni režim daje skaliranje $T_{VS}^{M-m} \propto M^{-2}$ (jednačina 8.1.1), dok shear-dominantni režim daje slabije skaliranje $T_{VS}^{M-m} \propto M^{-4/3}$, jer relativna brzina između protoplanete i planetezimale ovde nije određena nasumičnom brzinom planetezimale, već diferencijalnom Keplerovom rotacijom. Prelaz između dva režima dešava se pri $\tilde{e}_m \sim 1-2$, što za protoplanete tipične mase $M \sim 10^{25}-10^{26}$ g na 1 au odgovara ekscentricitetu planetezimale $e \sim h_M \sim 10^{-2}$.

S obzirom da su ekscentriciteti od interesa u ovom radu ($e_0 = 0.001-0.1$, uz $M/M_\oplus \lesssim 10$ tipično) pretežno u disperzionom ili graničnom režimu, u nastavku se koristi formula izvedena za disperziono dominiran režim (Odeljak 8); za sistematsko istraživanje ponašanja pri $e_0 \lesssim 0.01$ bilo bi neophodno koristiti kontinualnu interpolaciju između dva režima, analognu formuli Vatanabea i Ide za C_D (jednačina 4.4.1) korišćenoj za silu otpora gasa.

7.4 Zavisnost od odnosa masa M/m

Značajan rezultat rada Ide i Makina jeste kriterijum kada gravitaciono uskomešavanje od strane same protoplanete dominira nad uskomešavanjem usled međusobnih susreta planetezimala. Poređenjem odgovarajućih Čandrasekarovih relaksacionih vremena, autori pokazuju da uskomešavanje od strane protoplanete dominira ukoliko je:

$$n_{sM} M^2 \gtrsim n_{sm} m^2, \quad (7.4.1)$$

što se, uz masu planetezimale $m = 1.57 \times 10^{18}$ g usvojenu u ovom radu (jednačina 3.0.1) i zavisnost $M/m \propto m^{-2/5}$ iz originalne formule, svodi na uslov $M/m \gtrsim 4 \times 10^3$ na 1 au, odnosno $M/m \gtrsim 2 \times 10^4$ na 5 au. Ovaj rezultat opravdava tretman u ovom radu, u kome se posmatra dejstvo jedne protoplanete na okolne planetezimale, zanemarujući međusobne susrete planetezimala, pod pretpostavkom da je protoplaneta dovoljno masivnija od pojedinačne planetezimale.

Na osnovu ovog kriterijuma, Ida i Makino [3] formulišu dvostepeni scenario rasta protoplanete: u prvoj fazi („runaway rast“, tj. ubrzanog rasta u kome najveće telo raste sve brže u odnosu na okolinu), odnos masa M/m brzo raste jer je gravitaciono fokusiranje protoplanete sve efikasnije, dok dinamičko trenje sa planetezimalama drži sopstveni ekscentricitet protoplanete malim. Kada M/m dostigne kritičnu vrednost ($\sim 4 \times 10^3 - 2 \times 10^4$ za mase planetezimala razmatrane u ovom radu), počinje druga faza („protoplanet-dominated stage“, faza u kojoj protoplaneta preuzima kontrolu nad dinamikom okoline), u kojoj protoplaneta sama snažno uskomešava okolne planetezimale, njihov ekscentricitet raste proporcionalno Hilovom radijusu protoplanete ($e_m \propto M^{1/3}$), a rast protoplanete usporava jer veće relativne brzine smanjuju efikasnost gravitacionog fokusiranja. Ovaj dvostepeni scenario detaljnije se povezuje sa rezultatima ovog rada u Poglavlju 13.

8 Karakteristično vreme gravitacionih interakcija

8.1 Izvođenje

Prema Idi i Makinu [3], u disperziono dominantnom režimu karakteristično vreme gravitacionih interakcija (viscous stirring) definiše se kao vreme potrebno da se srednji kvadrat ekscentriciteta planetezimale udvostruči usled susreta sa protoplanetom:

$$T_{\text{VS}}^{M-m} = \frac{1}{C_e} \left(\frac{\Omega^2 a^3}{GM} \right)^2 \frac{e^4}{n_{sM} a^2 \Omega}, \quad (8.1.1)$$

gde je $C_e \approx 40$ bezdimenziona konstanta određena poređenjem sa rezultatima simulacija N -tela. Ubacivanjem izraza (7.2.2) za n_{sM} dobija se

$$T_{\text{VS}}^{M-m} = \frac{2\pi}{C_e} \cdot \frac{\Omega^3 a^6}{G^2 M^2} \cdot e^4 \cdot \Delta \tilde{a} \cdot h_M. \quad (8.1.2)$$

8.2 Numerički prefaktor

Izražavajući masu protoplanete u jedinicama mase Zemlje $M_{\oplus} = 5.97 \times 10^{27}$ g, tj. $x = M/M_{\oplus}$, sledi $h_M = (9.95 \times 10^{-7} \cdot x)^{1/3}$. Numerički prefaktor na $a = 1$ au iznosi

$$A = \frac{2\pi}{C_e} \cdot \frac{\Omega^3 a^6}{G^2 M_{\oplus}^2} = \frac{2\pi}{40} \cdot \frac{(2 \times 10^{-7})^3 \cdot (1.5 \times 10^{13})^6}{(6.67 \times 10^{-8})^2 \cdot (5.97 \times 10^{27})^2} \cdot \frac{1}{3.156 \times 10^{13}} \text{ Myr} = 2861 \text{ Myr}, \quad (8.2.1)$$

pa je konačna formula

$$T_{\text{VS}}^{M-m} [\text{Myr}] = \frac{2861}{x^2} \cdot e^4 \cdot \Delta \tilde{a}(x, e) \cdot h_M(x). \quad (8.2.2)$$

8.3 Aproksimacija za visoke ekscentricitete

Za $\tilde{e}_m \gg 1$ (što praktično važi za $e \gtrsim 0.03$, a strogo za $e \gg h_M$, dakle za dovoljno male protoplanete), izraz (7.2.1) svodi se na $\Delta \tilde{a} \cdot h_M \approx (8/\sqrt{3}) \cdot e$, pa jednačina (8.2.2) postaje

$$T_{\text{VS}}^{M-m} [\text{Myr}] \approx \frac{13215}{x^2} \cdot e^5. \quad (8.3.1)$$

Skaliranje $T_{\text{VS}}^{M-m} \propto M^{-2} \cdot e^5$ znači da veće protoplanete efikasnije uskomešavaju planetezimale, a da pri višim ekscentricitetima gravitaciono uskomešavanje deluje brže, što je direktno suprotno ponašanju sile otpora gasa, kod koje veći ekscentricitet znači brže prigušivanje (jednačina 5.2.1). Upravo ova suprotna zavisnost od e čini poređenje ove dve vremenske skale netrivialnim i predstavlja fizičku srž ovog rada.

8.4 Granične mase

Poređenjem T_{VS}^{M-m} sa t_{ppd} i sa t_{otpor} definišu se dve granične mase protoplanete. Masa pri kojoj $T_{\text{VS}}^{M-m} = t_{\text{ppd}}$ iznosi

$$M_{\text{ppd}}(e) = M_{\oplus} \sqrt{1321.5 \cdot e^5}, \quad (8.4.1)$$

a masa pri kojoj $T_{\text{VS}}^{M-m} = t_{\text{otpor}}$ (za MMSN gustinu) iznosi

$$M_{\text{grav}}(e) = M_{\oplus} \sqrt{\frac{13215 \cdot e^5 \cdot (0.77e + 0.002)}{6.05 \times 10^{-5}}}. \quad (8.4.2)$$

Tabela 2: Granične mase protoplanete za MMSN gustinu. M_{ppd} : masa pri kojoj $T_{\text{VS}}^{M-m} = t_{\text{ppd}}$. M_{grav} : masa pri kojoj $T_{\text{VS}}^{M-m} = t_{\text{otpor}}$.

e	$M_{\text{ppd}} (M_{\oplus})$	$M_{\text{grav}} (M_{\oplus})$
0.1	0.115	13.1
0.01	3.6×10^{-4}	1.5×10^{-2}
0.001	1.2×10^{-6}	2.5×10^{-5}

Za sve razmatrane vrednosti e , važi $M_{\text{ppd}} < M_{\text{grav}}$. To znači da postoji opseg masa $M_{\text{ppd}} < M < M_{\text{grav}}$ u kome gravitaciono uskomešavanje stigne da deluje pre nestanka gasa iz diska, ali gas i dalje prigušuje ekscentricitet planetezimala brže nego što ga gravitaciono uskomešavanje povećava. Tek za $M > M_{\text{grav}}$ gravitacija dominira nad otporom gasa.

8.5 Veza sa Čandrasekarovim vremenom relaksacije

Formalizam viskoznog uskomešavanja korišćen u prethodnim odeljcima predstavlja poseban slučaj opštije teorije gravitacione relaksacije, poznate iz dinamike zvezdanih sistema. I vremenska skala T_{VS}^{M-m} definisana jednačinom (8.1.1) i odgovarajuća vremenska skala za međusobne susrete

planetezimala mogu se, u disperziono dominiranom režimu, izraziti preko klasičnog Čandrasekarovog relaksacionog vremena (Ida & Makino 1993):

$$T_{\text{Ch}} \simeq \frac{1}{n_p \pi (2Gm_p/v^2)^2 v \ln \Lambda}, \quad (8.5.1)$$

gde je n_p površinska brojna gustina perturbatora (protoplaneta ili planetezimala), m_p zbir masa perturbatora i planetezimale, v srednja relativna brzina, a $\ln \Lambda$ Kulonov logaritam. Ova veličina se javlja zato što se ukupan efekat mnogobrojnih slabih gravitacionih susreta (na velikom rastojanju) i retkih jakih susreta (na malom rastojanju) sabira preko svih mogućih rastojanja prilaska; Λ je odnos najvećeg i najmanjeg relevantnog rastojanja prilaska u tom zbiru, a pošto ulazi samo pod logaritmom, rezultat slabo zavisi od njene tačne vrednosti, koja je tipično u opsegu $\ln \Lambda \sim 3-10$ za sisteme ovog tipa. Ovaj rezultat pokazuje da je fizika koja stoji iza gravitacionog uskomešavanja planetezimala u svojoj suštini ista kao i fizika relaksacije u gravitaciono vezanim sistemima mnogo tela, poput zvezdanih jata: u oba slučaja, mnogobrojni slabi gravitacioni susreti postepeno menjaju raspodelu brzina čestica u sistemu, a razlika je samo u konkretnim vrednostima mase, gustine i relativne brzine perturbatora.

9 Analiza režima sile otpora gasa

9.1 MMSN parametri

Da bi se proverila ispravnost korišćenih formula, potrebno je odrediti u kom se režimu sile otpora gasa (Odeljak 4) nalaze razmatrane planetezimale. Za MMSN gustinu $\rho = 1.4 \times 10^{-9} \text{ g cm}^{-3}$ i $r_p = 5 \text{ km}$, iz jednačine (4.3.1) sledi

$$l = \frac{1.7 \times 10^{-9}}{1.4 \times 10^{-9}} = 1.21 \text{ cm}, \quad K = \frac{1.21}{5 \times 10^5} = 2.43 \times 10^{-6}.$$

Tabela 3: Knudsenov, Mahov i Reynoldsov broj za MMSN parametre.

e	M	Re	C_D (prema Slici 4.1)
0.001	0.045	8.1×10^4	≈ 0.5
0.01	0.224	4.1×10^5	≈ 0.7
0.05	1.12	2.0×10^6	≈ 1.0
0.1	2.24	4.1×10^6	≈ 1.5
0.3	6.72	1.2×10^7	≈ 1.25
0.5	11.2	2.0×10^7	≈ 1.25

Sve tačke imaju $K \ll 1$ i $Re \gg 10^3$, što potvrđuje da se planetezimale u MMSN modelu nalaze u režimu (2a), gde je $C_D \approx 0.5-1.5$. Vrednost $C_D = 0.5$ korišćena u osnovnoj aproksimaciji Poglavlja 5 predstavlja konzervativnu (donju) procenu.

9.2 Ekstrasolarna nebula

Za ekstrasolarne parametre razmatrane u Poglavlju 12 ($M_* = 2M_\odot$, $a = 100$ au, dvostruko veće Σ i T u odnosu na MMSN), gustina gasa je znatno manja: $\rho \approx 8.58 \times 10^{-15} \text{ g cm}^{-3}$, pa je

$$l = \frac{1.7 \times 10^{-9}}{8.58 \times 10^{-15}} = 1.98 \times 10^5 \text{ cm}, \quad K = \frac{1.98 \times 10^5}{5 \times 10^5} = 0.40.$$

Tabela 4: Knudsenov, Mahov i Reynoldsov broj za ekstrasolarne parametre.

e	M	R_e	C_D (prema Slici 4.1)
0.001	0.045	0.49	≈ 50
0.01	0.224	2.46	≈ 20
0.05	1.12	12.3	≈ 8
0.1	2.24	24.6	≈ 5
0.3	6.72	73.9	≈ 2
0.5	11.2	123	≈ 1.5

Za ekstrasolarne parametre, $K \approx 0.40 \sim 1$ i $R_e \sim 1-100$, što znači da se planetezimalne nalaze u prelaznoj oblasti između graničnih režima, gde jednostavna aproksimacija $C_D = 0.5$ više nije opravdana. Zbog toga se u Poglavlju 12 koristi opšta formula Vatanabea i Ide (jednačina 4.4.1) za precizniji proračun $C_D(e)$.

10 Numeričke simulacije

10.1 Metoda

Za numeričku integraciju jednačine (5.1.3) koristi se Python biblioteka `scipy` i funkcija `solve_ivp` iz modula `scipy.integrate` sa metodom RK45 (Runge-Kutta 4/5 reda). Ova metoda adaptivno bira korak integracije u zavisnosti od lokalne greške, što je posebno važno u ovom slučaju gde se ekscentricitet menja brzo na kratkim vremenskim skalama, a potom asimptotski teži nuli.

Jednačina (5.1.3) ima sledeći oblik:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{e}{\tau_0(e, \rho, a)} (0.77e + \eta), \quad (10.1.1)$$

gde τ_0 zavisi od e kroz $C_D(e)$ ukoliko se koristi opšta formula Vatanabea i Ide, kao i od ρ i a .

10.2 Parametri integracije

Integracija se sprovodi od $t_{\text{start}} = 10$ god (umesto od nule, da bi se izbeglo $t = 0$ na logaritamskoj skali) do $t_{\text{end}} = 10$ Myr. Koriste se logaritamski raspoređene tačke za evaluaciju (`np.geomspace`),

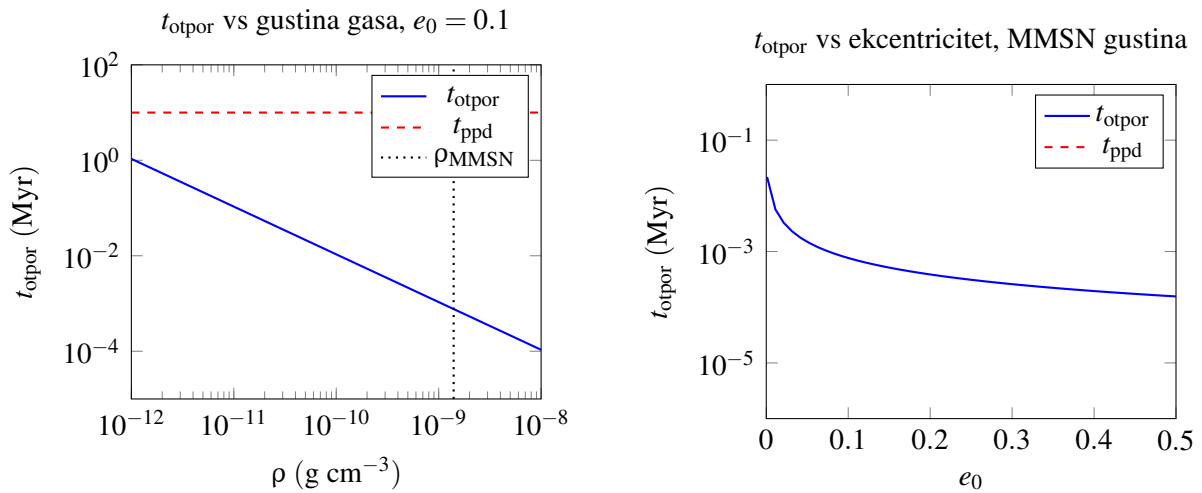
jer se fizika odvija na višestrukim vremenskim skalama. Tolerancije integracije su $\text{rtol} = 10^{-8}$ i $\text{atol} = 10^{-10}$, čime se obezbeđuje visoka numerička tačnost.

10.3 Poređenje sa analitičkom aproksimacijom

Za proveru numeričke simulacije koristi se analitička aproksimacija t_{otpor} iz jednačine (5.2.1). Na graficima koji slede, vertikalne isprekidane linije označavaju t_{otpor} izračunat za početni ekscentricitet e_0 sa istim parametrima kao odgovarajuća kriva $e(t)$. Dobro poklapanje ovih vertikalnih linija sa mestima naglog pada krive $e(t)$ potvrđuje da je analitička aproksimacija t_{otpor} fizički smisljena i korisna za brzu procenu bez potrebe za punom numeričkom integracijom.

11 Rezultati: MMSN parametri

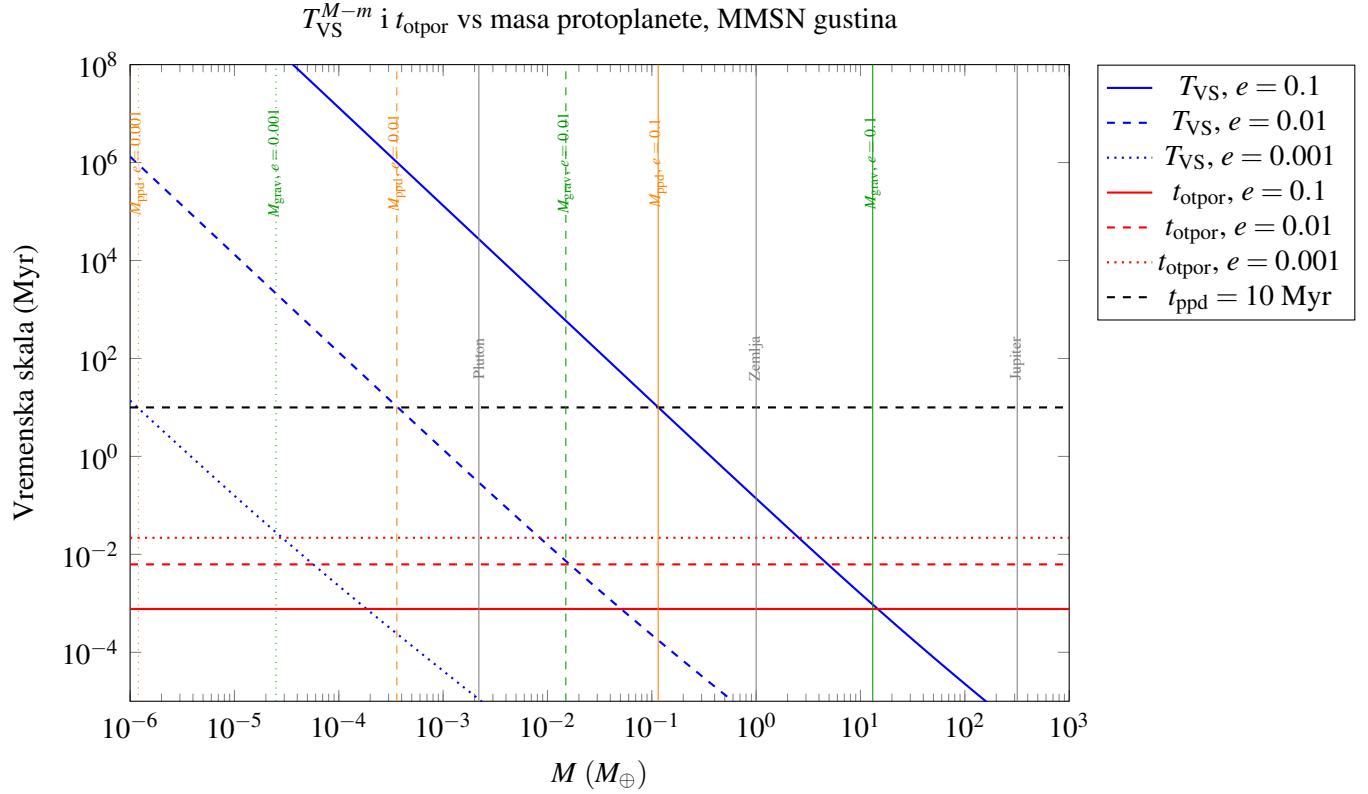
11.1 Vremenska skala otpora gasa



Slika 11.1: Levo: t_{otpor} kao funkcija gustine gasa za $e_0 = 0.1$, $a = 1$ au. Isprekidana vertikalna linija označava MMSN vrednost gustine na 1 au. Desno: t_{otpor} kao funkcija ekscentriciteta za MMSN gustinu $\rho = 1.4 \times 10^{-9} \text{ g cm}^{-3}$. Crvena isprekidana linija označava $t_{\text{ppd}} = 10$ Myr. U oba slučaja $t_{\text{otpor}} \ll t_{\text{ppd}}$ za sve fizički relevantne vrednosti.

Slika 3 pokazuje da je t_{otpor} daleko ispod t_{ppd} za MMSN parametre u celom razmatranom opsegu gustine gasa i ekscentriciteta, odnosno sila otpora gasa stigne da značajno smanji ekscentricitet planetezimale pre nestanka gasa iz protoplanetarnog diska za sve fizički relevantne kombinacije parametara prikazane na graficima.

11.2 Poređenje sa gravitacionim uskomešavanjem



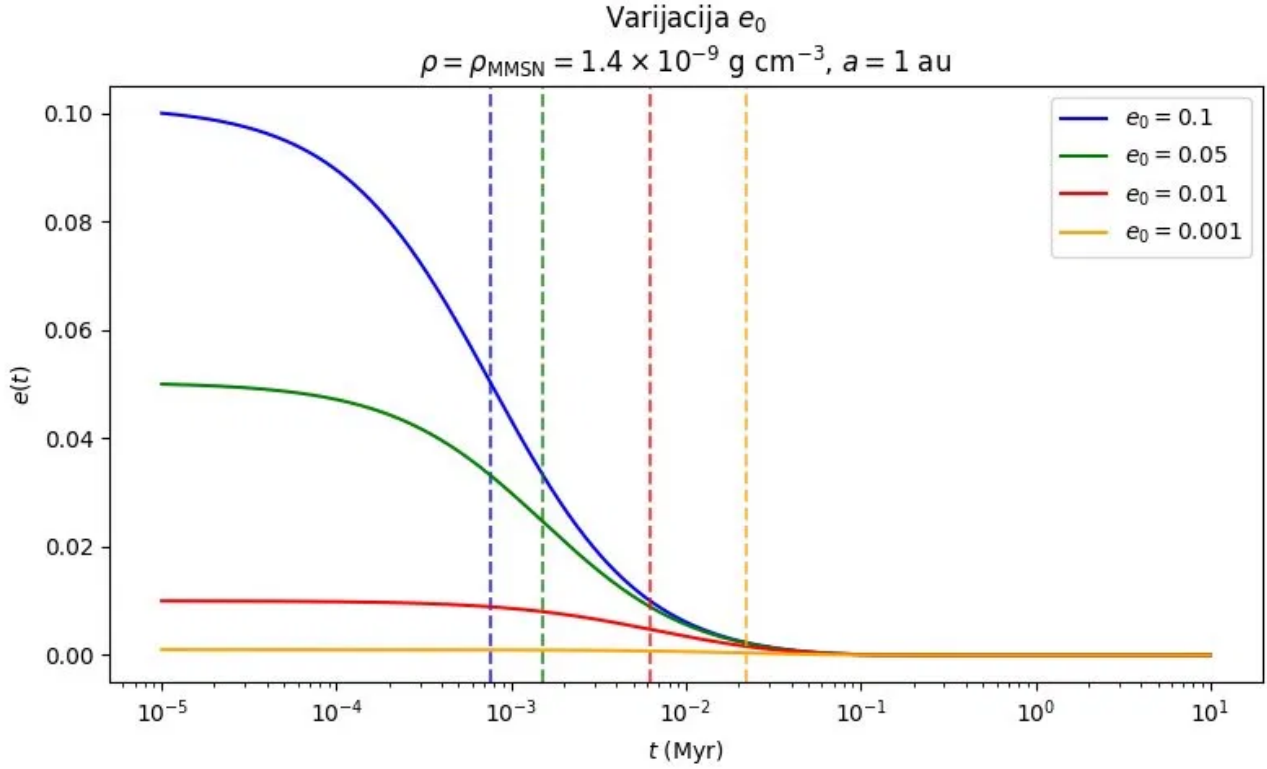
Slika 11.2: Poređenje T_{VS}^{M-m} (plavo) i t_{otpor} (crveno) kao funkcije mase protoplanete za $e = 0.1$ (puna), $e = 0.01$ (isprekidana), $e = 0.001$ (tačkasta), pri MMSN gustini $\rho = 1.4 \times 10^{-9} \text{ g cm}^{-3}$

Slika 11.2 pokazuje da plave linije (T_{VS}^{M-m}) opadaju kao M^{-2} : veće protoplanete efikasnije uskomešavaju planetezimale i brže povećavaju ekcentricitet. Crvene linije (t_{otpor}) su horizontalne jer sila otpora gasa ne zavisi od mase protoplanete. Crna isprekidana linija označava $t_{\text{ppd}} = 10 \text{ Myr}$.

Narandžaste vertikalne linije (M_{ppd}): mase iznad kojih gravitacione interakcije postaju izražene pre nestanka gasa ($T_{\text{VS}} < t_{\text{ppd}}$). Zelene vertikalne linije (M_{grav}): mase iznad kojih gravitacione interakcije dominiraju nad silom otpora gasa ($T_{\text{VS}} < t_{\text{otpor}}$). Sive linije označavaju mase Plutona, Zemlje i Jupitera.

Za $e = 0.1$, $M_{\text{grav}} \approx 13 M_{\oplus}$, tek protoplanete veće od 13 masa Zemlje mogu gravitaciono dominirati nad silom otpora gasa. Masa Plutona ($\approx 2.2 \times 10^{-3} M_{\oplus}$) ostaje ispod M_{grav} za $e = 0.1$ i $e = 0.01$, pa gas dominira; tek za $e = 0.001$, gde je $M_{\text{grav}} \approx 2.5 \times 10^{-5} M_{\oplus}$, masa Plutona premašuje M_{grav} i gravitacija bi preovladala. Masa Jupitera ($\approx 318 M_{\oplus}$) premašuje M_{grav} za sva tri razmatrana ekscentriciteta, pa bi gravitaciono uskomešavanje dominiralo nezavisno od e .

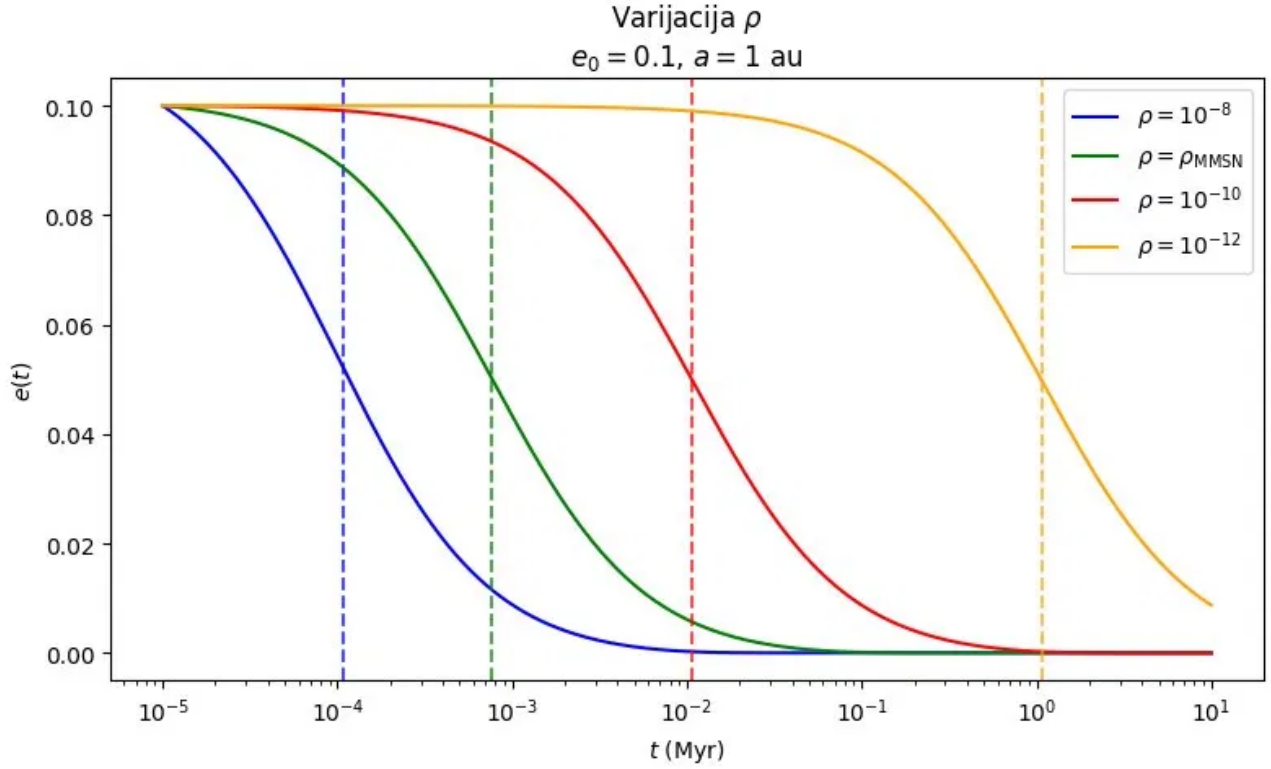
11.3 Evolucija ekscentriciteta: varijacija e_0



Slika 11.3: Numerička simulacija evolucije ekscentriciteta $e(t)$ za različite početne vrednosti $e_0 \in \{0.1, 0.05, 0.01, 0.001\}$, pri MMSN gustini $\rho = 1.4 \times 10^{-9} \text{ g cm}^{-3}$ i $a = 1 \text{ au}$. Isprekidane vertikalne linije označavaju aproksimativni t_{tpor} za svaku krivu, poklapanje sa mestom naglog pada potvrđuje tačnost aproksimacije.

Slika 11.3 potvrđuje da sve krive opadaju za $t \lesssim t_{\text{ppd}} = 10 \text{ Myr}$. Za $e_0 = 0.1$, ekscentricitet praktično iščezava za $t \sim 10^{-3} \text{ Myr}$, što je četiri reda veličine manje od t_{ppd} .

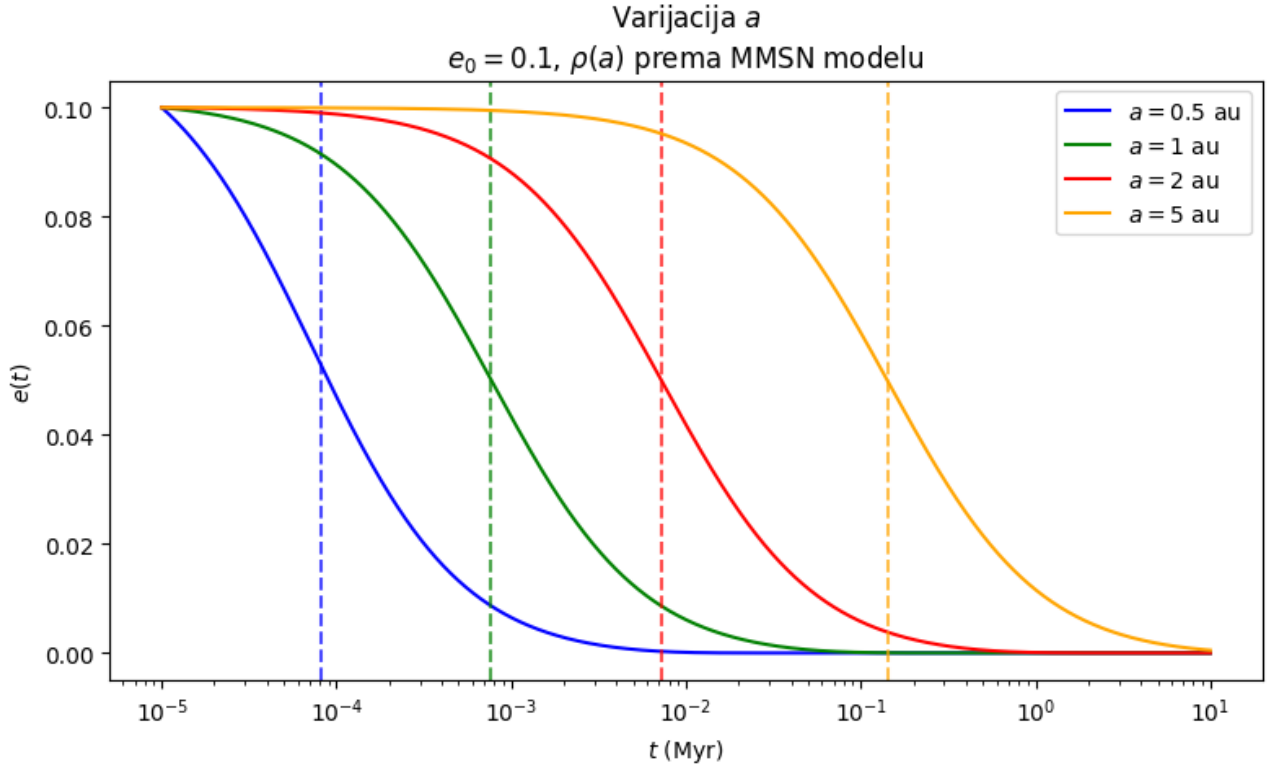
11.4 Evolucija ekscentriciteta: varijacija ρ



Slika 11.4: Numerička simulacija evolucije ekscentriciteta $e(t)$ za različite gustine gasa $\rho \in \{10^{-8}, 1.4 \times 10^{-9}, 10^{-10}, 10^{-12}\} \text{ g cm}^{-3}$, pri $e_0 = 0.1$ i $a = 1 \text{ au}$. Isprekidane vertikalne linije označavaju aproksimativni t_{otpor} za svaku krivu, poklapanje sa mestom naglog pada potvrđuje tačnost aproksimacije.

Slika 11.4 pokazuje jak uticaj gustine gasa na brzinu prigušivanja: razlika između $\rho = 10^{-8}$ i $\rho = 10^{-12}$ je četiri reda veličine, koju τ_0 i t_{otpor} direktno prate usled obrnute proporcionalnosti $\tau_0 \propto \rho^{-1}$ (jednačina 5.1.5). Ipak, čak i za najmanju vrednost $\rho = 10^{-12} \text{ g cm}^{-3}$, ekscentricitet opada u okviru $t \sim 1 \text{ Myr}$, i dalje unutar t_{ppd} .

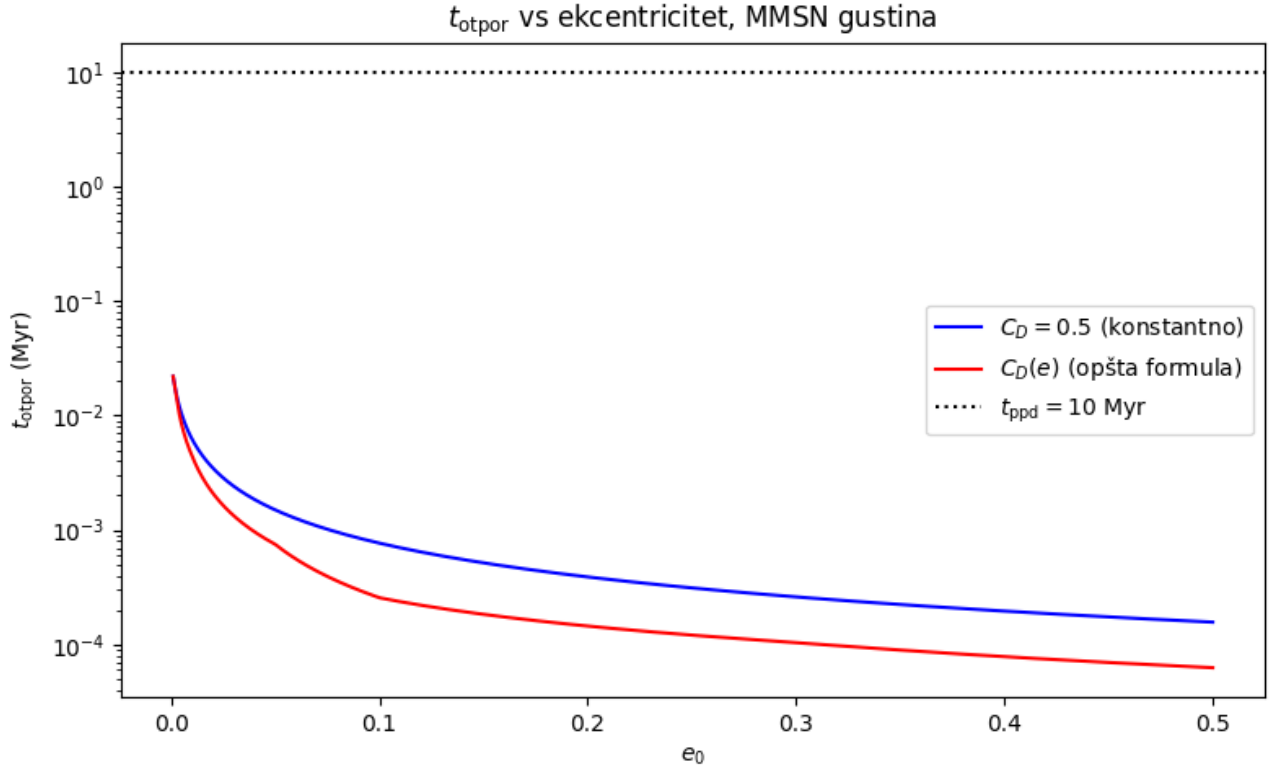
11.5 Evolucija ekscentriciteta: varijacija a



Slika 11.5: Numerička simulacija evolucije ekscentriciteta $e(t)$ za različite vrednosti velike poluose $a \in \{0.5, 1.0, 2.0, 5.0\}$ au, pri $e_0 = 0.1$ i MMSN gustini $\rho(a)$ izračunatoj konzistentno sa MMSN modelom za svako rastojanje. Isprekidane vertikalne linije označavaju aproksimativni t_{otpor} za svaku krivu, poklapanje sa mestom naglog pada potvrđuje tačnost aproksimacije. Isprekidane vertikalne linije označavaju aproksimativni t_{otpor} za svaku krivu, poklapanje sa mestom naglog pada potvrđuje tačnost aproksimacije.

Slika 11.5 pokazuje da povećanje a usporava prigušivanje ekscentriciteta iz dva razloga: gustina gasa $\rho(a) \propto a^{-11/4}$ opada sa a , a Keplerova perioda $T_K \propto a^{3/2}$ raste. Ipak, čak i za $a = 5$ au unutar MMSN modela, ekscentricitet i dalje opada unutar t_{ppd} .

11.6 Rezultati sa opštom formulom za koeficijent otpora



Slika 11.6: Poređenje $t_{\text{otpor}}(e_0)$ za MMSN gustinu koristeći konstantni $C_D = 0.5$ (plava) i $C_D(e)$ prema Vatanabeu i Idi (crvena). Kriva sa $C_D(e)$ niža je za veće e jer je $C_D > 0.5$ za $e \gtrsim 0.01$.

Slika 11.6 pokazuje da upotreba tačnijeg $C_D(e)$ prema Vatanabeu i Idi (1997) smanjuje t_{otpor} pri $e = 0.1$ u odnosu na konstantno $C_D = 0.5$. Pošto je $\tau_0 \propto 1/C_D$ (jednačina 5.1.5), odnos dve vrednosti t_{otpor} pri istom e jednak je odnosu odgovarajućih C_D : za MMSN parametre pri $e = 0.1$, formula Vatanabea i Ide daje $C_D \approx 1.25$ (u skladu sa vrednošću iz Tabele 3), pa je $t_{\text{otpor}}(C_D = 0.5)/t_{\text{otpor}}(C_D \approx 1.25) \approx 1.25/0.5 \approx 2.5$. Zaključak, ipak, ostaje nepromenjen: $t_{\text{otpor}} \ll t_{\text{ppd}}$ za sve razmatrane vrednosti e .

12 Rezultati: ekstrasolarna nebula

12.1 Parametri ekstrasolarne nebule

Da bi se ispitao scenario Walmswella i saradnika [4] u sistemima oko masivnijih zvezda, koriste se parametri koji odgovaraju tipičnom pojasu planetezimala udaljenom od zvezde:

- Masa zvezde: $M_* = 2M_{\odot}$;
- Rastojanje od zvezde: $a = 100$ au;
- Površinska gustina: $\Sigma = 2 \times 1700 \times (100)^{-3/2} = 3.4 \text{ g cm}^{-2}$ (duplo veće od MMSN);

- Temperatura: $T = 2 \times 280 \times (100)^{-1/2} = 56$ K (duplo veće od MMSN).

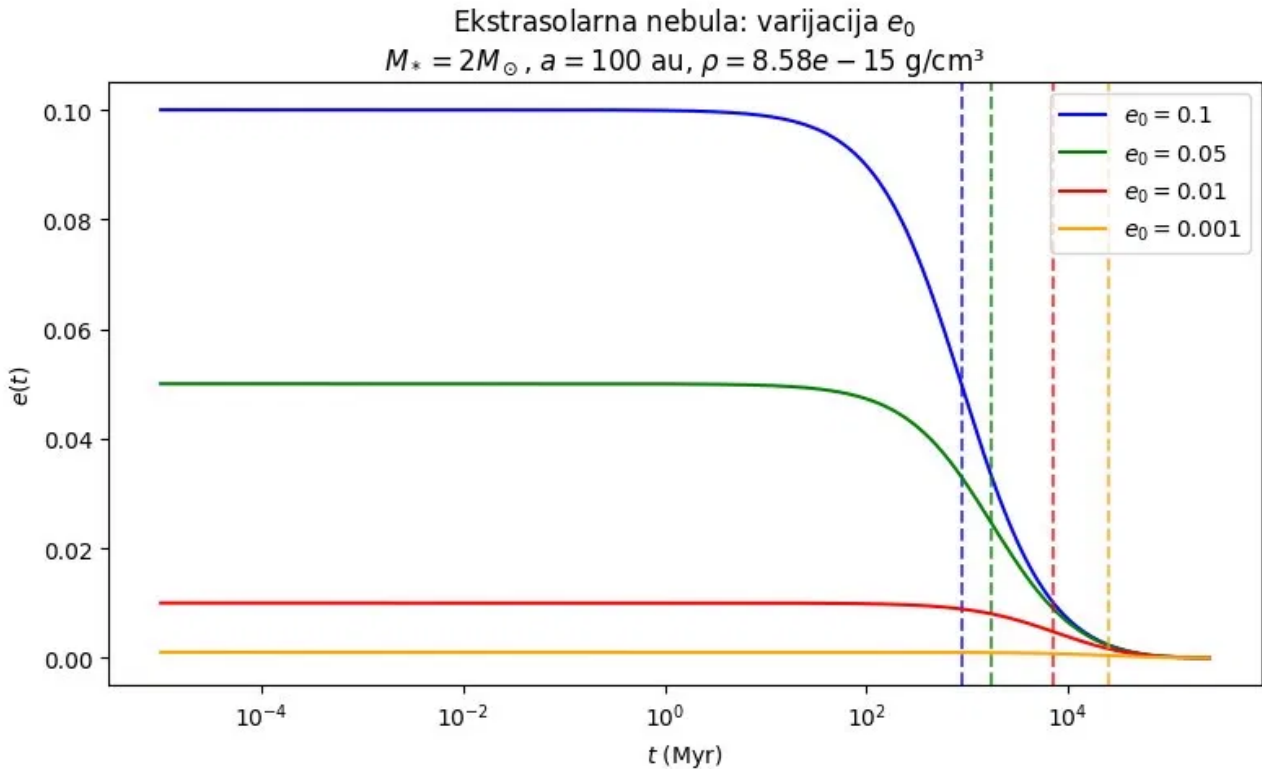
Iz ovih parametara sledi

$$c_s = \sqrt{\frac{k_B \cdot 56}{2.34 m_H}} \approx 4.6 \times 10^4 \text{ cm s}^{-1}, \quad \omega_K = \sqrt{\frac{G \cdot 2M_\odot}{(100 \text{ au})^3}} \approx 1.99 \times 10^{-10} \text{ s}^{-1},$$

$$h = \frac{c_s}{\omega_K} \approx 2.31 \times 10^{14} \text{ cm}, \quad \rho = \frac{3.4}{\sqrt{2\pi} \cdot 2.31 \times 10^{14}} \approx 8.58 \times 10^{-15} \text{ g cm}^{-3}.$$

Keplerova perioda na 100 au oko $2M_\odot$ iznosi $T_K \approx 707$ god.

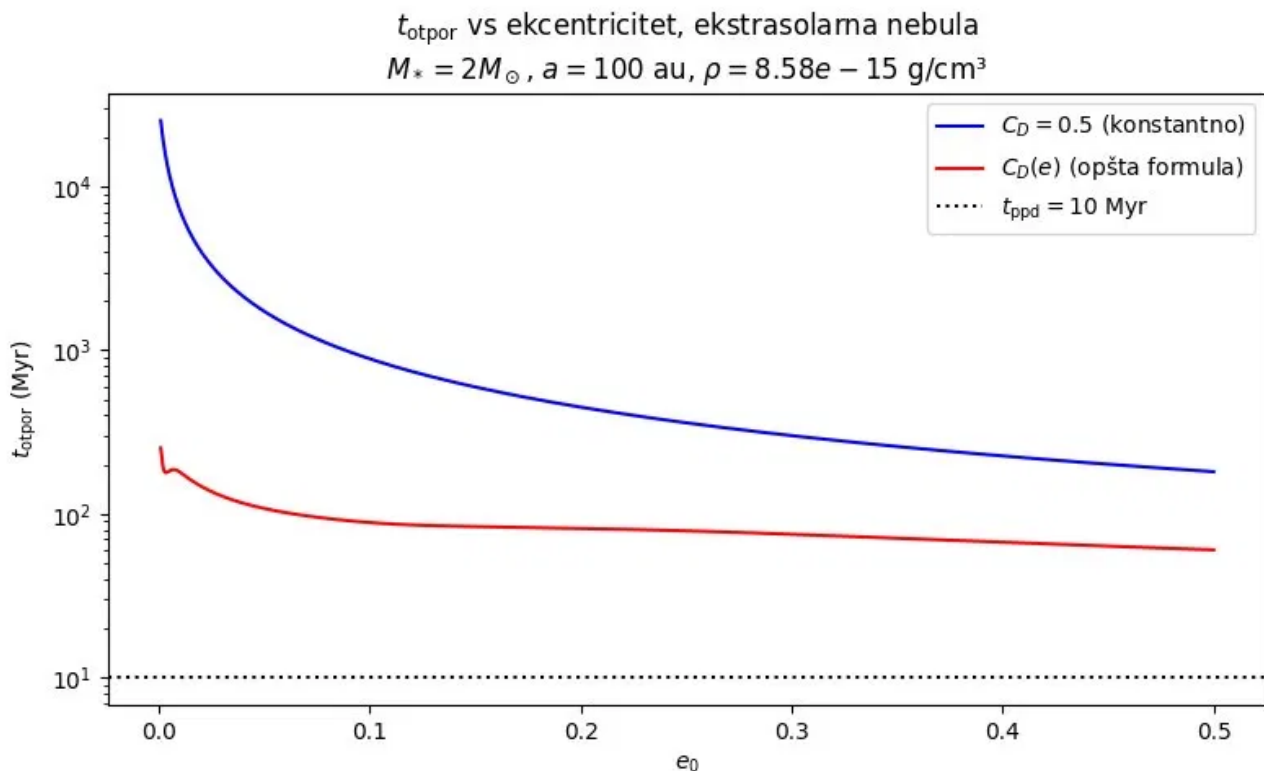
12.2 Evolucija ekscentriciteta za ekstrasolarne parametre



Slika 12.1: Numerička simulacija evolucije ekscentriciteta $e(t)$ za ekstrasolarne parametre ($M_* = 2M_\odot$, $a = 100$ au, Σ i T duplo veće od MMSN vrednosti, $\rho \approx 8.58 \times 10^{-15} \text{ g cm}^{-3}$) za različite početne ekscentricitete. Za razliku od MMSN slučaja, ekscentricitet ostaje visok tokom celog perioda trajanja diska $t_{\text{ppd}} = 10$ Myr. Isprekidane vertikalne linije označavaju aproksimativni t_{topor} za svaku krivu, poklapanje sa mestom naglog pada potvrđuje tačnost aproksimacije, iako u realnosti gas posle toliko vremena više ne bi bio prisutan.

Slika 12.1 se dramatično razlikuje od MMSN slučaja (Slika 11.3). Za ekstrasolarne parametre, karakteristično vreme prigušivanja je reda stotina do hiljada Myr, daleko iznad $t_{\text{ppd}} = 10$ Myr. Gas praktično nema efekta na ekscentricitet tokom trajanja diska. Ovo je direktna posledica ekstremno male gustine gasa na 100 au od masivne zvezde: na velikom rastojanju, Keplerova perioda je znatno duža ($T_K \approx 707$ god umesto 1 god), a gustina gasa je mala, pri čemu oba efekta povećavaju τ_0 za nekoliko redova veličine u odnosu na MMSN slučaj (jednačina 5.1.5).

12.3 Rezultati sa opštom formulom za koeficijent otpora



Slika 12.2: Poređenje $t_{\text{otpor}}(e_0)$ za ekstrasolarne parametre koristeći konstantni $C_D = 0.5$ (plava) i $C_D(e)$ prema Vatanabeu i Idi (crvena). Za ekstrasolarne parametre C_D varira od ~ 50 za malo e do ~ 1.5 za veliko e (Tabela 4), što značajno menja vrednost t_{otpor} u poređenju sa $C_D = 0.5$. Ipak, crvena kriva i dalje ostaje daleko iznad $t_{\text{ppd}} = 10$ Myr.

Slika 12.2 pokazuje da čak i sa tačnijim $C_D(e)$, koji je za ekstrasolarne parametre značajno veći od 0.5, posebno za malo e , vrednost t_{otpor} ostaje daleko iznad t_{ppd} . Razlika između plave i crvene krive može biti i faktor 100 pri malim e , ali to nije dovoljno da bi se promenio kvalitativni zaključak.

13 Diskusija: veza sa teorijom rasta protoplaneta

Rezultati ovog rada mogu se sagledati u širem kontekstu dvostepenog scenarija rasta protoplanete koji su predložili Ida i Makino [3] (Odeljak 7). U prvoj fazi tog scenarija ("runaway rast"), dinamičko trenje sa mnogo lakšim planetezimalama drži sopstveni ekscentricitet protoplanete malim, dok gravitaciono fokusiranje protoplanete postaje sve efikasnije kako njena masa raste. Ovaj rad pokazuje da su, tokom te faze, planetezimale u MMSN okruženju istovremeno izložene efikasnom prigušivanju sopstvenog ekscentriciteta usled otpora gasa (Poglavlje 11), sve dok masa protoplanete ne pređe graničnu vrednost M_{grav} iz Tabele 2. Za realistične ekscentricitete indukovane self-gravitating fazom diska ($e \sim 0.1$), ova granična masa iznosi čak $\sim 13 M_\oplus$, dakle, tokom najvećeg dela runaway rasta protoplanete (dok je njena masa manja od ove vrednosti), gas efikasno „čisti“ bilo koji dodatni ekscentricitet koji bi planetezimale mogle steći iz drugih izvora, uključujući i self-gravitating fazu.

Nasuprot tome, u ekstrasolarnom okruženju (Poglavlje 12), gde je gustina gasa za šest redova veličine manja, ovaj zaštitni mehanizam otpora gasa praktično ne postoji: $t_{\text{otpor}} \gg t_{\text{ppd}}$ za sve razmatrane mase i ekscentricitete. To znači da bi u takvom okruženju čak i relativno mala gravitaciona uskomešavanja, bilo od strane protoplanete tokom druge faze rasta („protoplanet-dominated stage“), bilo direktno usled self-gravitacije samog diska, mogla trajno podići ekscentricitet planetezimala, bez mehanizma koji bi ga vratio na nižu vrednost pre nestanka diska.

Ovaj rezultat je konzistentan sa scenariom koji su predložili Walmswell i saradnici [4]: u diskovima oko masivnijih zvezda, gde je površinska gustina gasa manja u odnosu na potreban gravitacioni potencijal za formiranje masivnih protoplaneta, self-gravitating faza može trajno povećati ekscentricitet planetezimala. Ovo bi usporilo ili sprečilo efikasnu akreciju kroz sudare, i moglo bi doprineti objašnjenju zašto sistemi oko masivnijih zvezda često pokazuju drugačiju arhitekturu od Sunčevog sistema, sa planetama na većim orbitama i drugačijim raspodelama ekscentriciteta u odnosu na ono što bi se očekivalo u niskomasenom, gasom bogatom disku poput MMSN-a.

13.1 Ograničenja i pretpostavke modela

Rezultati prikazani u ovom radu zasnovani su na nizu pojednostavljujućih pretpostavki, koje je važno eksplicitno navesti radi ispravnog tumačenja zaključaka.

- **Zanemarena inklinacija.** U celom radu pretpostavlja se $i = 0$, odnosno da se planetezimale kreću u ravni diska. Adachi i saradnici [1] pokazuju da otpor gasa prigušuje inklinaciju sličnom brzinom kao i ekscentricitet, dok Ida i Makino [3] pokazuju da gravitaciono uskomešavanje inklinacije od strane protoplanete raste sporije od uskomešavanja ekscentriciteta u shear-dominantnom režimu, ali se u disperzionom režimu ustaljuje na odnosu bliskom $\langle i^2 \rangle^{1/2} \approx \langle e^2 \rangle^{1/2} / 2$. Uključivanje inklinacije bi kvantitativno izmenilo prefaktore u jednačinama (5.1.3) i (8.1.1), ali se ne očekuje da promeni kvalitativne zaključke o odnosu t_{otpor} i T_{VS}^{M-m} .
- **Jedna protoplaneta i zanemarene međusobne interakcije planetezimala.** Prema kriterijumu (7.4.1), gravitaciono uskomešavanje od strane jedne protoplanete dominira nad međusobnim rasejanjem planetezimala samo ukoliko je $M/m \gtrsim 4 \times 10^3 - 2 \times 10^4$ (Odeljak 8.4). Ovaj rad implicitno pretpostavlja da je taj uslov zadovoljen; u ranijim fazama runaway rasta, kada je M/m još uvek mali, uskomešavanje usled međusobnih susreta planetezimala bilo bi dodatni izvor porasta ekscentriciteta koji ovde nije eksplicitno modelovan.
- **Statična gustina gasa.** Proračun t_{otpor} pretpostavlja nepromenljivu gustinu gasa ρ tokom čitavog razmatranog vremenskog intervala. U realnosti, $\Sigma(t)$ i $\rho(t)$ opadaju tokom života diska usled akrecije na zvezdu i fotoevaporacije, što bi dodatno produžilo t_{otpor} pri kasnijim vremenima, odnosno, konzervativno gledano, ne bi promenilo zaključak da je $t_{\text{otpor}} \ll t_{\text{ppd}}$ za MMSN slučaj, ali bi mogao dodatno pojačati zaključak da je $t_{\text{otpor}} \gg t_{\text{ppd}}$ za ekstrasolarni slučaj.
- **Konstantna velika poluosa.** Sila otpora gasa u principu menja i veliku poluosu a , ali je ta promena manja od promene e i i (Odeljak 4 rada Adachi et al. 1976), pa je zanemarivanje migracije velike poluose opravdano na vremenskim skalama t_{otpor} razmatranim u ovom radu.

- **Nedostatak akrecije.** Model ne uključuje eksplicitno akreciju planetezimala na protoplanetu niti fizičke sudare između planetezimala, koji bi u realnom disku uklanjali planetezimale iz populacije i menjali raspodelu masa. Ida i Makino [3] razmatraju ovaj efekat kroz sopstvene simulacije N -tela (Poglavlje 7), ali njihov formalizam za T_{VS}^{M-m} , koji je ovde korišćen, ostaje validan nezavisno od toga da li se akrecija eksplicitno modeluje.
- **Ekstremne vrednosti parametara (e_0 i ρ istovremeno mali).** Za kombinaciju $e \sim 0.001$ i $\rho \sim 10^{-12} \text{ g cm}^{-3}$, donje granice oba parametra razmatrana u ovom radu, ali nikada zajedno prikazane na istom grafiku, aproksimacija $C_D = 0.5$ prestaje da važi (Rejnoldsov broj pada na $Re \approx 59$, van opsega režima (2a)). Korišćenjem tačne formule Vatanabea i Ide (jednačina 4.4.1) dobija se $C_D \approx 1.4$, što daje $t_{\text{otpor}} \approx 11 \text{ Myr}$, marginalno iznad $t_{\text{ppd}} = 10 \text{ Myr}$. Ovo je jedini deo razmatranog parametarskog prostora gde zaključak o dominaciji otpora gasa nije jasno utvrđen, ali s obzirom da je i sam t_{ppd} gruba procena (opseg 1-10 Myr, Poglavlje 1), ova granična vrednost ne menja opšti zaključak za fizički tipične kombinacije parametara.

Uprkos ovim pojednostavljenjima, glavni kvalitativni rezultat rada, da MMSN okruženje efikasno prigušuje ekscentricitet dok ekstrasolarno okruženje to ne čini, pokazuje se robusnim na promene reda veličine u gustini gasa, velikoj poluosi i koeficijentu otpora C_D (Poglavlja 11-12), što ukazuje da razlika između ova dva režima jednostavno potiče od velike razlike u vrednostima parametara, a ne od detalja modela.

Zaključak

U ovom radu analizirano je nadmetanje dva suprotstavljena fizička mehanizma u evoluciji ekscentriciteta orbita planetezimala: sile otpora gasa, koja ekscentricitet smanjuje (Adachi et al. 1976), i gravitacionog uskomešavanja od strane protoplanete, koje ga povećava (Ida & Makino 1993).

Za parametre koji odgovaraju Sunčevom sistemu (MMSN model, $a = 1$ au), rezultati pokazuju da sila otpora gasa uvek efikasno smanjuje ekscentricitet pre nestanka diska ($t_{\text{otpor}} \ll t_{\text{ppd}} = 10$ Myr) za sve razmatrane vrednosti gustine gasa (10^{-12} do 10^{-8} g cm $^{-3}$) i početnog ekscentriciteta ($e_0 = 0.001$ do 0.1). Analiza režima sile otpora gasa pokazuje da za MMSN parametre sve relevantne tačke padaju u režim (2a), gde je $C_D \approx 0.5-1.5$; upotreba tačnijeg $C_D(e)$ prema Vatanabeu i Idi (1997) kvantitativno menja t_{otpor} , ali ne menja kvalitativni zaključak.

Poređenjem t_{otpor} sa vremenskom skalom gravitacionog uskomešavanja T_{VS}^{M-m} , identifikovane su dve granične mase protoplanete. Za $M < M_{\text{ppd}}$, gravitaciono uskomešavanje ne stigne da deluje pre nestanka gasa. Za $M_{\text{ppd}} < M < M_{\text{grav}}$, gravitaciono uskomešavanje stigne da deluje, ali gas i dalje prigušuje ekscentricitet brže. Tek za $M > M_{\text{grav}} \approx 13 M_{\oplus}$ (pri $e = 0.1$) gravitacija dominira nad otporom gasa.

Najvažniji rezultat rada odnosi se na ekstrasolarne parametre ($M_* = 2M_{\odot}$, $a = 100$ au). Za ove parametre, gustina gasa je oko šest redova veličine manja od MMSN vrednosti, a Keplerova perioda oko 700 puta duža. Kombinacija ova dva efekta čini t_{otpor} reda stotina do hiljada Myr, daleko iznad t_{ppd} . Gas praktično ne može da smanji ekscentricitet planetezimala pre nestanka diska. Ovaj rezultat podržava scenario koji su predložili Walmswell i saradnici [4]: u diskovima oko masivnih zvezda, self-gravitating faza može trajno povećati ekscentricitet planetezimala, sa važnim posledicama za formiranje planeta u takvim sistemima i za razlike u arhitekturi planetarnih sistema u poređenju sa Sunčevim sistemom.

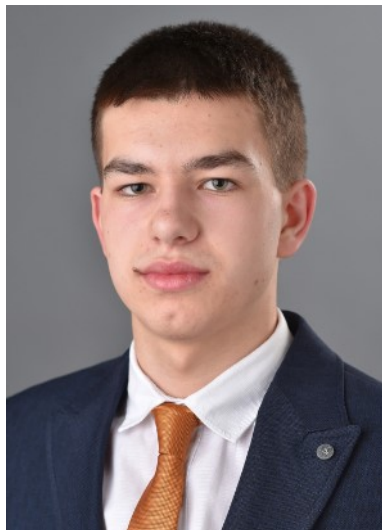
Numeričke simulacije evolucije ekscentriciteta korišćenjem Python biblioteke `scipy` i funkcije `solve_ivp` iz modula `scipy.integrate` (Poglavlja 11 i 12) potvrdile su analitičke aproksimacije i pokazale dobro slaganje sa aproksimativnim t_{otpor} u razmatranom parametarskom prostoru e_0 , ρ i a .

Kao pravac za dalje istraživanje, bilo bi vredno proširiti model uključivanjem realističnije evolucije gustine gasa tokom trajanja diska (umesto pretpostavke statičnog diska), kao i uključivanjem simulacija N -tela po ugledu na Idu i Makina, koje bi istovremeno pratile gravitaciono uskomešavanje, otpor gasa i akreciju planetezimala na protoplanetu.

Literatura

- [1] Adachi, I., Hayashi, C., Nakazawa, K. (1976), The Gas Drag Effect on the Elliptic Motion of a Solid Body in the Primordial Solar Nebula, *Progress of Theoretical Physics*, 56, 1756-1771, PDF.
- [2] Hayashi, C. (1981), Structure of the Solar Nebula, Growth and Decay of Magnetic Fields and Effects of Magnetic and Turbulent Viscosities on the Nebula, *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 70, 35-53, PDF.
- [3] Ida, S., Makino, J. (1993), Scattering of Planetesimals by a Protoplanet: Slowing Down of Runaway Growth, *Icarus*, 106, 210-227, PDF.
- [4] Walmswell, J., Clarke, C., Cossins, P. (2013), The Evolution of Planetesimal Swarms in Self-Gravitating Protoplanetary Discs, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 431, 1903-1913, PDF.
- [5] Tanigawa, T., Maruta, A., Machida, M. N. (2014), Accretion of Solid Materials onto Circumplanetary Disks from Protoplanetary Disks, *arXiv preprint*, PDF. (Sadrži formulu za C_D izvorno objavljenu u: Watanabe, S., Ida, S. (1997), Comparative Study of Planetology, Vol. 12, Iwanami Shoten Publishers, Tokyo, na japanskom, izvor nije bio dostupan za neposrednu proveru.)
- [6] Weidenschilling, S. J. (1977), Aerodynamics of Solid Bodies in the Solar Nebula, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 180, 57-70, PDF.
- [7] Pearce, T. D. (2024), Debris disks around main-sequence stars, *arXiv preprint*, PDF.
- [8] Chandrasekhar, S. (1941), The Time of Relaxation of Stellar Systems. I, *The Astrophysical Journal*, 93, PDF.
- [9] Armitage, P. J. (2024), Planet formation theory: an overview, *arXiv preprint*, PDF.

Biografija kandidata



Veljko Nikolić rođen je 30. oktobra 2001. godine u Kragujevcu. Detinjstvo je proveo u Rači, gde je 2016. godine završio Osnovnu školu „Karađorđe“. Iste godine upisao je specijalno odeljenje za fiziku u Gimnaziji „Jovan Jovanović Zmaj“ u Novom Sadu, koju je završio 2020. godine. Nakon toga nastavio je školovanje na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, gde je upisao osnovne studije fizike i diplomirao 2025. godine. Odmah potom upisao je master akademske studije Primenjene i industrijske fizike na istom fakultetu. Tokom srednje škole pohađao je seminare astronomije u Istraživačkoj stanici „Petnica“, a astrofizika je oblast koja ga i dalje najviše zanima.



UNIVERZITET U NOVOM SADU • PRIRODNO-MATEMATIČKI FA-
KULTET

21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 3

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

<i>Redni broj:</i> RBR	
<i>Identifikacioni broj:</i> IBR	
<i>Tip dokumentacije:</i> TD	Monografska publikacija
<i>Tip zapisa:</i> TZ	Elektronski materijal
<i>Vrsta rada:</i> VR	Master rad
<i>Autor:</i> AU	Veljko Nikolić
<i>Mentor:</i> MN	dr Lazar Gavanski
<i>Naslov rada:</i> NR	Efekti promena ekscentriciteta orbita planetezimala
<i>Jezik publikacije:</i> JP	srpski (latinica)
<i>Jezik izvoda:</i> JI	srpski
<i>Zemlja publikovanja:</i> ZP	Republika Srbija
<i>Uže geografsko područje:</i> UGP	Vojvodina
<i>Godina:</i> GO	2026.
<i>Izdavač:</i> IZ	Autorski reprint

<i>Mesto i adresa:</i> MA	Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 3
<i>Fizički opis rada:</i> FO	broj poglavlja 13 / broj strana 38 / broj literarnih navoda 9 / broj tabela 4 / broj slika 10 / broj grafika 0 / broj priloga 0
<i>Naučna oblast:</i> NO	Fizika
<i>Naučna disciplina:</i> ND	Astrofizika
<i>Predmetna odrednica/ ključne reči:</i> PO	Planetezimale, Planete, Ekscentricitet, Protoplanetarni disk, Otpor gasa, Formiranje planeta
UDK	
<i>Čuva se:</i> ČU	Biblioteka Departmana za fiziku, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad
<i>Važna napomena:</i> VN	Nema
<i>Izvod:</i> IZ	Formiranje planeta počinje rastom mikrometarskih čestica prašine u protoplanetarnom disku, koje se kroz procese koncentracije i gravitacionog sažimanja formiraju u planetezimale. Njihov dalji rast odvija se sudarima i akrecijom šljunka, pri čemu je uspešnost spajanja snažno određena relativnim brzinama, odnosno ekscentricitetom orbita. U radu se proučava evolucija ekscentriciteta planetezimala pod istovremenim delovanjem dva suprotstavljena procesa: otpora gasa, koji prigušuje ekscentricitet, i gravitacionog uskomešavanja izazvanog protoplanetom, koje ga povećava. Cilj je da se poređenjem karakterističnih vremenskih skala ova dva procesa utvrdi koji mehanizam preovlađuje pre nestanka gasa iz protoplanetarnog diska. Analiza se sprovodi za dva scenarija: uslove karakteristične za rani Sunčev sistem i uslove u pojasu planetezimala na većem rastojanju od masivnije zvezde. Dobijeni rezultati omogućavaju procenu uslova pod kojima orbite planetezimala ostaju dovoljno mirne za nastavak njihovog rasta i formiranje planetarnih tela.
<i>Datum prihvatanja teme:</i> DP	03.09.2026.

<i>Datum odbrane:</i> DO	
<i>Članovi komisije:</i> KO	
<i>Predsednik:</i>	Dr Jovana Knežević Radić, docent, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu
<i>Član:</i>	Dr Mirjana Šiljegović, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu
<i>Član, mentor:</i>	Dr Lazar Gavanski, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu



UNIVERSITY OF NOVI SAD • FACULTY OF SCIENCES

21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 3

KEY WORDS DOCUMENTATION

<i>Accession number:</i> ANO	
<i>Identification number:</i> INO	
<i>Document type:</i> DT	Monograph publication
<i>Type of record:</i> TR	Electronic material
<i>Content code:</i> CC	Master Thesis
<i>Author:</i> AU	Veljko Nikolić
<i>Mentor/comentor:</i> MN	Lazar Gavanski PhD
<i>Title:</i> TI	Effects of changes in the orbital eccentricity of planetesimals
<i>Language of text:</i> LT	Serbian (Latin)
<i>Language of abstract:</i> LA	Serbian
<i>Country of publication:</i> CP	Republic of Serbia
<i>Locality of publication:</i> LP	Vojvodina
<i>Publication year:</i> PY	2026.
<i>Publisher:</i> PU	Author's reprint
<i>Publication place:</i> PP	Faculty of Sciences, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 3

<i>Physical description:</i> PD	chapters 13/ pages 38 / references 9 / tables 4 / figures 10 / graphs 0 / appendices 0
<i>Scientific field:</i> SF	Physics
<i>Scientific discipline:</i> SD	Astrophysics
<i>Subject/ Key words:</i> SKW UC	Planetesimals, planets, eccentricity, protoplanetary disk, gas drag, planet formation
<i>Holding data:</i> HD	Library of Department of Physics, Faculty of Sciences, Novi Sad
<i>Note:</i> N	None
<i>Abstract:</i> AB	Planet formation begins with the growth of micrometer-sized dust particles within a protoplanetary disk, which, through processes of concentration and gravitational collapse, form planetesimals. Their subsequent growth occurs through collisions and pebble accretion, with the success of their merger strongly determined by relative velocities, or, equivalently, orbital eccentricity. This study investigates the evolution of planetesimal eccentricity under the simultaneous influence of two opposing processes: gas drag, which damps eccentricity, and gravitational stirring caused by a protoplanet, which increases it. The aim is to determine, by comparing the characteristic timescales of these two processes, which mechanism dominates before the gas dissipates from the protoplanetary disk. The analysis is conducted for two scenarios: conditions characteristic of the early Solar System and conditions in a planetesimal belt at a greater distance from a more massive star. The obtained results enable an assessment of the conditions under which planetesimal orbits remain sufficiently dynamically cold to allow their continued growth and the formation of planetary bodies.
<i>Accepted by the Scientific Board:</i> ASB	03.09.2026.
<i>Defended on:</i> DE	

<i>Thesis defend board:</i> DB	
<i>President:</i>	Dr. Jovana Knežević Radić, Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
<i>Member:</i>	Dr. Mirjana Šiljegović, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
<i>Member, supervisor:</i>	Dr. Lazar Gavanski, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad