



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ПРИМЉЕНО:	28.09.2009
ОРГАНИЗ.ЈЕД.	БРОЈ
о603	3 / 1161

Stevan Armaković

Džozefsonov efekat i SQUID–uredaji

- Diplomski rad -

Novi Sad, 2009.

Komisija za odbranu diplomskog rada:

1. _____

2. _____

3. _____

Kandidat je odbranio diplomski rad sa ocenom _____ (_____)

Novi Sad, ____ septembra 2009. godine

Ovaj diplomski rad je rađen pod mentorstvom Akademika, prof. dr Jovana P. Šetrajičića kojem se najiskrenije zahvaljujem na strpljivoj i nesebičnoj pomoći kako pri pisanju rada i njegovoj realizaciji, tako i na činjenici da mi je omogućio da redovne studije završim istražujući temu koja me najviše interesuje već duži vremenski period.

Zahvaljujem se svojim priateljima i kolegama na podršci i razumevanju tokom studija.

Posebnu zahvalnost dugujem Sanji Kler na srdačnoj i neprestanoj pomoći tokom celokupnog studiranja i izrade ovog diplomskog rada.

Specijalnu zahvalnost dugujem tetki Gordani na podršci i pomoći koja mi je u mnogome olakšala studije.

Najveću zahvalnost dugujem baki Sofiji i majci Zorici na podršci u svakom pogledu i bez čijeg zalaganja i požrtvovanja ne bih osetio zadovoljstvo pisanja ovih redova.

SADRŽAJ:

1.	Uvod.....	1
2.	Istrorijat superprovodnosti	3
3.	Efekti superprovodnosti	6
3.1.	Istrajne struje.....	6
3.2.	Majsner–Oksenfeldov efekat	7
3.3.	Kritična jačina magnetnog polja	7
3.4.	Kvantizacija magnetnog fluksa.....	9
4.	Teorije superprovodnosti	10
4.1.	Teorija braće London	11
4.2.	Ginzburg–Landauova teorija	16
4.2.1.	Jednačine Ginzburg–Landaua.....	19
4.3.	BCS teorija.....	25
4.3.1.	Rekapitulacija kvantne mehanike	26
4.3.1.1.	Identičnost čestica	26
4.3.1.2.	Kvantni idealni gas	28
4.3.1.3.	Svojstveni problem slobodne čestice	28
4.3.2.	Boze–Ajnštajnova kondenzacija.....	31
4.3.2.1.	Boze–Ajnštajnove funkcije	31
4.3.2.2.	Jednačine stanja idealnog bozonskog gasa	33
4.3.2.3.	Idealni bozonski gas na niskim temperaturama	35
4.3.3.	Superfluidnost	37
4.3.4.	Elementi BCS teorije	38
4.3.5.	Hamiltonian superprovodnog sistema; elektron-fononska interakcija.....	39
5.	Džozefsonov efekat i SQUID uređaji	43
5.1.	Magnetno polje i Džozefsonov efekat	47
6.	SQUID	49
6.1.	DC SQUID	50
6.2.	RF SQUID	52
6.3.	Detektorski namotaji.....	52
6.4.	Šum SQUID-a.....	53
6.5.	Izrada SQUID-a	54
6.5.1.	Klasičan SQUID	54
6.5.2.	SQUID sistemi	55
6.5.3.	Gradiometri	56
6.5.4.	Zaštitne sobe	56
6.5.5.	Djuarove posude	56
6.6.	Primene SQUID-a.....	57

6.6.1.	Magnetoencefalografija	57
6.6.2.	Magnetokardiografija (MCG).....	58
6.6.3.	Geomagnetizam	58
6.6.4.	Neinvazivno testiranje	58
6.7.	Ostale primene SQUID-a.....	59
6.8.	Visokotemperaturski superprovodnici i SQUID.....	59
7.	Zaključak.....	62
	Literatura.....	63
	Biografija	64
	Ključna dokumentacijska informacija	65
	Keywords documentation	67

1. UVOD

Fenomen superprovodnosti predstavlja jedan od najplodnijih i najprimenljivijih fenomena u nauci uopšte. Otkriven pre skoro punih sto godina, neprestano je jedan od glavnih izazova, kako za fizičare, tako i za naučnike koji se bavi drugim naučnim oblastima. Kako stvari trenutno stoe, ostaće još sigurno dug vremenski period enigma čije će shvatanje jednog dana drastično promeniti mnogo stvari u svetskom energetskom poretku. Onome ko ga otkrije ne samo da će doneti momentalno Nobelovu nagradu nego će i obezbediti značajne uštede energije, s obzirom da se ovaj fenomen u svojoj najjednostavnijoj formi ogleda u potpunom iščezavanju električne otpornosti kada se materijal ohladi ispod temperature koju nazivamo *kritična temperatura*.

Ovaj fenomen je našao primenu u nekim od najvažnijih oblasti nauke i aktivnosti čovečanstva. Dovoljno je da navedemo da je odgovoran za formiranje najjačih magneta poznatih čovečanstvu koji se koriste u CERN-u ili da se koristi u najefikasnijim dijagnostičkim uređajima u medicini – SQUIDovima (SuperConducting Quantum Interference Device). Neke od ostalih primena su date u poslednjem poglavlju ovog diplomskog rada.

Razumevanje fenomena superprovodnosti je išlo postepeno i tokom pokušaja opisivanja ove pojave fizičari su formirali tri teorije: teorija braće London, Ginzburg–Landauova teorija i BCS teorija.

Predmet ovog diplomskog rada jeste upoznavanje sa teorijama koje opisuju fenomen superprovodnosti i mehanizam superprovodnosti, kako bi se što bolje vladalo tematikom, i primena superprovodnosti za pravljenje najosetljivijih uređaja čovečanstva - SQUID uređaja. Ovde su termini *opisivanje fenomena* i *opisivanje mehanizma* namerno razdvojeni, jer prve dve teorije razmatraju fenomen superprovodnosti fenomenološki i kao takve ne govore ništa o mehanizmu superprovodnosti, dok jedino BCS teorija od navedenih daje objašnjenje mehanizma superprovodnosti klasičnih superprovodnika.

Forma diplomskog rada je takva da je najpre nešto rečeno o stanju fizike niskih temperatura neposredno pred otkriće superprovodnosti (poglavlje 2). Zatim je u poglavlju 3 u najkraćim mogućim crtama dat pregled najvažnijih efekata superprovodnosti, dok su

objašnjenja predstavljenih efekata superprovodnosti data postepeno u razrađenim teorijama koje su date u najdužem i najdetaljnijem poglavlju – poglavlju 4. Zatim, sledi objašnjenje Džozefsonovog efekta, poglavlje 5, koji je suština SQUID uređaja i onda sledi poglavlje 6 u kome su predstavljeni SQUID uređaji kao i kratak pregled primene SQUID uređaja. U okviru poglavlja 7 izveden je kratak zaključak o izloženoj problematici.

2. ISTORIJAT SUPERPROVODNOSTI

Otkriću superprovodnosti prethodilo je jedno vrlo bitno dostignuće, a to je likvefakcija helijuma, odnosno prevodenje helijuma u tečno agregatno stanje. Likvefakciju helijuma je postigao upravo čovek koji je i otkrio fenomen superprovodnosti –Hajke Kamerling Ones¹. Postizanjem likvefakcije helijuma Kamerling Ones je omogućio dalji napredak fizike niskih temperatura iz prostog razloga što je temperatura isparavanja helijuma oko 4 K. Kamerling Ones je pomenuti uspeh postigao kao osnivač i direktor laboratorije za niske temperature Univerziteta u Lajdenu. Pitanje likvefakcije helijuma bilo je u principu vrlo zanimljivo jer je upravo helijum bio poslednji plemeniti gas sa kojim nije postignuta likvefakcija. Kada se uzme u obzir koliko je važan bio James Djuar² sa svojim pronalaskom, likvefakcijom vodonika, jasno je koliko je prestižno bilo postići isto sa helijumom.

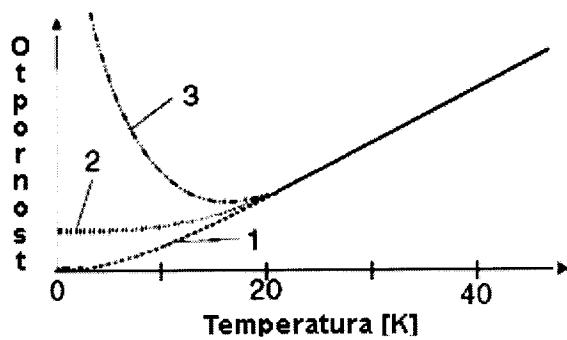
Nakon svog dostignuća, Kamerling Ones je započeo ispitivanje zavisnosti električne provodnosti od temperature. Temperaturska zavisnost električne provodnosti mnogih metala je bila poznata tada, ali naravno, nikakav mehanizam do 1908. i Kamerlingovog otkrića, nije mogao da omogući postizanje ekstremno niskih temperatura pa je temperaturska zavisnost električne provodnosti bila još neotkrivena. Ono što se znalo tada o električnoj provodnosti uopšte bilo je vrlo skromno i nedovoljno čak i da se nasluti šta se dešava na temperaturama od oko 4 K. Tada se znalo da električna provodnost ima „nekakve veze“ sa transferom elektrona kroz materijal i da sa snižavanjem temperature saturira ka određenoj vrednosti. Tako skromna predstava o električnoj provodnosti bila je delimično i posledica činjenice da su elektroni otkriveni tek nekih desetak godina pre Kamerling Onesovih eksperimenata.

Imajući u vidu sve što se tada znalo mehanizmu električne provodnosti i njene zavisnosti od temperature, Kamerling Ones je mogao da očekuje jednu od tri pojave (slika 1):

¹ Heike Kamerling Ohnes

2 James Dewar

- snižavanjem temperature električna otpornost bi mogla da dostigne nulu (ovo je bilo mišljenje Djuara iz 1924),
- električna otpornost bi mogla da dostigne konačnu graničnu vrednost (Matiesen, 1864.),
- električna otpornost bi mogla da prođe kroz minimum i kreće ka beskonačnosti na izuzetno niskim temperaturama (Tompson, 1902.).



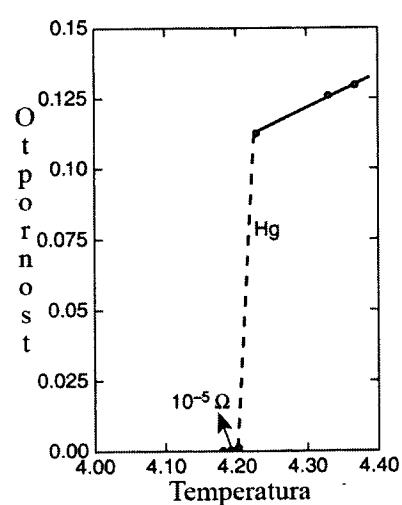
Slika 1. Grafički prikaz očekivanih rezultata pionirskih eksperimenta Kamerling Onesa

U početnim eksperimentima, Kamerling Ones je zaključio da se odigrava ono što je predviđeno Matiesenovom pretpostavkom, odnosno, istražujući uzorke od platine i zlata zaključio je da električna otpornost dostiže neku određenu graničnu vrednost, odnosno saturira ka nekoj vrednosti koja se još naziva i rezidualna električna otpornost. Kamerling Ones je dalje zaključio da je rezidualna električna otpornost povezana sa čistoćom ispitivanih uzoraka i to u svojim daljim istraživanjima i pokazao. Što su čistiji uzorci bili, rezidualna električna otpornost je bila manja. Svoje rezultate je predstavio na trećem međunarodnom kongresu u Čikagu 1913 i zaključio da bi „električna otpornost apsolutno čiste platine trebalo da dostiže nullu vrednost na temperaturama ključanja helijuma“. Ovakvo viđenje je bilo prilično dobro prihvaćeno od strane kvantnih fizičara. Čak se oglasio i Ajnštajn predlažući model kristala prema kome vibraciona energija opada eksponencijalno na niskim temperaturama. U principu, ono što je Kamerling Onesu donelo uspeh jeste njegova ispravna pretpostavka (za koju se ispostavilo da je

potpuno tačna) da rezidualna električna otpornost veoma čistih materijala potiče od „kretanja“ atoma.

Kamerling Onesu je bilo jasno da ako želi da postigne ono što je zamislio mora da ispituje što čistiji materijal. Izbor je pao na živu i korišćenje višestruke destilacije za prečišćavanje. Ne baš potpuno prema svojim očekivanjima, postigao je superprovodnost. I sada, pre nego što se razmotre rezultati Kamerling Onesa potrebno je uvesti malu korekciju na prvobitnu definiciju superprovodnosti, a ona se sastoji u sledećem. Ne radi se o potpunom iščezavanju električne otpornosti nego električna otpornost opada ispod vrednosti koja se može detektovati mernim uređajima. Ovu činjenicu ćemo demonstrirati kasnije, a sada se vraćamo na diskusiju Kamerling Onesovih rezultata sa živom.

Na slici 2 je predstavljena temperaturna promena otpornosti žive koju je Kamerling Ones dobio sa svojim saradnicima: Gerrit Flim, Giles Holst i Gerrit Dorsman³:



Ipak je Kamerling Ones otkrio nešto što nije očekivao, a što je ukazivalo da mehanizam superprovodnosti nije trivijalan. Naime, sa grafika se vidi da otpornost nije opala postepeno nego se pad otpornosti odigra u intervalu od nekoliko stotih delova stepena. Takođe, kasnije se utvrdilo da je čistoća materijala nebitna kada se radi o superprovodnosti.

Slika 2. Grafik promene otpornosti sa temperaturom

Važnost ovog egzotičnog fenomena je odmah ustanovljena i Kamerling Ones je naravno nagrađen Nobelovom nagradom već 1913. godine. Naravno da nije samo potpuno iščezavanje električne otpornosti osobina superprovodnog stanja. Postoji niz propratnih efekata sa kojima ćemo se nadalje upoznati.

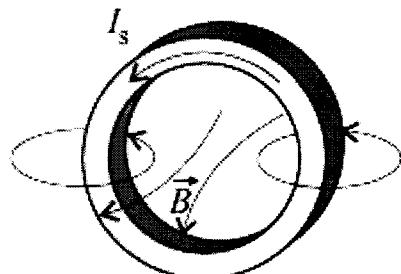
³ Gerrit Flim, Giles Holst i Gerrit Dorsman

3. EFEKTI SUPERPROVODNOSTI

Navešćemo neke od propratnih efekata superprovodnosti, pritom će neka objašnjenja biti data odmah, dok će objašnjenja nekih efekata biti data naknadno. Efekti koji će biti navedeni su sledeći: *istrajne struje*, *kritična jačina magnetnog polja*, *Majsner–Oksenfeldov efekat* i *kvantizacija magnetnog fluksa*.

3.1. ISTRAJNE STRUJE

Jedan od prvih propratnih efekata superprovodnosti jeste proticanje *istrajnih struja*. U superprovodniku ispod T_c , ukoliko se ovaj priključi na izvor stalne elektromotorne sile, može da se javi električna struja konstantne jačine. Istrajna struja se lako održava bez prisustva strujnog ili naponskog izvora, pa otuda i naziv.



Slika 3. Magnetni fluks kroz superprovodni prsten i istrajne struje

Ukoliko napišemo drugi Kirhofov zakon za slučaj superprovodnog prstena (slika 3) u homogenom magnetnom polju indukcije \vec{B} i njegovim razmatranjem možemo dokazati pojavu istrajnih struja. Drugi Kirhofov zakon glasi:

$$-\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt} + R \cdot I. \quad (1)$$

Dakle, ako je $B = \text{const}$, magnetni fluks je $\Phi = B \cdot S$, promenom intenziteta magnetne indukcije za dB u prstenu se indukuje elektromotorna sila $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$, koja dalje proizvodi protok električne struje kroz superprovodni prsten. Kada je $R = 0$, sledi da je:

$$\Phi + L \cdot I = \text{const}. \quad (2)$$

Na osnovu poslednje relacije zaključuje se da magnetni fluks kroz superprovodnu konturu ne može da se menja, a da bi tako bilo, struja kroz konturu mora da teče uvek istom jačinom.

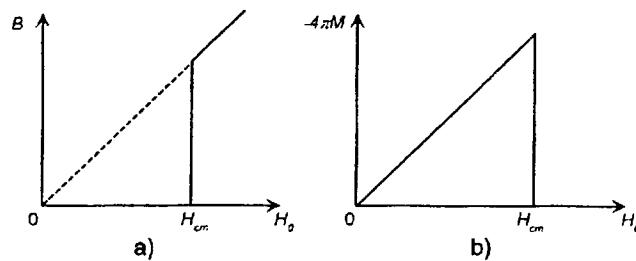
3.2. MAJSNER–OKSENFELDOV EFEKAT

Majsner–Oksenfeldov efekat je verovatno najefektniji demonstracioni efekat superprovodnosti. Jednostavno, to je pojava da superprovodnik kada se nalazi ispod T_c potpuno istiskuje magnetno polje iz „sebe“. Drugim rečima, superprovodnik ne dozvoljava linijama sila spoljašnjeg magnetnog polja da prođu u njegovu unutrašnjost. Do objašnjenja ovog efekta doći ćemo kada budemo razmatrali teoriju Londonovih u odeljku 4.1.

3.3. KRITIČNA JAČINA MAGNETNOG POLJA

Ovaj efekat superprovodnosti se ogleda u činjenici da se stanje superprovodnosti narušava kada se superprovodnik deluje određena jačina magnetnog polja. Vrednost jačine magnetnog polja kada prestaje superprovodnost se naziva *kritična jačina magnetnog polja*. Kritičnu jačinu magnetnog polja ćemo u narednom kratkom razmatranju dovesti u vezu sa slobodnom energijom i kasnije iskoristiti u teoriji Londonovih.

Posmatramo krvu magnetizacije superprovodnika. Pretpostavlja se da je superprovodni uzorak u obliku dugačkog cilindra u longitudinalnom spoljašnjem magnetnom polju H_0 . Kada spoljašnje magnetno polje H_0 dostigne neku kritičnu vrednost H_{cm} , superprovodnost se narušava. Krive magnetizacije $B = B(H_0)$ koje se dobijaju u ovom slučaju date su na slici 4:



Slika 4. Magnetizacija uzoraka a) $B = f(H_0)$, b)
 $-4\pi M = f(H_0)$

Magnetna indukcija \vec{B} i magnetno polje \vec{H}_0 su povezani sledećom relacijom:

$$\vec{B} = \vec{H}_0 + 4\pi \vec{M}. \quad (3)$$

gde je \vec{M} magnetni moment po jedinici zapremine. Kriva magnetizacije se često crta kao zavisnost $-4\pi \vec{M}$ od \vec{H}_0 , kao što je to prikazano na slici broj 4b.

Kada je $H_0 < H_{cm}$, \vec{B} je prema Majsner–Oksenfeldovom efektu jednako nuli i tada prema već navedenoj relaciji sledi da je:

$$\vec{M} = -\frac{\vec{H}_0}{4\pi}. \quad (4)$$

Kada se na H_0 dodaje infinitezimalno mala vrednost $d\vec{H}_0$, spoljašnji izvor magnetnog polja vrši rad na superprovodnik, po jedinici zapremine, koji iznosi:

$$-\vec{M} d\vec{H}_0 = \frac{\vec{H}_0}{4\pi} d\vec{H}_0. \quad (5)$$

Kako se jačina magnetnog polja menja od 0 do \vec{H}_0 , ukupan izvršen rad od strane spoljašnjeg izvora iznosi:

$$-\int_0^{H_0} \vec{M} d\vec{H}_0 = \frac{H_0^2}{8\pi}. \quad (6)$$

Ovaj rad je u stvari sadržan u slobodnoj energiji superprovodnika koji se nalazi u spoljašnjem polju jačine \vec{H}_0 :

$$F_{sH} = F_{s0} + \frac{H_0^2}{8\pi}. \quad (7)$$

gde smo sa F_{s0} označili slobodnu energiju superprovodnika u nultom spoljašnjem polju.

Prelaz iz superprovodnog u normalno stanje se odigrava kada slobodna energija dostigne nivo slobodne energije u normalnom stanju, odnosno kada je $F_{sH} = F_n$ i to se dešava kada je $H_0 = H_{cm}$ pa na osnovu izraza (7) sledi:

$$F_n - F_{s0} = \frac{H_{cm}^2}{8\pi}. \quad (8)$$

Na osnovu svega možemo zaključiti da je kritično polje u stvari mera razlike slobodne energije između normalnog i superprovodnog stanja.

3.4. KVANTIZACIJA MAGNETNOG FLUKSA

Ovaj efekat se ogleda u činjenici da je fluks magnetnog polja kroz superprovodni prsten jednak, po prvoj pretpostavci, celobrojnom umnošku kvanta fluksa: $\Phi_0 = h/e$. Detaljnijim istraživanjem ovog fenomena zaključeno je da je vrednost kvanta fluksa (fluksiona) u stvari duplo manja od prethodne: $\Phi_0 = h/2e$.

Pretpostavku o kvantizaciji magnetnog fluksa je uveo 1950. F. London, a eksperimentalno utvrđivanje kvanta magnetnog fluksa, koji iznosi $\Phi_0 = 2.07 \cdot 10^{-15}$ Wb, učinjeno je od strane Divera i Ferbenka, 1961.

4. TEORIJE SUPERPROVODNOSTI

U sledećem odeljku ćemo se pozabaviti teorijama koje objašnjavaju efekat superprovodnosti. Dat je pregled tri teorije u hronološkom rasporedu i to su: teorija braće London, teorija Ginzburg–Landaua i BCS teorija.

Prva teorija, teorija braće London, je isključivo fenomenološka i u principu je možemo posmatrati kao termodinamiku supeprovodnika. Kod ovog pristupa najveći deo posla se svodi na analizu slobodne energije superprovodnika, odnosno posmatramo za koje vrednosti određenih parametara slobodna energija ima minimum. Dostignuće ove teorije se ogleda u tome što se objašnjava Majsner-Oksenfeldov efekat i zaključuje se u stvari da magnetno polje ipak prodire u superprovodnik. Veličina koja nam pokazuje koliko u stvari magnetno polje „ulazi“ unutar superprovodnika je *dubina prodiranja* i njena vrednost je reda veličine od 500 \AA do 1000 \AA .

Druga teorija, teorija Ginzburg–Landaua, je tzv. polu-fenomenološka kvantna teorija. Drugim rečima, to je teorija koja se zasniva na Landauovoj teoriji faznih prelaza druge vrste koja uzima u obzir kvantne fenomene. Njena konačna interpretacija može da glasi: kvantni tretman Landauove teorije faznih prelaza druge vrste. U ovoj teoriji koristimo činjenicu da je superprovodno stanje uređenije od normalnog stanja i kao veličinu koja opisuje uređenost tog stanja uvodimo tzv. *parametar uređenosti*⁴. Pošto se kod ove teorije radi o kvantnom tretmanu potrebno je definisati talasnu funkciju para elektrona, pošto znamo da je upravo par elektrona⁵ nosioc nanelektrisanja kod supeprovodnog stanja, a za talasnu funkciju uzimamo upravo *parametar uređenosti*. Dostignuće ove teorije se ogleda u činjenici da se takođe opisuje *dubina prodiranja* i to kao dužina duž koje se menja *parametar uređenosti* od ravnotežne vrednosti unutar superprovodnika do nule. Takođe, ovu teoriju koristimo kod razmatranja Džozefsonovog efekta.

Treća teorija, BCS teorija, je jedina kompletna i kvantno statistička teorija. Za ovu teoriju se kaže da je potpuna jer u potpunosti daje odgovor na pitanje mehanizma

⁴ U anglo-saksonskoj literaturi ova veličina se naziva *order parameter*,

⁵ Kod BCS teorije, upravo je par elektrona (Kuperov par) nosioc nanelektrisanja

superprovodnosti. Prethodne dve teorije opisuju fenomene koji prate superprovodnost, ali ne pokazuju koji je to mehanizam, odnosno kakav je to proces koji dovodi do sparivanja elektrona u parove. BCS teoriji je prethodilo otkriće *superfluidnosti* tečnog helijuma i pojmu⁶ Boze–Ajnštajnove kondenzacije, sama teorija se zasniva na razmatranju hamiltonijana koji u ovom slučaju sadrži i član koji se odnosi na elektron-fononsku interakciju koja je odgovorna za sparivanje elektrona u parove koji se nazivaju Kuperovi parovi. Dostignuće ove teorije je upravo shvatanje mehanizma superprovodnosti uz nedostatak da ne može da objasni mehanizam superprovodnosti na temperaturama višim od 40 K. Kako je BCS teorija „najsavremenija“ od navedenih, odnosno u potpunosti se oslanja na kvantu mehaniku, pre nego što se ona izloži biće data kratka rekapitulacija kvantne mehanike i koncepta Boze–Ajnštajnove kondenzacije.

4.1. TEORIJA BRAĆE LONDON

Kao što je već napomenuto, teorija braće Frica i Hajnca Londona je prva teorija koja je opisivala fenomene superprovodnosti. Rezultat njihovog rada se ogleda u dobijanju dve jednačine koje opisuju relacije između električnog i magnetnog polja i jačine struje kroz superprovodnik – jednačine Londonovih.

Teorija Londonovih se zasniva na takozvanom *dvofluidnom modelu* prema kome se svi slobodni elektroni superprovodnika dele u dve velike grupe: *superprovodne (superelektrone) elektrone* čija je gustina n_s i *normalne* elektrone gustine n_n . Ukupna gustina je dakle $n = n_s + n_n$. Kako se temperatura menja od 0 do T_c , tako se i gustina superelektrona smanjuje od n do nule.

Posmatramo, naravno, najjednostavniji slučaj. Pretpostavimo da su i električno i magnetno polje dovoljno slabi da nemaju značajan uticaj na gustinu superprovodnih elektrona. Sledeća pretpostavka se odnosi na gustinu superprovodnih elektrona za koju se uzima da je svuda ista i može se elegantnije predstaviti sledećim stavom: prostorna varijacija veličine n_s je zanemarljiva. Imajući u vidu navedene pretpostavke, relacije

⁶ Boze–Ajnštajnova kondenzacija je tada bila isključivo teorijska pretpostavka koja eksperimentalno dokazana tek 1995. godine,

između struje, električnog i magnetnog polja su linearne i opisane dvema, tzv., jednačinama Londonovih.

Prvu jednačinu Londonovih dobijamo na sledeći način. Najpre posmatramo jednačinu kretanja superelektrona u električnom polju:

$$n_s m \frac{d\vec{v}_s}{dt} = n_s e \vec{E}. \quad (9)$$

U ovoj relaciji m predstavlja masu elektrona, e je nanelektrisanje elektrona, a v_s je brzina superfluida, dok je od ranije poznato da je n_s gustina superelektrona. Ako još uzmemmo u obzir da je gustina superstruje data kao $\vec{j}_s = n_s e \vec{v}_s$, prethodnu relaciju možemo napisati na sledeći način:

$$\vec{E} = \frac{d}{dt} (\Lambda \vec{j}_s), \quad (10)$$

gde smo sa Λ označili $\frac{m}{n_s e^2}$.

Na ovaj način smo našli vezu između električnog polja i gustine superstruje i upravo poslednja relacija predstavlja prvu jednačinu Londonovih koja je ništa više nego drugi Njutnov zakon za superelektrone.

Druga jednačina Londonovih, čije izvođenje sledi, daće nam vezu između superstruje i magnetnog polja u superprovodniku. Magnetno polje u nekoj posmatranoj tački magnetnog polja označićemo sa $\vec{H}(\vec{r})$. Ako se sada setimo Majsner-Oksenfeldovog efekta, odnosno zaključka njihovog razmatranja, koji tvrdi da magnetno polje biva **potpuno istisnuto** iz superprovodnika odmah se pitamo otkud sada magnetno polje u superprovodniku? Upravo će nam druga jednačina Londonovih dati odgovor na ovo pitanje i utvrditi da magnetno polje prodire do određene dubine superprovodnika koja je reda veličine $500 - 1000 \text{ \AA}^\circ$. Druga jednačina Londonovih nam u stvari daje raspodelu ovog magnetnog polja u superprovodniku.

Posmatrajmo slobodnu energiju superprovodnika i to najpre u nultom magnetnom polju, F_{s0} . Gustina kinetička energije superstruje data je izrazom:

$$W_{kin} = \frac{n_s m v_s^2}{2} = \frac{m j_s^2}{2 n_s e^2}. \quad (11)$$

Sada sa ovim izrazom kombinujemo sledeću Maksvelovu jednačinu:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_s, \quad (12)$$

dobijamo:

$$W_{kin} = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} (\text{rot } \vec{H})^2 = \frac{\lambda^2}{8\pi} (\text{rot } \vec{H})^2. \quad (13)$$

Ovde je potrebno podsetiti se izraza (8) za kritičnu jačinu magnetnog polje i slobodnu energiju superprovodnika.

Najpre, napomenimo da smo sa λ obeležili sledeće:

$$\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}. \quad (14)$$

Kao što smo pokazali, u nekom trenutku, gustina magnetne energije superprovodnika iznosi $H^2/8\pi$, tako da slobodna energija superprovodnika kao celine, uključujući dakle i kinetičku energiju superstruje i magnetno polje, iznosi:

$$F_{sH} = F_{s0} + \frac{1}{8\pi} \int [\vec{H}^2 + \lambda^2 (\text{rot } \vec{H})] dV. \quad (15)$$

Ovde se integracija vrši celom zapreminom superprovodnika.

Sada rešavamo tzv. varijacioni problem, odnosno, tražimo $\vec{H}(\vec{r})$ takvo da ono odgovara minimalnoj vrednosti slobodne energije. To radimo na sledeći način:

dodeljujemo malu varijaciju $\delta\vec{H}(\vec{r})$ funkciji $\vec{H}(\vec{r})$. Kao posledica, javlja se i mala promena F_{sH} koja će iznositi δF_{sH} :

$$\delta F_{sH} = \frac{1}{8\pi} \int (2\vec{H} \cdot \delta\vec{H} + 2\lambda^2 \operatorname{rot} \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \delta\vec{H}) dV. \quad (16)$$

Da bi našli $\vec{H}(\vec{r})$ za koje je slobodna energija F_{sH} minimalna, uzimamo da je:

$$\delta F_{sH} = 0. \quad (17)$$

Sada se pozivamo na vektorsku analizu i koristimo identitet:

$$\vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b} = b \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \operatorname{div} [\vec{a} \times \vec{b}]. \quad (18)$$

Kombinovanjem navedenog identiteta i uslova (17) dobijamo:

$$\int [\vec{H} + \lambda^2 (\operatorname{rot} \operatorname{rot} H)] \cdot \delta\vec{H} dV - \int \operatorname{div} [\operatorname{rot} \vec{H} \times \delta\vec{H}] dV = 0. \quad (19)$$

Korišćenjem Gausove teoreme zaključujemo da je drugi integral u izrazu (19) jednak nuli, jer je $\delta\vec{H}(\vec{r}) = 0$. Na taj način dobijamo relaciju:

$$\int (H + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} H) \cdot \delta H dV = 0. \quad (20)$$

Zaključujemo da ovaj integral u izrazu (20) može biti jednak nuli samo ako je:

$$\vec{H} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = 0. \quad (21)$$

Upravo ova jednačina predstavlja drugu jednačinu Londonovih. Ako iskoristimo Maksvelovu jednačinu, izraz (12) i jednakost da je $\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$, dobijamo:

$$\vec{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \vec{A}. \quad (22)$$

Naravno, za vektorski potencijal važi:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (23)$$

Poslednje dve relacije određuju uslove kontinualnosti struje u odsustvu izvora superstruje – istrajne struje.

Ukoliko se pozovemo na ranije uvedene veličine λ i Λ , izrazi (10) i (13), dobijamo sistem:

$$\vec{j}_s = -\frac{1}{c\Lambda} \vec{A}, \quad \Lambda = \frac{4\pi\lambda^2}{c^2}. \quad (24)$$

Sada možemo odrediti dubinu prodiranja magnetnog polja \tilde{H}_0 unutar superprovodnika. Uzimajući u obzir da je $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{H} = -\nabla^2 \tilde{H}$, uslov možemo izraziti kao:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - \lambda^{-2} H = 0. \quad (25)$$

Uzimajući u obzir granične uslove koji su:

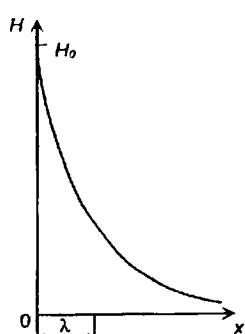
$$H(0) = H_0 \text{ i } H(\infty) = 0, \quad (26)$$

dobijamo jednačinu koja nam daje raspodelu jačine magnetnog polja u superprovodniku i koja glasi:

$$H = H_0 e^{-x/\lambda}. \quad (27)$$

Grafičko rešenje je dato na slici 5.

Upravo poslednja jednačina, u kojoj figuriše ranije uvedena veličina λ , pojašnjava fizičko značenje veličine λ . To je dakle dubina prodiranja magnetnog polja unutar superprovodnika i data je kao:



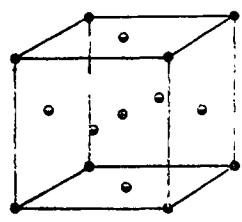
Slika 5. Raspodela jačina magnetnog polja u funkciji od dubine prodiranja

$$\lambda = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \right)^{1/2}. \quad (28)$$

4.2. GINZBURG–LANDAUOVA TEORIJA

Razmatranje braće London je dalo izvrsne rezultate jer je po prvi put objašnjen jedan vrlo važan efekat superprovodnosti – Majsner–Oksenfeldov efekat. Međutim, teorija Londonovih nije uzimala u obzir kvantne efekte i s toga je daleko od kompletne teorije superprovodnika. Prva kvantno-fenomenološka teorija superprovodnika jeste Ginzburg–Landauova (GL) teorija.

GL teorija se zasniva na teoriji prelaza drugog reda koju je razradio Landau, a što je to u stvari fazni prelaz druge vrste možemo videti na primeru BaTiO_3 . Naime,



Slika 6. Struktura
 BaTiO_3

BaTiO_3 , na visokim temperaturama ima zapreminski centriranu kubnu rešetku koja je data na slici 6. Kako se temperatura spušta, na nekoj određenoj temperaturi atomi Ti i O počinju da se pomeraju u odnosu na atome Ba u pravcu jedne od strana kocke, što ima za posledicu da se momentalno menja i simetrija kristala. Upravo ovi prelazi iz jedne kristalne modifikacije u drugu se nazivaju fazni prelazi druge vrste. Ovde treba naglasiti da je fazni prelaz kontinualan u smislu da se stanje tela menja kontinualno, dok se simetrija menja diskontinualno, a u tački prelaza obe faze se međusobno poklapaju.

Dalje, pored pomeranja atoma duž jedne od stranica, promena simetrije kristala može se odigrati i promenom uređenosti, odnosno neuređenosti, kristala pri promeni temperature. Takav nam je primer kod CuZn koji je u uređenoj varijanti prosta kubna rešetka, dok se snižavanjem temperature njegova simetrija povišava i kristalna struktura postaje kubna zapreminski centrirana.

Kada govorimo o drugom slučaju, možemo uvesti veličinu koja nam u stvari predstavlja stepen uređenosti kristala i koju nazivamo *parametar uređenosti*.

Ono što bi trebalo najpre da se uzme u obzir pri kvantomehaničkom tretmanu superprovodnika jeste činjenica da je superprovodno stanje uređenje od normalno provodnog stanja i da je prelaz iz jednog stanja u drugo u stvari prelaz drugog reda. Ove dve činjenice impliciraju na postojanje parametra uređenosti superprovodnika koji je

različit od nule na temperaturama nižim od kritične, a jednak nuli na temperaturama koje su jednake i više od kritične temperature.

Da bi se razvila kvantna teorija superprovodnika potrebno je uvesti efektivnu talasnu funkciju superprovodnih elektrona, $\Psi(r)$. Ginzburg i Landau su odlučili da posmatraju upravo parametar uređenosti kao efektivnu talasnu funkciju elektrona.

Dalje, Landauova teorija faznih prelaza druge vrste se zasniva na razvoju u red slobodne energije u odnosu na parametar uređenosti, koji je mali u blizini temperature prelaza. Ovakvo razmatranje nam govori da je GL teorija valjana samo na temperaturama koje su bliske kritičnoj temperaturi.

Dakle, pretpostavimo da je talasna funkcija superprovodnih elektrona $\Psi(r)$ upravo parametar uređenosti. Izaberimo još da normiranje ove talasne funkcije daje gustinu Kuperovih parova:

$$|\Psi(r)|^2 = \frac{n_s}{2}. \quad (29)$$

Razmatramo najjednostavniji slučaj, a to je slučaj homogenog superprovodnika bez spoljašnjeg magnetnog polja. U ovom slučaju Ψ ne zavisi od r i razvijanje slobodne energije u red po $|\Psi(r)|^2$ blizu T_C postaje:

$$F_{s0} = F_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4. \quad (30)$$

Ovde je F_{s0} gustina slobodne energije superprovodnika u odsustvu magnetnog polja, F_n je gustina slobodne energije normalnog stanja dok su α i β neki fenomenološki koeficijenti koji su karakteristični za materijal.

Dalje želimo da pronađemo vrednost $|\Psi|^2$ za koju slobodna energija homogenog superprovodnika, F_{s0} , ima minimalnu vrednost. Traženu vrednost, $|\Psi_0|^2$ dobijamo na osnovu uslova:

$$\frac{dF_{s0}}{d|\Psi|^2} = 0. \quad (31)$$

Zamenom F_{s0} u izraz (31) dobijamo:

$$|\Psi_0|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}. \quad (32)$$

Zamenom dobijene vrednosti u razvoj za slobodnu energiju, odnosno izraz (30) dobijamo

$$F_n - F_{s0} = \frac{\alpha^2}{2\beta}. \quad (33)$$

Ako se sada prisetimo da je kod razmatranja Londonovih $F_n - F_{s0} = H_{cm}^2/8\pi$, izraz (8), dobijamo konačno da je:

$$H_{cm}^2 = \frac{4\pi\alpha^2}{\beta}. \quad (34)$$

Dalje razmatramo temperatursku zavisnost koeficijenata α i β . Pošto parametar uredjenosti mora biti nula na $T = T_C$ i konačan na $T < T_C$, sledi iz relacije (32) da je na $T = T_C$ koeficijent $\alpha = 0$, a na $T < T_C$ koeficijent α je manji od nule. Zaključujemo da je:

$$\alpha \propto (T - T_C). \quad (35)$$

Koeficijent β je pozitivan i nezavisan od temperature što se može videti i na osnovu (32): pri temperaturama nižim od kritične i $\alpha < 0$, $|\Psi_0|^2$ može biti pozitivno samo ako je $\beta > 0$. U prvoj aproksimaciji možemo smatrati da je $\beta = \text{const.}$

4.2.1. JEDNAČINE GINZBURG–LANDAUA

Razmotrimo sada u opštem slučaju nehomogeni superprovodnik u uniformnom spoljašnjem magnetnom polju. U blizini kritične temperature, Gibsova slobodna energija se može razviti u red po Ψ na sledeći način:

$$G_{sH} = G_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + E_k + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{\vec{H} \cdot \vec{H}_0}{4\pi}, \quad (36)$$

gde je G_n gustina slobodne energije superprovodnika u normalnom stanju dok je H_0 spoljašnje magnetno polje. Predzadnji član u poslednjoj relaciji predstavlja gustinu magnetne energije, gde je H tačno miksroskopsko polje u posmatranoj tački superprovodnika, dok E_k predstavlja gustinu kinetičke energije superelektrona koju ćemo malo detaljnije analizirati.

U kvantnoj mehanici, gustinu kinetičke energije čestice mase m možemo izraziti kao:

$$\frac{1}{2m} |-i\hbar\nabla\Psi|^2. \quad (37)$$

Međutim, u prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja, izraz se menja u oblik:

$$-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A} = m\vec{v}. \quad (38)$$

Odavde, operator brzine možemo izraziti kao:

$$\vec{v} = -\left(\frac{i\hbar}{m}\right)\nabla - \left(\frac{e}{cm}\right)\vec{A}. \quad (39)$$

Nakon uvrštavanja dobijenog operatora u izraz (36), dobijamo:

$$G_{sH} = G_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| -i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\vec{A}\Psi \right|^2 + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{\vec{H} \cdot \vec{H}_0}{4\pi}. \quad (40)$$

Prema poslednjoj relaciji, Gibsova slobodna energija superprovodnika kao celine iznosi:

$$G_{sH} = G_n + \int \left[\alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| -i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \vec{A} \Psi \right|^2 + \frac{(\text{rot } \vec{A})^2}{8\pi} - \frac{(\text{rot } A) \cdot \vec{H}_0}{4\pi} \right] dV,$$

gde je naravno integracija izvršena po celoj zapremini superprovodnika. Dalje treba naći relacije za $\Psi(\vec{r})$ i $\vec{A}(\vec{r})$ i to takve da daju minimalnu vrednost Gibsove slobodne energije. Da bi to uradili, najpre ćemo pretpostaviti da su $\Psi(r)$ i $\vec{A}(\vec{r})$ invarijantni i rešiti varijacioni problem: $\delta_\Psi G_{sH} = 0$

$$\delta_\Psi G_{sH} = \int dV \left[\alpha \Psi \delta \Psi^* + \beta \Psi |\Psi|^2 \delta \Psi^* + \frac{1}{4m} \left(i\hbar \nabla \delta \Psi^* - \frac{2e}{c} \vec{A} \delta \Psi^* \right) \cdot \left(-i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \vec{A} \Psi \right) \right]. \quad (42)$$

Član $\delta \Psi^*$ možemo izvući ispred uglaste zagrade i uvedimo sledeću oznaku:

$$\varphi = \left(-i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \vec{A} \Psi \right). \quad (43)$$

Dalje se pozivamo na vektorsku analizu i koristimo identitet:

$$\nabla(\delta \Psi^* \varphi) = \varphi \nabla \delta \Psi^* + \delta \Psi^* \nabla \varphi, \quad (44)$$

na osnovu koga sledi:

$$\int dV \nabla \delta \Psi^* \varphi = - \int \delta \Psi^* \nabla \varphi dV + \int \nabla(\delta \Psi^* \varphi) dV. \quad (45)$$

Poslednji integral se primenom Gausove teoreme može prebaciti u površinski integral:

$$\int \nabla(\delta \Psi^* \varphi) dV = \oint_S \delta \Psi^* \varphi dS \quad (46)$$

Zamenom dobijenih relacija u izraz (42) dobijamo:

$$\begin{aligned} \delta_\Psi G_{sH} = \int dV & \left[\alpha \Psi + \beta \Psi |\Psi|^2 + \frac{1}{4m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi \right] \delta \Psi^* + \\ & + \oint_S \left[-i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \vec{A} \Psi \right] \delta \Psi^* dS = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Za proizvoljnu funkciju $\delta\Psi^*$, poslednji izraz može biti jednak nuli samo ako su oba izraza u uglastim zagradama jednaki nuli. Iz ovog uslova dobijamo prvu GL jednačinu i njen granični uslov:

$$\alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{4m} \left(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\vec{A} \right)^2 \Psi = 0, \quad (48)$$

$$\left(i\hbar\nabla\Psi + \frac{2e}{c}\vec{A}\Psi \right) \cdot \vec{n} = 0, \quad (49)$$

gde je \vec{n} jedinični vektor normale na površinu superprovodnika. Na ovaj način smo dobili jednačinu za parametar uređenosti Ψ . Još ostaje da se formira jednačina koja sadrži \vec{A} , da bi to učinili minimizirajući jednačinu, isto kao što smo to uradili za Ψ , ali ovoga puta u odnosu na \vec{A} :

$$\begin{aligned} \delta_{\vec{A}} G_{sH} &= \int dV \left\{ \frac{1}{4m} \delta_{\vec{A}} \left[\left(i\hbar\nabla\Psi^* - \frac{2e}{c}\vec{A}\Psi^* \right) \cdot \left(-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\vec{A}\Psi \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\pi} \text{rot } \vec{A} \cdot \text{rot } \delta\vec{A} - \frac{H_0}{4\pi} \cdot \text{rot } \delta\vec{A} \right\} = \\ &= \int \left\{ \frac{1}{4m} \left(-\frac{2e}{c} \Psi^* \delta\vec{A} \right) \cdot \left(-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\vec{A}\Psi \right) + \frac{1}{4m} \left(i\hbar\nabla\Psi^* - \frac{2e}{c}\vec{A}\Psi^* \right) \cdot \left(-\frac{2e}{c} \Psi \delta\vec{A} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \vec{A} - \vec{H}_0) \cdot \text{rot } \delta\vec{A} \right\} dV \end{aligned} \quad (50)$$

Poslednji član sa desne strane jednakosti možemo malo drugačije napisati i korišćenjem Gausove teoreme prevesti ga u površinski integral na sledeći način:

$$\frac{1}{4\pi} \int dV (\text{rot } \vec{A} - \vec{H}_0) \cdot \text{rot } \delta\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int dV \delta\vec{A} \cdot \text{rot rot } \vec{A} - \frac{1}{4\pi} \oint dS \cdot [\delta\vec{A} \times (\text{rot } \vec{A} - \vec{H}_0)]. \quad (51)$$

Površinski integral koji figuriše u poslednjoj relaciji je jednak nuli zato što je magnetno polje na površini superprovodnika jednako nuli.

Zamenjujući poslednju relaciju u ranije naveden uslov, $\delta_{\vec{A}} G_{sH} = 0$, dobijamo sledeće:

$$\delta_{\vec{A}} G_{sH} = \int \left[\frac{i \hbar e}{2 m c} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \frac{2 e^2}{m c^2} \vec{A} |\Psi|^2 + \frac{1}{4 \pi} \text{rot rot } \vec{A} \right] \cdot \delta \vec{A} dV = 0. \quad (52)$$

Za proizvoljno $\delta \vec{A}$ poslednji integral može biti jednak nuli samo ako je izraz u uglastoj zagradi jednak nuli. ovaj uslov upravo određuje drugu jednačinu GL teorije:

$$j_s = -\frac{i \hbar e}{2 m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2 e^2}{m c} |\Psi|^2 \vec{A}, \quad (53)$$

gde smo iskoristili Maksvelove jednačine:

$$j_s = \frac{c}{4 \pi} \text{rot rot } \vec{A} \text{ i } \vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (54)$$

Sada ćemo preći na bezdimenzionu talasnu funkciju $\psi(r)$ koju uvodimo na sledeći način:

$$\psi(r) = \frac{\Psi(r)}{\Psi_0}, \quad (55)$$

gde je $\Psi_0^2 = n_s / 2 = |\alpha| / \beta$ što smo ranije već pokazali. Još se mogu se uvesti dve veličine:

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{4 m |\alpha|}, \quad (56)$$

$$\lambda^2 = \frac{m c^2}{4 \pi n_s e^2} = \frac{m c^2 \beta}{8 \pi e^2 |\alpha|}. \quad (57)$$

Sada, Ginzburg–Landauove jednačine možemo napisati u sledećem obliku:

$$\xi^2 \left(i \nabla + \frac{2 \pi}{\Phi_0} \vec{A} \right)^2 \psi - \psi + \psi |\psi|^2 = 0, \quad (58)$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = -i \frac{\Phi_0}{4 \pi \lambda^2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \vec{A}. \quad (59)$$

Ako iskoristimo činjenicu da ψ možemo napisati kao $\psi = |\psi| e^{i\theta}$, druga Ginzburg–Landauova jednačina dobija oblik:

$$\text{rot rot } \vec{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \vec{A} \right), \quad (60)$$

dok iz jednačine (48) sledi uslov ako je superprovodnik u „kontaktu“ sa vakuumom ili izolatorom:

$$\left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \vec{A} \right) \cdot \vec{n} \psi = 0, \quad (61)$$

gde je \vec{n} jedinični vektor normale na površinu superprovodnika.

U prethodnim koracima smo formalno uveli veličinu ξ , bez diskusije o fizičkom smislu iste. Da bi smo razjasnili navedenu veličinu, najpovoljnije je razmatrati sledeći jednostavan slučaj tankog filma normalnog metalnog provodnika postavljenog na površinu superprovodnika. Ovo dovodi do smanjenja gustine superelektrona blizu površine superprovodnika. Drugim rečima, vrednost parametra uređenosti $|\psi|$ na površini je različita od ravnotežne vrednosti unutar superprovodnika, gde je $|\psi| = 1$. Postavlja se pitanje: koja je karakteristična dužina duž koje se menja vrednost parametra uređenosti?

Postavimo provodnik normalno na x -osu i uzmimo da je $x = 0$ na površini. U ovom slučaju ψ može da se menja samo duž x -ose, pa možemo staviti $\psi = \psi(x)$. Sada, prva Ginzburgova–Landauova prelazi u oblik:

$$-\xi^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \psi + \psi^3 = 0. \quad (62)$$

Dalje prepostavimo da je normalni sloj na površini toliko tanak da se amplituda od ψ na površini ne razlikuje mnogo od jedinice, odnosno:

$$\psi = 1 - \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \ll 1. \quad (63)$$

Zamenom poslednje relacije u izraz (62) i ostavljanjem samo članova koji su linearni po $\varepsilon(x)$ dobijamo:

$$\xi^2 \frac{d^2 \varepsilon(x)}{dx^2} - 2 \varepsilon(x) = 0. \quad (64)$$

Kada $x \rightarrow \infty$, parametar uređenosti teži jedinici, $\psi \rightarrow 1$, i imamo da je $\varepsilon(\infty) = 0$. Tako zaključujemo da je rešenje prethodne jednačine:

$$\varepsilon = \varepsilon(0) e^{-\sqrt{2}x/\xi}. \quad (65)$$

Zaključuje se da je ξ zasista mera varijacije parametra ψ . Ova dužina se naziva i *koherentna dužina*.

Druga važna veličina koju smo ranije već uveli jeste λ i to je dubina prodiranja. Oba parametra, ξ i λ su zavisni od temperature.

Preko ξ i λ možemo uvesti još jedan važan parametar u Ginzburg–Landauovoj teoriji i to je tzv. GL parametar κ :

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} = 2\sqrt{2} \frac{e}{\hbar c} \lambda^2 H_{cm}. \quad (66)$$

Iz poslednje relacije sledi još i izraz za kvantizaciju magnetnog fluksa koju smo uveli još odeljku 3:

$$\Phi_0 = 2\sqrt{2}H_{cm}\pi\lambda\xi. \quad (67)$$

4.3. BCS TEORIJA

Kao što smo već napomenulio objašnjenje superprovodnosti daje kvantna mehanika u kombinaciji sa statističkom fizikom. Iako je fenomen superprovodnosti otkriven još 1911. prvo kompletno i prihvaćeno objašnjenje⁷ došlo je tek 1957. godine u okviru čuvene BCS teorije. BCS teoriji prethodio je, teorijski, fenomen koji je jedan od ključnih elemenata objašnjenja superprovodnosti – Boze–Ajnštajnova kondenzacija i to je jedno suštinsko svojstvo bozonskih čestica. Naime, poznata je podela svih čestica prema vrednostima spina u dve velike grupe: fermione i bozone. Fermioni imaju polucelu vrednost spina, dok bozoni imaju celobrojnu vrednost spina. Ipak sama podela nije nastala „tek tako“ već zbog fundamentalne razlike ovih čestica koja se ogleda u sledećoj činjenici: Bozoni se u jednom posmatranom kvantnom stanju mogu naći u proizvolnjem broju, dok za fermione važi Paulijev princip isključenja prema kome se u istom kvantnom stanju može naći samo jedan fermion.

Osobina, odnosno mogućnost da se pod određenim uslovima (a to ćemo videti pod kojim), bozoni akumuliraju (kondenzuju) u osnovnom stanju naziva se upravo Boze–Ajnštajnova kondenzacija, a sama materija se tada naziva Boze–Ajnštajnov kondenzat. Boze–Ajnštajnova kondenzacija sledi iz kvantno-mehaničkog tretmana statističke fizike. Drugim rečima, čestice idealnog gasa posmatramo kao kvantne objekte.

Istorijski gledano, sve je počelo tako što je Ajnštajna kontaktirao, tada poptuno nepoznati indijski fizičar *Satyendra Nath Bose*, sa idejom kvantomehaničke interpretacije gasa. Drugim rečima, Boze je smatrao da se Ajnštajnov prethodni rad, baš kao što je uveo Plankov rad u teoriju svetlosti, može proširiti na statističku mehaniku. Boze i Ajnštajn su pokazali zanimljivu činjenicu kvantnog sveta, a to je identičnost čestica, što ćemo ukratko ilustrovati u sledećem odeljku, kojim započinjemo kratku rekapitulaciju kvantne mehanike najavljenu na početku odeljka 4.

⁷ Ovde se misli na objašnjenje superprovodnosti kod klasičnih superprovodnika, $T_c \leq 40\text{ K}$

4.3.1. REKAPITULACIJA KVANTNE MEHANIKE

4.3.1.1. IDENTIČNOST ČESTICA

Kada govorimo o klasičnoj fizici, sve čestice sistema koji razmatramo se razlikuju, odnosno, kažemo da se mogu numerisati i opisati jednačinama kretanja. Sa druge strane, ukoliko se sistem sastoji od kvantnih čestica iste vrste govorimo o *sistemu identičnih čestica* i u ovom slučaju čestice se ne razlikuju, odnosno, kažemo da posmatrane čestice nemaju ni jednu unutrašnju osobinu po kojoj ih možemo razlikovati. Drugim rečima, ukoliko posmatramo sistem koji se sastoji od dve čestice, ne možemo reći prva se nalazi u stanju a , a druga se nalazi u stanju b , jer jednostavno ne znamo koja je koja. Ono što možemo reći jedino jeste, jedna čestica se nalazi u stanju a , a druga se nalazi u stanju b .

Postavlja se pitanje: kako kvantna mehanika „gleda“ na ovaj slučaj? Jednostavno, konstruiše se talasna funkcija koja je neutralna u odnosu na to koja čestica je u kom stanju. Postoje dva načina na koji možemo napisati neutralnu talasnu funkciju za sistem od dve čestice i to možemo zapisati na sledeći način:

$$\psi_{\pm}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = A[\psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) \pm \psi_b(\vec{r}_1)\psi_a(\vec{r}_2)] \quad (68)$$

Vidi se da sa ovakvim pristupom uvodimo dve vrste čestica, za jednu vrstu čestica važi znak – (to su fermioni), a za drugu znak + (to su bozoni). Pošto razmatramo sistem identičnih čestica, uzimimo na primer znak – dakle fermione, tada je zbog identičnosti čestica $\psi_a = \psi_b$ pa je krajnji rezultat za $\psi_-(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$, odnosno, za ovaj slučaj nema talasne funkcije, jednaka je nuli pa sledi zaključak da se dva fermiona ne mogu naći u istom kvantnom stanju. Ako isto razmatranje uzmemos za znak +, odnosno bozone, vidimo da bozona u proizvoljnom kvantnom stanju može biti proizvoljno mnogo.

Ilustracija suštinske razlike između bozona i fermiona je još lepša ako se koristi statistička fizika. Naime, bozoni se pokoravaju Boze–Ajnštajnovoj statistici koja je data izrazom

$$\langle n_B \rangle_k = \frac{1}{e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1} \quad (69)$$

dok se fermioni pokoravaju Ferrmi–Dirakovoj statistici koja je data izrazom:

$$\langle n_F \rangle_k = \frac{1}{e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1} \quad (70)$$

Navedeni izrazi nam daju srednju vrednost broja bozona, odnosno fermiona respektivno u posmatranom stanju k . U navedenim izrazima je $\beta = 1/k_B T$, ε_k je kinetička energija jedne čestice, dok je μ hemijski potencijal koji karakteriše izmenu čestica sa termostatom, pošto se razmatra veliki kanonički ansambl.

Posmatrajmo recimo izraz za bozone. Sastav je realna situacija da eksponent od e teži nuli, pa da zbog toga bude i $e^0 = 1$, odnosno da ceo imenoc bude jednak nuli. U tom slučaju imamo konačan broj kroz nula što nam daje beskonačnost, odnosno, srednji broj bozona u posmatranom stanju je beskonačan, što se poklapa sa početnim stavom da bozona u posmatranom stanju može biti proizvoljno mnogo.

Dalje razmotrimo ukratko sisteme identičnih čestica. Posmatrajmo N čestični sistem i sa $|\Psi(1, 2, \dots, N)\rangle$ označimo vektor stanja ovog sistema. Pošto posmatramo sistem identičnih čestica, bilo kakva permutacija čestica ne sme da utiče na rezultat merenja bilo koje observable. Drugim rečima, vektor stanja prilikom permutacije čestica ne sme da promeni svoj pravac, jedino može da promeni znak. Ovo ukazuje na činjenicu da vektor stanja poseduje neku vrstu simetrije u odnosu na permutacije čestica. Dalje definišemo operator $\hat{P}_{i,k}$ permutacije para čestica, zato što se proizvoljna permutacija između čestica može ostvariti nizom uzastopnih permutacija između parova čestica. Ovaj operator⁸ menja mesto dvema česticama:

$$\hat{P}_{i,k} = |\Psi(1, \dots, i, \dots, k, \dots, N)\rangle = |\Psi(1, \dots, k, \dots, i, \dots, N)\rangle. \quad (71)$$

⁸ Negde u literaturi se naziva i *operator transpozicije*

Ukoliko permutacija bilo koje dve čestice ne menja vektor stanja, za taj vektor kažemo da je simetričan. Ukoliko permutacija bilo koje dve čestice menja samo znak vektora stanja, onda za taj vektor kažemo da je antisimetričan.

S obzirom na vrste simetrije opet sledi podela čestica na bozone i fermione. U kvantnoj teoriji se pokazuje da vektori stanja kojima opisujemo sistem identičnih bozona moraju biti simetrični, dok vektori kojima opisujemo sistem identičnih fermiona moraju biti antisimetrični.

4.3.1.2. KVANTNI IDEALNI GAS

Boze–Ajnštajnova kondenzacija je fenomen koji se javlja kod sistema identičnih bozona, a kako su bozoni naravno kvantne čestice potrebno je dakle razmotriti ponašanje bozonskog idealnog gasa. Međutim, pre nego što predemo na BE kondenzaciju, potrebno je razmotriti svojstveni problem slobodne čestice jer ćemo tako zaključiti na koji način ćemo preći sa sumiranja na integraljenje, zašto to smemo da uradimo i zašto nam to u stvari treba.

4.3.1.3. SVOJSTVENI PROBLEM SLOBODNE ČESTICE

Najpraktičnije je posmatrati oblast zapremine V , za koju se zbog jednostavnosti uzima da je kocka dužine ividce L , u kojoj se nalazi slobodna čestica. Pošto je čestica slobodna, u hamiltonijanu nema dela koji opisuje potencijal, pa se on samo svodi na kinetičku energiju:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (72)$$

a Šredingerova jednačina u koordinatnoj reprezentaciji je oblika:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi(x, y, z) = \varepsilon \Psi(x, y, z) \quad (73)$$

Dalje, talasnu funkciju pišemo u obliku $\Psi(x, y, z) = \psi(x)\psi(y)\psi(z)$, zamenjujemo u početni problem i nakon niza koraka, koji su poznati još iz kurseva matematičke fizike i atomske fizike, a koje ćemo zbog jednostavnosti ovde preskočiti, dobijamo ukupno rešenje koje je oblika:

$$\Psi_{n_x, n_y, n_z} = \sqrt{\frac{8}{V}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right). \quad (74)$$

Za moguće vrednosti energije dobija se:

$$\epsilon_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2}{8mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2), \quad (75)$$

a za impuls čestice:

$$\vec{p} = \frac{\hbar n_x}{2L} \vec{e}_x + \frac{\hbar n_y}{2L} \vec{e}_y + \frac{\hbar n_z}{2L} \vec{e}_z. \quad (76)$$

Iz navedenog se dosta može zaključiti, od čega je najbitnije sledeće:

- stanje čestice je potpuno određeno skupom kvantnih brojeva n_x, n_y, n_z ,
- većem broju stanja može odgovarati ista vrednost energije, što znači da su energetski nivoi degenerisani i najvažnije za naše trenutne potrebe,
- razmak između susednih nivoa je veoma uzak pa se može smatrati da je spekter energije kontinualan i da može uzimati sve vrednosti od 0 do ∞ .

Upravo nam poslednji zaključak omogućuje sumiranje neke veličine po kvantnim stanjima, a kao opravdanje za razmatranje energetskog spektra kao kontinualnog možemo uzeti primer da je energetski interval između dve susedne vrednosti energije približno jednak $\Delta\epsilon \approx \hbar^2 / 8ml^2$. Ovaj izraz za kocku dužine ivice 1cm daje vrednost od $\Delta\epsilon \approx 10^{-32}$ J, što očigledno predstavlja nemerljivo malu vrednost.

Da bi prešli sa sumiranja na integraljenje odredićemo energetsku gustinu stanja prema relaciji:

$$\Omega(\varepsilon) = \frac{\partial \Gamma(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}. \quad (77)$$

Ovde, $\Gamma(\varepsilon)$ predstavlja ukupan broj kvantnih stanja čija je energija $\leq \varepsilon$ i računamo ga prema:

$$\Gamma(\varepsilon) = \sum_{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \leq \frac{8ml^2}{h^2}} 1. \quad (78)$$

Navedenu sumu možemo približno dobiti kao $1/8$ zapremine sfere poluprečnika

$$R = \sqrt{\frac{8ml^2}{h^2}} \text{ i prema tome sledi:}$$

$$\Gamma(\varepsilon) \approx \frac{1}{8} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{8mL^2}{h^2} \right)^{3/2} \pi \right] = \frac{4\pi V}{3h^3} (2m\varepsilon)^{3/2}, \quad (79)$$

a odavde se konačno može odrediti :

$$\Omega(\varepsilon) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon}. \quad (80)$$

Sada, sumiranje neke veličine $f(\varepsilon_{nx, ny, nz})$ po svim mogućim kvantnim stanjima zamenimo integracijom po celom energetskom prostoru i to na sledeći način:

$$\sum f(\varepsilon_{nx, ny, nz}) \rightarrow \int \Omega(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty f(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon. \quad (81)$$

Ako stanja indeksiramo impulsima \vec{p} iz dobijenog skupa umesto po kvantnim brojevima, tada sumiranje neke veličine $f(|p|)$ po svim mogućim vrednostima impulsa, možemo

zameniti integracijom po celom impulsnom prostoru. Ako imamo u vidu vezu $\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$, sumiranje prelazi u integraciju na sledeći način:

$$\sum_{\vec{p}} f(|\vec{p}|) \rightarrow \int_0^\infty g(p) f(p) dp = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty f(p) p^2 dp. \quad (82)$$

U poslednjoj relaciji smo u jednom trenutku uveli veličinu $g(p) = \frac{4\pi V}{h^3} p^2$ što predstavlja gustinu stanja u impulsnom prostoru, odnosno broj kvantnih stanja čiji intenziteti impulsa leže u intervalu p i $p + dp$.

4.3.2. BOZE–AJNŠTAJNOVA KONDENZACIJA

4.3.2.1. BOZE–AJNŠTAJNOVE FUNKCIJE

Do izraza koji ukazuje na fenomen Boze–Ajnštajnove kondenzacije možemo doći tako što najpre razmatramo veliki termodinamički potencijal, odnosno najpre hamiltonijan slobodnih bozonskih čestica⁹ koji dalje kombinujemo sa izrazom koji predstavlja BE statistiku itd. Pri ovom postupku naravno koristimo i prelaz sa sumiranja na integraljenje koji smo pokazali u prethodnom paragrafu. Cilj razmatranja jeste dobiti relaciju za kritičnu temperaturu T_C ispod koje se ovaj fenomen javlja.

Dosta elegantniji prilaz jeste da se najpre čisto matematički uvedu funkcije koje su poznate pod nazivom Boze–Ajnštajnove funkcije, pa zatim da se one povežu sa termodinamičkim jednačinama koje dobijamo u statističkoj fizici¹⁰, nakon čega dobijamo tzv. jednačine stanja idealnog bozonskog gasa koje dalje razmatramo u oblasti visokih i niskih temperatura pa konačno povezujemo Boze–Ajnštajnovu kondenzaciju sa T_C .

Boze–Ajnštajnove funkcije su funkcije sledećeg oblika:

⁹ U ovom hamiltonijanu naravno figuriše samo kinetička energija s obzirom da nema međusobne interakcije među česticama.

¹⁰ Ovde se najpre misli da se u Kramersovu jednačinu uvrsti izraz za potencijal

$$G_n^+(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx. \quad (83)$$

To su funkcije realne promenljive z gde je $0 \leq z \leq 1$. n predstavlja parametar koji je veći od nule za $0 \leq z \leq 1$, dok je n veće od 1 za $z = 1$, a $\Gamma(n)$ je gama funkcija definisana na sledeći način:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt. \quad (84)$$

Jedan od načina da izračunamo $G_n^+(z)$ jeste da deo podintegralne funkcije razvijemo u red po stepenima od z :¹¹

$$\frac{1}{z^{-1}e^x - 1} = z e^{-x} \frac{1}{1 - z e^{-x}} = z e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} (z e^{-x})^k = \sum_{k=1}^{\infty} (z e^{-x})^k. \quad (85)$$

Smenom dobijenog izraza u (83) dobijamo:

$$G_n^+(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=1}^{\infty} z^k \int_0^\infty x^{n-1} e^{-kx} dx. \quad (86)$$

Da bi u poslednjoj relaciji od integrala dobili gama funkciju koja će se poništiti sa već postojećom gama funkcijom u početnom izrazu, uvodimo smenu $kx = t \rightarrow kdx = dt$ pa dobijamo:

$$G_n^+(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \Gamma(n). \quad (87)$$

Nakon skraćivanja gama funkcija, dobijamo konačno za Boze–Ajnštajnovu funkciju:

$$G_n^+(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} = z + \frac{z^2}{2^n} + \frac{z^3}{3^n} + \dots \quad (88)$$

¹¹ Razvoj u red po stepenima od z možemo da uradimo samo za male vrednosti parametra z gde smo iskoristili sumu geometrijskog reda

Sada se pozivamo na Rimanove funkcije koje su oblika:

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots \quad (89)$$

Poređenjem Rimanovih funkcija sa Boze–Ajnšatjnovim zaključujemo da se Boze–Ajnštajnove funkcije svode na Rimanove kada je $z=1$.

4.3.2.2. JEDNAČINE STANJA IDEALNOG BOZONSKOG GASA

Sledeći zadatak je dobijanje termodinamičkih veličina idealnog bozonskog gasa i njihovo povezivanje sa Boze–Ajnštajnovim funkcijama, odnosno formulisanje jednačina stanja idealnog bozonskog gasa preko Boze–Ajnštajnovih funkcija. U te svrhe koristimo Kramersovu relaciju $\Omega = -PV$ koju dobijamo statističkim razmatranjem velikog kanoničkog ansambla. Za sistem identičnih bozona dobija se da je veliki termodinamički potencijal:

$$\Omega_{BE} = kT \sum \ln(1 - e^{-\beta(\epsilon_f - \mu)}). \quad (90)$$

Kada uvrstimo veliki termodinamički potencijal u Kramersovu jednačinu dobijamo:

$$PV = -kT \sum_{\vec{p}} \ln \left[1 - e^{-\beta \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right)} \right]. \quad (91)$$

Ovde treba naglasiti da kod sistema slobodnih bozona sa spinom $s=0$ ulogu kvantnog broja igra impuls čestice \vec{p} . Impulsu čestice naravno pripada energija $\epsilon_p = p^2/2m$. Sada se pozivamo na izraz za Boze–Ajnštajnovu statistiku, koju možemo napisati u obliku:

$$N = \sum_{\vec{p}} \langle n_{\vec{p}} \rangle = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{e^{\beta \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right)} - 1}. \quad (92)$$

Posmatrajmo sada relaciju koju smo dobili kombinacijom Kramersovog izraza i izraza za veliki termodinamički potencijal, dakle izraz (91), i pređimo sa sumiranja po impulsima na integraciju u impulsnom prostoru, prema ranije utvrđenom prelazu:

$$PV = -kT \ln(1 - e^{\beta\mu}) - \frac{kTV}{h^3} \int_0^\infty \ln \left[1 - e^{-\beta \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right)} \right] 4\pi p^2 dp. \quad (93)$$

Šta nije u redu sa ovim izrazom, odnosno zašto se „odjednom“ pojavljuju dva člana kada to nije predviđeno ranije utvrđenim prelazom sa sumiranja na integraciju? Postojanje dva člana je posledica sledećeg razmatranja: u slučaju kada hemijski potencijal teži nuli, $\mu \rightarrow 0$, članovi koji odgovaraju impulsu za $\vec{p} = 0$ u sumi postižu jako velike vrednosti. S druge strane, $\vec{p} = 0$ integral je jednak nuli, odnosno ne daje nikakav „doprinos“. Zato je potrebno ove članove prikazati u vidu odvojenih sabiraka kao i što je učinjeno.

Isto razmatranje važi i za ukupan broj čestica pa se dobija:

$$N = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} + \frac{V}{h^3} \int_0^\infty \frac{1}{e^{-\beta \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right)} - 1} 4\pi p^2 dp. \quad (94)$$

Za dalje razmatranje uvedimo oznaku *fugacitet* na sledeći način: $z = e^{\beta\mu}$ i posmatrajmo izraz za ukupan broj čestica. Prvi član ovog izraza odgovara broju čestica u stanju sa nultim impulsem i obeležimo ga sa:

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} = \frac{1}{z^{-1} - 1}. \quad (95)$$

Jasno se uočava da se ovaj član na visokim temperaturama može zanemariti, dok na nižim temperaturama, odnosno kada z postaje blisko jedinici, ovaj član postaje dovoljno veliki da se mora uzimati u obzir.

Posmatrajmo sada još i izraz koji smo dobili na osnovu Kramersove relacije, odnosno analizirajmo pri kojim uslovima možemo zanemariti prvi član:

$$-kT \ln(1-z) = kT \ln(1+N_0) \sim \ln N_0 \leq \ln N. \quad (96)$$

Dakle, bez obzira na temperaturu sistema, prvi član možemo zanemariti.

Ako uvedemo smenu $x = \beta p^2 / 2m$, prethodne jednačine možemo dobiti u obliku:

$$\frac{P}{kT} = -\frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \ln(1 - ze^{-x}) dx, \quad (97)$$

$$\frac{N - N_0}{V} = \frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}}{z^{-1}e^x - 1} dx \right). \quad (98)$$

Sada se pozivamo na ranije uvedene Boze–Ajnštajnove funkcije koje smo uveli i dobijamo jednačine stanja idealnog bozonskog gasa:

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda_T^3} G_{\frac{5}{2}}^+(z), \quad (99)$$

$$\frac{N - N_0}{V} = \frac{1}{\lambda_T^3} G_{\frac{3}{2}}^+(z), \quad (100)$$

gde smo λ_T , termalnu talasnu dužinu, uveli kao $\lambda_T = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi mkT}}$.

4.3.2.3. IDEALNI BOZONSKI GAS NA NISKIM TEMPERATURAMA

Sada kada smo uveli jednačinu stanja idealnog bozonskog gasa možemo izvršiti analizu na niskim temperaturama. Kao što je već naglašeno, na niskim temperaturama N_0 , član koji predstavlja broj bozona u stanju sa impulsom $\vec{p} = 0$, postaje dovoljno velik da se mora uzeti u proračune. Označimo sa N' broj bozona koji se nalaze u stanjima sa $\vec{p} \neq 0$ i neka je N ukupan broj bozona:

$$N' = N - N_0. \quad (101)$$

Sa ovom oznakom, jednačina stanja, izraz (100), postaje:

$$N' = \frac{V}{\lambda_T^3} G_{\frac{3}{2}}^+(z). \quad (102)$$

Iz poslednje jednačine vidimo da N' zavisi od z , za koje smo ranije rekli da može da uzima vrednosti između 0 i 1. Kada je $z=1$ funkcija $G_{3/2}^+$ dostiže svoj maksimum i prelazi u Rimanovu funkciju $\zeta(3/2)$, tako da tada i N' dostiže svoj maksimum, odnosno, *maksimalan broj bozona koji mogu biti u ekscitovanim stanjima iznosi:*

$$N'_{\max} = N'(z=1) = \frac{V}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right). \quad (103)$$

Sada nas interesuje raspodela čestica po kvantnim stanjima u zavisnosti od temperature. Iz poslednje relacije vidimo da N' raste sa porastom temperature na osnovu čega zaključujemo da će na temperaturama koje su iznad neke kritične temperature, T_C , N'_{\max} biti veće od ukupnog broja čestica u sistemu, odnosno, iznad T_C praktično svi bozoni se nalaze u ekscitovanim stanjima.

Ispod T_C maksimalan broj ekscitovanih čestica postaje manji od ukupnog broja čestica, odnosno $N'_{\max}(T) < N$ i tada je samo deo bozona ekscitovan, a preostali deo bozona će morati da pređe u osnovno stanje, što je potpuno u saglasnosti sa fundamentalnom osobinom bozona – da mogu opstajati u proizvoljnem broju u jednom kvantnom stanju, što smo pokazali i kod izraza koji predstavlja Boze – Ajnštajnovu statistiku.

Na osnovu svega, uslov za pojavu BE kondenzacije možemo formulisati na sledeći način:

$$\frac{V}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) < N. \quad (104)$$

Odavde kritičnu temperaturu dobijamo kao:

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi mk} \left(\frac{N}{V} \frac{1}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (105)$$

4.3.3. SUPERFLUIDNOST

Formiranju čuvene BCS teorije prethodilo je jedno vrlo važno otkriće koje je u stvari ukazalo na mehanizam supeprovodnosti – otkriće superfluidnosti tečnog helijuma. Pod superfluidnošću podrazumevamo svojstvo neke supstance da se u tankim kapilarama kreće bez trenja. Ovaj analogni fenomen superprovodnosti otkrio je Kapica 1935. godine, a samu teoriju superfluidnosti koja se nekad naziva i mikroteorija superfluidnosti, dao je Bogoliubov. Razmatranjem prostiranja superfluidne tečnosti možemo dobiti uslov superfluidnosti na sledeći način.

Posmatrajmo najpre kinetičku energiju tečnosti koja se kreće kroz neku usku kapilaru:

$$E = \frac{Q^2}{2M}, \quad Q = MV. \quad (106)$$

Sada uzmimo da pri kretanju tečnosti kroz kapilaru dolazi do interakcije između tečnosti i zida posude i da na taj načina dolazi do ekscitovanja čestica tečnosti. Posmatrajmo slučaj kada je došlo do formiranja samo jedne elementarne ekscitacije čiji je impuls p , a energija ε_p . Sada je kinetička energija tečnosti data kao:

$$E' = \frac{(Q+p)^2}{2M} + \varepsilon_p = \frac{Q^2 + 2Qp + p^2}{2M} + \varepsilon_p = \frac{Q^2}{2M} + pV + \frac{p^2}{2M} + \varepsilon_p. \quad (107)$$

Prvi član očigledno predstavlja energiju tečnosti pre elementarne ekscitacije, drugi smo dobili zamenom $Q = MV$, dok se treći član može zanemariti jer je impuls ekscitovane

čestice jako mali. Sada uzimamo u obzir da se kod kretanja sa trenjem kinetička energija tečnosti smanjuje, pa sledi uslov za kretanje sa trenjem $E' < E$:

$$\frac{Q^2}{2M} + pV + \varepsilon_p < \frac{Q^2}{2M}. \quad (108)$$

Nasuprot ovome, uslov za superfluidno kretanje dobijamo promenom znaka nejednakosti, još kada se uzme u obzir i da će uslov biti najstrožiji kada su impuls i brzina usmereni suprotno sledi:

$$\min \frac{\varepsilon_p}{p} > 0. \quad (109)$$

Ono što je bilo zanimljivo kod superfluidnosti jeste da je osobinu superfluidnosti imao samo izotop He^4 čiji je ukupan spin jednak nuli dok izotop He^3 , čiji je ukupan spin $1/2$ nije ispoljavao ovaj fenomen. Ako razmotrimo pojavu viskoznosti kao interakciju čestica sa zidovima suda i ako imamo u vidu da na električnu otpornost gledamo kao rasejavanje elektrona na jonima kristalne rešetke odmah dolazimo do zaključka da na superprovodnost možemo da gledamo kao da pri transferu elektrona nema trenja pri rasejavanju na jonima kristalne rešetke. Dakle, za superprovodljivost možemo reći da je u stvari superfluidni transfer nanelektrisanja kroz metalnu rešetku.

4.3.4. ELEMENTI BCS TEORIJE

Odmah nakon otkrića superfluidnosti i činjenice da se ista javlja u He^4 , a odsustvuje iz He^3 došlo se na ideju da je superprovodnost uslovljena svojstvom čestica da se skupljaju u proizvoljnem broju na jednom energetskom nivou, odnosno da objašnjenje za superprovodnost treba tražiti u efektima Boze–Ajnštajbove kondenzacije. Postojao je naravno samo jedan mali problem, a to je pitanje kako u sistemu elektrona može nastupiti fenomen koji se javlja samo kod bozona. Zatim se došlo na ideju da se ne kondenzuju elektroni nego parovi elektrona suprotnih spinova, odnosno dva fermiona se sparaju čineći bozon. Samo sparivanje elektrona u parove naziva se Kuperovim fenomenom jer je Kuper prvi analizirao energiju veze ovakvog para i ostale njegove osobine.

Kuperovim fenomenom je objašnjeno kako sistem fermiona u stvari pod određenim uslovima prelazi u sistem bozona, ali dalje je trebalo rasvetliti mehanizam sparivanja elektrona, odnosno, šta je to što nagoni elektrone da se sparaju u bozone. Naravno, činjenica da između elektrona vlada odbojna kulonovska sila samo je više zbumjivala fizičare.

Problem mehanizma sparivanja elektrona rešio je Frelih. Naime, Frelih je posmatrao elektron-fonon interakciju iz jednog vrlo prostog razloga: u normalnoj fazi, dakle $T > T_C$, upravo je elektron-fonon interakcija uzročnik električne otpornosti. Frelih je dalje odlično primetio da su metali utoliko bolji superprovodnici ukoliko im je specifična otpornost u normalnoj fazi veći. Tada je došao na ideju da je na neki način upravo elektron-fononska interakcija odgovorna za sparivanje elektrona.

Matematički gledano, Frelih je izvršio transformaciju hamiltonijana elektron-fononske interakcije u efektivnu elektron-elektron interakciju. Drugim rečima, dokazao je da je elektron-fononska interakcija odgovorna za sparivanje elektrona. Frelihovo razmatranje se nekada naziva i Frelihova transformacija.

4.3.5. HAMILTONIJAN SUPERPROVODNOG SISTEMA; ELEKTRON-FONONSKA INTERAKCIJA

Hamiltonijan superprovodnog sistema, uzimajući u obzir i elektron-fononsku interakciju, možemo napisati u sledećem obliku:

$$H = H_e + H_p + H_{e-p}. \quad (110)$$

Ovde $H_e = \sum_{\vec{k}} X_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}$, predstavlja hamiltonijan elektronskog podsistema u impulsnom

prostoru. $X_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_F$ predstavlja energiju elektrona obračunatu u odnosu na

Fermijev nivo koji je dat relacijom: $E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$. Naravno, u hamiltonijanu elektronskog

podsistema figurišu operatori kreacije i anihilacije elektrona u stanju opisanom talasnim vektorom \vec{k} .

Drugi član je dat kao $H_p = \sum Y_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}}$ i predstavlja hamiltonijan fononskog podsistema. $Y_{\vec{k}} = \hbar v_s k$ predstavlja energiju fonona gde je $v_s \approx 5 \cdot 10^3$ m/s brzina zvuka u metalu. Kao i kod elektronskog podsistema i ovde se javljaju operatori kreacije i anihilacije koji se ovog puta odnose na fonone.

Poslednji član, i za ovu priču najznačajniji je oblika:

$$H_{e-p} = N^{-\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} F_{\vec{k}\vec{q}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}} (b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+). \quad (111)$$

i predstavlja hamiltonijan interakcije elektronskog i fononskog podsistema. Veličina $F_{\vec{k}\vec{q}}$ koja figuriše u poslednjoj relaciji karakteriše kolektivne oscilacije jona, tzv. transverzalne i longitudinalne polarizacione grane akustičkih fonona. Drugim rečima, ova veličina opisuje uticaj vibracija kristalne rešetke na elektronski transport. Ovoj interakciji, za metale na sobnim temperaturama, samo longitudinalni zvučni talasi daju doprinos.

Dalje treba elektron-fononsku interakciju zameniti ekvivalentnom elektron-elektronskom interakcijom koja bi se u stvari zasnivala virtuelnom izmenom fonona. Ovo postižemo unitarnom transformacijom hamiltonijana, a ceo postupak se, kao što je već navedeno, naziva Frelihova transformacija.

$$H_{eq} = e^{-S} H e^S = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} [S, [S, \dots, [S, H]] \dots]_{\nu-\text{puta}}. \quad (112)$$

Ovde je S antiermitski operator:

$$S = S_1 - S_1^+, \quad S_1 = \sum \Lambda_{\vec{k}\vec{q}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}} b_{\vec{q}}. \quad (113)$$

Kod izraza S_1 figuriše funkcija $\Lambda_{\vec{k}\vec{q}}$ koja služi u stvari da, svojim povoljnim izborom, iz ekvivalentnog hamiltonijana eliminiše deo linearan po fononskim operatorima. Povoljan je sledeći izbor:

$$\Lambda_{\vec{k}\vec{q}} = F_{\vec{q}} \left[\sqrt{N} (X_{\vec{k}-\vec{q}} - X_{\vec{k}} + Y_{\vec{q}}) \right]^{-1}. \quad (114)$$

Ako posmatramo samo spontanu emisiju fonona i izdvojimo samo onaj deo koji odgovara procesima između elektrona sa suprotnim impulsima (jer samo oni mogu da dovedu do sparivanja elektrona i do Boze–Ajnštajnove kondenzacije tih parova), dolazi se do sledećeg efektivnog hamiltonijana:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} X_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}\vec{q}} \frac{\left| F_{\vec{k}-\vec{q}} \right|^2 Y_{\vec{k}+\vec{q}}}{(X_{\vec{k}} - X_{\vec{q}})^2 - Y_{\vec{k}+\vec{q}}^2} a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{q}} a_{-\vec{k}}^+ a_{\vec{q}}. \quad (115)$$

Kod Frelihovog modela, izraz za konstantu elektron-fononske interakcije se zamenjuje nekom srednjom kvadratnom vrednošću Ψ na sledeći način:

$$\left| F_{\vec{k}-\vec{q}} \right|^2 = \Psi^2 \frac{\hbar}{2 M v_s q}. \quad (116)$$

Dakle, rezultat Frelihove transformacije je zamena elektron-fononske interakcije elektron-elektronskom interakcijom i sledeće što vidimo analizom poslednjeg izraza jeste da je međuelektronska interakcija u celini negativna, odnosno interakcija je privlačna. Na ovaj način je u stvari pokazano kako može doći do sparivanja elektrona u tzv. Kuperove parove, što i jeste objašnjenje mehanizma klasičnih superprovodnika.

Rezultate Frelihove transformacije su iskoristili Bardin, Kuper i Šrifer i došli do sledećeg modelnog hamiltonijana:

$$H_{BCS} = \sum_{\vec{k}} X_{\vec{k}} \left[a_{\vec{k}, \frac{1}{2}}^+ a_{\vec{k}, \frac{1}{2}} + a_{-\vec{k}, -\frac{1}{2}}^+ a_{-\vec{k}, -\frac{1}{2}} \right] - \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} W_{\vec{k}\vec{q}} a_{\vec{k}, \frac{1}{2}}^+ a_{-\vec{k}, -\frac{1}{2}}^+ a_{-\vec{q}, -\frac{1}{2}} a_{\vec{q}, \frac{1}{2}}. \quad (117)$$

pri čemu $W_{\vec{k}\vec{q}}$ egzistira samo u uskoj oblasti oko Fermi-sfere. Dalje primenjujemo mikrokanoničku transformaciju Bogoljubova pa hamiltonijan prelazi u:

$$H_{BCS} = \sum_{\vec{k}} \left(X_{\vec{k}} - \frac{2X_{\vec{k}}^2 - \Delta^2}{2\varepsilon_{\vec{k}}} \right) + \sum_{\vec{k}} \sum_{\nu=1} \varepsilon_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^+ (\nu) \alpha_{\vec{k}} (\nu). \quad (118)$$

Na osnovu izloženog, energije elementarnih ekscitacija su definisane kao:

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \left(X_{\vec{k}}^2 - \Delta^2 \right)^{1/2}. \quad (119)$$

Sada ćemo se prisetiti izraza, tačnije uslova, superfluidnosti i primeniti ga na poslednji izraz koji smo dobili. Dobijamo:

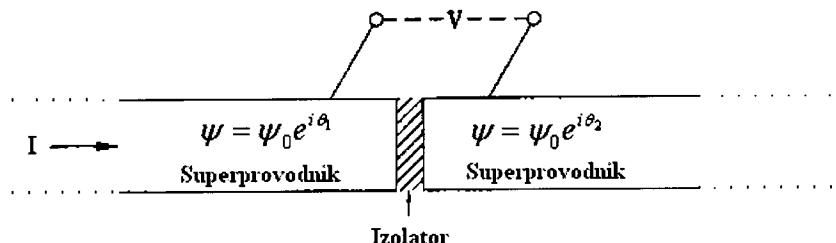
$$\min v_\phi = \sqrt{2} \frac{p_F}{m}; \quad p_F = \hbar k_F. \quad (120)$$

Pošto je uslov superfluidnosti primjenjen na energije elementarnih ekscitacija pozitivan zaključujemo da operatori α^+ kreiraju elementarne ekscitacije koje ispunjavaju neophodan uslov za superfluidni transfer elektrina kroz metal.

Ovakvo razmatranje, BCS teorija, daje rezultat za krajnju kritičnu temperaturu u vrednosti od 30 K, što je odličan rezultat za klasične superprovodnike koji su u vreme nastanka ove teorije bili jedini poznati.

5. DŽOZEFSONOV EFEKAT I SQUID UREĐAJI

Džozefsonov¹² efekat je svakako najeksploativniji efekat superprovodnosti. On se koristi za izradu najosetljivijih detektora ikada napravljenih – SQUID uređaja. U najkraćim crtama, Džozefsonov efekat predstavlja pojavu tunelovanja para elektrona kroz tanku izolatorsku barijeru, najčešće oksid, koja razdvaja dva superprovodnika (slika 7).



Slika 7. Džozefsonov spoj

Ovaj fenomen je predvideo 1962. godine, tada 22 godišnji, Brajan Džozefson i dao relaciju:

$$I_s = I_c \sin \Delta\phi, \quad (121)$$

gde je I_s jačina superstruje koja prolazi kroz barijeru, I_c je Džozefsonova kritična jačina električne struje, dok je $\Delta\phi$ fazna razlika. Takođe je i predvideo da će se, u slučaju da se primeni konačni jednosmerni potencijal, pojaviti naizmenična struja frekvencije $\omega = 2eV/\hbar$.

Postoje neke pretpostavke da je Džozefson načinio svoje prve proračune (1962.) kao deo domaćeg zadatka koji je zadao Fil Anderson¹³ koji je u periodu 1961-1962 održavao predavanja na Kembriđu koja su se odnosila na tunelovanje u superprovodnicima.

Ideji, da superstruja može da „savlada“ barijeru kojom su dva superprovodnika razdvojena, isprva se suprostavio niko drugi do Džon Bardin, jedan od tvoraca BCS

¹² Brian D. Josephson

¹³ Philip Warren Anderson

teorije superprovodnosti. On je smatrao da Kuperovi parovi ne mogu opstajati u oblasti izolatorske barijere.

Za situaciju u kojoj su dva superprovodnika razdvojena tankim izolatorom možemo da napišemo, već izvedenu u prethodnom odeljku, Ginzburg–Landauovu jednačinu (62):

$$\xi^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + \psi - \psi^3 = 0,$$

gde je $\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m\alpha}$ ¹⁴, a $f(x) \equiv \Psi(x)/\Psi_\infty$. Prepostavimo da je $L \ll \xi$, tako da su

devijacije Ψ koje dolaze od prvog superprovodnika i obrnuto. Kao što smo već rekli, promena parametra uređenosti se dešava duž L , a pošto smo prepostavili da je $L \ll \xi$, prvi član je oblika $O((\xi/L)^2) \gg \psi - \psi^3$. Sledi da u stvari treba da rešimo Laplasovu jednačinu za ψ , $\left(\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \right)$, sa uslovima $f(0) = 1$, $f(L) = e^{i\Delta\Phi}$. Rešenje jednačine će biti:

$$\psi = \left(1 - \frac{x}{L} \right) + \frac{x}{L} e^{i\Delta\Phi}. \quad (122)$$

Dobijeno rešenje možemo posmatrati kao da se sastoji od dva člana, prvi Ψ_1 , koji opisuje „uticanje“ s leva i drugi član Ψ_2 koji opisuje „uticanje“ s desna. Izraz za struju prema Ginzburg–Landauovoj teoriji će biti:

¹⁴ ξ se može interpretirati na dva načina 1) približna vrednost „veličine“ Kuperovog para ili 2) predstavlja meru pri kojoj se parametar uređenosti menja značajno.

$$\begin{aligned}
j &= \frac{e^* \hbar}{2m^* i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{e^{*^2}}{m^* c} \psi^* \psi \vec{A} = \\
&= \frac{e^* \hbar}{2m^* i} \psi_\infty^2 \left[\left(1 - \frac{x}{L} + \frac{x}{L} e^{-i\Delta\Phi} \right) \left(-\frac{1}{L} + \frac{1}{L} e^{i\Delta\Phi} \right) \right] \\
&= \frac{e^* \hbar \psi_\infty^2}{m^* L} \sin \Delta\phi,
\end{aligned} \tag{123}$$

Odakle sledi da je struja:

$$I = I_c \sin \Delta\phi, \tag{124}$$

odnosno da je kritična struja:

$$I_c = \frac{e^* \hbar \psi_\infty^2}{m^* L} S, \tag{125}$$

gde je S poprečni presek.

S obzirom da imamo situaciju od dva slabo mešana kvantnomehanička sistema, možemo napisati Šredingerove jednačine:

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} &= E_1 \Psi_1 + \alpha \Psi_2, \\
i \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} &= E_2 \Psi_2 + \alpha \Psi_1,
\end{aligned} \tag{126}$$

gde je $H_0^{(i)} \Psi_i = E_i \Psi_i$ i $E_1 = E_2 = E_0$ ako su superprovodnici identični. Uzimamo još da je $|\Psi_i|^2$ gustina parova u superprovodniku:

$$\Psi_i = \sqrt{n_i} e^{i\phi_i} \Rightarrow \dot{\Psi}_i = \frac{1}{2\sqrt{n_i}} \dot{n}_i e^{i\phi_i} + i\sqrt{n_i} \dot{\phi}_i e^{i\phi_i}. \tag{127}$$

Sada gornje jednačine možemo izraziti kao:

$$\frac{\dot{n}_1}{2\sqrt{n_1}} + i\sqrt{n_1}\dot{\phi}_1 = -iE_1\sqrt{n_1} - i\alpha\sqrt{n_2}e^{i(\phi_2-\phi_1)},$$

$$\frac{\dot{n}_2}{2\sqrt{n_2}} + i\sqrt{n_2}\dot{\phi}_2 = -iE_2\sqrt{n_2} - i\alpha\sqrt{n_1}e^{i(\phi_1-\phi_2)}.$$
(126)

Ako uzmemo samo realne delove i iskoristimo relaciju $\dot{n}_1 = -\dot{n}_2$ dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\frac{\dot{n}_1}{2\sqrt{n_1}} = \alpha\sqrt{n_2}\sin(\phi_2 - \phi_1) \quad i \quad \frac{\dot{n}_2}{2\sqrt{n_2}} = \alpha\sqrt{n_1}\sin(\phi_1 - \phi_2)$$

\Downarrow

$$\dot{n}_1 = 2\alpha\sqrt{n_1n_2}\sin(\phi_2 - \phi_1).$$
(127)

Ovde smo pretpostavili da imamo jedinični poprečni presek i dobijamo da je struja:

$$j = 2e\dot{n}_1.$$
(128)

Ako uzmemo samo imaginarne članove imamo sistem:

$$\sqrt{n_1}\dot{\phi}_1 = -E_1\sqrt{n_1} - \alpha\sqrt{n_2}\cos(\phi_2 - \phi_1),$$
(129)

$$\sqrt{n_2}\dot{\phi}_2 = -E_2\sqrt{n_2} - \alpha\sqrt{n_1}\cos(\phi_1 - \phi_2).$$

Prepostavljajući da je $n_1 \approx n_2$, što odgovara slučaju kada spajamo dva identična superprovodnika, dobijamo:

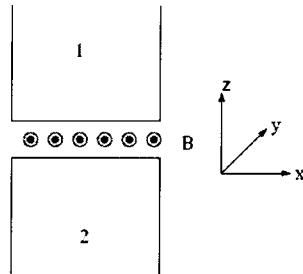
$$\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2 = E_2 - E_1 = 2e(V_1 - V_2),$$
(130)

gde je za drugu jednakost iskorišćena činjenica da se potencijal između superprovodnika menja u energijama parova koja iznosi $-2eV$.

ZAKLJUČAK: Konačna razlika potencijala dovodi do fazne razlike $\Delta\phi$ što znači da dolazi do formiranja naizmenične struje koja je data izrazom (127).

5.1. MAGNETNO POLJE I DŽOZEFSONOV EFEKAT

Posmatrajmo sada fluks kroz spoj gde je geometrija magnetnog polja data na slici 8.



Slika 8. Geometrija polja u razmatranom slučaju

GL jednačine sadrže vektorski potencijal \vec{A} za koji znamo da je invarijantan u odnosu na sledeću transformaciju:

$$\vec{A} = \vec{A}' + \nabla \varphi, \quad (131)$$

gde je $\varphi(r)$ skalarna funkcija. Ovakva transformacija ne menja magnetno polje jer je:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \vec{A}', \quad (132)$$

zato što je:

$$\text{rot } \nabla \varphi = 0. \quad (133)$$

Dakle, faza talasne funkcije ψ treba da se menja na sledeći način:

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{2e}{c} \int d\vec{S} \cdot \vec{A}. \quad (134)$$

Džozefsonove jednačine sada postaju:

$$j = 4e\alpha \sqrt{n_1 n_2} \sin \left(\Delta\phi - \frac{2e}{c} \int d\vec{S} \cdot \vec{A} \right), \quad (135)$$

$$2e(V_1 - V_2) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi_2 - \phi_1 - \frac{2e}{c} \int d\vec{S} \cdot \vec{A} \right). \quad (136)$$

Sa slike 8 vidimo da je:

$$\int d\vec{S} \cdot \vec{A} = \int^l dz (-Bx) = -Bx l, \quad (137)$$

pa dobijamo struju:

$$\begin{aligned} J &= \int dx j(x) = \int dx j_c \sin\left(\Delta\Phi - \frac{2e}{c} B x l\right) = \\ &= \frac{L j_c}{2\pi\Phi_0} \left[\cos\Delta\Phi - \cos\left(\Delta\phi + \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \right]. \end{aligned} \quad (138)$$

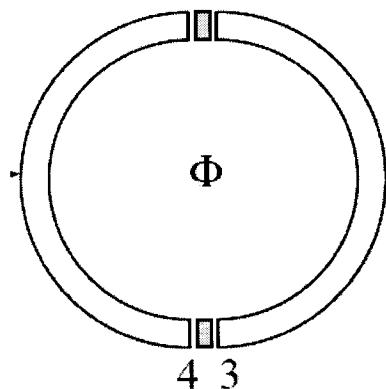
Postavlja se pitanje: koliko iznosi maksimalna jačina struje koja je moguća kroz spoj za sve moguće vrednosti $\Delta\phi$? Odgovor na ovo pitanje dobijamo izračunavanjem

$$\frac{dJ}{d\Delta\Phi} = 0, \text{ što nas dovodi do relacije:}$$

$$\operatorname{tg} \Delta\Phi = \operatorname{ctg} (\pi\Phi/\Phi_0). \quad (139)$$

Zamenom poslednje relacije u izraz za jačinu struje dobijamo kritičnu jačinu struje:

$$J_c = L j_c \left| \frac{\sin(\pi\Phi/\Phi_0)}{\pi\Phi/\Phi_0} \right|. \quad (140)$$



Sada ćemo videti još i kako se menja struja sa promenom fluksa. Pretpostavimo da su Džozefsonovi spojevi realizovani kao na slici broj 9, ako zanemarimo otpornost i kapacitivnost i pretpostavimo da je unutar superprovodnika gustina mnogo veća od λ i s obzirom da je $v_s = 0$ imamo da je $\nabla\phi = 2\vec{A}/\Phi_0$. Fluks će tada biti:

Slika 9. Džozefsonov spoj

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \oint d\vec{s} \cdot \vec{A} = \int_1^2 ds \cdot A + \frac{\Phi_0}{2} \int_2^3 ds \cdot \nabla \phi + \int_3^4 ds \cdot \vec{A} + \frac{\Phi_0}{2} \int_4^1 ds \cdot \nabla \phi = \\
 &= \frac{\Phi_0}{2} (\phi_3 - \phi_2) + \frac{\Phi_0}{2} (\phi_1 - \phi_4) + \int_1^2 ds \cdot A + \int_3^4 ds \cdot A = \\
 &= \frac{\Phi_0}{2} (\phi_1 - \phi_2) + \int_1^2 d\vec{s} \cdot \vec{A} + \frac{\Phi_0}{2} (\phi_3 - \phi_4) + \int_3^4 d\vec{s} \cdot \vec{A} \\
 &\equiv -\gamma_{12} \quad \quad \quad \equiv -\gamma_{34}
 \end{aligned} \tag{141}$$

Sada će Džozefsonova struja kroz SQUID iznositi:

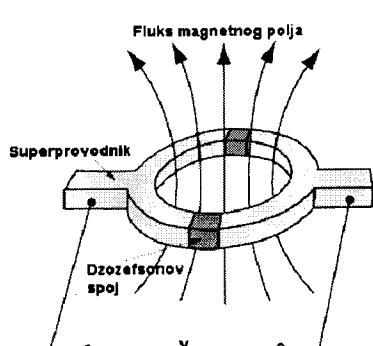
$$J = J_c (\sin \gamma_{12} + \sin \gamma_{34}) = J_c (\sin \gamma_{12} + \sin(\gamma_{12} + \Phi)). \tag{142}$$

Na osnovu poslednjeg izraza, vidimo da struja osciluje sa fluksom i upravo se ovaj mehanizam koristi u SQUID uređajima.

Ovim smo opisali Džozefsonov efekat i u sledećem odeljku ćemo se pozabaviti primenom Džozefsonovih spojeva u svrhe izrade SQUID uređaja.

6. SQUID

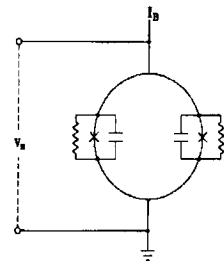
Pod SQUID uređajem podrazumevamo superprovodnike, najčešće kružnog oblika, na kojima su realizovani Džozefsonovi spojevi. Kao što smo pokazali u prethodnom odeljku, promena fluksa kroz kružni superprovodnik sa Džozefsonovim spojevima dovodi do promene razlike potencijala koju merimo na izvodima. Naravno broj realizovanih Džozefsonovih spojeva može da bude različit, u zavisnosti od namene, pa je tako najjednostavnija podela SQUID uređaja na rf SQUID i dc SQUID. Rf SQUID uređaji imaju samo jedan Džozefsonov spoj, dok dc SQUID uređaji imaju dva ili više Džozefsonovih spojeva.



Slika 10. Promena fluksa kroz superprovodni prsten dovodi promene razlike potencijala na izvodima

Kao što se vidi, SQUID na slici 10 ima dva Džozefsonova spoja pa s toga spada u grupu dc SQUID uređaja. Spojevi su smešteni simetrično, jedan naspram drugog. Između izvoda se vezuje voltmeter kojim merimo razliku potencijala koja se pojavljuje sa promenom magnetnog fluksa kroz superprovodni prsten.

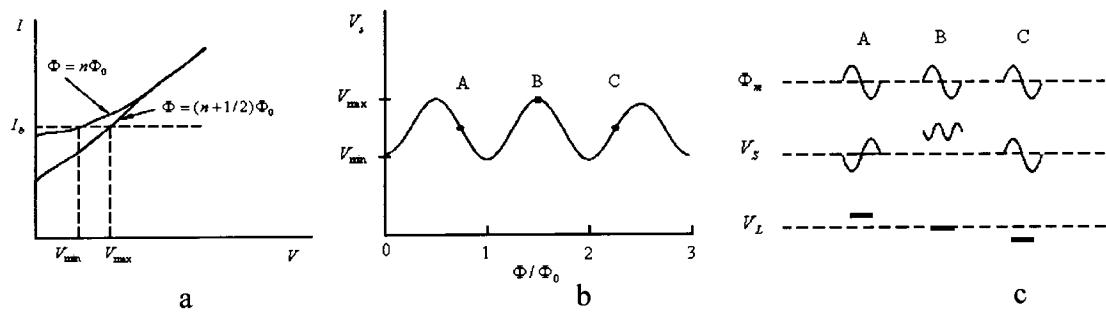
Da bi se napravio SQUID, superprovodnici sa obe strane moraju biti spojeni, bilo kolom sa drugim spojem ili sa kontinuiranim superprovodnim kolom. Ovako formirana kola sadrže fluks u celobrojnim vrednostima kvanta fluksa, $n\Phi_0$, gde je n bilo koji broj, a $\Phi_0 = 2.07 \times 10^{-15}$ Wb. Da bi se sprečio histerezis, SQUID uređaji sadrže i otpornik koji je paralelno vezan sa kolom spoja, kao što je ilustrovano na slici 11.



Slika 11. Regulacija histerezisa

6.1. DC SQUID UREĐAJI

Kod dc SQUID uređaja, promena u posmatranom fluksu dovodi do fazne razlike kod spojeva što ima za posledicu povećanje napona, odnosno povećanje razlike napona, spojeva koju mi možemo izmeriti. Karakteristične krive date su na slici 12.



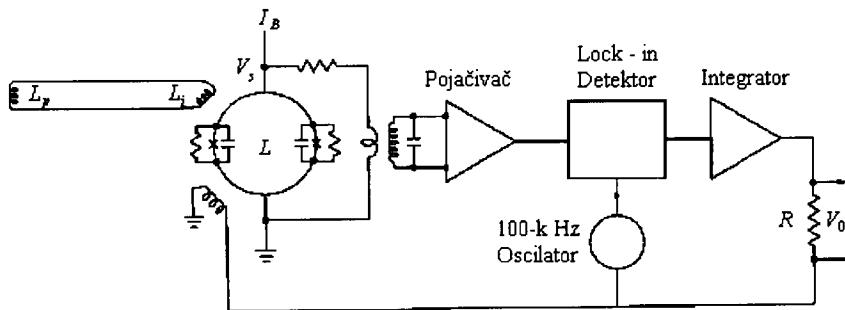
Slika 12. a) Grafik zavisnosti $I = I(V)$, b) Grafik zavisnosti $V = V(\Phi)$, c) Vrednosti signala u različitim tačkama

Kod slike 12.a imamo zavisnost $I = I(V)$. Ovde se gornja kriva odnosi na slučaj kada je $\Phi = n\Phi_0$, a donja kada je $\Phi = (n+1/2)\Phi_0$. Ukoliko se struja održava konstantnom, napon SQUID uređaja će varirati između dve vrednosti, V_{min} i V_{max} , a fluks će se nalaziti između $\Phi = n\Phi_0$ i $\Phi = (n+1/2)\Phi_0$.

Kod slike 12.b imamo zavisnost $V = V(\Phi)$ i vidimo da je to, grubo, sinusna funkcija, sa periodom Φ_0 .

Slika 12.c pokazuje da mala modulacija fluksa, $\Phi_m \sin(\omega t)$, gde je $\Phi_m \leq \Phi_0 / 2$, primenjena na SQUID dovodi do pojave različitih signala. Dakle, ako posmatramo delovanje SQUID-a u tri različite tačke, A, B i C, na krivi zavisnosti $V = V(\Phi)$ će se javiti tri različita naponska impulsa, V_s . Kod tačaka A i C, V_s je na istoj frekvenciji kao i Φ_m , dok je u tački B, V_s na frekvenciji 2ω . Dakle, SQUID se ponaša kao nelinearni pretvarač fluksa u napon.

Kako bi linearizovali krivu zavisnosti $V = V(\Phi)$, uvodimo *flux-locked* kolo (FLL, flux-locked loop, slika 13).



Slika 13. SQUID sa FLL kolom

FLL zaključava fluks tako što održava fluks sistema na $\Phi = (n/2)\Phi_0$ jednu od ekstremnih vrednosti sa krive zavisnosti $V = V(\Phi)$. Modulirani fluks, $\Phi_m \sin(\omega t)$, primenjuje se na SQUID, na frevenciji ω , pomoću oscilatora. Signal SQUID-a odvodi se na pojačivač povezan sa oscilatorom. Ako je dc fluks u SQUID-u celobrojna vrednost $(n/2)\Phi_0$, onda je izlazni podatak SQUID-a periodična funkcija sa periodom od 2ω i pojačivač će izbaciti podatak da je dc 0 V. Ako dc fluks odstupa od ekstrema za $\Delta\Phi$, onda će izlazna informacija SQUID-a sadržati komponentu frekvencije ω , kao što se vidi na slici 4c. Ovaj dc signal je u osnovi signal greške ; on je integrisan i poslat nazad u modulacioni kalem kao $\Delta\Phi$, vraćajući fluks SQUID-a na $\frac{n}{2}\Phi_0$. Izlazni podatak kola, V_0 , je napon proporcionalan struji povratne sprege, koja je kontrolisana od strane V_L . Korisnik snima V_0 i upoređuje ga sa magnetnim poljem kalibriranim pomoću poznatog polja. Potrebno je naglasiti da mnogi FFL oscilatori izbacuju kvadratno talasnu

modulaciju fluksa sa amplitudom $\Phi_0/4$ i frekvencijom ω . Sistem tada varira između

$$\Phi = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) \Phi_0 \text{ i } \Phi = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4} \right) \Phi_0, \text{ zadržavajući se na ekstremnoj vrednosti vrlo kratko.}$$

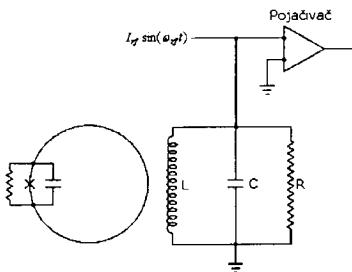
Ako se fluks menja suviše brzo SQUID skače sa jednog ekstrema na drugi i kaže se da je SQUID „lost lock“. Maksimalna promena fluksa u jedinici vremena pri kojoj sistem može da održava „zaključan“ fluks je oko $10^6 \Phi_0/s$.

6.2. RF SQUID UREĐAJI

Konceptualno, princip rada rf SQUID-a je veoma sličan kao kod dc SQUID-a. Rf SQUID je induktivno povezan sa oscilatornim kolom, kao što se vidi na slici 14.

Radna frekvencija rf SQUID uređaja je oko 20 – 30 MHz. Ukoliko je vrednost radio-frekventne struje u oscilatornom kolu, I_{rf} , konstantna, onda je napon kroz

kolo, V_{rf} , periodičan sa bilo kojim fluksom koji primenjujemo na SQUID. Ovo eksperimentalno potvrđuje histerezis fluksa u SQUID kolu. Kriva V_{rf} u zavisnosti od Φ se tada linearizuje pomoću FLL kola slično kao kod dc SQUID-a. U ovom slučaju, modulirani fluks se primenjuje kroz induktor u oscilatornom kolu.



Slika 14. Rf SQUID

6.3. DETEKTORSKI NAMOTAJI

Retko se SQUID uređaji sami izlažu magnetnom polju. Da bi se poboljšale njihove mogućnosti, samim uređajima su pridruženi višestepeni detektorski namotaji koji se induktivno povezuju. Detektorski namotaj induktivnosti L_p se izlaže okolini, dok su ulazni namotaj indukcije L_i i sam SQUID uređaj indukcije L , zaštićeni od okolnog polja metalnom kutijom napravljenom od superprovodnog niobijuma. Tipične vrednosti za induktivnost detektorskog i ulaznog namotaja su $1\mu H$, i za induktivnost samog SQUID-a 0.1 nH .

6.4. ŠUM SQUID-a

Pod šumom SQUID uređaja podrazumevamo veličine koje čije su izvedene jedinice sledeće: energetski (J/Hz), magnetni fluks ($\Phi_0/Hz^{1/2}$), polje ($fT/Hz^{1/2}$) i gradijent polja ($fT/(cm Hz^{1/2})$). Različiti SQUID sistemi mogu biti osetljivi na intenzitet energije, dok su sa druge strane slabo osetljivi na polje. Dobre odlike samih SQUID uređaja se opisuju veličinama šum fluksa i energetski šum, dok se dobre odlike sistema koji sadrže SQUID uređaje opisuju veličinama šum polja i šum gradijenta polja. U komercijalne svrhe se najčešće naručuju dc SQUID uređaji čije su vrednosti šuma energije $\varepsilon = 10^{-31} J/Hz$, šum magnetnog fluksa $S_\Phi^{1/2} \sim 10^{-6} \Phi_0/Hz^{1/2}$ i šum magnetnog polja $B_N = 10 fT/Hz^{1/2}$.

Približne formule za parametre šuma dc SQUID uređaja su sledeće:

$$S_\Phi = \frac{(4k_B T R_D^2 / R) \cdot \left[1 + \frac{1}{2} (I_0 / I)^2 \right]}{(R/L)^2}, \quad (143)$$

$$\varepsilon = \frac{S_\Phi}{2L}, \quad (144)$$

$$B_N = \frac{L_p + L_i}{\alpha \sqrt{L_i L}} \cdot \frac{S_\Phi^{1/2}}{A_e}, \quad (145)$$

gde je R_D dinamički otpor ($\partial V / \partial I$) spojeva, α je spojni koeficijent između ulaznog namotaja i SQUID-a. Kod navođenja specifikacija SQUID uređaja češće se navodi energetska osetljivost spoja, ε/α^2 , nego ε .

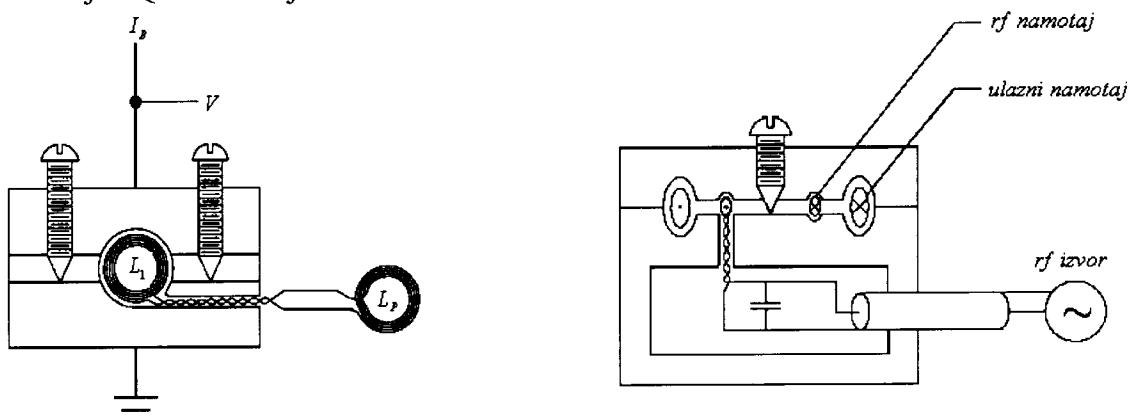
U slučaju rf SQUID uređaja, jednačina za šum je komplikovanija:

$$S_\Phi \approx \frac{(LI_0)^2}{\omega_{rf}} \left(\frac{2\pi k_B T}{I_0 \Phi_0} \right)^{4/3}. \quad (146)$$

6.5. IZRADA SQUID-a

6.5.1 KLASIČAN SQUID

Prvi SQUID uređaji su napravljeni od blokova niobijuma. Spojevi su pravljeni regulisanjem šarafa, dok je SQUID potopljen u tečnom helijumu, dok se ne ostvare željene $I - V$ karakteristike. S kraja 1960 ovim jednostavnim postupkom, dobijali su se uređaji sa rezolucijom fluksa od $\sim 10^{-3} \Phi_0 / Hz^{1/2}$. Na slici 15. date su šeme dve realizacije SQUID uređaja.



Slika 15. Realizacije SQUID uređaja sa regulacijom pomoću šarafa

Savremeni tankoslojni SQUID-ovi su dobijeni raspršivanjem tankih slojeva od niobijuma i modeliranjem fotolitografijom ili litografijom elektronskih zraka (Thin Film Deposition). U principu svaki superprovodni materijal se može iskoristiti za pravljenje SQUID uređaja, ali niobijumska tehnologija je neprikosnovena u oblasti uređaja sa niskom radnom temperaturom. Sam spoj može biti Nb/NbO_x/Pb ili Nb/Al₂O₃/Nb trosloj, dok otporni šantovi mogu biti tanki slojevi bakra, zlata ili bilo kojeg metala koji nije superprovodan do 4 K.

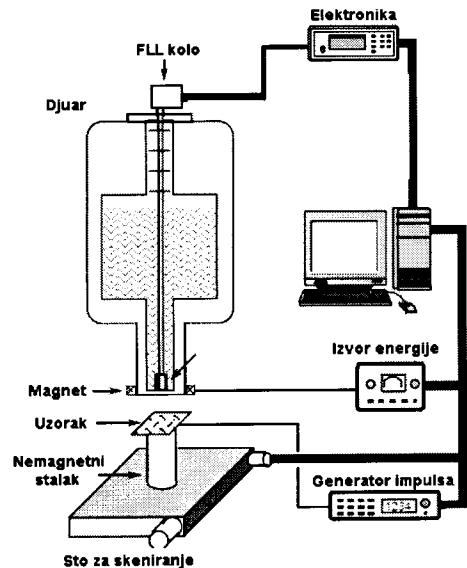
Dva najčešće navođena fizička parametra SQUID uređaja su redukovana induktivnost β i histerezis parametar β_C . Histerezis parametar se ponegde naziva i Stewart–McCumber-ov parametar. Dati su jednačinama, respektivno:

$$\beta = \frac{2I_0 L}{\Phi_0}, \quad \beta_C = \frac{2\pi I_0 R^2 C}{\Phi_0}, \quad (147)$$

gde su R i C otpornost i kapacitivnost otporno šantovanog Josephsonovog spoja. L je induktivnost SQUID kola. Navedeni parametri se često pojavljuju u analizi diferencijalnih „jednačina interpelacija“ koje upravljaju operacijama dc SQUID-a. Vidimo da ovi parametri nemaju jedinici i da je β funkcija fizičkih dimenzija kola i kritičnih struja spoja, dok je β_C funkcija samih otporno šantovanih spojeva. Numeričke simulacije SQUID uređaja sa različitim parametrima su pokazale da bi za minimalnu količinu energije šuma redukovana induktivnost trebala da dostigne jedinstvenu vrednost. Da bi se izbegao histerezis, Stewart–McCumber-ov parametar bi trebao da ima vrednost 1 ili manju. Ovakvi uslovi još uvek daju dosta slobode proizvođačima da projektuju SQUID uređaje za optimalno izvođenje. Detektorski namotaj morao bi da bude preprojektovan da odbija polja šuma i da prikuplja efikasno signal od interesa. Šum SQUID-a bi trebao uvek da bude manji od šuma pojačivača iskorišćenog u FLL kolima. Još uvek ne postoji tačan „recept“ za optimalne preformanse i zbog toga projekcija SQUID-a uvek predstavlja svojevrsan izazov.

6.5.2. SQUID SISTEMI

Pod SQUID sistemima podrazumevamo kompleksna tehnička rešenja koja koriste SQUID detektore i ostale komponente čineći tako jedinstven uređaj za detekciju. Kada se govori o primeni SQUID, najviše se misli na merenje magnetnih polja, kod kojih interesni fenomen formira magnetno polje ili izobličava primenjeno magnetno polje. SQUID magnetometri, gradiometri i susceptometri se mogu optimizovati za specifična merenja. Šema klasičnog SQUID uređaja dat je na slici 16.



Slika 16. Šema klasičnog SQUID uređaja

Sa slike 16 se vidi da su SQUID-ovi smešteni unutar malih magnetnih štitova (superprovodni niobijum). Superprovodni detektorski namotaji se nalaze na dnu. Elektronika koja kontroliše rad SQUID-a se nalazi na sobnoj temperaturi. Magnetni objekt se postavlja ispod instrumenta.

6.5.3. GRADIOMETRI

Već se ukazalo na problem okолног šuma i lako se dolazi do zaključka da je kod SQUID sistema potrebno nešto pomoću čega će se pozadinsko polje odbaciti. Ovo se može postići zaštitom celog eksperimenta, ili sa gradiometrima. Lokalni interesni izvor proizvodi mnogo veći gradijent polja u detektoru nego što to čini dalji izvor šuma, iako je apsolutno polje šuma veće. Tako, podešavanjem namotaja na osetljivost magnetnog polja na dva ili više mesta, moguće je uočiti razliku između udaljenih izvora. Ulagani kalem je serijski povezan sa dva ili više detektorska namotaja, koja se nalaze izvan niobijumske zaštite. Komercijalni magnetometri su opremljeni sa hermetički zatvorenim, zaštićenim SQUID-ovima i dva ulazna terminala.

6.5.4. ZAŠTITNE SOBE

U objektima kao što su bolnice i istraživačka postrojenja, otklanjanje šuma pomoću gradiometra je ponekad nedovoljno. U ovim slučajevima, najpouzdanija, ali i najskuplja, solucija za rešenje problema je rad u sobi zaštićenoj od magnetnih delovanja. Zatvoren oklop koji se sastoji od zavarenih aluminijumskih ploča može pružiti zaštitu od vrtložnih struja oko 100dB iznad 1Hz. Na niskim frekcencijama, strukture napravljene od visoko permeabilnih materijala, zahtevaju prisustvo mekih, feromagnetnih materijala kao što su „Mumetal“ i „Permalloy“.

6.5.5. DJUAROVE POSUDE

Mnoga merenja pomoću magnetometra mogu se poboljšati smanjenjem razmaka između detektorskog namotaja i okoline na sobnoj temperaturi. Upravo ova činjenica je dovela do razvoja Djuarovih sudova u kojem se superpovodne komponente u vakuumu, termički spojene sa helijumom. Za neuromagnetska merenja, Djuar-ove posude u obliku

kacige, sadrže velik broj SQUID kanala, dok se Djuarove posude u obliku cevi kod kojih se uzorak postavlja u centar detektorskog kalema, koriste za geomagnetna istraživanja.

Razvijanje Djuarovih posuda je presudno za konstrukciju sistema za skeniranje pomoću SQUID-a. Ovi SQUID sistemi su projektovani za merenje magnetnog polja vrlo bliskim površini kvazi-dvodimenzionalnih objekata. Rezolucija slika zavisi od veličine detektorskog namotaja i njegovim rastojanjem od izvora magnetnog polja. Sa SQUID sistemima sa visokom rezolucijom, u tkivu moguće je uočiti dva izvora magnetnog polja na razmaku od samo jednog milimetra. Neki SQUID sistemi se mogu postavljati i u kriogeničke sisteme, tako da je moguća rezolucija od $10\text{ }\mu\text{m}$ i bolja.

6.6. PRIMENE SQUID-a

6.6.1. MAGNETOENCEFALOGRAFIJA

Ljudski mozak se sastoje od oko 10^9 električno aktivnih neurona. Od kada se ustanovilo da SQUID magnetometri dovoljno osetljivi da mogu da registruju neuromagnetna polja ($10\text{--}100\text{ fT}$), mozak je postao centar biomagnetskih istraživanja. Merenje koje nazivamo magnetoencefalografija (MEG), omogućava informacije o istim fizičkim procesima kao i elektroencefalogram (EEG). Prednost MEG-a je u tome što magnetno polje, formirano od strane kortikalnih neurona, nije izobličeno kostima i tkivom koji se nalaze u blizini. S druge strane, mana MEG-a je cena. Jedna od prvih primena MEG-a je bila kod epilepsije. U istraživanjima se pokazalo da se pikovi između napada, nekad ne mogu detektovati električno nego samo magnetno. Magnetni signali su često doprinosili pronalasku izvora. Ova prva merenja su izvedena jednokanalnim magnetometrom i nisu bila u stanju opisati asinhronne događaje koji su se dešavali na više mesta u mozgu istovremeno. Odmah je postalo jasno da se pomoću MEG-a neće postići zavidniji rezultati dok se ne razviju sistemi koji bi mogli da mere istovremeno magnetna polja na više mesta u mozgu.

Komercijalni MEG multi-SQUID sistemi su evoluirali od 7- do 37-kanalnih jedinica u kasnim 80-im. Početkom 90-ih ostvarene su i verzije 122-, 128- i 148- kanalnim jedinicama u obliku kacige, koje su proizvođene u Kanadi, Finskoj i USA.

Merenjem magnetnog polja povezanog sa odzivom, mapirana je funkcionalnost vizuelnih, auditornih i somatosenzorskih oblasti korteksa. Više kortikalne funkcije, kao što su prepoznavanje i održavanje pažnje takođe se mogu istražiti. Još jedna oblast istraživanja spontana aktivnost mozga, kao što je alfa ritam, tokom buđenja i spavanja. MEG se takođe koristi za pronalaženje senzorskih puteva između periferije i samog mozga, kao i kod istraživanja šloga, multiple skleroze i migrene.

6.6.2. MAGNETOKARDIOGRAFIJA (MCG)

Prvo merenje magnetnog polja ljudskog srca je izvedeno 1963. korišćenjem indukcionih kalema na sobnoj temperaturi. Samo nekoliko godina kasnije, SQUID senzor je bio dostupan, omogućavajući ogromno unapređenje. Klinička primena MCG-a je fokusirana na otkrivanju izvora aritmija, ventrikularne tahikardije i Wolf–Parkinson–White-ovog sindroma. Visoko-rezolucioni SQUID sistemi se takođe koriste u eksperimentalnim istraživanjima delova tkiva srčanog mišića čiji rezultati u ogromnoj meri doprinose razvijanju matematičkog modela srčane elektrofiziologije i istraživanju kortikalne aktivnosti.

6.6.3. GEOMAGNETIZAM

Kod primene SQUID-a u geomagnetizmu govorimo o paleomagnetizmu i prospektiranju. Paleomagnetizam je istraživanje magnetnih pojava u starim slojevima u svrhe razumevanja geološke istorije oblasti odakle je uzet uzorak. Kad govorimo o prospektiranju mislimo na potragu vrednih sirovina ili nafte. Ovo se može izvesti primenom niskofrekventnog elektromagnetskog polja na zemlju i merenjem magnetnog i električnog signala. Korišćenjem više frekvencija moguće je odrediti profil zemljишta kao provodnost u funkciji od dubine. Zatim se ovaj profil upoređuje sa geološkim podacima da bi se utvrdio sastav. Bilo kakve promene u podacima mogu koristiti kao važni podaci i za predviđanje zemljotresa.

6.6.4. NEINVAZIVNO TESTIRANJE

Jedno od najnovijih polja SQUID istraživanja je nedestruktivna evaluacija (NonDestructive Evaluation, NDE) pod čime podrazumevamo testiranje odnosno

istraživanje osobina materijala bez nanošenja štete istom. NDE SQUID magnetometrija je u stanju da ispita različite vrste pukotine (na avionima nastaju zbog naleta veta, delovanja sunčevih zraka...), magnetnu osobinu materijala, koroziranje, itd. U većini ovih istraživanja vrši se merenje magnetnog polja na više lokacija u blizini objekta koji se ispituje i tako se pravi mapa polja. Prednosti NDE SQUID sistema se ogleda još i u velikoj osetljivosti.

6.7. OSTALE PRIMENE SQUID-a

SQUID uređaji imaju široku primenu u elektronici. Koristeći se SQUID tehnologijom uspešno je napravljen vrlo osetljiv pikovoltmetar. SQUID-ovi se koriste i u gravitacionim gradiometrima. Takođe se koriste i za brojna merenja fundamentalnih fizičkih veličina, uključujući i istraživanje mogućeg postojanja frakcionog fluksnog kvanta, merenje mase Kuperovog para i potragom za magnetnim monopolima.

6.8. VISOKOTEMPERATURSKI SUPERPROVODNICI I SQUID

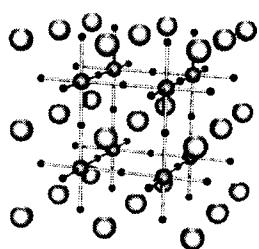
Vec je napomenuto da se kod klasičnih superprovodnika kritična temperatura kreće do 30K i da su to temperature za čije je postizanje potrebno korišćenje tečnog helijuma koji komercijalno nije preterano dostupan, a ni jeftin. Čak ni nedostupnost i cena tečnog helijuma nije tolika eksperimentalna poteškoća koliko su sami sistemi sa kojima se manipuliše tečnim helijumom komplikovani. Nakon postavke BCS teorije koja je objasnila klasične superprovodnike, koji su tada bili i jedini poznati, i njenih fantastičnih rezultata, koji predviđaju da se T_c kreće maksimalno do 40K, vladalo je mišljenje da je superprovodnost „rezervisana“ isključivo za ekstremno niske temperature.

1988. je godina koja je prilično uzdrmala naučnu javnost - pronađeni su superprovodnici čija je kritična temperatura daleko viša nego što je to slučaj sa klasičnim superprovodnicima i koja je iznosila $\sim 90\text{ K}$. Odmah se postavlja pitanje: zašto je temperatura od 90 K mnogo viša od temperature od 30 K? Odgovor je jednostavan. Radi se o temperaturi ključanja tečnog azota koja iznosi oko 77 K i ne samo to – tečni azot je za razliku od tečnog helijuma neuporedivo više dostupniji, cena mu je vrlo prikladna, sistemi skladištenja su prosti, a u azotarama se često dobija čak i kao nusproizvod.

Zanimljivo je napomenuti da tokom NATO agresije i bombardovanja 1999. godine u nekoliko navrata u pančevačkoj azotari nisu znali šta će sa viškom hlorom i azotom pa su ih poklanjali susednim državama.

Otkrićem HTSC (High Temperature SuperConductors) ostvaren je veliki uspeh niskotemperaturske fizike i superprovodnici su odjednom postali interesantni ne samo fizičarima koji nisu verovali u superprovodnike, nego i tehnologima, hemičarima, inžinjerima... Sve što je odjednom bilo potrebno jeste tečni azot i puno prostora u podrumima gde da se odlože stari sistemi za smeštanje i manipulisanje tečnim helijumom.

Kada govorimo o prvim HTSC tu se najpre misli na okside perovskitnih struktura i za njihov pronađetak su zaslužni Georg Bednorc i Aleks Miler koji su i podelili Nobelovu nagradu za fiziku 1989 godine.



Slika 17. Struktura perovskitna

Pod perovskitim podrazumevamo sve materijale koji imaju kristalnu strukturu opšte formule ABO_3 . Najbolji primer jeste CaTiO_3 (kalcijum titanijum oksid). Primer kristalne strukture perovskita je dat na slici 17.

Miler je radio u IBM-ovim laboratorijama gde započeo rad na izolatorskim oksidima. Pionirski eksperimenti u ovoj oblasti učinjeni su zajedno sa Berlingerom 1971. i tokom istraživanja pomenutih materijala koje je trajalo dvadesetak godina dobro su se upoznali sa svojstvima oksidnih perovskita.

Bednorc se sa druge strane zainteresovao za perovskite dok je radio na svojoj doktorskoj tezi u laboratoriji za fiziku čvrstog stanja Univerziteta u Cirihi. U okviru svoje doktorske teze, Bednorc je ispitivao feroelektrična svojstva perovskita i bio fasciniran o širokom dijapazonu svojstava koje su perovskiti ispoljavali kada bi im se menjao sastav. Ključni materijal od interesovanja je bio SrTiO_3 , koji se čak ponaša i kao superprovodnik na temperaturi od 0.3 K . Jeste da je ova temperatura vrlo niska, ali sama

činjenica da se navedeni materijal, koji je u opštem slučaju izolator, ponaša kao superprovodnik. Dalje je usledila kratka, ali vrlo korisna saradnja sa Gerdom Binigom koji se bavio superprovodnošću i tunelovanjem. Binig je bio zainteresovan za ispitivanje SrTiO_3 , a posebno je bio zainteresovan za slučaj kada se pomenutom perovskitu poveća gustina nosioca nanelektrisanja. Dopiranjem niobijumom T_c SrTiO_3 je povećana sa 0.3 K na 1.2 K. Binig je potom vrlo brzo odustao od daljeg istraživanja SrTiO_3 i započeo rad na realizaciji na skenirajućem tunelskom mikroskopu (STM – Scaning Tunel Microscope) i za šta je, zajedno sa Hajnrihom Rorerom podelio Nobelovu nagradu 1986.

Dalje je sledilo kontaktiranje Bednorca od strane Melera i revolucija u oblasti superprovodnika.

Njihov prvi uspeh na putu ka otkrivanju jedinjenja sa visokom kritičnom temperaturom bio je sa sistemom Ba – La – Cu – O, a postignuta kritična temperatura je iznosila 30 K. Iako ova temperatura nije viša od prethodno dobijenih kritičnih temperatura, važnost ovog pronađenja se ogledala u činjenici da je u normalnom stanju ovaj materijal bio izolator. Zatim je usledio fantastičan rezultat sa sistemom Y - Ba - Cu - O sa kritičnom temperaturom od ~ 94 K.

Otkriće visokotemperaturnih superprovodnika je u mnogome olakšalo pravljenje SQUID uređaja iz prostog razloga što je kriogeni sistem u ovom slučaju neuporedivo jednostavniji, a time i cena znatno niža.

7. ZAKLJUČAK

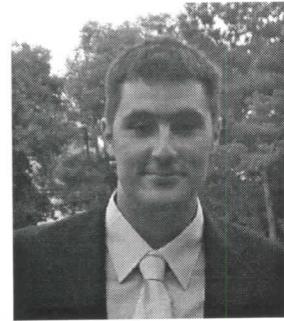
U diplomskom radu su izložene teorije koje se odnose na fenomen superprovodnosti, čije je razumevanje preduslov za istraživanje primena u različitim oblastima. Da bi se upoznalo sa teorijama superprovodnosti potrebno je pre toga, u manjoj meri, nešto reći i o efektima fenomena superprovodnosti, što je i učinjeno u poglavlju 3. Džozefsonov efekat je detaljno obrađen, oslanjajući se na teorije opisane u poglavlju 4. Dalje su obrađeni uređaji čiji se princip rada zasniva na Džozefsonovim spojevima, a to su upravo SQUID uređaji, detektori izuzetne osetljivosti čija je primena od neizmernog značaja.

LITERATURA

1. J. Šetrajčić, *Superprovodnost*, Zmaj, Novi Sad, 2005.
2. V. Schmidt, *The Physics Of Superconductors*, Springer, Berlin, 1997.
3. I. Živić, *Statistička mehanika*, Prirodno-matematički fakultet, Kragujevac, 2007.
4. L. Landau, E. Lifšic, *Statistička fizika*, Naučna knjiga, Beograd, 1960.
5. W. Buckel, R. Kleiner, *Superconductivity*, Wiley, 2004.
6. F. Schwabl, *Statistical Mechanics*, Springer, 2006.
7. S. Fujita, S. Godoy, *Quantum statistical theory of superconductivity*, Kluwer Academic Publishers, 2002.
8. C. Pethick, H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, 2002.
9. C. Kittel, *Introduction to solid state physics 7th edition*, Wiley, 1996.
10. C. Poole, JR., *Handbook of superconductivity*, Academic Press, 2000.
11. B. Tošić, *Statistička fizika*, Institut za fiziku PMF, Novi Sad, 1978.
12. D. Griffiths, *Introduction to quantum mechanics*, Pearson Education, 2005.
13. F. Herbut, *Kvantna mehanika za istraživače*, Fizički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 1999.
14. C. Kittel, *Quantum theory of solids*, Wiley, 1963.
15. D. Bohm, *Quantum theory*, Dover Publications, New York, 1989.
16. D. Bohm, *Causality and chance in modern physics*, Routledge and Kegan Paul LTD. London, 1957.
17. G. Bednorz and A. Müller, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 60, No. 3, July 1988.
18. <http://www.spektrum.de/artikel/82435>
19. <http://www.phys.ufl.edu/~pjh/teaching/phz7427/7427notes/josephson.pdf>

BIOGRAFIJA

Stevan Armaković je rođen u Sremskoj Mitrovici 7.9.1985. godine od majke Zorice Armaković (rođene Bugarić) i oca Radovana Armakovića. Osnovnu školu „Slobodan Bajić Paja“ završio je uporedno sa nižom muzičkom školom „Petar Kranjčević“ na instrumentu klarinet u klasi profesora Siniše Murića. U jakoj konkurenciji klarinetista dobitnik je više nagrada na republičkim takmičenjima, od kojih se posebno izdvaja nagrada iz 1998. godine kada je kao solista dobio 3. nagradu na republičkom takmičenju. Takođe je nastupao i osvajao nagrade i na republičkim takmičenjima u konkurenciji kamernih sastava. Od četvrtog razreda osnovne škole je aktivno trenirao košarku u KK „Srem“ u kojem je prošao sve kategorije i bio standardni prvotimac sve do odlaska na studije.



Gimnaziju „Ivo Lola Ribar“ prirodno-matematičkog smera u Sremskoj Mitrovici završio je sa odličnim uspehom 2004. godine, a za maturski rad je teorijski i eksperimentalno obradio temu iz fizike i to „Određivanje brzine zvuka Kvinkeovom cevi“. Nakon završetka srednjoškolskog obrazovanja upisuje studije na Departmanu za fiziku, smer diplomirani fizičar, na PMF-u u Novom Sadu. U toku studija bio je organizator i učesnik izložbe i naučno-popularnih predavanja povodom eksperimenta LHC u CERN-u koje se održavalo u prostorijama Departmana za fiziku. Povodom izložbe, samostalno je napravio web sajt koji se bavi fizikom elementarnih čestica i koji je postavljen na sajtu Departmana za fiziku: www.if.ns.ac.yu/infophysics. Takođe je bio angažovan i u marketing timu PMF-a povodom sajma obrazovanja.

Nastavnim planom predviđene ispite je položio u roku sa prosečnom ocenom 9,00. Nakon završetka redovnih studija planira nastavak školovanja u okviru postdiplomskih studija na Departmanu za fiziku PMF-a u Novom Sadu.

Novi Sad, 23.09.2008.

Stevan Armaković

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Diplomski rad

VR

Autor: Stevan Armaković

AU

Mentor: Akademik, prof. dr Jovan Šetrajčić, redovni profesor

MN

Naslov rada: Džozefsonov efekat i SQUID–uređaji

NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: Srpski

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2009

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Departman za fiziku,

Prirodno-matematički fakultet

Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

MA

Fizički opis rada: broj poglavlja 7 ; strana 68; literaturnih citata 19; tablica 0; slika 17; shema

0

FO

Naučna oblast: Fizika

NO

Naučna disciplina: Fizika čvrstog stanja

ND

Ključne reči: Superprovodnost, Džozefsonovi spojevi, SQUID

PO

UDK:

Čuva se: U biblioteci Departmana za fiziku, PMF, Novi Sad,
Trg Dositeja Obradovića 4

ČU

Važna napomena: Nema

VN

Izvod: Videti stranu 62

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 14.09.2009.

Datum odbrane: 30.09.2009.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Agneš Kapor, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: Akademik, prof. dr Jovan Šetrajčić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Milica Pavkov-Hrvojević, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE

KEYWORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents code: Graduation assignment

CC

Author: Stevan Armaković

AU

Mentor: Academician, prof. dr Jovan Šetrajčić, Full Professor, Member of SANU

MN

Title: Josephson's junctions and SQUID

Tl

Language of text: Serbian (Latin alphabet)

LT

Language of abstract: Serbian

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2009

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Pub. Place: Novi Sad, Department for Physics, Faculty of Sciences,

Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: 7/68/19/0/17/0

PD

Scientific field: Physics

SF

Scientific discipline: Solid State Physics

SD

Keywords: Superconductivity, Josephson's junctions, SQUID

UC

Holding data: In the library of Department for Physics, Faculty of Sciences, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

HD

Note: None

N

Abstract: See page 62

AB

Accepted by the Scientific Board on: 14.09.2009.

AC

Defended: 30.09.2009.

DE

Thesis defend board:

DB

President: dr Agneš Kapor, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: dr Jovan Šetrajčić, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,

Member of SANU

Member: dr Milica Pavkov-Hrvojević, Associated Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad