



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



Prostiranje talasa u viskoelastičnom materijalu frakcionog Burgersovog tipa

- master rad -

Mentori:

dr Dušan Zorica
dr Željka Cvejić

Kandidat:

Slađan Jelić

Novi Sad, 2021.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Modeli viskoelastičnog tela	3
2.1	Klasični modeli viskoelastičnog tela	3
2.2	Frakcioni račun. Frakcioni integral, Riman-Liuvilov i Kaputov frakcioni izvod	4
2.3	Frakcioni modeli viskoelastičnog tela	5
2.4	Termodinamičke restrikcije	6
3	Funkcije puzanja ε_{cr} i relaksacije σ_{sr}	9
3.1	Funkcije puzanja i relaksacije za klasične viskoelastične modele	9
3.2	Funkcije puzanja i relaksacije za frakcione viskoelastične modele	11
4	Frakciona Burgersova talasna jednačina na ograničenom domenu	15
4.1	Rešenje za zadato pomeranje slobodnog kraja štapa	16
4.1.1	Pomeranje proizvoljne tačke štapa za zadatu funkciju Υ	17
4.1.2	Napon u proizvoljnoj tački štapa za zadatu funkciju Υ	19
4.1.3	Numerički primeri	20
4.2	Rešenje za zadati napon na slobodnom kraju štapa	22
4.2.1	Pomeranje proizvoljne tačke štapa za zadatu funkciju Σ	22
4.2.2	Napon u proizvoljnoj tački štapa za zadatu funkciju Σ	25
4.2.3	Numerički primeri	26
5	Određivanje jezgra rešenja P	31
5.1	Slučaj kada funkcija \tilde{P} nema drugih tačaka grananja osim $s = 0$	32
5.2	Slučaj kada funkcija \tilde{P} , pored $s = 0$, ima i realnu negativnu tačku grananja	35
5.3	Slučaj kada funkcija \tilde{P} , pored $s = 0$, ima i par kompleksno konjugovanih tačaka grananja	36
6	Nule funkcije ψ	39
7	Zaključak	43
Literatura		45

Zahvaljujem se mentorima na pomoći pri izradi master rada. Posebno se zahvaljujem dr Dušanu Zorici na izuzetnoj saradnji u protekle dve godine, na ukazanom poverenju u moj rad, pruženom znanju i uloženom vremeniku i strpljenju!

1. Uvod

Analiziran je dinamički odziv jednodimenzionog viskoelastičnog štapa konačne dužine, fiksiranog na jednom, a slobodnog na drugom kraju za zadato pomeranje slobodnog kraja štapa ili za zadati napon primenjen na njegovom slobodnom kraju. Vremenska evolucija funkcije pomeranja i napona proizvoljne tačke štapa, dobijena je u obliku konvolucije jezgra rešenja i zadatog forsiranja slobodnog kraja štapa, primenom metode Laplasove transformacije. Viskoelastična svojstva štapa modelirana su termodinamički konzistentnom frakcionom Burgersovom konstitutivnom jednačinom, koja je pridružena jednačini kretanja jednodimenzionog deformabilnog tela, te je, zajedno sa jednačinom deformacije, rešavan početno-granični problem sa nultim početnim uslovima i graničnim uslovima ili na pomeranje ili na napon slobodnog kraja štapa, uz uslov na nulto pomeranje fiksiranog kraja štapa. Burgersovi modeli frakcionog tipa mogu se podeliti u dve klase, pri čemu je karakteristika prve klase beskonačna brzina prostiranja pobude, dok modeli druge klase ispoljavaju konačnu brzinu propagacije talasa, što je dobijeno analizom rešenja za mali vremenski interval blizak početnom trenutku. Vremenski profili odziva funkcije pomeranja i napona na forsiranja data u obliku Hevisajdove funkcije ispoljavaju prigušene oscilatorne karakteristike svojstvene fluidu sličnim viskoelastičnim telima. Prikazani rezultati su sadržaj rada [32], koji je u postupku recenzije u časopisu Applied Mathematics and Computation.

Prvo poglavlje rada je posvećeno klasičnim i frakcionim modelima viskoelastičnog tela, sa akcentom na formulaciju konstitutivnih jednačina dobijenih korišćenjem reološke analogije, osnovne pojmove frakcionog računa, kao i na frakcioni Burgersov model uključujući i termodynamicke restrikcije na parametre modela. Kako je od interesa razmatrati funkcije puzanja i relaksacije, koje predstavljaju deformaciju i napon viskoelastičnog štapa kao odziv na napon i deformaciju zadate u obliku Hevisajdove funkcije, drugo poglavlje posvećeno je njihovoj analizi za različite klasične i frakcione modele uključujući i Burgersov model. U četvrtom poglavlju formulisana je frakciona Burgersova talasna jednačina, koja je rešena za početno-granični problem. Kako jezgro rešenja odziva na zadata forsiranja slobodnog kraja štapa može imati tačke grananja, u petom poglavlju eksplicitno su izračunata jezgra rešenja za pomenute slučajeve, dok je u narednom poglavlju ispitana pozicija, broj i višestrukost polova jezgra rešenja. U poslednjem poglavlju sažeto su opisani dobijeni rezultati.

2. Modeli viskoelastičnog tela

Korišćenjem reoloških analogija formulisani su klasični modeli viskoelastičnog tela, a posle uvođenja osnova frakcionog računa i frakcioni modeli. Razmatrane su i termodinamičke restrikcije na parametre modela.

2.1 Klasični modeli viskoelastičnog tela

Elastična deformabilna tela opisana su Hukovim zakonom, dok su fizička tela koja ispoljavaju viskozna svojstva opisana Njutnovim zakonom, datim izrazima

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) = E \frac{d^0}{dt^0} \varepsilon(t) \quad (2.1)$$

$$\sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon}(t) = \eta \frac{d^1}{dt^1} \varepsilon(t) \quad (2.2)$$

pri čemu je E Jangov moduo elastičnosti, a η koeficijent viskoznosti. Oba navedena zakona predstavljaju zavisnost napona σ od deformacije ε , koje su vremenski zavisne funkcije, ali su i Hukov i Njutnov zakon adekvatni za opis samo idealizovanih slučajeva apsolutno elastičnih i apsolutno viskoznih tela, što nije slučaj ni sa jednim realnim fizičkim telom. Naime, realna fizička tela mogu ispoljavati kako elastična, tako i viskozna svojstva, te se njihove mehaničke osobine ne mogu opisati ni jednim od navedenih zakona i takva tela se nazivaju viskoelastičnim telima.

Konstitutivna jednačina viskoelastičnog tela, koja povezuje napon i deformaciju, dobija se na osnovu reološke šeme predstavljene odgovarajućom kombinacijom elastičnih opruga, za koje važi Hukov zakon (2.1), i prigušnica, za koje važi Njutnov zakon (2.2). Reološka šema, predstavljena rednom vezom opruge i prigušnice, daje konstitutivnu jednačinu

$$\left(E + \eta \frac{d}{dt} \right) \sigma(t) = \eta E \frac{d}{dt} \varepsilon(t), \quad (2.3)$$

koja odgovara Maksvelovom modelu, dok su u slučaju Kelvin-Vojtovog modela

$$\sigma(t) = \left(E + \eta \frac{d}{dt} \right) \varepsilon(t), \quad (2.4)$$

opruga i prigušnica na reološkoj šemi povezane paralelno. Paralelna veza opruge i prigušnice sa kojima je redno povezana još jedna opruga, kao i serijska veza opruge i prigušnice sa kojima je paralelno povezana još jedna opruga, predstavljaju reološke šeme koje odgovaraju Cenerovom modelu, ili standardnom modelu viskoelastičnog tela

$$\left(1 + a \frac{d}{dt} \right) \sigma(t) = E \left(1 + b \frac{d}{dt} \right) \varepsilon(t). \quad (2.5)$$

Na slici 2.1 su date dve reološke šeme za Burgersov model, pri čemu su konstitutivne jednačine koje odgovaraju šemama sa slika 2.1(a) i 2.1(b) respektivno date izrazima

$$\left(1 + \left(\frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_2}{E_2} \right) \frac{d}{dt} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \frac{d^2}{dt^2} \right) \sigma(t) = \left(\left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_2} \right) \frac{d}{dt} + \frac{\eta_1}{E_1} \left(1 + \frac{E_1}{E_2} \right) \frac{d^2}{dt^2} \right) \varepsilon(t), \quad (2.6)$$

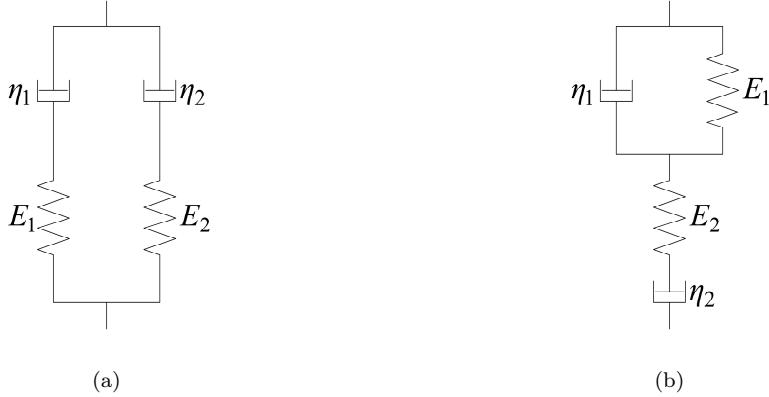
$$\left(1 + \frac{\eta_2}{E_1} \left(1 + \frac{E_1}{E_2} + \frac{\eta_1}{\eta_2} \right) \frac{d}{dt} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \frac{d^2}{dt^2} \right) \sigma(t) = \eta_2 \left(\frac{d}{dt} + \frac{\eta_1}{E_1} \frac{d^2}{dt^2} \right) \varepsilon(t). \quad (2.7)$$

gde su η_1 i η_2 koeficijenti viskoznosti odgovarajućih prigušnica, a E_1 i E_2 moduli elastičnosti odgovarajućih opruga. Obe navedene jednačine su istog matematičkog oblika i predstavljaju klasičnu Burgersovu konstitutivnu jednačinu

$$\left(1 + a_1 \frac{d}{dt} + a_2 \frac{d^2}{dt^2} \right) \sigma(t) = \left(b_1 \frac{d}{dt} + b_2 \frac{d^2}{dt^2} \right) \varepsilon(t), \quad (2.8)$$

gde su a_1, a_2, b_1, b_2 pozitivni parametri.

Klasični Burgersov model je korišćen za opis dinamičkih osobina polimera, viskoelastičnih osobina asfalta i za modeliranje oblikovanja stakla u [26, 38, 60], dok je u [2, 40] korišćen mikromehanički pristup za modeliranje asfaltnih smeša.



Slika 2.1: Reološka šema klasičnog Burgersovog modela.

2.2 Frakcioni račun. Frakcioni integral, Riman-Liuvilov i Kaputov frakcioni izvod

Kako će se u nastavku klasični Burgersov model uopštiti korišćenjem frakcionog računa, neophodno je uvesti pojmove frakcionog integrala i frakcionog izvoda koji figuriše u frakcionoj Burgersovoj konstitutivnoj jednačini. Polazeći od rešenja jednačine $y^{(n)}(t) = f(t)$, gde je n ceo broj, a (n) označava n -ti izvod po vremenu t , datog Košijevom formulom

$$y(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} * f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}, \quad (2.9)$$

gde $*$ označava konvoluciju po vremenu $f(t) * g(t) = \int_0^t f(t') g(t-t') dt'$, $t > 0$, izrazom

$$I^n f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} * f(t),$$

definiše se integral n -tog reda I^n kao operator inverzan operatoru izvoda $D^n := \frac{d^n}{dt^n}$ (do na početne uslove), odnosno primenom integrala n -tog reda na n -ti izvod funkcije dobija se

$$I^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}, \quad t > 0, \quad (2.10)$$

dok se primenom n -tog izvoda na n -ti integral funkcije dobija

$$D^n I^n f(t) = f(t), \quad t > 0. \quad (2.11)$$

Uopštenje Košijeve formule (2.9), odnosno integrala n -tog reda, dobija se uvrštavanjem necelobrojne vrednosti $\xi > 0$ umesto celobrojne vrednosti n , čime se definiše frakcioni integral

$$I^\xi f(t) = \frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} * f(t), \quad (2.12)$$

gde je Γ Ojlerova gama funkcija.

Riman-Liuvilov i Kaputov frakcioni izvod reda $\xi \in [n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}_0$, definisani su izrazima

$${}^{RL} D^\xi y(t) = D^{n+1} I^{n+1-\xi} y(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left(\frac{t^{-(\xi-n)}}{\Gamma(1-(\xi-n))} * y(t) \right), \quad t > 0, \quad (2.13)$$

$${}^C D^\xi y(t) = I^{n+1-\xi} D^{n+1} y(t) = \frac{t^{-(\xi-n)}}{\Gamma(1-(\xi-n))} * \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} y(t), \quad t > 0, \quad (2.14)$$

tako da Riman-Liuvilov frakcioni izvod zadovoljava relaciju

$${}^{RL}D_t^\xi I_t^\xi f(t) = f(t), \quad t > 0,$$

koja je analogna (2.11), dok Kaputov frakcioni izvod zadovoljava relaciju

$$I_t^\xi {}^C D_t^\xi f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}, \quad t > 0,$$

koja je analogna (2.10). Dakle, Riman-Liuvilov frakcioni izvod je levi inverz frakcionog integrala, a Kaputov frakcioni izvod je desni inverz frakcionog integrala do na početne uslove.

Kako će Laplasova transformacija, definisana izrazom

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad (2.15)$$

biti korišćena za rešavanje diferencijalnih jednačina potrebno je navesti Laplasove transformacije frakcionog integrala i izvoda. Dakle, primenom Laplasove transformacije na frakcioni integral reda $\xi > 0$ funkcije f , datog izrazom (2.12), dobija se

$$\mathcal{L}[I_t^\xi f(t)](s) = \frac{1}{s^\xi} \tilde{f}(s),$$

korišćenjem činjenice da je Laplasova transformacija konvolucije funkcija proizvod Laplasovih transformacija funkcija, kao i $\mathcal{L}[t^{-\alpha}](s) = \Gamma(1-\alpha)s^{-(1-\alpha)}$, dok Laplasova transformacija Kaputovog i Riman-Liuvilovog izvoda reda $\xi \in [n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}_0$, funkcije f , datih izrazima (2.13) i (2.14), daje

$$\mathcal{L}[{}^C D_t^\xi f(t)](s) = s^\xi \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^n s^{\xi-1-k} (D^k f)(0), \quad (2.16)$$

$$\mathcal{L}[{}^{RL} D_t^\xi f(t)](s) = s^\xi \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^n s^{n-k} (I^{n+1-k-\xi} f)(0), \quad (2.17)$$

gde je iskorišćena Laplasova transformacija klasičnog izvoda

$$\mathcal{L}[D^{n+1} f(t)](s) = s^{n+1} \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^n s^{n-k} (D^k f)(0).$$

U izrazu za Laplasovu transformaciju Kaputovog izvoda (2.16) figurišu klasični početni uslovi, odnosno funkcija i njeni celobrojni izvodi računati u početnom trenutku, dok su početni uslovi koje zahteva Laplasova transformacija Riman-Liuvilovog izvoda funkcije (2.17) zadati preko frakcionog integrala funkcije računatog u početnom trenutku, a koji u slučaju funkcije ograničene u početnom trenutku iščezavaju.

Više detalja o frakcionom računu može se naći u [19, 37, 51].

2.3 Frakcioni modeli viskoelastičnog tela

Kako je elastični karakter tela opisan zavisnošću napona od nultog izvoda deformacije, a viskozni karakter tela zavisnošću napona od prvog izvoda deformacije, viskoelastična svojstva realnih fizičkih tela mogu se predstaviti Skot-Blerovim modelom

$$\sigma(t) = \eta_0 D_t^\alpha \varepsilon(t) \quad (2.18)$$

u kome figuriše necelobrojna vrednost reda izvoda $\alpha \in (0, 1)$, odnosno frakcioni izvod, koji opisuje svojstva materijala između apsolutno elastičnog i apsolutno viskoznog.

U cilju formulisanja frakcionih konstitutivnih jednačina viskoelastičnog tela, takođe se mogu koristiti reološke šeme predstavljene odgovarajućom kombinacijom elastičnih opruga za koje važi Hukov zakon (2.1), pri čemu se klasična prigušnica, za koju važi Njutnov zakon (2.2), može zameniti frakcionom prigušnicom, opisanom Skot-Blerovom relacijom (2.18). Analogno klasičnoj Maksvelovoj (2.3), Kelvin-Vojtovojoj (2.4) i Cenerovojoj (2.5) konstitutivnoj jednačini, kada se klasična prigušnica zameni frakcionom, dobijaju se frakcioni Maksvelov, Kelvin-Vojtov i Cenerov model respektivno dati izrazima

$$(1 + a_0 D_t^\alpha) \sigma(t) = b_0 D_t^\beta \varepsilon(t), \quad (2.19)$$

$$\sigma(t) = (a + b_0 D_t^\alpha) \varepsilon(t), \quad (2.20)$$

$$(1 + a_0 D_t^\alpha) \sigma(t) = E \left(1 + b_0 D_t^\beta \right) \varepsilon(t), \quad (2.21)$$

pri čemu su parametri modela $a, b, E > 0$ i $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

Kada su u reološkim šemama koje odgovaraju klasičnom Burgersovom modelu, datim na slici 2.1, prigušnice frakcionog tipa dobijaju se, po analogiji sa jednačinama (2.6) i (2.7), konstitutivne jednačine viskoelastičnog tela frakcionog Burgersovog tipa

$$\left(1 + \frac{\eta_1}{E_1} {}_0D_t^\alpha + \frac{\eta_2}{E_2} {}_0D_t^\beta + \frac{\eta_1\eta_2}{E_1E_2} {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right)\sigma(t) = \left(\eta_1 {}_0D_t^\alpha + \eta_2 {}_0D_t^\beta + \frac{\eta_1\eta_2}{E_1} \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right) {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right)\varepsilon(t), \quad (2.22)$$

$$\left(1 + \frac{\eta_1}{E_1} {}_0D_t^\alpha + \frac{\eta_2}{E_2} \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) {}_0D_t^\beta + \frac{\eta_1\eta_2}{E_1E_2} {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right)\sigma(t) = \eta_2 \left({}_0D_t^\beta + \frac{\eta_1}{E_1} {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right)\varepsilon(t), \quad (2.23)$$

pri čemu se jednačine (2.22) i (2.23) razlikuju za jedan član. Druga od dve navedene jednačine jednostavnijeg je oblika i korišćena je za opis viskoelastičnog tela frakcionog Burgersovog tipa. Usled proizvoljnosti parametara reoloških modela, jednačina (2.23) postaje

$$\left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma\right)\sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^\nu)\varepsilon(t), \quad (2.24)$$

koja sadrži parametre modela $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 > 0$, $\alpha, \beta, \mu, \nu \in [0, 1]$, gde je $\alpha \leq \beta$, i $\gamma, \nu \in [1, 2]$, što je izvedeno u [48].

2.4 Termodinamičke restrikcije

Primenom Furijeove transformacije

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

na frakcioni Burgersov model (2.24) i izražavanjem količnika napona i deformacije u Furijeovoj slici dobija se kompleksni Jangov moduo

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{b_1(i\omega)^\mu + b_2(i\omega)^\nu}{1 + a_1(i\omega)^\alpha + a_2(i\omega)^\beta + a_3(i\omega)^\gamma},$$

koji se razdvajanjem realnog i imaginarnog dela može zapisati u obliku

$$\hat{E}(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega),$$

gde su E' i E'' konzervativni i disipativni deo kompleksnog Jangovog modula, respektivno, dati izrazima

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= \frac{1}{M(\omega)} \left(a_1 b_1 \omega^{\mu+\alpha} \cos \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\mu+\beta} \cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} + a_3 b_1 \omega^{\mu+\gamma} \cos \frac{(\mu-\gamma)\pi}{2} \right. \\ &\quad + a_1 b_2 \omega^{\nu+\alpha} \cos \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{\nu+\beta} \cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} + a_3 b_2 \omega^{\nu+\gamma} \cos \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2} \\ &\quad \left. + b_1 \omega^\mu \cos \frac{\mu\pi}{2} + b_2 \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2} \right), \\ E''(\omega) &= \frac{1}{M(\omega)} \left(a_1 b_1 \omega^{\mu+\alpha} \sin \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\mu+\beta} \sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} + a_3 b_1 \omega^{\mu+\gamma} \sin \frac{(\mu-\gamma)\pi}{2} \right. \\ &\quad + a_1 b_2 \omega^{\nu+\alpha} \sin \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{\nu+\beta} \sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} + a_3 b_2 \omega^{\nu+\gamma} \sin \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2} \\ &\quad \left. + b_1 \omega^\mu \sin \frac{\mu\pi}{2} + b_2 \omega^\nu \sin \frac{\nu\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

pri čemu je $M(\omega) = \left|1 + a_1(i\omega)^\alpha + a_2(i\omega)^\beta + a_3(i\omega)^\gamma\right|^2$.

Zahtev da su konzervativni i disipativni deo kompleksnog Jangovog modula nenegativne realne funkcije kružne frekvencije ω , odnosno zahtev $E'(\omega) \geq 0$ i $E''(\omega) \geq 0$ za svako $\omega > 0$, obezbeđuje termodinamičku konzistentnost modela, implicirajući da parametri modela ne mogu biti proizvoljni, već moraju zadovoljavati termodinamičke restrikcije. U slučaju frakcionog Burgersovog modela (2.24) može se formulisati osam termodinamički konzistentnih modela sa odgovarajućim termodinamičkim i suženim termodinamičkim restrikcijama, što je urađeno u [48, 49]. Termodinamički konzistentni frakcioni Burgersovi modeli navedeni su u nastavku zajedno sa termodinamičkim i suženim termodinamičkim restrikcijama, koje slede iz zahteva da je funkcija puzanja kompletno monotona, a funkcija relaksacije Bernštajnova funkcija, o čemu će više reći biti u odeljku 3.

Model I:

$$\begin{aligned} \left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma\right) \sigma(t) &= (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\eta}) \varepsilon(t), \\ 0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \mu \leq 1, \quad 1 \leq \mu + \eta \leq 1 + \alpha, \quad \frac{b_2}{b_1} &\leq a_i \frac{\cos \frac{(\mu-\eta)\pi}{2}}{\left|\cos \frac{(\mu+\eta)\pi}{2}\right|}, \\ \frac{b_2}{b_1} &\leq a_i \frac{\sin \frac{(\mu-\eta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu+\eta)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\mu-\eta)\pi}{2}}{\left|\cos \frac{(\mu+\eta)\pi}{2}\right|}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

gde je $(\eta, i) \in \{(\alpha, 1), (\beta, 2), (\gamma, 3)\}$;

Model II:

$$\begin{aligned} \left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{2\alpha}\right) \sigma(t) &= (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\alpha}) \varepsilon(t), \\ \frac{1}{2} \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1, \quad \frac{a_3}{a_1} \frac{\left|\sin \frac{(\mu-2\alpha)\pi}{2}\right|}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} &\leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1 \frac{\cos \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2}}{\left|\cos \frac{(\mu+\alpha)\pi}{2}\right|}, \\ \frac{a_3}{a_1} \frac{\left|\sin \frac{(\mu-2\alpha)\pi}{2}\right|}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\mu-2\alpha)\pi}{2}}{\cos \frac{\mu\pi}{2}} &\leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1 \frac{\sin \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu+\alpha)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2}}{\left|\cos \frac{(\mu+\alpha)\pi}{2}\right|}; \end{aligned} \quad (2.26)$$

Model III:

$$\begin{aligned} \left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \sigma(t) &= (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\alpha}) \varepsilon(t), \\ 0 \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1, \quad \alpha + \beta \geq 1, \quad \frac{a_3}{a_2} \frac{\left|\sin \frac{(\mu-\beta-\alpha)\pi}{2}\right|}{\sin \frac{(\mu-\beta+\alpha)\pi}{2}} &\leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1 \frac{\cos \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2}}{\left|\cos \frac{(\mu+\alpha)\pi}{2}\right|}, \\ \frac{a_3}{a_2} \frac{\left|\sin \frac{(\mu-\beta-\alpha)\pi}{2}\right|}{\sin \frac{(\mu-\beta+\alpha)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\mu-\beta-\alpha)\pi}{2}}{\cos \frac{(\mu-\beta+\alpha)\pi}{2}} &\leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1 \frac{\sin \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu+\alpha)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2}}{\left|\cos \frac{(\mu+\alpha)\pi}{2}\right|}; \end{aligned} \quad (2.27)$$

Model IV:

$$\begin{aligned} \left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \sigma(t) &= (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\beta}) \varepsilon(t), \\ 0 \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1, \quad 1 - \alpha \leq \beta \leq 1 - (\mu - \alpha), \quad \frac{a_3}{a_1} \frac{\left|\sin \frac{(\mu-\alpha-\beta)\pi}{2}\right|}{\sin \frac{(\mu-\alpha+\beta)\pi}{2}} &\leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_2 \frac{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}}{\left|\cos \frac{(\mu+\beta)\pi}{2}\right|}, \\ \frac{a_3}{a_1} \frac{\left|\sin \frac{(\mu-\alpha-\beta)\pi}{2}\right|}{\sin \frac{(\mu-\alpha+\beta)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\mu-\alpha-\beta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\mu-\alpha+\beta)\pi}{2}} &\leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_2 \frac{\sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu+\beta)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}}{\left|\cos \frac{(\mu+\beta)\pi}{2}\right|}; \end{aligned} \quad (2.28)$$

Model V:

$$\begin{aligned} \left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{2\beta}\right) \sigma(t) &= (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\beta}) \varepsilon(t), \\ 0 \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1 - (\mu - \alpha), \quad \frac{a_3}{a_2} \frac{\left|\sin \frac{(\mu-2\beta)\pi}{2}\right|}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} &\leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_2 \frac{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}}{\left|\cos \frac{(\mu+\beta)\pi}{2}\right|}, \\ \frac{a_3}{a_2} \frac{\left|\sin \frac{(\mu-2\beta)\pi}{2}\right|}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\mu-2\beta)\pi}{2}}{\cos \frac{\mu\pi}{2}} &\leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_2 \frac{\sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu+\beta)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}}{\left|\cos \frac{(\mu+\beta)\pi}{2}\right|}; \end{aligned} \quad (2.29)$$

Model VI:

$$\begin{aligned} \left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \sigma(t) &= (b_1 {}_0D_t^\beta + b_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta}) \varepsilon(t), \\ 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1, \quad \alpha + \beta \geq 1, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_2}{b_1} &\leq a_1 \frac{\cos \frac{(\beta-\alpha)\pi}{2}}{\left|\cos \frac{(\beta+\alpha)\pi}{2}\right|}, \end{aligned}$$

$$\frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1 \frac{\sin \frac{(\beta-\alpha)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\alpha)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\beta-\alpha)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(\beta+\alpha)\pi}{2} \right|} \leq a_1 \frac{\cos \frac{(\beta-\alpha)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(\beta+\alpha)\pi}{2} \right|}; \quad (2.30)$$

Model VII:

$$\begin{aligned} & \left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{2\beta}\right) \sigma(t) = \left(b_1 {}_0D_t^\beta + b_2 {}_0D_t^{2\beta}\right) \varepsilon(t), \\ & 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1+\alpha}{2}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_2 \frac{1}{|\cos(\beta\pi)|}, \\ & \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{a_2}{2 \cos^2(\beta\pi)} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4a_3 \cos^2(\beta\pi)}{a_2^2}}\right) \leq \frac{b_2}{b_1} \leq \frac{a_2}{|\cos(\beta\pi)|}; \end{aligned} \quad (2.31)$$

Model VIII:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \bar{a}_1 {}_0D_t^\alpha + \bar{a}_2 {}_0D_t^{2\alpha}\right) \sigma(t) = \left(b_1 {}_0D_t^\alpha + b_2 {}_0D_t^{2\alpha}\right) \varepsilon(t), \\ & \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \quad \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \leq \bar{a}_1 \frac{1}{|\cos(\alpha\pi)|}, \\ & \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1} \leq \frac{\bar{a}_1}{2 \cos^2(\alpha\pi)} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\bar{a}_2 \cos^2(\alpha\pi)}{\bar{a}_1^2}}\right) \leq \frac{b_2}{b_1} \leq \frac{\bar{a}_1}{|\cos(\alpha\pi)|}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dobijeni termodinamički konzistentni frakcionalni Burgersovi modeli svrstavaju se u dve klase: prva klasa modela data je jednačinom

$$\left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma\right) \sigma(t) = \left(b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\eta}\right) \varepsilon(t), \quad (2.33)$$

druga klasa modela data je jednačinom

$$\left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{\beta+\eta}\right) \sigma(t) = \left(b_1 {}_0D_t^\beta + b_2 {}_0D_t^{\beta+\eta}\right) \varepsilon(t). \quad (2.34)$$

U slučaju prve klase modela najviši red izvoda deformacije, $\mu + \eta \in [1, 2]$, gde je $\eta \in \{\alpha, \beta\}$, je veći nego najviši red izvoda napona, koji je ili $\gamma \in [0, 1]$ u slučaju Modela I, pri čemu je $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \mu \leq 1$ i $\eta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$, ili $\gamma \in [1, 2]$ u slučaju Modela II - V, pri čemu je $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1$ i $(\eta, \gamma) \in \{(\alpha, 2\alpha), (\alpha, \alpha + \beta), (\beta, \alpha + \beta), (\beta, 2\beta)\}$, dok se u slučaju druge klase modela red izvoda napona $\beta \in [0, 1]$ i $\beta + \eta \in [1, 2]$ podudara sa najvišim redom izvoda deformacije, pri čemu je $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, tako da je $\eta = \alpha$ u slučaju Modela VI; $\eta = \beta$ u slučaju Modela VII; i $\alpha = \eta = \beta$, $\bar{a}_1 = a_1 + a_2$, i $\bar{a}_2 = a_3$ u slučaju Modela VIII. Termodinamička konzistentnost frakcionog Burgesovog modela sličnog (2.24) proverena je u [3, 10], dok su klasični i različite varijante frakcionog Burgersovog modela, korišćeni za opis toka viskoelastičnog fluida u različitim geometrijama razmatrani u [28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36].

3. Funkcije puzanja ε_{cr} i relaksacije σ_{sr}

Vremenska evolucija deformacije, dobijena kao odgovor na trenutno primjenjen i vremenski nepromenljiv napon, predstavlja funkciju puzanja ε_{cr} , dok je vremenska evolucija napona, dobijena kao odgovor na trenutno primjenjenu i vremenski nepromenljivu deformaciju, funkcija relaksacije σ_{sr} , pri čemu su zadati napon i zadata deformacija pretpostavljeni kao Hevisajdova funkcija. Prema definiciji funkcija puzanja i relaksacije njihova veza u Laplasovoj slici je

$$s\tilde{\varepsilon}_{cr}(s) = \frac{1}{s\tilde{\sigma}_{sr}(s)}, \text{ odnosno } \varepsilon_{cr}(t) * \sigma_{sr}(t) = t,$$

u originalu. Limesi funkcija puzanja i relaksacije označavaju se sa $\varepsilon_{cr}^{(g)}$ i $\sigma_{sr}^{(g)}$ u slučaju kada $t \rightarrow 0$, odnosno $\varepsilon_{cr}^{(e)}$ i $\sigma_{sr}^{(e)}$ kada $t \rightarrow \infty$, pri čemu, na osnovu Tauberove teoreme i prethodnog izraza, važi

$$\varepsilon_{cr}^{(g)} = \frac{1}{\sigma_{sr}^{(g)}} \text{ i } \varepsilon_{cr}^{(e)} = \frac{1}{\sigma_{sr}^{(e)}}, \quad (3.1)$$

videti [44]. Na osnovu limesa funkcije puzanja, kada vreme teži beskonačnosti, materijali se mogu klasifikovati na materijale koji imaju fluidni karakter, kada funkcija puzanja teži beskonačnosti posle dovoljno dugog vremena $\varepsilon_{cr}^{(e)} \rightarrow \infty$, odnosno na materijale slične čvrstim telima, kada funkcija puzanja teži konačnoj vrednosti posle dovoljno dugo vremena $\varepsilon_{cr}^{(e)} < \infty$.

Primenom napona, pretpostavljenog u obliku Hevisajdove funkcije, na viskoelastični štap, intuitivno je očekivati izduživanje štapa tokom vremena, opisano pozitivnom, monotono rastućom, konkavnom vremenski zavisnom funkcijom deformacije i ubičajeno je da se smatra da je funkcija puzanja Bernštajnova funkcija, odnosno da zadovoljava

$$\varepsilon_{cr}(t) \geq 0 \text{ i } (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \dot{\varepsilon}_{cr}(t) \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t > 0, \quad (3.2)$$

gde tačka iznad ε_{cr} označava prvi izvod po vremenu. Sa druge strane, primenom stalne deformacije na viskoelastični štap, intuitivno je očekivati da će se indukovati napon koji sa vremenom slabi kao pozitivna, monotono opadajuća, konveksna vremenski zavisna funkcija i ubičajeno zadovoljava

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \dot{\sigma}_{sr}(t) \leq 0 \text{ i } \sigma_{sr}(t) \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t > 0, \quad (3.3)$$

te je funkcija relaksacije kompletno monotona funkcija. Kompletno monotona funkcija je pozitivna funkcija čiji izvodi po vremenu naizmenično menjaju znak, dok je Bernšajnova funkcija pozitivna funkcija čiji je prvi izvod kompletno monotona funkcija.

3.1 Funkcije puzanja i relaksacije za klasične viskoelastične modele

Primenom Laplasove transformacije (2.15) na konstitutivnu jednačinu modela, u kojoj je napon (odnosno deformatacija) dat kao Hevisajdova funkcija, dobija se, nakon invertovanja, funkcija puzanja ε_{cr} (odnosno funkcija relaksacije σ_{sr}). Funkcije puzanja i relaksacije za klasični Maksvelov model (2.3) su

$$\varepsilon_{cr}(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t \text{ i } \sigma_{sr}(t) = E e^{-\frac{E}{\eta} t}, \quad (3.4)$$

a za klasični Kelvin-Vojtov model (2.4) su

$$\varepsilon_{cr}(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta} t}\right) \text{ i } \sigma_{sr}(t) = E + \eta \delta(t), \quad (3.5)$$

dok su za klasični Cenerov model (2.5) date izrazima

$$\varepsilon_{cr}(t) = \frac{1}{E} - \frac{1}{E} \left(1 - \frac{a}{b}\right) e^{-\frac{t}{b}} \quad \text{i} \quad \sigma_{sr}(t) = E + E \left(\frac{b}{a} - 1\right) e^{-\frac{t}{a}}. \quad (3.6)$$

Funkcija puzanja za Maksvelov model (3.4)₁ zadovoljava relaciju (3.2), te je Bernštajnova funkcija, dok je funkcija relaksacije σ_{sr} (3.4)₂ kompletno monotona, budući da je predstavljena preko opadajuće eksponencijalne funkcije koja zadovoljava (3.3). Funkcija puzanja Cenerovog modela (3.6)₁ je takođe Bernštajnova funkcija, a funkcija relaksacije (3.6)₂ je kompletno monotona, ukoliko je ispunjen termodinamički uslov $\frac{a}{b} < 1$. Kada je u pitanju klasični Kelvin-Vojtov model, funkcija relaksacije (3.5)₂ je distribucija, stoga ne može biti kompletno monotona funkcija, ali funkcija puzanja jeste Bernštajnova funkcija.

Primenom stalne deformacije u obliku Hevisajdove funkcije na viskoelastični štap Kelvin-Vojtovog tipa, u početnom trenutku se indukuje napon $\sigma_{sr}^{(g)}$ beskonačne vrednosti, dok je za Maksvelov i Cenerov model ta vrednost pozitivna i konačna. Shodno relaciji (3.1), $\varepsilon_{cr}^{(g)}$ ima nultu vrednost za Kelvin-Vojtov model i pozitivne, konačne vrednosti za Maksvelov i Cenerov model:

$$\varepsilon_{cr}^{(g)} = \begin{cases} \frac{1}{E}, & \text{za Maksvelov model,} \\ 0, & \text{za Kelvin-Vojtov model,} \\ \frac{1}{E}, & \text{za Cenerov model,} \end{cases} \quad \text{i} \quad \sigma_{sr}^{(g)} = \begin{cases} E, & \text{za Maksvelov model,} \\ \infty, & \text{za Kelvin-Vojtov model,} \\ E, & \text{za Cenerov model.} \end{cases}$$

Primenom stalne deformacije u obliku Hevisajdove funkcije na viskoelastični štap Maksvelovog tipa, napon se nakon dovoljno dugog vremena relaksira na nultu vrednost $\sigma_{sr}^{(e)} = 0$, dok se u slučaju Kelvin-Vojtovog i Cenerovog modela relaksira do konačne pozitivne vrednosti. Prema relaciji (3.1), $\varepsilon_{cr}^{(e)}$ ima beskonačnu vrednost za Maksvelov model što ga čini pogodnim za opis fluidnih materijala i pozitivne konačne vrednosti za Kelvin-Vojtov i Cenerov model, što ih čini modelima koji opisuju čvrsta tela:

$$\varepsilon_{cr}^{(e)} = \begin{cases} \infty, & \text{za Maksvelov model,} \\ \frac{1}{E}, & \text{za Kelvin-Vojtov model,} \\ \frac{a}{Eb}, & \text{za Cenerov model,} \end{cases} \quad \text{i} \quad \sigma_{sr}^{(e)} = \begin{cases} 0 & \text{za Maksvelov model,} \\ E, & \text{za Kelvin-Vojtov model,} \\ \frac{Eb}{a}, & \text{za Cenerov model.} \end{cases}$$

Funkcija puzanja za klasični Burgersov model (2.8) je

$$\varepsilon_{cr}(t) = \frac{a_1 - \frac{b_2}{b_1}}{b_1} \left(1 - e^{-\frac{b_1}{b_2}t}\right) + \frac{1}{b_1}t + \frac{a_2}{b_2} e^{-\frac{b_1}{b_2}t}, \quad t \geq 0.$$

Zahtev da ε_{cr} bude kompletno monotona funkcija implicira da je $a_1 > \frac{b_2}{b_1}$. Funkcija puzanja u početnom trenutku ima pozitivnu, konačnu vrednost, dok je $\varepsilon_{cr}^{(e)}$ beskonačno:

$$\varepsilon_{cr}^{(g)} = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{i} \quad \varepsilon_{cr}^{(e)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_{cr}(t) = \infty,$$

što implicira da je Burgersov model pogodan za opis tela koji ispoljavaju fluidna svojstva. Funkcija relaksacije za klasični Burgersov model (2.8) može biti ili neosulatorna funkcija

$$\sigma_{sr}(t) = \frac{b_2}{a_2} \left(\cosh \left(\sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{1}{a_2}} t \right) + \left(\frac{b_1}{b_2} - \frac{a_1}{2a_2} \right) \frac{\sinh \left(\sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{1}{a_2}} t \right)}{\sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{1}{a_2}}} \right) e^{-\left(\frac{a_1}{2a_2} \right) t}, \quad t \geq 0,$$

ili osculatorna funkcija sa opadajućom amplitudom

$$\sigma_{sr}(t) = \frac{b_2}{a_2} \left(\cos \left(\sqrt{\frac{1}{a_2} - \left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2} t \right) + \left(\frac{b_1}{b_2} - \frac{a_1}{2a_2} \right) \frac{\sin \left(\sqrt{\frac{1}{a_2} - \left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2} t \right)}{\sqrt{\frac{1}{a_2} - \left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2}} \right) e^{-\frac{a_1}{2a_2} t}, \quad t \geq 0. \quad (3.7)$$

Budući da je osculatorna, funkcija (3.7) ne može biti kompletno monotona, ali podržava termodinamičke restrikcije klasičnog Burgersovog modela. U [49] je pokazano da osim termodinamičkih restrikcija

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1, \quad (3.8)$$

moraju biti ispunjene sužene termodinamičke restrikcije, takve da (3.8) postaje

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{a_1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4a_2}{a_1^2}} \right) < \frac{b_2}{b_1} < \frac{a_1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4a_2}{a_1^2}} \right) \leq a_1,$$

uz $1 \leq \frac{a_1^2}{a_2} < 4$, kako bi funkcija relaksacije mogla biti kompletno monotona funkcija, a funkcija puzanja Bernštajnova.

Saglasno relaciji (3.1), $\sigma_{sr}^{(g)}$ ima nenultu vrednost, dok funkcija relaksacije, u dovoljno dalekom trenutku od momenta primene trenutne i stalne deformacije u obliku Hevisajdove funkcije, dostiže nultu vrednost:

$$\sigma_{sr}^{(g)} = \frac{1}{\varepsilon_{cr}^{(g)}} = \frac{b_2}{a_2} \quad \text{i} \quad \sigma_{sr}^{(e)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{sr}(t) = \frac{1}{\varepsilon_{cr}^{(e)}} = 0.$$

3.2 Funkcije puzanja i relaksacije za frakcione viskoelastične modele

Funkcije puzanja i relaksacije za frakcioni Maksvelov (2.19), Kelvin-Vojtov (2.20) i Cenerov (2.21) model, u slučaju kada je red frakcionih izvoda koji deluju na napon i deformaciju isti, važe relacije analogne relacijama (3.4), (3.5) i (3.6), kojima su date funkcije puzanja i relaksacije za klasični Maksvelov, Kelvin-Vojtov i Cenerov model, stoga je za frakcioni Maksvelov model (2.19)

$$\varepsilon_{cr}(t) = \frac{a}{b} + \frac{1}{b} \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad \text{i} \quad \sigma_{sr}(t) = \frac{b}{a} E_\alpha \left(-\frac{t^\alpha}{a} \right), \quad (3.9)$$

a za frakcioni Kelvin-Vojtov model (2.20) je

$$\varepsilon_{cr}(t) = \frac{1}{a} \left[1 - E_\alpha \left(-t^\alpha \frac{a}{b} \right) \right] \quad \text{i} \quad \sigma_{sr}(t) = a + b \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (3.10)$$

dok je za frakcioni Cenerov model (2.21)

$$\varepsilon_{cr}(t) = \frac{a}{Eb} + \frac{1}{E} \left(1 - \frac{a}{b} \right) \left[1 - E_\alpha \left(-\left(\frac{t}{b} \right)^\alpha \right) \right] \quad \text{i} \quad \sigma_{sr}(t) = E + E \left(\frac{b}{a} - 1 \right) E_\alpha \left(-\left(\frac{t}{a} \right)^\alpha \right),$$

gde je $E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$ jednoparametarska Mitag-Leflerova funkcija.

Funkcija relaksacije je kompletno monotona funkcija u slučaju Maksvelovog modela, kao i u slučaju Cenerovog modela uz termodinamičku restrikciju $\frac{b}{a} \geq 1$, budući da je Mitag-Leflerova funkcija kompletno monotona, videti [19], dok se sukcesivnom primenom izvoda po vremenu može pokazati da je $t^{-\alpha}$ kompletno monotona funkcija ukoliko je $\alpha \in (0, 1)$, odnosno da i funkcija relaksacije (3.10)₂ za Kelvin-Vojtov model zadovoljava relaciju (3.3). Sa druge strane, na isti način se može pokazati da je t^α , za $\alpha > 0$, Bernštajnova funkcija, odnosno da su funkcije puzanja (3.10)₁ i (3.9)₁ za frakcioni Kelvin-Vojtov i Maksvelov model takođe Bernštajnovе funkcije, odnosno da za njih važi relacija (3.2). Funkcija puzanja za frakcioni Cenerov model je takođe Bernštajnova funkcija, budući da je $1 - E_\alpha$ pozitivna, monotono rastuća i konkavna funkcija.

U nastavku su date vrednosti funkcija puzanja i relaksacije u limesima kada $t \rightarrow 0$

$$\varepsilon_{cr}^{(g)} = \begin{cases} \frac{a}{b}, & \text{za Maksvelov model,} \\ 0, & \text{za Kelvin-Vojtov model,} \\ \frac{a}{Eb}, & \text{za Cenerov model,} \end{cases} \quad \text{i} \quad \sigma_{sr}^{(g)} = \begin{cases} \frac{b}{a}, & \text{za Maksvelov model,} \\ \infty, & \text{za Kelvin-Vojtov model,} \\ \frac{Eb}{a}, & \text{za Cenerov model,} \end{cases}$$

i kada $t \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_{cr}^{(e)} = \begin{cases} \infty, & \text{za Maksvelov model,} \\ \frac{1}{q}, & \text{za Kelvin-Vojtov model,} \\ \frac{1}{E}, & \text{za Cenerov model,} \end{cases} \quad \text{i} \quad \sigma_{sr}^{(e)} = \begin{cases} 0 & \text{za Maksvelov model,} \\ a, & \text{za Kelvin-Vojtov model,} \\ E, & \text{za Cenerov model.} \end{cases}$$

Funkcije puzanja za frakcione Burgersove modele u integralnoj formi respektivno su date izrazima

$$\varepsilon_{cr}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{K(\rho)}{|b_1 + b_2 \rho e^{i\eta\pi}|^2} \frac{1 - e^{-\rho t}}{\rho^{1+\mu}} d\rho, \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{cr}(t) = \frac{a_3}{b_2} + \frac{a_3}{b_2} \int_0^t f_{cr}(\tau) d\tau, \quad \text{gde je } f_{cr}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{Q(\rho)}{\left| \frac{b_1}{b_2} + \rho e^{i\eta\pi} \right|^2} \frac{e^{-\rho t}}{\rho^\beta} d\rho, \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_{cr}(t) = \frac{\bar{a}_2}{b_2} + \frac{\bar{a}_2}{b_2} \int_0^t \bar{f}_{cr}(\tau) d\tau, \text{ gde je } \bar{f}_{cr}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\bar{Q}(\rho)}{\left| \frac{b_1}{b_2} + \rho^\alpha e^{i\alpha\pi} \right|^2} \frac{e^{-\rho t}}{\rho^\alpha} d\rho, \quad (3.13)$$

u slučaju modela I - V, VI - VII, kao i za model VIII, gde su jezgra K , Q i \bar{Q} respektivno

$$K(\rho) = b_1 [\sin(\mu\pi) + a_1 \rho^\alpha \sin((\mu - \alpha)\pi) + a_2 \rho^\beta \sin((\mu - \beta)\pi) + a_3 \rho^\gamma \sin((\mu - \gamma)\pi) + b_2 \rho^\eta K_2(\rho)] + b_2 \rho^\eta [\sin((\mu + \eta)\pi) + a_1 \rho^\alpha \sin((\mu + \eta - \alpha)\pi) + a_2 \rho^\beta \sin((\mu + \eta - \beta)\pi) + a_3 \rho^\gamma \sin((\mu + \eta - \gamma)\pi)], \quad (3.14)$$

$$Q(\rho) = \frac{b_1}{b_2} \left[\frac{1}{a_3} \sin(\beta\pi) + \frac{a_1}{a_3} \rho^\alpha \sin((\beta - \alpha)\pi) \right] + \rho^\eta \left[\sin((\beta + \eta)\pi) + \frac{a_1}{a_3} \rho^\alpha \sin((\beta + \eta - \alpha)\pi) + \left(\frac{a_2}{a_3} - \frac{b_1}{b_2} \right) \rho^\beta \sin(\eta\pi) \right], \quad (3.15)$$

$$\bar{Q}(\rho) = \frac{b_1}{b_2} \frac{1}{\bar{a}_2} \sin(\alpha\pi) + \rho^\alpha \left[\frac{1}{\bar{a}_2} \sin(2\alpha\pi) + \left(\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2} - \frac{b_1}{b_2} \right) \rho^\alpha \sin(\alpha\pi) \right]. \quad (3.16)$$

Vrednosti funkcije puzanja u limesu kada $t \rightarrow 0$ su konačne i pozitivne za modele druge klase frakcionog Burgersovog modela (2.34), dok za prvu klasu frakcionog Burgersovog modela (2.33) imaju nultu vrednost. Funkcija puzanja ima beskonačnu vrednost kada $t \rightarrow \infty$ za obe klase modela,

$$\varepsilon_{cr}^{(g)} = \begin{cases} 0, & \text{za modele I - V,} \\ \frac{a_3}{b_2}, & \text{za modele VI - VII,} \\ \frac{\bar{a}_2}{b_2}, & \text{za model VIII,} \end{cases} \quad \varepsilon_{cr}^{(e)} = \infty,$$

što implicira da termodinamički konzistentni frakcionalni Burgersovi modeli opisuju tela slična fluidima.

Zahtevom da su funkcije puzanja (3.11), (3.12) i (3.13) Bernštajnovе funkcije dobijaju se sužene termodinamičke restrikcije na parametre modela. Za modele I - V, nenegativnost funkcije K (3.14) obezbeđuje da je funkcija puzanja (3.11) Bernštajnova funkcija. Funkcija puzanja za modele VI i VII (3.12) je Bernštajnova ukoliko je funkcija f_{cr} , koja u njoj figuriše, kompletno monotona, što jeste slučaj ako je Q (3.15) nenegativna funkcija. Slično važi i za model VIII, gde nenegativnost funkcije \bar{Q} (3.16) obezbeđuje da je \bar{f}_{cr} kompletno monotona funkcija, zbog čega je funkcija puzanja (3.13) Bernštajnova, kako je pokazano u [49].

Funkcija relaksacije za frakcione Burgersove modele I - V, data u integralnoj formi, je

$$\sigma_{sr}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{K(\rho)}{|\Psi(\rho e^{i\pi})|^2} \frac{e^{-\rho t}}{\rho^{1-\mu}} d\rho + \begin{cases} 0, & \text{u prvom slučaju,} \\ f_{sr}^*(\rho^*) e^{-\rho^* t}, & \text{u drugom slučaju,} \\ f_{sr}^{(r)}(t), & \text{u trećem slučaju,} \end{cases} \quad (3.17)$$

gde je jezgro K dato izrazom (3.14), funkcija Ψ je

$$\Psi(s) = 1 + a_1 s^\alpha + a_2 s^\beta + a_3 s^\gamma,$$

ρ^* se određuje iz jednačine

$$\frac{a_1 \sin(\alpha\pi)}{a_3 |\sin(\gamma\pi)|} + \frac{a_2 \sin(\beta\pi)}{a_3 |\sin(\gamma\pi)|} (\rho^*)^{\beta-\alpha} = (\rho^*)^{\gamma-\alpha}, \quad (3.18)$$

a funkcije f_{sr}^* i $f_{sr}^{(r)}$ su

$$f_{sr}^*(\rho^*) = \operatorname{Re} \left(\frac{b_1 + b_2 (\rho^*)^\eta e^{i\eta\pi}}{\alpha a_1 (\rho^*)^\alpha e^{i\alpha\pi} + \beta a_2 (\rho^*)^\beta e^{i\beta\pi} + \gamma a_3 (\rho^*)^\gamma e^{i\gamma\pi}} e^{i\mu\pi} \right) (\rho^*)^\mu, \\ f_{sr}^{(r)}(t) = 2e^{\rho_0 t \cos \varphi_0} \operatorname{Re} \left(\frac{b_1 + b_2 s^\eta}{\alpha a_1 s^{\alpha-1} + \beta a_2 s^{\beta-1} + \gamma a_3 s^{\gamma-1}} \Big|_{s=\rho_0 e^{i\varphi_0}} \frac{e^{-i(1-\mu)\varphi_0}}{\rho_0^{1-\mu}} e^{i\rho_0 t \sin \varphi_0} \right), \quad (3.19)$$

gde je $s_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$, $\varphi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, nula funkcije Ψ koja se nalazi u drugom kvadrantu kompleksne ravni.

Funkcija relaksacije za modele VI - VII je

$$\sigma_{sr}(t) = \frac{b_2}{a_3} \left[1 - \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_0^\infty \frac{Q(\rho)}{\left| \psi(\rho e^{i\pi}) + \rho^\beta e^{i\beta\pi} \left(\frac{b_1}{b_2} + \rho^\eta e^{i\eta\pi} \right) \right|^2} \rho^\beta e^{-\rho\tau} d\rho d\tau \right] - \frac{b_2}{a_3} \begin{cases} 0, & \text{u prvom slučaju,} \\ -f_{sr}^*(\rho^*) (1 - e^{-\rho^* t}), & \text{u drugom slučaju,} \\ \int_0^t f_{sr}^{(r)}(\tau) d\tau, & \text{u trećem slučaju,} \end{cases} \quad (3.20)$$

gde je jezgro Q dano izrazom (3.15), funkcija ψ je

$$\psi(s) = \frac{1}{a_3} + \frac{a_1}{a_3}s^\alpha + \left(\frac{a_2}{a_3} - \frac{b_1}{b_2}\right)s^\beta,$$

a ρ^* se određuje iz jednačine (3.18), gde je $\gamma = \beta + \eta$, dok su funkcije f_{sr}^* i $f_{sr}^{(r)}$ date izrazima

$$\begin{aligned} f_{sr}^*(\rho^*) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1 + a_1(\rho^*)^\alpha e^{i\alpha\pi} + a_3 \left(\frac{a_2}{a_3} - \frac{b_1}{b_2} \right) (\rho^*)^\beta e^{i\beta\pi}}{\alpha a_1(\rho^*)^\alpha e^{i\alpha\pi} + \beta a_2(\rho^*)^\beta e^{i\beta\pi} + (\beta + \eta) a_3(\rho^*)^{\beta+\eta} e^{i(\beta+\eta)\pi}} \right), \\ f_{sr}^{(r)}(t) &= 2e^{\rho_0 t \cos \varphi_0} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + a_1 s^\alpha + a_3 \left(\frac{a_2}{a_3} - \frac{b_1}{b_2} \right) s^\beta}{\alpha a_1 s^{\alpha-1} + \beta a_2 s^{\beta-1} + (\beta + \eta) a_3 s^{\beta+\eta-1}} \Big|_{s=\rho_0 e^{i\varphi_0}} e^{i\rho_0 t \sin \varphi_0} \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

pri čemu je $s_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$, $\varphi_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, nula funkcije ψ koja se nalazi u drugom kvadrantu kompleksne ravni.

Funkcija relaksacije za model VIII data je izrazom

$$\begin{aligned} \sigma_{sr}(t) &= \frac{b_2}{\bar{a}_2} \left[1 - \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_0^\infty \frac{\bar{Q}(\rho)}{\left| \bar{\psi}(\rho e^{i\pi}) + \rho^\alpha e^{i\alpha\pi} \left(\frac{b_1}{b_2} + \rho^\alpha e^{i\alpha\pi} \right) \right|^2} \rho^\alpha e^{-\rho\tau} d\rho d\tau \right] \\ &\quad - \frac{b_2}{a_3} \begin{cases} 0, & \text{u prvom slučaju,} \\ -\bar{f}_{sr}^*(\rho^*) (1 - e^{-\rho^* t}), & \text{u drugom slučaju,} \\ \int_0^t \bar{f}_{sr}^{(r)}(\tau) d\tau, & \text{u trećem slučaju,} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.22)$$

pri čemu je jezgro \bar{Q} dano izrazom (3.16), funkcija $\bar{\psi}$ je

$$\bar{\psi}(s) = \frac{1}{\bar{a}_2} + \left(\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2} - \frac{b_1}{b_2} \right) s^\alpha,$$

ρ^* je dano izrazom

$$\rho^* = \left(\frac{1}{\sin(\alpha\pi)} \sqrt{\frac{1}{\bar{a}_2} - \left(\frac{\bar{a}_1}{2\bar{a}_2} \right)^2} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

a funkcije \bar{f}_{sr}^* i $\bar{f}_{sr}^{(r)}$ izrazima

$$\begin{aligned} \bar{f}_{sr}^*(\rho^*) &= \frac{1}{\alpha(\rho^*)^\alpha} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + \bar{a}_2 \left(\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2} - \frac{b_1}{b_2} \right) (\rho^*)^\alpha e^{i\alpha\pi}}{\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2(\rho^*)^\alpha e^{i\alpha\pi}} e^{-i\alpha\pi} \right), \\ \bar{f}_{sr}^{(r)}(t) &= 2e^{\rho_0 t \cos \varphi_0} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + \bar{a}_2 \left(\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2} - \frac{b_1}{b_2} \right) s^\alpha}{\alpha s^{\alpha-1} (\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 s^\alpha)} \Big|_{s=\rho_0 e^{i\varphi_0}} e^{i\rho_0 t \sin \varphi_0} \right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

gde je $s_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$, $\varphi_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ jedna od nula funkcije $\bar{\psi}$ koja se nalazi u drugom kvadrantu kompleksne ravni.

Zahtevom nenegativnosti jezgra K obezbeđuje se da je u prvom slučaju funkcija relaksacije (3.17) kompletno monotona, što implicira sužene termodinamičke restrikcije jednake onima koje obezbeđuju da je funkcija puzanja (3.11) Bernštajnova funkcija, budući da su i funkcija relaksacije (3.17) i funkcija puzanja (3.11) definisane preko istog jezgra K . Takođe, za drugi slučaj, jednake sužene termodinamičke restrikcije koje su obezbeđivale da su funkcije puzanja za modele VI - VII (3.12) i model VIII (3.13) Bernštajnovе funkcije, obezbeđuju da su funkcije relaksacije za modele VI - VII (3.20) i model VIII (3.22) kompletно monotone, budući da su date preko istog jezgra (3.15), odnosno (3.16). U trećem slučaju, zbog osobina funkcija $f_{sr}^{(r)}$ (3.19), $f_{sr}^{(r)}$ (3.21) i $\bar{f}_{sr}^{(r)}$ (3.23) funkcije relaksacije (3.17), (3.20) i (3.22) imaju prigušeni oscilatorni karakter. Detaljnija izvođenja koja daju ove informacije mogu se pogledati u [49].

Vrednosti funkcije relaksacije u limesu kada $t \rightarrow 0$ su beskonačne za modele prve klase frakcionog Burgersovog modela (2.33), dok su konačne i pozitivne za modele druge klase frakcionog Burgersovog modela (2.34). U limesu kada $t \rightarrow \infty$ funkcija puzanja ima nultu vrednost za obe klase modela:

$$\sigma_{sr}^{(g)} = \begin{cases} \infty & \text{za modele I - V,} \\ \frac{b_2}{a_3}, & \text{za modele VI - VII,} \\ \frac{b_2}{\bar{a}_2}, & \text{za model VIII,} \end{cases} \quad \sigma_{sr}^{(e)} = 0.$$

Zadavanje konstitutivne jednačine viskoelastičnog tela korišćenjem funkcije relaksacije našlo je primenu u dokazivanju disipativnih svojstava frakcionih talasnih jednačina sa istorijskim i nelokalnim karakteristikama koristeći apriorne energijske ocene u [61]. Frakcionala Burgersova konstitutivna jednačina primenjena je u [58] za modeliranje polimera, dok je u [13, 47, 59] eksperimentalno ispitivano puzanje asfaltnih mešavina i određeni su optimalni parametri frakcionog Burgersovog modela. Eksperimenti puzanja i relaksacije napona su u [17, 20] korišćeni za ispitivanje mehaničkih osobina bioloških tkiva. Funkcija puzanja koja odgovara klasičnim modelima viskoelastičnosti razmatrana je u [46]. S druge strane, teorijsko istraživanje funkcija puzanja i relaksacije, koje odgovara frakcionim viskoelastičnim modelima koji imaju red izvoda niži od prvog reda, predstavljeno je u [9, 44, 45], gde je pokazano da je funkcija puzanja Bernštajnova funkcija, a funkcija relaksacije kompletno monotona funkcija.

4. Frakciona Burgersova talasna jednačina na ograničenom domenu

Da bi se rešio i analizirao početno-granični problem na domenu $x \in [0, L]$ tokom vremena $t > 0$, odnosno razmotrila propagacija talasa u viskoelastičnom štapu konačne dužine L , fiksiranom na jednom kraju, dok je drugi kraj slobodan i izložen zadatom pomeranju u ili zadatom naponu σ , potrebno je jednačinama kretanja i deformacije

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma(x, t) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) \quad \text{i} \quad \varepsilon(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \quad (4.1)$$

pridružiti termodynamički konzistentan frakcioni Burgersov model prve klase

$$(1 + a_1 {}_0 D_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma) \sigma(x, t) = (b_1 {}_0 D_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^{\mu+\eta}) \varepsilon(x, t), \quad (4.2)$$

ili druge klase

$$(1 + a_1 {}_0 D_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^{\beta+\eta}) \sigma(x, t) = (b_1 {}_0 D_t^\beta + b_2 {}_0 D_t^{\beta+\eta}) \varepsilon(x, t), \quad (4.3)$$

gde ${}_0 D_t^\xi$ označava operator Riman-Liuvilovog frakcionog izvoda (2.13) reda $\xi \in [n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Frakciona Burgerova talasna jednačina, predstavljena sistemom jednačina (4.1) i (4.2) ili (4.3), podleže nultim početnim uslovima

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0, \quad \sigma(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \sigma(x, 0) = 0, \quad \varepsilon(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L], \quad (4.4)$$

kao i graničnim uslovima

$$u(0, t) = 0 \quad \text{i} \quad u(L, t) = \Upsilon(t), \quad \text{ili} \quad \sigma(L, t) = \Sigma(t), \quad t > 0, \quad (4.5)$$

što odgovara štapu fiksiranom na jednom kraju i opterećenom na drugom kraju, ili zadatom deformacijom ili zadatim naponom.

Frakciona Burgersova talasna jednačina ispitivana je u [50] za Košijev početni problem na neograničenom domenu, dok je propagacija talasa u viskoelastičnom štapu konačne dužine modeliranom frakcionom konstitutivnom jednačinom raspodeljenog reda sa konstitutivnom funkcijom stepenog tipa, tj. početno-granični problem (4.1) izložen početnim i graničnim uslovima (4.4) i (4.5), opisan u [7, 8], a u [4] je upotrebljen fluidni model viskoelastičnog tela.

Prikušene oscilacije i problemi prostirnja talasa na ograničenom i polubeskonačnom domenu razmatrani su u [52, 53, 54, 55, 56] modeliranjem viskoelastičnih tela Cenerovim, modifikovanim Cenerovim i modifikovanim Maksvelovim konstitutivnim jednačinama. Pitanja brzine prostiranja talasa, asymptotskih rešenja u blizini talasnog fronta frakcione talasne jednačine, disperzije talasa i atenuacionih svojstva materijala razmotrena su u [21, 22, 23, 24, 25], dok je Buhen-Mainardijeva ekspanzija rešenja u okolini talasnog fronta, koja je uvedena u [11], iskorišćena u [15, 16] za analizu frakcionalih talasnih jednačina koje opisuju materijale Beselovog, celobrojnog i frakcionog Maksvelovog i Kelvin-Vojtovog tipa. Detalji o Beselovom modelu viskoelastičnog tela mogu se naći u [14, 18]. Prostiranje talasa za klasu termodynamički konzistentnih frakcionalih modela viskoelastičnog tela izučavano je u [39]. Brzina prostiranja maksimuma rešenja frakcione talasne jednačine ispitivana je u [41, 42, 43]. Frakcione talasne jednačine pronaše su primenu i u modeliranju akustičkih karakteristika kompleksnih medijuma, videti [12]. Pregled modela viskoelastičnih materijala frakcionog reda, problemi prostiranja talasa, uključujući disperziju talasa i atenuacione procese, mogu se pronaći u [5, 6, 27, 44, 57].

Sistem jednačina (4.1) zajedno sa (4.2) ili (4.3), koji predstavlja frakcionu Burgersovu talasnu jednačinu i kojem su pridruženi početni i granični uslovi (4.4) i (4.5), nakon bezdimenzionisanja i nakon izostavljanja crtica iznad bezdimenzijskih veličina postaje

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t), \quad \varepsilon(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t), \quad \text{sa} \quad (4.6)$$

$$(1 + a_1 {}_0 D_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma) \sigma(x, t) = ({}_0 D_t^\mu + b_0 D_t^{\mu+\eta}) \varepsilon(x, t) \quad \text{ili} \quad (4.7)$$

$$(1 + a_1 {}_0 D_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^{\beta+\eta}) \sigma(x, t) = ({}_0 D_t^\beta + b_0 D_t^{\beta+\eta}) \varepsilon(x, t), \quad (4.8)$$

zajedno sa početnim i graničnim uslovima

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0, \quad \sigma(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \sigma(x, 0) = 0, \quad \varepsilon(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (4.9)$$

$$u(0, t) = 0 \quad \text{i} \quad u(1, t) = \Upsilon(t), \quad \text{ili} \quad \sigma(1, t) = \Sigma(t), \quad t > 0, \quad (4.10)$$

korišćenjem bezdimenzijskih veličina

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T}, \quad \bar{u} = \frac{u}{L}, \quad \bar{\Upsilon} = \frac{\Upsilon}{L}, \quad \bar{\sigma} = \sigma \frac{T^\xi}{b_1}, \quad \bar{\Sigma} = \Sigma \frac{T^\xi}{b_1}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon, \\ \bar{a}_1 &= \frac{a_1}{T^\alpha}, \quad \bar{a}_2 = \frac{a_2}{T^\beta}, \quad \bar{a}_3 = \frac{a_3}{T^\zeta}, \quad \bar{b} = \frac{b_2}{b_1 T^\eta}, \quad \text{gde je } T = \left(\frac{\rho L^2}{b_1}\right)^{\frac{1}{2-\xi}}, \end{aligned}$$

gde je $(\xi, \zeta) = (\mu, \gamma)$ za prvu klasu i $(\xi, \zeta) = (\beta, \beta + \eta)$, $\eta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ za drugu klasu Burgersovih modela. Primenom Laplasove transformacije (2.15), vodeći računa o multim početnim uslovima (4.9), sistem jednačina (4.6) i (4.7), ili (4.6) i (4.8) postaje

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\sigma}(x, s) = s^2 \tilde{u}(x, s), \quad \tilde{\varepsilon}(x, s) = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}(x, s), \quad \tilde{\sigma}(x, s) = \tilde{G}(s) \tilde{\varepsilon}(x, s), \quad (4.11)$$

gde je kompleksni moduo

$$\tilde{G}(s) = \frac{\phi_\varepsilon(s)}{\phi_\sigma(s)}, \quad \text{pri čemu je} \quad (4.12)$$

$$\phi_\sigma(s) = 1 + a_1 s^\alpha + a_2 s^\beta + a_3 s^\gamma, \quad \phi_\varepsilon(s) = s^\mu + b s^{\mu+\eta}, \quad \text{ili} \quad (4.13)$$

$$\phi_\sigma(s) = 1 + a_1 s^\alpha + a_2 s^\beta + a_3 s^{\beta+\eta}, \quad \phi_\varepsilon(s) = s^\beta + b s^{\beta+\eta}, \quad (4.14)$$

za prvu klasu, odnosno drugu klasu Burgersovih modela, tako da se sistem jednačina (4.11), rešavan po \tilde{u} , svodi na običnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(x, s) - \frac{s^2}{\tilde{G}(s)} \tilde{u}(x, s) = 0,$$

čije je rešenje

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, s) &= C_1(s) e^{\frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}} + C_2(s) e^{-\frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}, \quad \text{tj}, \\ \tilde{u}(x, s) &= C(s) \sinh \frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

budući da prvi granični uslov u (4.10), koji odgovara činjenici da je jedan kraj štapa fiksiran, obezbeđuje da je $2C = C_1 = -C_2$, dok Laplasova transformacija pomeranja (4.15) u kombinaciji sa (4.11)_{2,3} daje Laplasovu transformaciju napona u obliku

$$\tilde{\sigma}(x, s) = C(s) s \sqrt{\tilde{G}(s)} \cosh \frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}. \quad (4.16)$$

4.1 Rešenje za zadato pomeranje slobodnog kraja štapa

Funkcije pomeranja i napona u Laplasovoj slici za dato pomeranje slobodnog kraja štapa, u skladu sa (4.15) i (4.16), daju sledeće izraze

$$\tilde{u}(x, s) = \tilde{\Upsilon}(s) \frac{\sinh \frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}{\sinh \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}} \quad \text{i} \quad \tilde{\sigma}(x, s) = \tilde{\Upsilon}(s) s \sqrt{\tilde{G}(s)} \frac{\cosh \frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}{\sinh \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}, \quad (4.17)$$

pri čemu je funkcija C određena iz Laplasove transformacije pomeranja (4.15) i graničnog uslova (4.10)₂ u obliku

$$C(s) = \frac{\tilde{\Upsilon}(s)}{\sinh \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}.$$

4.1.1 Pomeranje proizvoljne tačke štapa za zadatu funkciju Υ

Funkcija pomeranja u Laplasovoj slici, data izrazom (4.17)₁, može se izraziti preko jezgra rešenja u slici \tilde{P} u slučaju prve klase Burgersovih modela, ili preko regularizovanog jezgra rešenja u slici \tilde{P}_{reg} u slučaju modela koji pripadaju drugoj klasi Burgersovih modela, definisanih izrazima

$$\tilde{P}(x, s) = \frac{\sinh \frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}{\sinh \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}} \quad \text{i} \quad \tilde{P}_{\text{reg}}(x, s) = \frac{1}{s} \tilde{P}(x, s). \quad (4.18)$$

Razmatranjem asimptotskog ponašanja jezgra rešenja u slici \tilde{P} i njegove regularizovane forme \tilde{P}_{reg} kada $s \rightarrow \infty$, dobija se

$$\tilde{P}(x, s) = e^{-(1-x)\frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}} \frac{1 - e^{-2\frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}}{1 - e^{-2\frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}} \sim e^{-\sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)s^{1-\frac{\delta}{2}}} \quad \text{i} \quad \tilde{P}_{\text{reg}}(x, s) \sim \frac{1}{s} e^{-\sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)s}, \quad (4.19)$$

budući da je asimptotsko ponašanje kompleksnog modula \tilde{G} (4.12)

$$\tilde{G}(s) \sim \begin{cases} \frac{b}{a_3} s^\delta, & \text{za modele prve klase, pri čemu je } \delta = \mu + \eta - \gamma, \\ \frac{b}{a_3}, & \text{za modele druge klase,} \end{cases} \quad \text{kada } s \rightarrow \infty. \quad (4.20)$$

Dakle, u slučaju modela prve klase, za asimptotsko ponašanje jezgra rešenja P dobija se izraz

$$P(x, t) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin \left(\sqrt{\frac{a_3}{b}} (1-x) \rho^{1-\frac{\delta}{2}} \sin \frac{\delta \pi}{2} \right) e^{-\rho t + \sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)\rho^{1-\frac{\delta}{2}} \cos \frac{\delta \pi}{2}} d\rho, \quad \text{kada } t \rightarrow 0, \quad (4.21)$$

nakon primene inverzne Laplasove transformacije na (4.19)₁ koristeći definiciju i integraciju u kompleksnoj ravni, dok se za asimptotsko ponašanje regularizovanog jezgra rešenja P_{reg} , koje odgovara modelima druge klase, dobija

$$P_{\text{reg}}(x, t) \sim H \left(t - \sqrt{\frac{a_3}{b}} (1-x) \right), \quad \text{kada } t \rightarrow 0. \quad (4.22)$$

Sa druge strane, asimptotsko ponašanje regularizovanog jezgra rešenja \tilde{P}_{reg} kada $s \rightarrow 0$, je

$$\tilde{P}_{\text{reg}}(x, s) = \frac{1}{s} \frac{\left(1 + xs^{1-\frac{\xi}{2}} + \dots \right) - \left(1 - xs^{1-\frac{\xi}{2}} + \dots \right)}{\left(1 + s^{1-\frac{\xi}{2}} + \dots \right) - \left(1 - s^{1-\frac{\xi}{2}} + \dots \right)} \sim \frac{1}{s} x, \quad \text{dajući } P_{\text{reg}}(x, t) \sim x H(t) = x, \quad \text{kada } t \rightarrow \infty, \quad (4.23)$$

budući da je asimptotsko ponašanje kompleksnog modula \tilde{G} (4.12)

$$\tilde{G}(s) \sim s^\xi, \quad \text{kada } s \rightarrow 0, \quad \text{gde je } \xi \in \{\mu, \beta\}. \quad (4.24)$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije funkcije \tilde{P} (4.18)₂ dobija se

$$P(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} P_{\text{reg}}(x, t) + P_{\text{reg}}(x, 0) \delta(t) = \frac{\partial}{\partial t} P_{\text{reg}}(x, t),$$

budući da Tauberova teorema daje $P_{\text{reg}}(x, 0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \tilde{P}_{\text{reg}}(x, s) = 0$, pri čemu je asimptotsko ponašanje $s \tilde{P}_{\text{reg}}$ kada $s \rightarrow \infty$ određeno $s \tilde{P}_{\text{reg}}(x, s) \sim e^{-\sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)s} \rightarrow 0$, videti (4.19)₂. Preciznije, jezgro rešenja je

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(P_{\text{reg}}(x, t) H \left(t - \sqrt{\frac{a_3}{b}} (1-x) \right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} P_{\text{reg}}(x, t) H \left(t - \sqrt{\frac{a_3}{b}} (1-x) \right) + P_{\text{reg}}(x, t) \delta \left(t - \sqrt{\frac{a_3}{b}} (1-x) \right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

jer regularizovano jezgro rešenja P_{reg} ima nultu vrednost za sve trenutke do trenutka $t = \sqrt{\frac{a_3}{b}} (1-x)$ i nenultu vrednost nakon toga, videti (4.22).

Jezgro rešenja P dobijeno je primenom inverzne Laplasove transformacije u poglavlju 5 korišćenjem Košijeve teoreme o reziduumima, budući da funkcija \tilde{P} ima beskonačno mnogo polova prvog reda, koji se dobijaju kao nule njenog imenioca, odnosno kao rešenja jednačine

$$\sinh \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}} = 0 \text{ što daje } \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}} = -ik\pi, \text{ odnosno, } \frac{s^2}{\tilde{G}(s)} + (k\pi)^2 = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.26)$$

Preciznije govoreći, kako je pokazano u poglavlju 6, postoji par kompleksno konjugovanih polova s_k i \bar{s}_k za svako $k \in \mathbb{N}_0$ koji leže u levoj kompleksnoj poluravni. Osim polova, pored tačke grananja $s = 0$, funkcija \tilde{P} može imati i tačke grananja zbog kvadratnog korena funkcije \tilde{G} , budući da imenilac ϕ_σ može imati ili jednu negativnu realnu nulu ili par kompleksno konjugovanih nula sa negativnim realnim delom, dok je u slučaju kada funkcija ϕ_σ nema nula $s = 0$ jedina tačka grananja funkcije \tilde{P} . Eksplicitna forma jezgra rešenja P i njegove regularizovane forme P_{reg} , u slučaju kada funkcija \tilde{P} ili nema tačaka grananja osim $s = 0$ ili ima jednu negativnu realnu tačku grananja, data je sa

$$P(x, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Im} \left(\frac{\sinh \frac{x\rho e^{i\pi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\pi})}}}{\sinh \frac{\rho e^{i\pi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\pi})}}} \right) e^{-\rho t} d\rho \\ + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} e^{-\rho_k t |\cos \varphi_k|} \text{Re} \left(\frac{s_k}{1 + (k\pi)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}} e^{i\rho_k t \sin \varphi_k} \right), \quad (4.27)$$

$$P_{\text{reg}}(x, t) = x - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Im} \left(\frac{1}{\rho e^{i\pi}} \frac{\sinh \frac{x\rho e^{i\pi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\pi})}}}{\sinh \frac{\rho e^{i\pi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\pi})}}} \right) e^{-\rho t} d\rho \\ + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} e^{-\rho_k t |\cos \varphi_k|} \text{Re} \left(\frac{1}{1 + (k\pi)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}} e^{i\rho_k t \sin \varphi_k} \right), \quad (4.28)$$

dok su jezgro rešenja P i njegova regularizovana forma dati sa

$$P(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Im} \left(\frac{\sinh \frac{x\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}}{\sinh \frac{\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}} e^{i(\varphi_0 + \rho t \sin \varphi_0)} \right) e^{-\rho t |\cos \varphi_0|} d\rho \\ + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} e^{-\rho_k t |\cos \varphi_k|} \text{Re} \left(\frac{s_k}{1 + (k\pi)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}} e^{i\rho_k t \sin \varphi_k} \right), \quad (4.29)$$

$$P_{\text{reg}}(x, t) = x \frac{\varphi_0}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Im} \left(\frac{1}{\rho e^{i\varphi_0}} \frac{\sinh \frac{x\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}}{\sinh \frac{\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}} e^{i(\varphi_0 + \rho t \sin \varphi_0)} \right) e^{-\rho t |\cos \varphi_0|} d\rho \\ + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} e^{-\rho_k t |\cos \varphi_k|} \text{Re} \left(\frac{1}{1 + (k\pi)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}} e^{i\rho_k t \sin \varphi_k} \right), \quad (4.30)$$

u slučaju kada funkcija \tilde{P} ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja $s_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$ i \bar{s}_0 sa negativnim realnim delom i dodatno tačku grananja $s = 0$. Treba zapaziti da je oblik (4.29) jezgra rešenja P opštiji i da se svodi na (4.27) za $\varphi_0 = \pi$.

Jezgro rešenja P , prema (4.27) ili (4.29), sadrži dva člana: prvi koji je nemonoton vremenski i prostorno i drugi koji predstavlja superpoziciju stojećih talasa koji osciluju ugaonom frekvencijom $\omega_k = \rho_k \sin \varphi_k$ i amplitudom čija vrednost opada tokom vremena. Brzina propagacije pobude je konačna u slučaju modela druge klase i data je sa $c = \sqrt{\frac{b}{a_3}}$, jer je $P_{\text{reg}}(x, t) \neq 0$ za $t > \sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)$, što sledi iz (4.22), a nije slučaj sa prvom klasom modela, za koje je brzina propagacije pobude beskonačna, što je u skladu sa asimptotskim ponašanjem jezgra rešenja P za $t \rightarrow 0$, videti (4.21).

Kada je poznato jezgro rešenja P , dato izrazima (4.27) i (4.29) u slučaju prve klase modela, ili u slučaju druge klase modela izrazom (4.25), gde je P_{reg} određeno sa (4.28) ili (4.30), funkcija pomeranja, kada je zadato pomeranje na slobodnom kraju štapa, je

$$u(x, t) = \Upsilon(t) * P(x, t), \quad (4.31)$$

a dobijena je inverznom Laplasovom transformacijom izraza (4.17)₁, gde je jezgro rešenja u slici \tilde{P} definisano sa (4.18).

4.1.2 Napon u proizvoljnoj tački štapa za zadatu funkciju Υ

Funkcija napona u Laplasovoj slici, data sa (4.17)₂, može se izraziti ili preko jezgra rešenja u slici \tilde{R} u slučaju Burgersovih modela prve klase, ili preko regularizovanog jezgra rešenja u slici \tilde{R}_ε u slučaju modela koji pripadaju drugoj klasi, koji su definisani preko

$$\tilde{R}(x, s) = s \sqrt{\tilde{G}(s)} \frac{\cosh \frac{x s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}{\sinh \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}} \quad \text{i} \quad \tilde{R}_\varepsilon(x, s) = \tilde{R}(x, s) e^{-\varepsilon \sqrt{s}}. \quad (4.32)$$

Razmatranjem asimptotike jezgra rešenja u slici \tilde{R} i njegove regularizovane varijante \tilde{R}_ε , kada $s \rightarrow \infty$, dobija se

$$\begin{aligned} \tilde{R}(x, s) &= s \sqrt{\tilde{G}(s)} e^{-(1-x) \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}} \frac{1 + e^{-2 \frac{x s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}}{1 - e^{-2 \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}} \sim \sqrt{\frac{b}{a_3}} s^{1+\frac{\delta}{2}} e^{-\sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)s^{1-\frac{\delta}{2}}} \quad \text{i} \\ \tilde{R}_\varepsilon(x, s) &\sim \sqrt{\frac{b}{a_3}} s e^{-\sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)s} e^{-\varepsilon \sqrt{s}}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

gde je iskorišćeno asimptotsko ponašanje kompleksnog modula \tilde{G} , datog sa (4.20), tako da se za asimptotsko ponašanje jezgra rešenja R kada $t \rightarrow 0$ za modele prve klase dobija

$$R(x, t) \sim -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{b}{a_3}} \int_0^\infty \sin \left(\sqrt{\frac{a_3}{b}} (1-x) \rho^{1-\frac{\delta}{2}} \sin \frac{\delta \pi}{2} - \frac{\delta \pi}{2} \right) e^{-\rho t + \sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)\rho^{1-\frac{\delta}{2}} \cos \frac{\delta \pi}{2}} \rho^{1+\frac{\delta}{2}} d\rho, \quad \text{kada } t \rightarrow 0, \quad (4.34)$$

nakon inverzne Laplasove transformacije izraza (4.33) koristeći definiciju i integraciju u kompleksnoj ravni, dok se za asimptotsko ponašanje, kada $t \rightarrow 0$, regularizovanog jezgra rešenja R_ε , koje odgovara modelima druge klase, dobija

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(x, t) &\sim \sqrt{\frac{b}{a_3}} \delta \left(t - \sqrt{\frac{a_3}{b}} (1-x) \right) * \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4t}} \right) \\ &\sim \sqrt{\frac{b}{a_3}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon}{2\tau\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4\tau}} \right)_{\tau=t-\sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)}, \quad \text{kada } t \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

budući da je $\mathcal{L}^{-1} \left[e^{-\varepsilon \sqrt{s}} \right] (t) = \frac{\varepsilon}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4t}} \rightarrow 0$, kada $t \rightarrow 0$.

Primenom inverzne Laplasove transformacije na regularizovano jezgro rešenja u slici \tilde{R}_ε , dato sa (4.32)₂, dobija se

$$R_\varepsilon(x, t) = R(x, t) * \left(\frac{\varepsilon}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4t}} \right), \quad \text{odnosno,} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_\varepsilon(x, t) = R(x, t) * \delta(t) = R(x, t),$$

jer je $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4t}} = \delta(t)$, zbog $\mathcal{L} \left[\frac{\varepsilon}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4t}} \right] (s) \Big|_{\varepsilon=0} = e^{-\varepsilon \sqrt{s}} \Big|_{\varepsilon=0} = 1 = \mathcal{L}[\delta(t)]$.

Slično kao što je urađeno u poglavlju 5, izračunavanje regularizovanog jezgra rešenja R_ε takođe je dobijeno primenom inverzne Laplasove transformacije i predstavljeno je izrazom

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left(\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})} \frac{\cosh \frac{x \rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}}{\sinh \frac{\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}} e^{i(2\varphi_0 + pts \sin \varphi_0)} e^{-\varepsilon \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi_0}{2}}} \right) e^{-\rho t |\cos \varphi_0|} \rho d\rho \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos(k\pi x)}{(k\pi)^2} e^{-\rho_k t |\cos \varphi_k|} \operatorname{Re} \left(\frac{s_k^3}{1 + (k\pi)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}} e^{i\rho_k \sin \varphi_k} \right) e^{-\varepsilon \sqrt{s_k}}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

u slučaju kada funkcija \tilde{R}_ε , data sa (4.32)₂, ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja $s_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$ i \bar{s}_0 i tačku grananja $s = 0$, dok se za $\varphi_0 = \pi$ u (4.36) dobija izraz jezgra rešenja R_ε , analognan sa (4.27), koji odgovara slučaju kada funkcija \tilde{R}_ε , osim $s = 0$, nema tačaka grananja ili ima jednu realnu negativnu tačku grananja. Može se zapaziti da se izraz jezgra rešenja R , koji odgovara Burgersovim modelima prve klase, dobija za uvrštavanje $\varepsilon = 0$ u izrazu (4.36) za R_ε , pošto regularizacija nije potrebna.

Preko jezgra rešenja R_ε datog sa (4.36), sa $\varepsilon = 0$ u slučaju prve klase modela, ili sa $\varepsilon \neq 0$ u slučaju druge klase modela, može se izraziti funkcija napona u slučaju kada je dato pomeranje slobodnog kraja štapa:

$$\sigma(x, t) = \Upsilon(t) * R(x, t), \quad (4.37)$$

primenom inverzne Laplasove transformacije izraza (4.17)₂, pri čemu je jezgro rešenja u slici \tilde{R} dato sa (4.32).

4.1.3 Numerički primeri

Slike 4.1 i 4.2 predstavljaju grafike funkcije pomeranja nekoliko tačaka štapa u sučaju zadatog pomeranja slobodnog kraja štapa pretpostavljenog u obliku Hevisajdove funkcije, odnosno za granični uslov (4.10)₂ dat kao $\Upsilon = H$. Regularizovano jezgro rešenja P_{reg} već predstavlja odziv na Hevisajdovu funkciju, budući da je definisano sa (4.18)₂ za regularizovano jezgro rešenja u slici \tilde{P}_{reg} , što daje

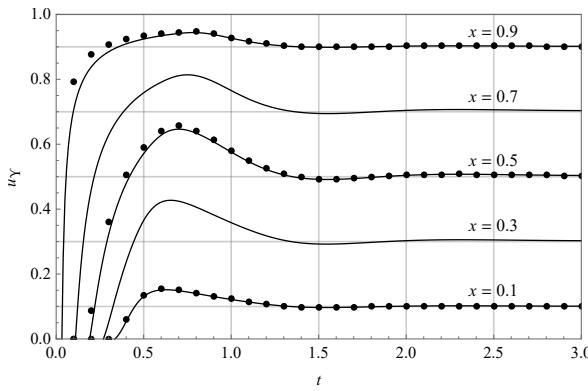
$$u_\Upsilon(x, t) = P_{\text{reg}}(x, t) = H(t) * P(x, t)$$

nakon primene inverzne Laplasove transformacije, videti takođe (4.31).

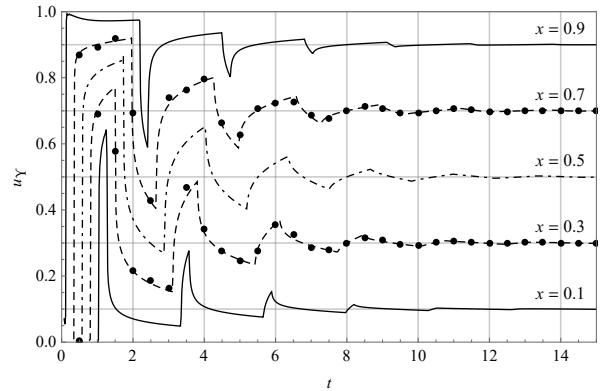
Odziv u_Υ pokazuje prigušeno oscilatorno ponašanje, pri čemu se odziv umiruje na onu vrednost pomeranja kolika je i koordinata tačke štapa, odnosno

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_\Upsilon(x, t) = x, \quad (4.38)$$

kako i predviđa asimptotsko ponašanje regularizovanog jezgra rešenja P_{reg} za $t \rightarrow 0$, dato izrazom (4.23). Vremenski profili odziva na Hevisajdovu funkciju u slučaju modela V imaju sasvim klasične oblike oscilatornog ponašanja sa izraženim prigušenjem, videti sliku 4.1a. Sa druge strane, profili u slučaju modela VII, takođe oscilatornom, liče na niz ekscitacionih i relaksacionih procesa, budući da profili više puta menjaju konveksnost iz konkavnog u konveksno, što se jasno može videti na slici 4.1b. Ipak, krive dobijene analitičkim izrazima su konzistentne sa krivama predstavljenim tačkama, koje su dobijene numeričkom inverznom Laplasovom transformacijom korišćenjem Talbotovog metoda, videti [1]. U trenucima koji su bliski početnom trenutku odzivi se razlikuju u slučaju Burgersovih modela prve i druge klase, budući da u slučaju modela prve klase vremenski profili neprekidno rastu od nulte vrednosti pomeranja, uzimajući nenualte vrednosti zavisne od pozicije tačaka, videti asimptotiku (4.21) jezgra rešenja P i sliku 4.1a, dok u slučaju modela druge klase vremenski profili se menjaju skokovito zavisno od pozicije tačaka, budući da je asimptotika odziva predstavljena Hevisajdovom funkcijom, videti (4.22) i sliku 4.1b.



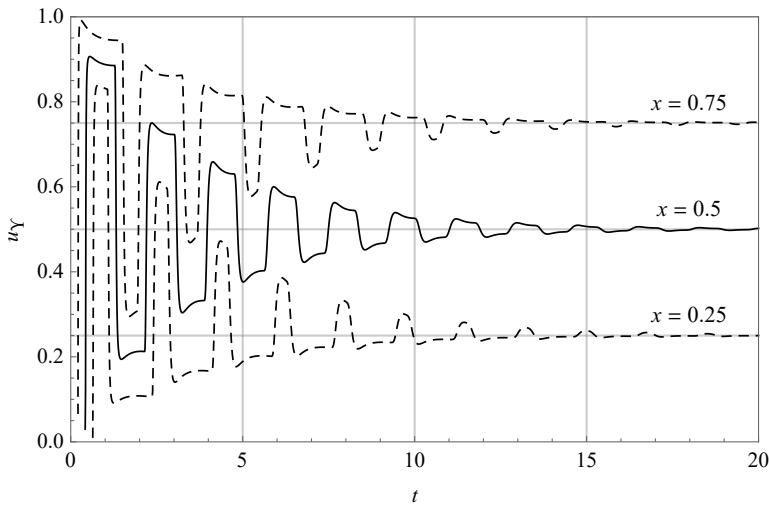
(a) Slučaj za model V.



(b) Slučaj za model VII.

Slika 4.1: Funkcija pomeranja ukoliko je na slobodnom kraju štapa pomeranje zadato u obliku Hevisajdove funkcije, tj. $\Upsilon = H$, dobijena prema analitičkom izrazu (pune linije) i numeričkom inverzijom Laplasove transformacije (tačke).

Grafici sa slike 4.1 odgovaraju slučaju kada jezgro rešenja u slici \tilde{P} i njegovo regularizovano jezgro rešenja u slici \tilde{P}_{reg} nemaju drugih tačaka grananja osim $s = 0$, tako da je odziv na Hevisajdovu funkciju dobijen korišćenjem izraza (4.28) gde su parametri modela dati u tabeli 4.1, dok vremenski profili sa slike 4.2 odgovaraju slučaju kada jezgro rešenja u slici dodatno ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja sa negativnim realnim delom, stoga je odziv računat prema (4.30) koristeći parametre modela iz tabele 4.1. Iako parametri modela u slučaju kada postoji kompleksno konjugovane tačke grananja ne zadovoljavaju sužene termodynamičke restrikcije, što je bio zahtev u dokazu da jezgro rešenja u slici ima par kompleksno konjugovanih polova s_k , $k \in \mathbb{N}$, numerički je pokazano da se polovi jezgra rešenja u slici \tilde{P} nalaze u levoj kompleksnoj poluravni, kao i



Slika 4.2: Funkcija pomeranja ukoliko je na slobodnom kraju štapa pomeranje zadato u obliku Hevisajdove funkcije, tj. $\Upsilon = H$, u slučaju modela V kada jezgro rešenja u slici ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja.

da je argument tačake grananja veći od argumenta polova. Vremenski profili odziva sa slike 4.2 su specifičnog oblika, kao da su superponirana dva tipa oscilacija sa različitim frekvencijama, budući da su pikovi zamjenjeni relaksacionim krivama, praćenim drugim bržim relaksacionim procesom, koji se javljaju posle dva uskcesivna ekscitaciona procesa koji imaju različite brzine. Štaviše, odzivi imaju obvojnicu koja je tipična za prigušene oscilacije.

model	tačke grananja	a_1	a_2	a_3	b	α	β	γ	μ	η
model V	$s = 0$	0.005	0.8	0.115	0.376	0.6	0.61	2β	0.8	β
	$s = 0, s_0, \bar{s}_0$	0.075	0.8	1.14	1.39	0.4	0.685		0.7	
model VII	$s = 0$	0.01	4.5	4	3	0.7	0.845	-	-	

Tabela 4.1: Parametri modela.

Slike 4.3 i 4.4 predstavljaju vremenske profile koji prikazuju funkciju napona za nekoliko tačaka štapa u slučaju zadatog pomeranja na slobodnom kraju štapa datog u formi Hevisajdove funkcije, odnosno za $\Upsilon = H$ kao granični uslov (4.10)₂, tako da se, uz (4.37), dobija

$$\sigma_{\Upsilon}(x, t) = H(t) * R(x, t). \quad (4.39)$$

U slučaju modela V, kao što se jasno vidi na slikama 4.3a - 4.3c, odziv na Hevisajdovu funkciju pokazuje prigušeni oscilatorni karakter, uzimajući čak i negativne vrednosti, sa izraženim prvim pikom čija je amplituda izraženja kako je razmatrana tačka bliža slobodnom kraju štapa, što je očekivano budući da je slobodni kraj štapa izložen trenutnom pomeranju. Zapaža se dobro slaganje između krivih dobijenih analitičkim izrazom i numeričkim metodom inverzije Laplasove transformacije. Vremenski profili u slučaju modela VII liče na niz relaksacionih procesa prekinutih naglim skokovima čija amplituda opada sa vremenom, videti slike 4.3d i 4.3e. Modeli V i VII razlikuju se u odzivima kada je u pitanju asymptotika za malo vreme, budući da u slučaju modela V napon kontinualno raste od nulte vrednosti sa značajnim rastom zavisnim od pozicije razmatrane tačke štapa, kako je predviđeno sa (4.34), dok se u slučaju modela VII napon ponaša kao Dirakova delta distribucija za malo vreme, u skladu sa (4.35) i (4.39), stoga kada $t \rightarrow 0$ važi

$$\begin{aligned} \sigma_{\Upsilon, \varepsilon}(x, t) &\sim \sqrt{\frac{b}{a_3}} \int_0^t \frac{d}{dt'} \left(\frac{\varepsilon}{2\tau\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4\tau}} \right)_{\tau=t'-\sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)} dt' \\ &\sim \sqrt{\frac{b}{a_3}} \left(\frac{\varepsilon}{2\tau\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4\tau}} \right)_{\tau=t-\sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)} \\ &\sim \sqrt{\frac{b}{a_3}} \delta \left(t - \sqrt{\frac{a_3}{b}} (1-x) \right), \text{ kada } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Za razmatranje asimptotike odziva kada $t \rightarrow \infty$, polazi se od Laplasove transformacije (4.39), sa jezgrom rešenja u slici \tilde{R} datog sa (4.32)₁, tako da

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_T(x, s) &= s^{\frac{\xi}{2}} \frac{\left(1 + xs^{1-\frac{\xi}{2}} + \dots\right) + \left(1 - xs^{1-\frac{\xi}{2}} + \dots\right)}{\left(1 + s^{1-\frac{\xi}{2}} + \dots\right) - \left(1 - s^{1-\frac{\xi}{2}} + \dots\right)} \sim \frac{1}{s^{1-\xi}}, \text{ kada } s \rightarrow 0, \text{ daje} \\ \sigma_T(x, t) &\sim \frac{t^{-\xi}}{\Gamma(1-\xi)} \rightarrow 0, \text{ kada } t \rightarrow \infty,\end{aligned}\quad (4.40)$$

korišćenjem asimptotskog ponašanja kompleksnog modula \tilde{G} , datog sa (4.24). Može se zapaziti da se za dovoljno veliko vreme asimptotsko ponašanje napona kao odziva na Hevisajdovu funkciju poklapa sa funkcijom relaksacije, videti tabelu 2 u [49].

Suprotno vremenskim profilima sa slike 4.3, koji odgovaraju jezgru rešenja u slici \tilde{R} za slučaj kada nema drugih tačaka grananja osim $s = 0$, odzivi predstavljeni na slici 4.4 odgovaraju slučaju kada jezgro rešenja u slici ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja sa negativnim realnim delom. Grafici su dobijeni za vrednosti parametara datih u tabeli 4.1, pri čemu je parametar regularizacije $\varepsilon = 0.25$. Može se zapaziti da su krive odziva sa slike 4.4 superpozicija krivih sličnih onima sa slike 4.3a - 4.3c, čiji oblik ne zavisi od pozicije tačke, i niza pikova koji zavise od pozicije tačke. Za malo vreme, odzivi takođe liče na one sa slike 4.3a - 4.3c, međutim oni nisu prikazani na slici 4.4 zbog velike vrednosti njihovih amplituda.

4.2 Rešenje za zadati napon na slobodnom kraju štapa

Kada je dat napon koji deluje na slobodni kraj štapa, Laplasove transformacije funkcija pomeranja i napona, datih preko (4.15) i (4.16), dobijaju se u obliku

$$\tilde{u}(x, s) = \tilde{\Sigma}(s) \frac{1}{s\sqrt{\tilde{G}(s)}} \frac{\sinh \frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}{\cosh \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}} \text{ i } \tilde{\sigma}(x, s) = \tilde{\Sigma}(s) \frac{\cosh \frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}{\cosh \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}, \quad (4.41)$$

pri čemu se funkcija

$$C(s) = \frac{\tilde{\Sigma}(s)}{s\sqrt{\tilde{G}(s)} \cosh \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}$$

određuje preko napona u Laplasovoj slici (4.16) i graničnog uslova (4.10)₂.

4.2.1 Pomeranje proizvoljne tačke štapa za zadatu funkciju Σ

Funkcija pomeranja u Laplasovoj slici, data sa (4.41)₁, može se izraziti preko jezgra rešenja u slici \tilde{Q} , definisanog izrazom

$$\tilde{Q}(x, s) = \frac{1}{s\sqrt{\tilde{G}(s)}} \frac{\sinh \frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}{\cosh \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}. \quad (4.42)$$

Razmatranjem asimptotskog ponašanja jezgra rešenja u slici \tilde{Q} kada $s \rightarrow \infty$ dobija se

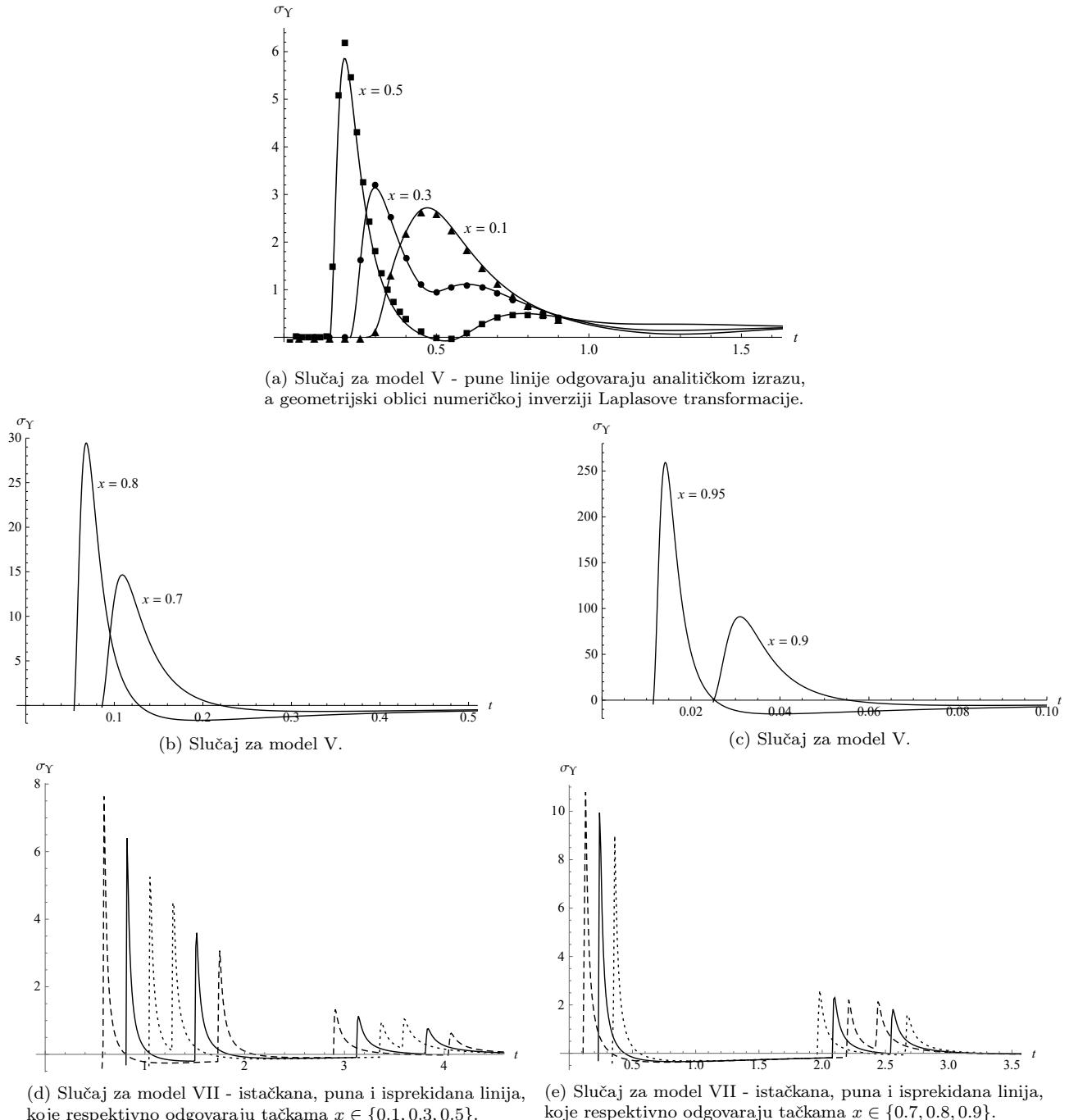
$$\tilde{Q}(x, s) = \frac{1}{s\sqrt{\tilde{G}(s)}} e^{-(1-x)\frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}} \frac{1 - e^{-2\frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}}{1 + e^{-2\frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}} \sim \begin{cases} \sqrt{\frac{a_3}{b}} \frac{1}{s^{1+\frac{\delta}{2}}} e^{-\sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)s^{1-\frac{\delta}{2}}}, & \text{za modele prve klase,} \\ \sqrt{\frac{a_3}{b}} \frac{1}{s} e^{-\sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)s}, & \text{za modele druge klase,} \end{cases} \quad (4.43)$$

u skladu sa asiptotikom kompleksnog modula \tilde{G} , datog sa (4.20), tako da se za trenutke bliske početnom trenutku jezgro rešenja Q , za modele prve klase, ponaša prema izrazu

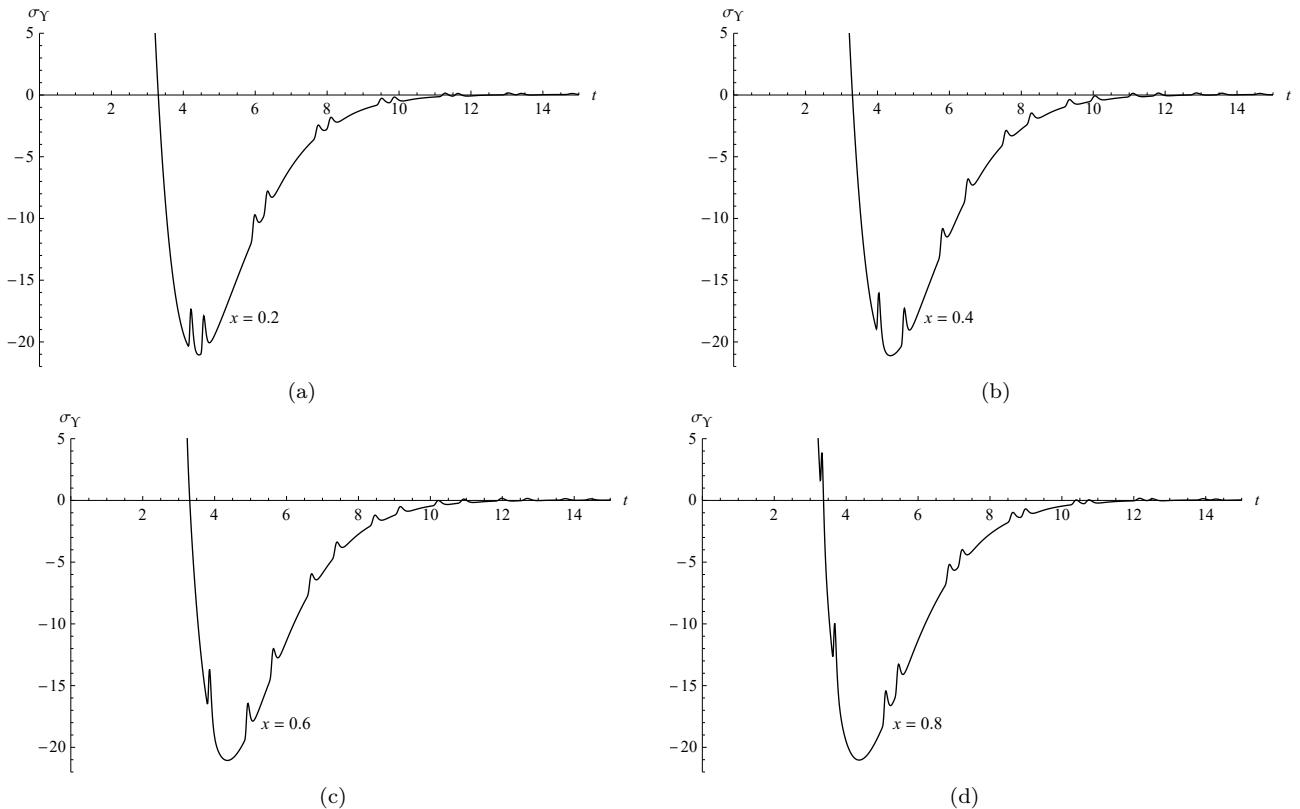
$$Q(x, t) \sim -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a_3}{b}} \int_0^\infty \sin \left(\sqrt{\frac{a_3}{b}} (1-x) \rho^{1-\frac{\delta}{2}} \sin \frac{\delta\pi}{2} + \frac{\delta\pi}{2} \right) e^{-\rho t + \sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)\rho^{1-\frac{\delta}{2}} \cos \frac{\delta\pi}{2}} \frac{1}{\rho^{1+\frac{\delta}{2}}} d\rho, \text{ kada } t \rightarrow 0, \quad (4.44)$$

dobijenom inverznom Laplasovom transformacijom izraza (4.43) korišćenjem definicije i integracije u kompleksnoj ravni, dok je asimptotsko ponašanje jezgra rešenja Q u slučaju modela druge klase

$$Q(x, t) \sim \sqrt{\frac{a_3}{b}} H \left(t - \sqrt{\frac{a_3}{b}} (1-x) \right), \text{ kada } t \rightarrow 0, \quad (4.45)$$



Slika 4.3: Funkcija napona ukoliko je na slobodnom kraju štapa pomeranje zadato u obliku Hevisajdove funkcije, tj. $\Upsilon = H$, dobijena prema analitičkom izrazu (pune linije) i numeričkom inverzijom Laplasove transformacije (geometrijski oblici).



Slika 4.4: Funkcija napona ukoliko je na slobodnom kraju šapa pomeranje zadato u obliku Hevisajdove funkcije, tj. $\Upsilon = H$, u slučaju modela V kada jezgro rešenja u slici ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja

i implicira da vrednost jezgra rešenja Q za mala vremena skoči sa nulte vrednosti na konačnu vrednost u vremenskom trenutku $t = \sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)$ zavisno od položaja x i osobina materijala.

Sa druge strane, asimptotika jezgra rešenja u slici \tilde{Q} kada $s \rightarrow 0$ daje

$$\tilde{Q}(x, s) = \frac{1}{s^{1+\frac{\xi}{2}}} \frac{\left(1 + xs^{1-\frac{\xi}{2}} + \dots\right) - \left(1 - xs^{1-\frac{\xi}{2}} + \dots\right)}{\left(1 + s^{1-\frac{\xi}{2}} + \dots\right) + \left(1 - s^{1-\frac{\xi}{2}} + \dots\right)} \sim x \frac{1}{s^\xi}, \text{ pa je } \mathcal{L}^{-1}[\tilde{Q}(x, s)] \sim x \frac{t^{-(1-\xi)}}{\Gamma(\xi)}, \text{ kada } t \rightarrow \infty,$$

u skladu sa asimptotikom kompleksnog modula \tilde{G} , datog sa (4.24), implicirajući da jezgro rešenja Q za velike vrednosti vremena asimptotski teži nuli kao stepena funkcija, zavisno od položaja tačke šapa.

Jezgro rešenja

$$Q(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\rho e^{i\varphi_0} \sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}} \frac{\sinh \frac{x\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}}{\cosh \frac{\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}} e^{i(\varphi_0 + \rho t \sin \varphi_0)} \right) e^{-\rho t |\cos \varphi_0|} d\rho + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sin \left(\frac{(2k+1)\pi}{2} x \right) e^{-\rho_k t |\cos \varphi_k|} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s_k} \frac{1}{1 + \left(\frac{(2k+1)\pi}{2} \right)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}} e^{i\rho_k t \sin \varphi_k} \right) \quad (4.46)$$

je računato korišćenjem definicije invrzne Laplasove transformacije, slično kao jezgro rešenja P , videti poglavlje 5, korišćenjem Košijeve teoreme o reziduumima, budući da funkcija kompleksne promenjive \tilde{Q} ima beskonačan broj parova kompleksno konjugovanih polova s_k i \bar{s}_k , za svako $k \in \mathbb{N}_0$, koji leže u levoj kompleksnoj poluravni, pri čemu su svi polovi prvog reda, dobijeni kao nule imenioca funkcije \tilde{Q} , odnosno kao rešenja jednačine

$$\cosh \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}} = 0 \text{ što daje } \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}} = -i \frac{(2k+1)\pi}{2}, \text{ odnosno } \frac{s^2}{\tilde{G}(s)} + \left(\frac{(2k+1)\pi}{2} \right)^2 = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.47)$$

kako je pokazano u poglavlju 6. Kao i u slučaju funkcije \tilde{P} , funkcija \tilde{Q} takođe može imati još tačaka grananja pored $s = 0$, zbog kvadratnog korena funkcije \tilde{G} . Oblik jezgra rešenja Q , dat sa (4.46), odgovara slučaju kada

postoji par kompleksno konjugovanih tačaka grananja $s_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$ i \bar{s}_0 , dok se njegova forma koja odgovara slučaju kada nema tačaka grananja ili postoji jedna realna negativna tačka grananja dobija uvrštanjem $\varphi_0 = \pi$ u (4.46).

Korišćenjem jezgra rešenja datog izrazom (4.46), funkcija pomeranja u slučaju zadatog napona na slobodnom kraju štapa je

$$u(x, t) = \Sigma(t) * Q(x, t), \quad (4.48)$$

a dobijena je primenom inverzne Laplasove transformacije na izraz (4.41)₁, pri čemu je jezgro rešenja u slici \tilde{Q} definisano sa (4.42).

4.2.2 Napon u proizvoljnoj tački štapa za zadatu funkciju Σ

Funkcija napona u Laplasovoj slici, data sa (4.41)₂, može se izraziti preko jezgra rešenja u slici \tilde{S} , u slučaju Burgersovih modela prve klase, ili preko regularizovanog jezgra rešenja u slici \tilde{S}_{reg} , u slučaju modela druge klase, a definisanih izrazima

$$\tilde{S}(x, s) = \frac{\cosh \frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}{\cosh \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}} \quad \text{i} \quad \tilde{S}_{\text{reg}}(x, s) = \frac{1}{s} \tilde{S}(x, s). \quad (4.49)$$

Razmatranjem asimptotike jezgra rešenja u slici \tilde{S} i njegove regularizovane forme \tilde{S}_{reg} kada $s \rightarrow \infty$, vodeći računa o asimptotskom ponašanju kompleksnog modula \tilde{G} , datog sa (4.20), dobija se

$$\tilde{S}(x, s) = e^{-(1-x)\frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}} \frac{1 + e^{-2\frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}}{1 + e^{-2\frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}} \sim e^{-\sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)s^{1-\frac{\delta}{2}}} \quad \text{i} \quad \tilde{S}_{\text{reg}}(x, s) \sim \frac{1}{s} e^{-\sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)s},$$

što ima potpuno isti oblik kao asimptotika jezgra rešenja u slici \tilde{P} i njegova regularizovana forma \tilde{P}_{reg} , videti (4.19), stoga je za vremenske trenutke bliske početnom trenutku jezgro rešenja S za modele prve klase dato sa (4.21), a asimptotika za S_{reg} , koja odgovara modelima druge klase, data sa (4.22), odnosno

$$S(x, t) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin \left(\sqrt{\frac{a_3}{b}} (1-x) \rho^{1-\frac{\delta}{2}} \sin \frac{\delta\pi}{2} \right) e^{-\rho t + \sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)\rho^{1-\frac{\delta}{2}} \cos \frac{\delta\pi}{2}} d\rho, \quad \text{kada } t \rightarrow 0, \quad (4.50)$$

$$S_{\text{reg}}(x, t) \sim H \left(t - \sqrt{\frac{a_3}{b}} (1-x) \right), \quad \text{kada } t \rightarrow 0. \quad (4.51)$$

Sa druge strane, asimptotsko ponašanje regularizovanog jezgra rešenja u slici \tilde{S}_{reg} kada $s \rightarrow 0$, daje

$$\tilde{S}_{\text{reg}}(x, s) = \frac{1}{s} \frac{\left(1 + xs^{1-\frac{\delta}{2}} + \dots \right) + \left(1 - xs^{1-\frac{\delta}{2}} + \dots \right)}{\left(1 + s^{1-\frac{\delta}{2}} + \dots \right) + \left(1 - s^{1-\frac{\delta}{2}} + \dots \right)} \sim \frac{1}{s}, \quad \text{odnosno } S_{\text{reg}}(x, t) \sim H(t) = 1, \quad \text{kada } t \rightarrow \infty, \quad (4.52)$$

u skladu sa asimptotikom kompleksnog modula \tilde{G} , datog sa (4.24).

Na osnovu regularizovanog jezgra rešenja S_{reg} , dobija se jezgro rešenja

$$\begin{aligned} S(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(S_{\text{reg}}(x, t) H \left(t - \sqrt{\frac{a_3}{b}} (1-x) \right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} S_{\text{reg}}(x, t) H \left(t - \sqrt{\frac{a_3}{b}} (1-x) \right) + S_{\text{reg}}(x, t) \delta \left(t - \sqrt{\frac{a_3}{b}} (1-x) \right), \end{aligned} \quad (4.53)$$

slično kao u slučaju jezgra rešenja P izraženog preko njegove regularizovane forme P_{reg} , videti (4.25).

Funkcija napona u slučaju kada je zadat napon na slobodnom kraju štapa dobija se kao konvolucija

$$\sigma(x, t) = \Sigma(t) * S(x, t), \quad (4.54)$$

primenom inverzne Laplasove transformacije na (4.41), sa jezgrom rešenja u slici \tilde{S} definisanog sa (4.49), pri čemu je jezgro rešenja S dato izrazom

$$S(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Im} \left(\frac{\cosh \frac{x\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}}{\cosh \frac{\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}} e^{i(\varphi_0 + \rho t \sin \varphi_0)} \right) e^{-\rho t |\cos \varphi_0|} d\rho$$

$$+ 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}x\right)}{\frac{(2k+1)\pi}{2}} e^{-\rho_k t |\cos \varphi_k|} \operatorname{Re} \left(\frac{s_k}{1 + \left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}} e^{i\rho_k t \sin \varphi_k} \right), \quad (4.55)$$

u slučaju modela koji pripadaju prvoj klasi, dok je u slučaju modela druge klase jezgro rešenja S dato izrazom (4.53), sa regularizovanim jezgrom rešenja S_{reg} , izračunato u obliku

$$S_{\text{reg}}(x, t) = \frac{\varphi_0}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\rho e^{i\varphi_0}} \frac{\cosh \frac{x\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}}{\cosh \frac{\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}} e^{i(\varphi_0 + \rho t \sin \varphi_0)} \right) e^{-\rho t |\cos \varphi_0|} d\rho \\ + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}x\right)}{\frac{(2k+1)\pi}{2}} e^{-\rho_k t |\cos \varphi_k|} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}} e^{i\rho_k t \sin \varphi_k} \right). \quad (4.56)$$

Jezgro rešenja i njegova regularizovana forma dobijeni su korišćenjem definicije inverzne Laplasove transformacije, slično kao što je urađeno u poglavlju 5, gde je računato jezgro rešenja P . Oblik jezgara S i S_{reg} odgovara slučaju kada odgovarajuća jezgra rešenja u slici imaju par kompleksno konjugovanih tačaka grananja $s_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$ i \bar{s}_0 i tačku grananja $s = 0$, dok se uvrštavanjem $\varphi_0 = \pi$ u izraze (4.55) i (4.56) dobija njihova forma kada jezgra rešenja u slici, osim tačke grananja $s = 0$, nemaju tačke grananja ili imaju jednu realnu negativnu tačku grananja.

4.2.3 Numerički primeri

Slike 4.5 i 4.6 predstavljaju vremenske profile funkcije pomeranja za nekoliko tačaka štapa pri zadatom naponu na slobodnom kraju štapa pretpostavljenog u obliku Hevisajdove funkcije, odnosno za granični uslov (4.10)₃ dat kao $\Sigma = H$, tako da se prema (4.48) dobija

$$u_\Sigma(x, t) = H(t) * Q(x, t). \quad (4.57)$$

Odziv se može razmatrati kao superpozicija monotono rastuće krive i oscilatorne krive sa vremenski opadajućom amplitudom, što je posebno izraženo u slučaju modela VII, videti sliku 4.5b, dok se u slučaju modela V, usled velikog prigušenja, oscilacije zapravo ne mogu ni zapaziti videti sliku 4.5a. Može se zapaziti dobro slaganje između krivih dobijenih analitičkim izrazom (4.57) i numeričkom inverzijom Laplasove transformacije. Pomeranje teži beskonačnosti za dovoljno veliku vrednost vremena zavisno od pozicije x , a u skladu je sa asimptotikom

$$u_\Sigma(x, t) \sim x \frac{t^\xi}{\Gamma(1+\xi)} \rightarrow \infty, \text{ kada } t \rightarrow \infty, \quad (4.58)$$

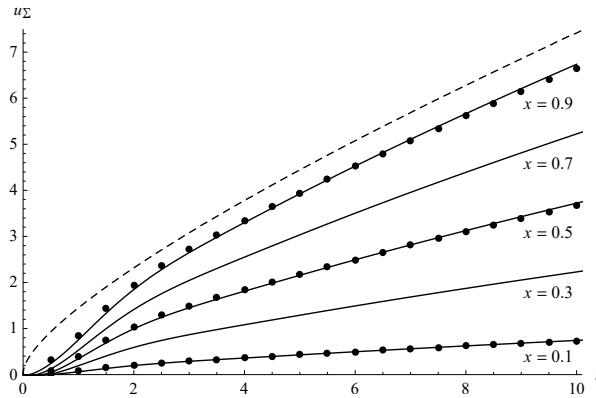
što se dobija iz Laplasove transformacije (4.57), sa jezgrom rešenja u slici \tilde{Q} datog sa (4.42), gde je

$$\tilde{u}_\Sigma(x, s) = \frac{1}{s^{2+\frac{\xi}{2}}} \frac{\left(1 + xs^{1-\frac{\xi}{2}} + \dots\right) - \left(1 - xs^{1-\frac{\xi}{2}} + \dots\right)}{\left(1 + s^{1-\frac{\xi}{2}} + \dots\right) + \left(1 - s^{1-\frac{\xi}{2}} + \dots\right)} \sim x \frac{1}{s^{1+\xi}}, \text{ kada } s \rightarrow 0,$$

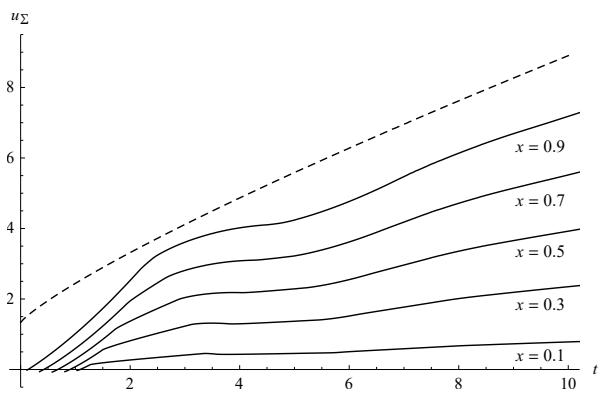
zahvaljujući asimptotici kompleksnog modula \tilde{G} , datog sa (4.24). Funkcije pomeranja svih tačaka štapa, zavisno od njihove pozicije, posle dovoljno dugog vremena imaju jednak vremensko ponašanje, određeno izrazom (4.58), što je potpuno isto kao za funkciju puzanja razmatranu za konstitutivnu jednačinu, videti tabelu 2 u [49]. Kao i ranije, odzivi su drugačiji za Burgersove modele prve i druge klase, budući da vremenski profili imaju kontinualni rast od nulte vrednosti u slučaju modela V, videti (4.44), dok u slučaju modela VII, u skladu sa asimptotikom jezgra rešenja u slici (4.43) i Laplasovom transformacijom izraza (4.57), važi

$$\tilde{u}_\Sigma(x, s) \sim \sqrt{\frac{a_3}{b}} \frac{1}{s^2} e^{-\sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)s}, \text{ kada } s \rightarrow \infty, \text{ odnosno,} \\ u_\Sigma(x, t) \sim \sqrt{\frac{a_3}{b}} \left(t - \sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x) \right), \text{ za } t > \sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x) \text{ kada } t \rightarrow 0,$$

implicirajući da pomeranje ima linearni trend u kratkom vremenskom intervalu nakon trenutka $t = \sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)$. U slučaju kada jezgro rešenja u slici \tilde{Q} ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja, krive odziva, budući da nisu glatke, su takođe prigušenog oscilatornog karaktera i superponirane su na monotono rastuće krive, videti sliku 4.6. Kao i ranije, grafici su dobijeni korišćenjem parametara modela datih u tabeli 4.1.

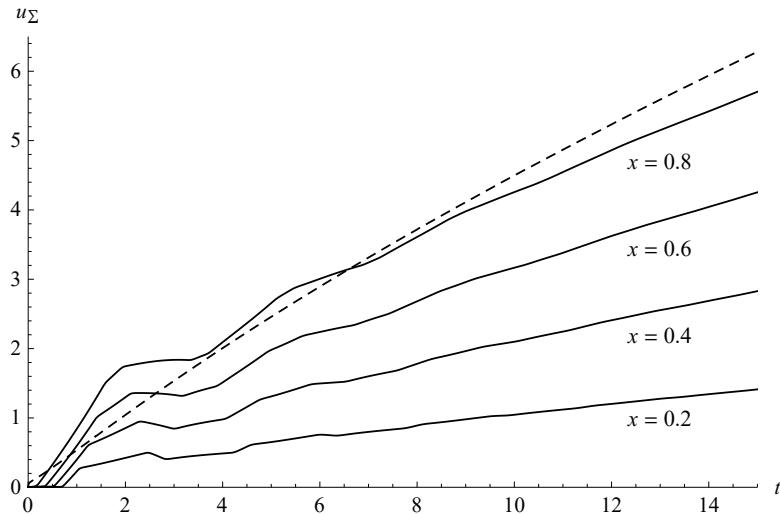


(a) Slučaj za model V.



(b) Slučaj za model VII.

Slika 4.5: Funkcija pomeranja ukoliko je na slobodnom kraju štapa napon zadat u obliku Hevisajdove funkcije, tj. $\Sigma = H$, dobijena prema analitičkom izrazu (pone linije) i numeričkom inverzijom Laplasove transformacije tačke, kao i kriva funkcije puzanja koja odgovara konstitutivnoj jednačini (isprekidana linija).



Slika 4.6: Funkcija pomeranja ukoliko je na slobodnom kraju štapa napon zadat u obliku Hevisajdove funkcije, tj. $\Sigma = H$, u slučaju modela V kada jezgro rešenja u slici ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja, kao i kriva funkcije puzanja koja odgovara konstitutivnoj jednačini (isprekidana linija).

Slike 4.7 i 4.8 predstavljaju vremenske profile funkcije napona za nekoliko tačaka štapa na čijem slobodnom kraju je primenjen napon u formi Hevisajdove funkcije, odnosno za granični uslov (4.10)₃ dat kao $\Sigma = H$. Regularizovano jezgro rešenja S_{reg} zapravo predstavlja odziv na Hevisajdovu funkciju, zbog relacije (4.49)₂ za regularizovano jezgro rešenja u slici \tilde{S}_{reg} , što daje

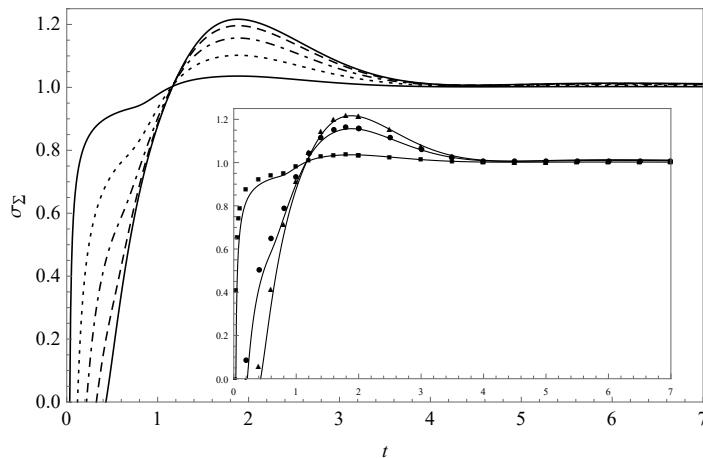
$$\sigma_\Sigma(x, t) = S_{\text{reg}}(x, t) = H(t) * S(x, t)$$

nakon primene inverzne Laplasove transformacije, videti takođe (4.54).

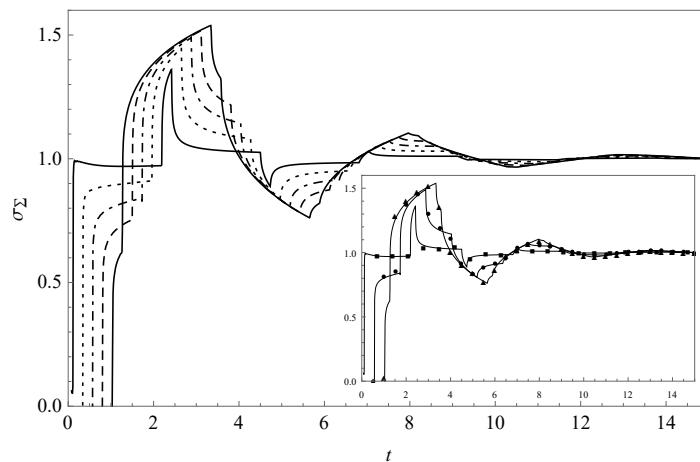
Odziv je prigušenog oscilatornog tipa, koji se relaksira na vrednost napona primenjenog na slobodni kraj štapa, odnosno

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_\Sigma(x, t) = 1, \quad (4.59)$$

kao što i predviđa oblik regularizovanog jezgra rešenja S_{reg} za dovoljno dugačka vremena, dat sa (4.52). Vremenski profili odziva u slučaju modela V prikazuju oscilatorno ponašanje sa veoma izraženim prigušenjem, videti sliku 4.7a. Sa druge strane, profili u slučaju modela VII, koji takođe imaju prigušen karakter, liče na niz od dva ekscitaciona procesa praćena sa dva relaksaciona procesa, budući da profili više puta menjaju svoju konveksnost iz konkavnog u konveksno, što se jasno vidi na slici 4.7b. Postoji dobro slaganje krivih dobijenih analitički preko (4.56), korišćenjem parametara iz tabele 4.1 i onih dobijenih numeričkom inverzijom Laplasove transformacije. Odzivi se razlikuju za model V i VII za dovoljno mala vremena, budući da u slučaju modela V vremenski profili imaju kontinualni rast počevši od nulte vrednosti, uzimajući nenultu vrednost zavisno od koordinate

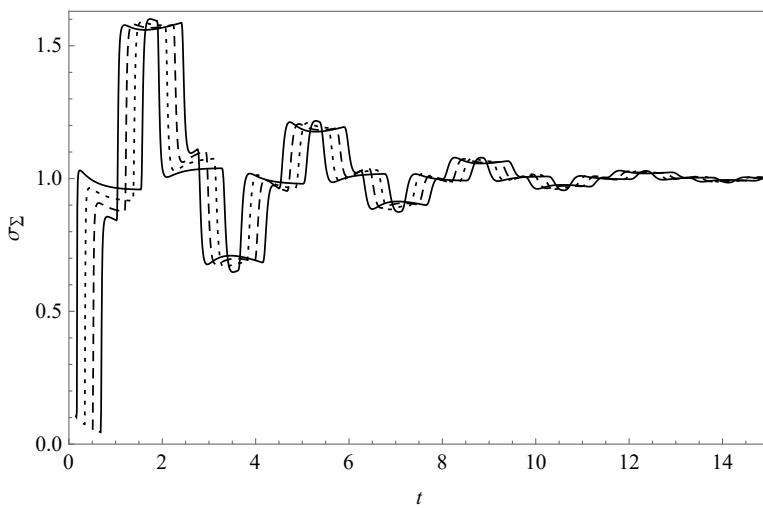


(a) Slučaj za model V.



(b) Slučaj za model VII.

Slika 4.7: Funkcija napona ukoliko je na slobodnom kraju štapa napon zadat u obliku Hevisajdove funkcije, $\Sigma = H$, dobijena prema analitičkom izrazu i iscrtana punom, isprekidanom, crta-tačka-crta i istačkanom linijom za $x \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$, kao i numeričkom inverzijom Laplasove transformacije iscrtane trouglovima, krugovima i kvadratima za $x \in \{0.1, 0.5, 0.9\}$.



Slika 4.8: Funkcija napona ukoliko je na slobodnom kraju štapa napon zadat u obliku Hevisajdove funkcije, tj. $\Sigma = H$, u slučaju modela V kada jezgro rešenja u slici ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja.

tačke štapa, videti (4.50) i sliku 4.7a, dok za model VII vremenski profili imaju skok sa nulte vrednosti zavisno od pozicije tačke, a usled ponašanja funkcije napona kao Hevisajdove funkcije za mala vremena, videti (4.51) i sliku 4.7b.

Suprotno graficima sa slike 4.7, koji odgovaraju slučaju kada jezgro rešenja u slici \tilde{S} i njegova regularizovana forma \tilde{S}_{reg} nemaju drugih tačaka grananja osim $s = 0$, vremenski profili sa slike 4.8 odgovaraju slučaju kada jezgro rešenja u slici dodatno ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja. Vremenski profili predstavljeni na slici 4.8 su specifičnog oblika, kao da se sastoje od nekoliko prigušenih oscilacija sa različitim frekvencijama. Čini se da odzivi imaju obvojnicu, što je tipično za prigušene oscilacije.

5. Određivanje jezgra rešenja P

Primenom inverzne Laplasove transformacije na jezgro rešenja u slici \tilde{P} , dato sa (4.18)₁, dobija se jezgro rešenja P u obliku (4.27), odnosno

$$P(x, t) = \mathcal{L}^{-1} [\tilde{P}(x, s)](x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \tilde{P}(x, s) e^{st} ds,$$

gde je integracija izvršena po Bromvičevoj konturi Br , tj. po konturi Γ_0 u limitu kada $R \rightarrow \infty$, gde je Γ_0 deo zatvorene konture: $\Gamma^{(I)}$ ako funkcija \tilde{P} nema drugih tačaka grananja osim $s = 0$, $\Gamma^{(II)}$ ako funkcija \tilde{P} ima realnu negativnu tačku grananja kao i tačku grananja $s = 0$ i $\Gamma^{(III)}$ ako funkcija \tilde{P} ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja uz tačku grananja $s = 0$, koje su respektivno prikazane na slikama 5.1, 5.2 i 5.3. Košijeva teorema o reziduumima je data izrazom

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \oint_{\Gamma^{(i)}} \tilde{P}(x, s) e^{st} ds = 2\pi i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Res} [\tilde{P}(x, s) e^{st}, s_k], \quad i \in \{I, II, III\}, \quad (5.1)$$

pri čemu se integracija vrši po konturama $\Gamma^{(I)}$, $\Gamma^{(II)}$, i $\Gamma^{(III)}$, a svi polovi s_k funkcije \tilde{P} nalaze se u oblasti obuhvaćenoj konturom $\Gamma^{(i)}$ u graničnom slučaju kada $R \rightarrow \infty$ i $r \rightarrow 0$.

Tačke grananja jezgra rešenja u slici \tilde{P} potiču od kompleksnog modula \tilde{G} (4.12), koji sadrži funkciju ϕ_σ , datu izrazom (4.13)₁ za prvu klasu Burgersovih modela, odnosno (4.14)₁ za drugu klasu modela, a koja

nema nula u kompleksnoj ravni	ako $\text{Re } \phi_\sigma(\rho^*) < 0$,
ima jednu realnu negativnu nulu $-\rho^*$	ako $\text{Re } \phi_\sigma(\rho^*) = 0$,
ima par kompleksno konjugovanih nula s_0 i \bar{s}_0 sa negativnim realnim delom	ako $\text{Re } \phi_\sigma(\rho^*) > 0$,

gde je

$$\text{Re } \phi_\sigma(\rho^*) = 1 + a_1 (\rho^*)^\alpha \cos(\alpha\pi) + a_2 (\rho^*)^\beta \cos(\beta\pi) + a_3 (\rho^*)^\gamma \cos(\gamma\pi),$$

sa ρ^* određenim iz

$$\frac{a_1 \sin(\alpha\pi)}{a_3 |\sin(\gamma\pi)|} + \frac{a_2 \sin(\beta\pi)}{a_3 |\sin(\gamma\pi)|} (\rho^*)^{\beta-\alpha} = (\rho^*)^{\gamma-\alpha},$$

za modele I - VII, dok u slučaju modela VIII funkcija ϕ_σ

nema nula u kompleksnoj ravni	ako $\left(\frac{\bar{a}_1}{2\bar{a}_2}\right)^2 \geq \frac{1}{\bar{a}_2}$, ili ako $\left(\frac{\bar{a}_1}{2\bar{a}_2}\right)^2 < \frac{1}{\bar{a}_2}$ i $a < b \frac{ \cos(\alpha\pi) }{\sin(\alpha\pi)}$,
ima jednu negativnu realnu nulu $-\rho^*$ određenu sa $\rho^* = \left(\frac{b}{\sin(\alpha\pi)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$	ako $\left(\frac{\bar{a}_1}{2\bar{a}_2}\right)^2 < \frac{1}{\bar{a}_2}$ i $a = b \frac{ \cos(\alpha\pi) }{\sin(\alpha\pi)}$,
ima par kompleksno konjugovanih nula s_0 i \bar{s}_0 sa negativnim realnim delom	ako $\left(\frac{\bar{a}_1}{2\bar{a}_2}\right)^2 < \frac{1}{\bar{a}_2}$ i $a > b \frac{ \cos(\alpha\pi) }{\sin(\alpha\pi)}$,

gde su $a = \frac{\bar{a}_1}{2\bar{a}_2}$, i $b = \sqrt{\frac{1}{\bar{a}_2} - \left(\frac{\bar{a}_1}{2\bar{a}_2}\right)^2}$, kako je pokazano u [49].

5.1 Slučaj kada funkcija \tilde{P} nema drugih tačaka grananja osim $s = 0$

U slučaju kada jezgro rešenja u slici \tilde{P} nema drugih tačaka grananja osim $s = 0$, integrali po konturama Γ_0 , Γ_3 i Γ_5 , koji pripadaju konturi $\Gamma^{(I)}$ sa slike 5.1 i pojavljuju se u Košijevoj teoremi o reziduumima (5.1), imaju nenulti doprinos i u limesu kada $R \rightarrow \infty$ i $r \rightarrow 0$ dati su izrazima

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_{\Gamma_0} = \int_{Br} \tilde{P}(x, s) e^{st} ds = 2\pi i P(x, t), \quad (5.2)$$

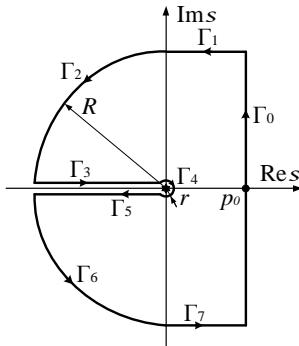
$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} I_{\Gamma_3} = \int_{\infty}^0 \frac{\sinh \frac{x\rho e^{i\pi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\pi})}}}{\sinh \frac{\rho e^{i\pi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\pi})}}} e^{\rho t e^{i\pi}} e^{i\pi} d\rho = \int_0^{\infty} \frac{\sinh \frac{x\rho e^{i\pi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\pi})}}}{\sinh \frac{\rho e^{i\pi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\pi})}}} e^{-\rho t} d\rho, \quad (5.3)$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} I_{\Gamma_5} = \int_0^{\infty} \frac{\sinh \frac{x\rho e^{-i\pi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{-i\pi})}}}{\sinh \frac{\rho e^{-i\pi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{-i\pi})}}} e^{\rho t e^{-i\pi}} e^{-i\pi} d\rho = - \int_0^{\infty} \frac{\sinh \frac{x\rho e^{-i\pi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{-i\pi})}}}{\sinh \frac{\rho e^{-i\pi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{-i\pi})}}} e^{-\rho t} d\rho, \quad (5.4)$$

u skladu sa parametrizacijom datom u tabeli 5.1, gde je korišćena notacija

$$I_{\Gamma_i} = \int_{\Gamma_i} \frac{\sinh \frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}}{\sinh \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}} e^{st} ds, \quad i = 0, \dots, 7, \quad (5.5)$$

dok integrali duž svih ostalih kontura imaju nulti doprinos kada $R \rightarrow \infty$ i $r \rightarrow 0$, što će biti pokazano.



Γ_0 :	Bromvičeva kontura,
Γ_1 :	$s = p + iR$, $p \in [0, p_0]$, $p_0 \geq 0$ proizvoljno,
Γ_2 :	$s = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$,
Γ_3 :	$s = \rho e^{i\pi}$, $\rho \in [r, R]$,
Γ_4 :	$s = re^{i\varphi}$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$,
Γ_5 :	$s = \rho e^{-i\pi}$, $\rho \in [r, R]$,
Γ_6 :	$s = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$,
Γ_7 :	$s = p - iR$, $p \in [0, p_0]$, $p_0 \geq 0$ proizvoljno.

Tabela 5.1: Parametrizacija integracione konture $\Gamma^{(I)}$.

Slika 5.1: Integraciona kontura $\Gamma^{(I)}$.

Reziduumi u teoremi (5.1), dobijeni prema

$$\text{Res} \left[\tilde{P}(x, s) e^{st}, s_k \right] = \left. \frac{\sinh \frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}} e^{st}}{\frac{d}{ds} \sinh \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}} \right|_{s=s_k} = \left. \frac{\sinh \frac{xs}{\sqrt{\tilde{G}(s)}} e^{st}}{\left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{G}(s)}} - \frac{s \tilde{G}'(s)}{2\sqrt{\tilde{G}(s)}^3} \right) \cosh \frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}} \right|_{s=s_k}, \quad (5.6)$$

gde je $\tilde{G}'(s) = \frac{d}{ds} \tilde{G}(s)$, a s_k , $k \in \mathbb{N}_0$, su polovi prvog reda funkcije \tilde{P} , videti (4.18)₁, koji leže u drugom kvadrantu kompleksne ravni, kako je pokazano u 6, postaju

$$\text{Res} \left[\tilde{P}(x, s) e^{st}, s_k \right] = (-1)^k \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} \frac{s_k e^{s_k t}}{1 + (k\pi)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}},$$

kada se jednačina (4.26) iskoristi u (5.6). Kompleksna konjugacija jednačine (4.26) daje

$$\overline{\left(\frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}} \right)} = \frac{\bar{s}}{\sqrt{\tilde{G}(\bar{s})}} = ik\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

implicirajući da je $s_{-k} = \bar{s}_k$, tako da desna strana Košijeve teoreme o reziduumima (5.1) postaje

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Res} \left[\tilde{P}(x, s) e^{st}, s_k \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} \left(\frac{s_k e^{s_k t}}{1 + (k\pi)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}} + \frac{\bar{s}_k e^{\bar{s}_k t}}{1 + (k\pi)^2 \frac{\tilde{G}'(\bar{s}_k)}{2\bar{s}_k}} \right) + x \lim_{k \rightarrow 0} \frac{s_k e^{s_k t}}{1 + (k\pi)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}} \quad (5.7)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} e^{-\rho_k t |\cos \varphi_k|} \operatorname{Re} \left(\frac{s_k e^{i\rho_k t \sin \varphi_k}}{1 + (k\pi)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}} \right), \quad (5.8)$$

gde je $s_k = \rho_k e^{i\varphi_k}$, $\varphi_k \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Treba zapaziti da je poslednji član u (5.7) jednak nuli prema

$$\frac{s_k e^{s_k t}}{1 + (k\pi)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}} \sim \frac{i k \pi e^{ik\pi t}}{1 + k \pi \frac{\tilde{G}'(ik\pi)}{2i}} \sim ik\pi \rightarrow 0 \text{ kada } k \rightarrow 0,$$

jer $s_k \sim ik\pi$ kada $k \rightarrow 0$, a u skladu sa jednačinom (4.26).

Dakle, integrali sa nenultim doprinosom (5.2), (5.3) i (5.4), kao i reziduumi (5.8), u skladu sa Košijevom teoremom o reziduumima (5.1) daju

$$\begin{aligned} & 2\pi i P(x, t) + 2i \int_0^\infty \operatorname{Im} \left(\frac{\sinh \frac{x\rho e^{i\pi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\pi})}}}{\sinh \frac{\rho e^{i\pi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\pi})}}} \right) e^{-\rho t} d\rho \\ &= 4\pi i \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} e^{-\rho_k t |\cos \varphi_k|} \operatorname{Re} \left(\frac{s_k e^{i\rho_k t \sin \varphi_k}}{1 + (k\pi)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}} \right) \\ & P(x, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left(\frac{\sinh \frac{x\rho e^{i\pi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\pi})}}}{\sinh \frac{\rho e^{i\pi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\pi})}}} \right) e^{-\rho t} d\rho + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} e^{-\rho_k t |\cos \varphi_k|} \operatorname{Re} \left(\frac{s_k e^{i\rho_k t \sin \varphi_k}}{1 + (k\pi)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ostaje da se pokaže da integrali po konturama Γ_1 , Γ_2 , Γ_4 , Γ_6 i Γ_7 teže nuli kada $R \rightarrow \infty$ i $r \rightarrow 0$. Bez obzira na činjenicu da je oblik (5.9) jezgra rešenja P validan samo za modele prve klase, regularizovano jezgro rešenja P_{reg} , koje se odnosi na modele druge klase, može se dobiti na analogan način.

Integral po konturi Γ_1 , prema parametrizaciji dатој у табели 5.1, је

$$I_{\Gamma_1} = \int_{p_0}^0 \frac{\sinh \frac{x(p+iR)}{\sqrt{\tilde{G}(p+iR)}}}{\sinh \frac{p+iR}{\sqrt{\tilde{G}(p+iR)}}} e^{pt} e^{iRt} dp,$$

те је

$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_1}| &\leqslant \int_0^{p_0} \left| e^{-(1-x) \frac{p+iR}{\sqrt{\tilde{G}(p+iR)}}} \right| \left| \frac{1 - e^{-\frac{2x(p+iR)}{\sqrt{\tilde{G}(p+iR)}}}}{1 - e^{-\frac{2(p+iR)}{\sqrt{\tilde{G}(p+iR)}}}} \right| e^{pt} dp \\ &\leqslant \int_0^{p_0} e^{-(1-x) \operatorname{Re} \frac{p+iR}{\sqrt{\tilde{G}(p+iR)}}} \left| \frac{1 + e^{-2x \operatorname{Re} \frac{p+iR}{\sqrt{\tilde{G}(p+iR)}}}}{1 - e^{-2 \operatorname{Re} \frac{p+iR}{\sqrt{\tilde{G}(p+iR)}}}} \right| e^{pt} dp \\ &\leqslant \int_0^{p_0} e^{-(1-x) \sqrt{\frac{a_3}{b}} R^{\frac{2-\delta}{2}} \cos \frac{(2-\delta)\pi}{4}} \left| \frac{1 + e^{-2x \sqrt{\frac{a_3}{b}} R^{\frac{2-\delta}{2}} \cos \frac{(2-\delta)\pi}{4}}}{1 - e^{-2\sqrt{\frac{a_3}{b}} R^{\frac{2-\delta}{2}} \cos \frac{(2-\delta)\pi}{4}}} \right| e^{pt} dp \rightarrow 0 \text{ kada } R \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5.10)$$

zbog asimptotskog ponašanja izraza

$$\frac{p+iR}{\sqrt{\tilde{G}(p+iR)}} \sim \sqrt{\frac{a_3}{b}} R^{\frac{2-\delta}{2}} e^{i\frac{(2-\delta)\pi}{4}}, \text{ kada } R \rightarrow \infty,$$

где је $\delta = \mu + \eta - \gamma \in (0, 1)$, при чему је $\frac{(2-\delta)\pi}{4} \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ у случају прве класе Burgersovih модела, док у случају друге класе Burgersovih модела, израз (5.10) постaje

$$|I_{\Gamma_1}| \leqslant \int_0^{p_0} e^{-(1-x) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a_3}} \frac{a_2}{b^2} \left(b - \frac{a_3}{a_2} \right) \sin \frac{\eta\pi}{2} R^{1-\eta}} \frac{1 + e^{-2x \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a_3}} \frac{a_2}{b^2} \left(b - \frac{a_3}{a_2} \right) \sin \frac{\eta\pi}{2} R^{1-\eta}}}{1 - e^{-2\frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a_3}} \frac{a_2}{b^2} \left(b - \frac{a_3}{a_2} \right) \sin \frac{\eta\pi}{2} R^{1-\eta}}} e^{pt} dp \rightarrow 0 \text{ kada } R \rightarrow \infty,$$

budući da je $\eta \in (0, 1)$, gde su iskorišćene asimptotike izraza

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{p + iR}{\sqrt{\tilde{G}(p + iR)}} &\sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a_3}} \frac{a_2}{b^2} \left(b - \frac{a_3}{a_2} \right) \sin \frac{\eta\pi}{2} R^{1-\eta} \rightarrow \infty \text{ kada } R \rightarrow \infty, \\ \operatorname{Im} \frac{p + iR}{\sqrt{\tilde{G}(p + iR)}} &\sim \sqrt{\frac{a_3}{b}} R \rightarrow \infty \text{ kada } R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

dobijene primenom formula $\operatorname{Re} z = \sqrt{\frac{|z|^2 + \operatorname{Re} z^2}{2}}$ i $\operatorname{Im} z = \sqrt{\frac{|z|^2 - \operatorname{Re} z^2}{2}} \operatorname{sgn} \operatorname{Im} z^2$ na izraze

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{p + iR}{\sqrt{\tilde{G}(p + iR)}} \right)^2 &\sim \operatorname{Re} \psi \left(R, \frac{\pi}{2} \right) \sim -\frac{a_3}{b} R^2 \text{ kada } R \rightarrow \infty, \\ \operatorname{Im} \left(\frac{p + iR}{\sqrt{\tilde{G}(p + iR)}} \right)^2 &\sim \operatorname{Im} \psi \left(R, \frac{\pi}{2} \right) \sim \frac{a_2}{b^2} \left(b - \frac{a_3}{a_2} \right) R^{2-\eta} \sin \frac{\eta\pi}{2} \text{ kada } R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

koji su određeni prema (6.10) i (6.11), jer prema (6.1) važi $\psi(s) \sim \frac{s^2}{\tilde{G}(s)}$ kada $|s| \rightarrow \infty$. Stoga, integral $I_{\Gamma_1} \rightarrow 0$ kada $R \rightarrow \infty$, a sličnim argumentima se pokazuje da $I_{\Gamma_7} \rightarrow 0$ kada $R \rightarrow \infty$.

Korišćenjem parametrizacije date u tabeli 5.1, integral po konturi Γ_2 svodi se na oblik

$$I_{\Gamma_2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sinh \frac{x R e^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(R e^{i\varphi})}}}{\sinh \frac{R e^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(R e^{i\varphi})}}} e^{R t e^{i\varphi}} R i e^{i\varphi} d\varphi,$$

te je

$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_2}| &\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left| e^{(1-x) \frac{R e^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(R e^{i\varphi})}}} \right| \left| \frac{e^{\frac{2x R e^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(R e^{i\varphi})}}} - 1}{e^{\frac{2 R e^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(R e^{i\varphi})}}} - 1} \right| e^{R t \cos \varphi} R d\varphi \\ &\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{(1-x) \operatorname{Re} \frac{R e^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(R e^{i\varphi})}}} \frac{e^{2x \operatorname{Re} \frac{R e^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(R e^{i\varphi})}}} + 1}{\left| e^{2 \operatorname{Re} \frac{R e^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(R e^{i\varphi})}}} - 1 \right|} e^{R t \cos \varphi} R d\varphi. \end{aligned} \quad (5.11)$$

U slučaju Burgersovih modela prve klase, asimptotsko ponašanje izraza $\frac{s}{\sqrt{\tilde{G}(s)}}$ po konturi Γ_2 je

$$\frac{R e^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(R e^{i\varphi})}} \sim \sqrt{\frac{a_3}{b}} R^{\frac{2-\delta}{2}} e^{i \frac{(2-\delta)\varphi}{2}} \text{ kada } R \rightarrow \infty,$$

gde je $\delta = \mu + \eta - \gamma \in (0, 1)$, dok je $\frac{(2-\delta)\varphi}{2} \in (\frac{\pi}{4}, \pi)$, te je neophodno razmatrati dva intervala: $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \varphi_\delta)$ kada je $\cos \frac{(2-\delta)\varphi}{2} > 0$ i $\varphi \in (\varphi_\delta, \pi)$ kada je $\cos \frac{(2-\delta)\varphi}{2} < 0$, sa $\varphi_\delta = \frac{\pi}{2-\delta}$. Stoga, izraz (5.11) postaje

$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_2}| &\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_\delta} e^{-2(1-x) \sqrt{\frac{a_3}{b}} R^{\frac{2-\delta}{2}} \cos \frac{(2-\delta)\varphi}{2}} \frac{1 + e^{-2x \sqrt{\frac{a_3}{b}} R^{\frac{2-\delta}{2}} \cos \frac{(2-\delta)\varphi}{2}}}{\left| 1 - e^{-2 \sqrt{\frac{a_3}{b}} R^{\frac{2-\delta}{2}} \cos \frac{(2-\delta)\varphi}{2}} \right|} e^{R t \cos \varphi} R d\varphi \\ &\quad + \int_{\varphi_\delta}^{\pi} e^{-2(1-x) \sqrt{\frac{a_3}{b}} R^{\frac{2-\delta}{2}} |\cos \frac{(2-\delta)\varphi}{2}|} \frac{e^{-2x \sqrt{\frac{a_3}{b}} R^{\frac{2-\delta}{2}} |\cos \frac{(2-\delta)\varphi}{2}|} + 1}{\left| e^{-2 \sqrt{\frac{a_3}{b}} R^{\frac{2-\delta}{2}} |\cos \frac{(2-\delta)\varphi}{2}|} - 1 \right|} e^{R t \cos \varphi} R d\varphi \\ &\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_\delta} e^{-R t |\cos \varphi| - 2(1-x) \sqrt{\frac{a_3}{b}} R^{\frac{2-\delta}{2}} \cos \frac{(2-\delta)\varphi}{2}} R d\varphi \\ &\quad + \int_{\varphi_\delta}^{\pi} e^{-R t |\cos \varphi| - 2(1-x) \sqrt{\frac{a_3}{b}} R^{\frac{2-\delta}{2}} |\cos \frac{(2-\delta)\varphi}{2}|} R d\varphi \rightarrow 0 \text{ kada } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Za Burgersove modele druge klase, izraz (5.11) daje

$$|I_{\Gamma_2}| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-R|\cos \varphi|} \left(t + (1-x)\sqrt{\frac{a_3}{b}} \right) \frac{e^{-2x\sqrt{\frac{a_3}{b}}R|\cos \varphi|} + 1}{\left| e^{-2\sqrt{\frac{a_3}{b}}R|\cos \varphi|} - 1 \right|} R d\varphi \rightarrow 0 \text{ kada } R \rightarrow \infty,$$

Koristeći asimptotiku izraza

$$\frac{Re^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(Re^{i\varphi})}} \sim \sqrt{\frac{a_3}{b}} Re^{i\varphi} \text{ kada } R \rightarrow \infty.$$

Dakle, $I_{\Gamma_2} \rightarrow 0$ kada $R \rightarrow \infty$. Koristeći sličnu argumentaciju može se pokazati da $I_{\Gamma_6} \rightarrow 0$ kada $R \rightarrow \infty$.

Integral po konturi Γ_4 , parametrizovan korišćenjem parametrizacije date u tabeli 5.1, je

$$I_{\Gamma_4} = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{\sinh \frac{xre^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(re^{i\varphi})}}}{\sinh \frac{re^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(re^{i\varphi})}}} e^{rte^{i\varphi}} rie^{i\varphi} d\varphi,$$

tako da

$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_4}| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| e^{(1-x)\frac{re^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(re^{i\varphi})}}} \right| \left| \frac{e^{\frac{2xre^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(re^{i\varphi})}}} - 1}{e^{\frac{2re^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(re^{i\varphi})}}} - 1} \right| e^{rt\cos \varphi} r d\varphi \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-x)r\frac{2-\xi}{2}\cos \frac{(2-\xi)\varphi}{2} + rt\cos \varphi} \frac{e^{2xr\frac{2-\xi}{2}\cos \frac{(2-\xi)\varphi}{2}} + 1}{\left| e^{2r\frac{2-\xi}{2}\cos \frac{(2-\xi)\varphi}{2}} - 1 \right|} r d\varphi \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^{\frac{\xi}{2}}}{\left| \cos \frac{(2-\xi)\varphi}{2} \right|} d\varphi \rightarrow 0 \text{ kada } r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

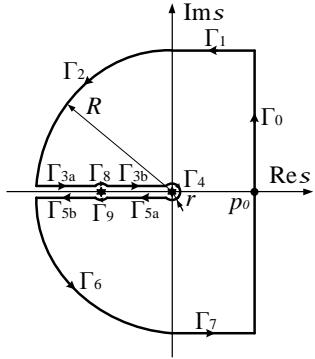
gde je $\xi \in \{\mu, \beta\}$, budući da za Burgersove modele obe klase važi asimptotika

$$\frac{re^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(re^{i\varphi})}} \sim r^{\frac{2-\xi}{2}} e^{i\frac{(2-\xi)\varphi}{2}} \text{ kada } r \rightarrow 0,$$

gde je dodatno iskrišćeno ponašanje funkcije $e^{2r\frac{2-\xi}{2}\cos \frac{(2-\xi)\varphi}{2}} - 1 \approx 2r^{\frac{2-\xi}{2}} \cos \frac{(2-\xi)\varphi}{2}$ za malo r .

5.2 Slučaj kada funkcija \tilde{P} , pored $s = 0$, ima i realnu negativnu tačku grananja

U slučaju kada jezgro rešenja u slici \tilde{P} , pored tačke grananja $s = 0$, ima i realnu negativnu tačku grananja $s = -\rho^*$, integracija u Košijevoj teoremi o reziduumima (5.1) se vrši po konturi $\Gamma^{(II)}$, prikazanoj na slici 5.2 i, kao i u prethodnom slučaju, integrali po konturama $\Gamma_0, \Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}$ i $\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}$ imaju nenulti doprinos, a u skladu sa parametrizacijom datom u tabeli 5.2 imaju isti oblik kao integrali dati izrazima (5.2), (5.3) i (5.4). Pored integrala, reziduumi su takođe izračunati u poglavlju 5.1 i dati sa (5.8). Jezgro rešenja P je oblika (5.9), budući da, kao u slučaju kada \tilde{P} nema drugih tačaka grananja osim $s = 0$, integrali po konturama $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_6$ i Γ_7 imaju multi doprinos, kao što je već pokazano u poglavlju 5.1, tako da ostaje da se pokaže da integrali po konturama Γ_8 i Γ_9 imaju multi doprinos.



Γ_0 :	Bromvičeva kontura,	
Γ_1 :	$s = p + i\varphi$,	$p \in [0, p_0]$, $p_0 \geq 0$ proizvoljno,
Γ_2 :	$s = Re^{i\varphi}$,	$\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$,
$\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}$:	$s = \rho e^{i\pi}$,	$\rho \in [r, R]$,
Γ_4 :	$s = re^{i\varphi}$,	$\varphi \in [-\pi, \pi]$,
$\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}$:	$s = \rho e^{-i\pi}$,	$\rho \in [r, R]$,
Γ_6 :	$s = Re^{i\varphi}$,	$\varphi \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$,
Γ_7 :	$s = p - iR$,	$p \in [0, p_0]$, $p_0 \geq 0$ proizvoljno,
Γ_8 :	$s = -\rho^* + re^{i\varphi}$,	$\varphi \in [0, \pi]$,
Γ_9 :	$s = -\rho^* + re^{i\varphi}$,	$\varphi \in [-\pi, 0]$.

Tabela 5.2: Parametrizacija integracione konture $\Gamma^{(II)}$.

Slika 5.2: Integraciona kontura $\Gamma^{(II)}$.

Integral po konturi Γ_8 , parametrizovan koristeći parametrizaciju datu u tabeli 5.2, prema (5.5) je

$$I_{\Gamma_8} = \int_{\pi}^0 \frac{\sinh \frac{x(\rho^* e^{i\pi} + re^{i\varphi})}{\sqrt{\tilde{G}(\rho^* e^{i\pi} + re^{i\varphi})}}}{\sinh \frac{(\rho^* e^{i\pi} + re^{i\varphi})}{\sqrt{\tilde{G}(\rho^* e^{i\pi} + re^{i\varphi})}}} e^{(\rho^* e^{i\pi} + re^{i\varphi})t} rie^{i\varphi} d\varphi,$$

tako da

$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_8}| &\leqslant e^{-\rho^* t} \int_0^\pi \left| e^{(1-x)\sqrt{r}(X(\varphi)+iY(\varphi))} \right| \left| \frac{e^{2x\sqrt{r}(X(\varphi)+iY(\varphi))} - 1}{e^{2\sqrt{r}(X(\varphi)+iY(\varphi))} - 1} \right| r d\varphi \\ &\leqslant e^{-\rho^* t} \int_0^\pi e^{(1-x)\sqrt{r}X(\varphi)} \frac{e^{2x\sqrt{r}X(\varphi)} + 1}{|e^{2\sqrt{r}X(\varphi)} - 1|} r d\varphi \\ &\leqslant e^{-\rho^* t} \int_0^\pi \frac{\sqrt{r}}{|X(\varphi)|} d\varphi \rightarrow 0 \text{ kada } r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gde važi da je $e^{2\sqrt{r}X(\varphi)} - 1 \approx 2\sqrt{r}X(\varphi)$ za malo r , a u skladu sa asimptotikom izraza

$$\begin{aligned} \frac{\rho^* e^{i\pi} + re^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho^* e^{i\pi} + re^{i\varphi})}} &\sim i\sqrt{r} (\rho^*)^{\frac{1-\xi}{2}} e^{i\frac{(2-\xi)\pi+\varphi}{2}} \sqrt{\frac{\alpha a_1 (\rho^*)^\alpha e^{i\alpha\pi} + \beta a_2 (\rho^*)^\beta e^{i\beta\pi} + \gamma a_3 (\rho^*)^\gamma e^{i\gamma\pi}}{1 + b(\rho^*)^\eta e^{i\eta\pi}}} \text{ odnosno,} \\ &\sim \sqrt{r} (X(\varphi) + iY(\varphi)) \text{ kada } r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

što važi za Burgersove modele obe klase, jer

$$\phi_\sigma (\rho^* e^{i\pi} + re^{i\varphi}) \sim -\frac{re^{i\varphi}}{\rho^*} \left(\alpha a_1 (\rho^*)^\alpha e^{i\alpha\pi} + \beta a_2 (\rho^*)^\beta e^{i\beta\pi} + \gamma a_3 (\rho^*)^\gamma e^{i\gamma\pi} \right) \text{ kada } r \rightarrow 0, \quad (5.12)$$

videti jednačinu (B.31) u [49], podrazumevajući

$$\tilde{G}(\rho^* e^{i\pi} + re^{i\varphi}) \sim -\frac{1}{re^{i\varphi}} (\rho^*)^{1+\xi} e^{i\xi\pi} \frac{1 + b(\rho^*)^\eta e^{i\eta\pi}}{\alpha a_1 (\rho^*)^\alpha e^{i\alpha\pi} + \beta a_2 (\rho^*)^\beta e^{i\beta\pi} + \gamma a_3 (\rho^*)^\gamma e^{i\gamma\pi}}$$

gde je $\xi \in \{\mu, \beta\}$. Sličnim argumentima se pokazuje da integral I_{Γ_9} takođe teži nuli kada $r \rightarrow 0$.

5.3 Slučaj kada funkcija \tilde{P} , pored $s = 0$, ima i par kompleksno konjugovanih tačaka grananja

U slučaju kada jezgro rešenja u slici \tilde{P} , pored tačke grananja $s = 0$, ima i par kompleksno konjugovanih tačaka grananja s_0 i \bar{s}_0 sa negativnim realnim delom, datih sa $s_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$, $\varphi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, prepostavljajući da je apsolutna vrednost argumenata polova manja od apsolutne vrednosti argumenata tačaka grananja, integracija u Košijevoj teoremi o reziduumima (5.1) je izvršena po konturi $\Gamma^{(III)}$, prikazanoj na slici 5.3, tako da integrali po konturama Γ_0 , $\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}$ i $\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}$ daju nenulti doprinosi i u skladu sa parametrizacijom datoj u tabeli 5.3, a prema (5.5) dati su sledećim izrazima

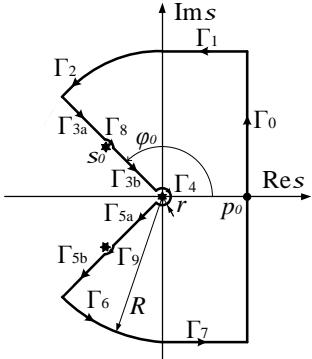
$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_{\Gamma_0} = \int_{Br} \tilde{P}(x, s) e^{st} ds = 2\pi i P(x, t),$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} I_{\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}} &= \int_0^\infty \frac{\sinh \frac{x\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}}{\sinh \frac{\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}} e^{\rho t e^{i\varphi_0}} e^{i\varphi_0} d\rho = - \int_0^\infty \frac{\sinh \frac{x\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}}{\sinh \frac{\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}} e^{i(\rho t \sin \varphi_0 + \varphi_0)} e^{-\rho t |\cos \varphi_0|} d\rho, \\ \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} I_{\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}} &= \int_0^\infty \frac{\sinh \frac{x\rho e^{-i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{-i\varphi_0})}}}{\sinh \frac{\rho e^{-i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{-i\varphi_0})}}} e^{\rho t e^{-i\varphi_0}} e^{-i\varphi_0} d\rho = \int_0^\infty \frac{\sinh \frac{x\rho e^{-i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{-i\varphi_0})}}}{\sinh \frac{\rho e^{-i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{-i\varphi_0})}}} e^{-i(\rho t \sin \varphi_0 + \varphi_0)} e^{-\rho t |\cos \varphi_0|} d\rho, \end{aligned}$$

dok su reziduumi takođe izračunati u poglavljiju 5.1 i dati su sa (5.8), tako da je jezgro rešenja P oblika

$$\begin{aligned} 2\pi i P(x, t) - 2i \int_0^\infty \text{Im} \left(\frac{\sinh \frac{x\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}}{\sinh \frac{\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}} e^{i(\rho t \sin \varphi_0 + \varphi_0)} \right) e^{-\rho t |\cos \varphi_0|} d\rho \\ = 4\pi i \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} e^{-\rho_k t |\cos \varphi_k|} \text{Re} \left(\frac{s_k e^{i\rho_k t \sin \varphi_k}}{1 + (k\pi)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}} \right) \\ P(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Im} \left(\frac{\sinh \frac{x\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}}{\sinh \frac{\rho e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tilde{G}(\rho e^{i\varphi_0})}}} e^{i(\rho t \sin \varphi_0 + \varphi_0)} \right) e^{-\rho t |\cos \varphi_0|} d\rho \\ + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} e^{-\rho_k t |\cos \varphi_k|} \text{Re} \left(\frac{s_k e^{i\rho_k t \sin \varphi_k}}{1 + (k\pi)^2 \frac{\tilde{G}'(s_k)}{2s_k}} \right), \end{aligned}$$

budući da integrali po svim ostalim konturama imaju nulti doprinos. U poglavljiju 5.1 takođe je pokazano da integrali po konturama Γ_1 , Γ_2 , Γ_6 i Γ_7 daju nulti doprinos, tako da ostaje da se pokaže da su i integrali po konturama Γ_8 i Γ_9 jednaki nuli.



Γ_0	Bromvičeva kontura,	
Γ_1	$s = p + iR$,	$p \in [0, p_0]$, $p_0 \geq 0$ proizvoljno,
Γ_2	$s = Re^{i\varphi}$,	$\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \varphi_0]$,
$\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}$	$s = \rho e^{i\varphi_0}$,	$\rho \in [r, R]$,
Γ_4	$s = re^{i\varphi}$,	$\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$,
$\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}$	$s = \rho e^{-i\varphi_0}$,	$\rho \in [r, R]$,
Γ_6	$s = Re^{i\varphi}$,	$\varphi \in [-\varphi_0, -\frac{\pi}{2}]$,
Γ_7	$s = p - iR$,	$p \in [0, p_0]$, $p_0 \geq 0$ proizvoljno,
Γ_8	$s = s_0 + re^{i\varphi}$,	$\varphi \in [-\pi + \varphi_0, \varphi_0]$,
Γ_9	$s = \bar{s}_0 + re^{i\varphi}$,	$\varphi \in [-\varphi_0, \pi - \varphi_0]$.

Tabela 5.3: Parametrizacija integracione konture $\Gamma^{(III)}$.

Slika 5.3: Integraciona kontura $\Gamma^{(III)}$.

Integral po konturi Γ_8 , prema (5.5) i korišćenjem parametrizacije date u tabeli 5.3, postaje

$$I_{\Gamma_8} = \int_{-\varphi_0}^{\pi - \varphi_0} \frac{\sinh \frac{x(s_0 + re^{i\varphi})}{\sqrt{\tilde{G}(s_0 + re^{i\varphi})}}}{\sinh \frac{(s_0 + re^{i\varphi})}{\sqrt{\tilde{G}(s_0 + re^{i\varphi})}}} e^{(s_0 + re^{i\varphi})t} rie^{i\varphi} d\varphi,$$

te je

$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_8}| &\leq e^{s_0 t} \int_{-\varphi_0}^{\pi - \varphi_0} \left| e^{(1-x)\sqrt{r}(X(\varphi) + iY(\varphi))} \right| \frac{\left| e^{2x\sqrt{r}(X(\varphi) + iY(\varphi))} - 1 \right|}{\left| e^{2\sqrt{r}(X(\varphi) + iY(\varphi))} - 1 \right|} r d\varphi \\ &\leq e^{s_0 t} \int_{-\varphi_0}^{\pi - \varphi_0} e^{(1-x)\sqrt{r}X(\varphi)} \frac{e^{2x\sqrt{r}X(\varphi)} + 1}{\left| e^{2\sqrt{r}X(\varphi)} - 1 \right|} r d\varphi \\ &\leq e^{s_0 t} \int_{-\varphi_0}^{\pi - \varphi_0} \frac{\sqrt{r}}{|X(\varphi)|} d\varphi \rightarrow 0 \text{ kada } r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gde je $e^{2\sqrt{r}X(\varphi)} - 1 \approx 2\sqrt{r}X(\varphi)$ za malo r , budući da asimptotika izraza

$$\begin{aligned} \frac{s_0 + r e^{i\varphi}}{\sqrt{\tilde{G}(s_0 + r e^{i\varphi})}} &\sim \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}} s_0^{\frac{1-\xi}{2}} \sqrt{\frac{\alpha a_1 s_0^\alpha + \beta a_2 s_0^\beta + \gamma a_3 s_0^\gamma}{1 + b s_0^\eta}} \text{ odnosno,} \\ &\sim \sqrt{r} (X(\varphi) + iY(\varphi)) \text{ kada } r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

važi za obe klase Burgersovih modela, jer je

$$\phi_\sigma(s_0 + r e^{i\varphi}) \sim \frac{r e^{i\varphi}}{s_0} (\alpha a_1 s_0^\alpha + \beta a_2 s_0^\beta + \gamma a_3 s_0^\gamma) \text{ kada } r \rightarrow 0,$$

što je određeno na sličan način kao u (5.12) implicirajući

$$\tilde{G}(s_0 + r e^{i\varphi}) \sim \frac{1}{r e^{i\varphi}} s_0^{1+\xi} \frac{1 + b s_0^\eta}{\alpha a_1 s_0^\alpha + \beta a_2 s_0^\beta + \gamma a_3 s_0^\gamma}$$

gde je $\xi \in \{\mu, \beta\}$. Sličnim argumentima se pokazuje da integral I_{Γ_9} takođe teži nuli kada $r \rightarrow 0$.

6. Nule funkcije ψ

Kako su polovi funkcija \tilde{P} , \tilde{R} , \tilde{Q} i \tilde{S} rešenja jednačina (4.26) i (4.47), potrebno je ispitati poziciju, broj i višestrukost nula funkcije ψ , definisane izrazom

$$\psi(s) = \frac{s^2}{\tilde{G}(s)} + \vartheta = 0, \quad \text{gde je } \vartheta = \begin{cases} (k\pi)^2, \\ \left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)^2. \end{cases} \quad (6.1)$$

Iako jednačina (6.1) ne može biti rešena analitički, biće pokazano da funkcija ψ , definisana sa (6.1), za svako k ima par kompleksno konjugovanih nula sa negativnim realnim delom, koji predstavljaju polove funkcija \tilde{P} , \tilde{R} , \tilde{Q} i \tilde{S} .

Uvođenjem smene $s = \rho e^{i\varphi}$ u funkciju ψ , datu sa (6.1), njen realni i imaginarni deo postaju

$$\operatorname{Re} \psi(\rho, \varphi) = \frac{\rho^{2-\xi}}{|1+b\rho^\eta e^{i\eta\varphi}|^2} \left(g^{(\text{I,II})}(\rho, \varphi) \cos(2\varphi) + f^{(\text{I,II})}(\rho, \varphi) \sin(2\varphi) \right) + \vartheta, \quad (6.2)$$

$$\operatorname{Im} \psi(\rho, \varphi) = \frac{\rho^{2-\xi}}{|1+b\rho^\eta e^{i\eta\varphi}|^2} \left(g^{(\text{I,II})}(\rho, \varphi) \sin(2\varphi) - f^{(\text{I,II})}(\rho, \varphi) \cos(2\varphi) \right), \quad (6.3)$$

gde je $\xi = \mu$ za prvu, a $\xi = \beta$ za drugu klasu Burgersovih modela i gde su funkcije $g^{(\text{I,II})}$ i $f^{(\text{I,II})}$ date sa

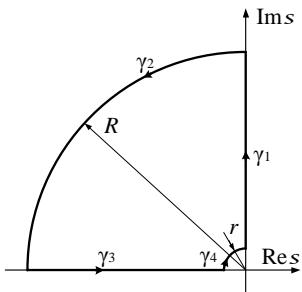
$$\begin{aligned} g^{(\text{I})}(\rho, \varphi) &= \cos(\mu\varphi) + a_1\rho^\alpha \cos((\mu - \alpha)\varphi) + a_2\rho^\beta \cos((\mu - \beta)\varphi) + a_3\rho^\gamma \cos((\mu - \gamma)\varphi) + b\rho^\eta \cos((\mu + \eta)\varphi) \\ &\quad + a_1b\rho^{\alpha+\eta} \cos((\mu + \eta - \alpha)\varphi) + a_2b\rho^{\beta+\eta} \cos((\mu + \eta - \beta)\varphi) + a_3b\rho^{\gamma+\eta} \cos((\mu + \eta - \gamma)\varphi), \\ f^{(\text{I})}(\rho, \varphi) &= \sin(\mu\varphi) + a_1\rho^\alpha \sin((\mu - \alpha)\varphi) + a_2\rho^\beta \sin((\mu - \beta)\varphi) + a_3\rho^\gamma \sin((\mu - \gamma)\varphi) + b\rho^\eta \sin((\mu + \eta)\varphi) \\ &\quad + a_1b\rho^{\alpha+\eta} \sin((\mu + \eta - \alpha)\varphi) + a_2b\rho^{\beta+\eta} \sin((\mu + \eta - \beta)\varphi) + a_3b\rho^{\gamma+\eta} \sin((\mu + \eta - \gamma)\varphi), \end{aligned} \quad (6.4)$$

za prvu klasu, odnosno sa

$$\begin{aligned} g^{(\text{II})}(\rho, \varphi) &= \cos(\beta\varphi) + a_1\rho^\alpha \cos((\beta - \alpha)\varphi) + a_2\rho^\beta \cos((\beta + \eta)\varphi) \\ &\quad + a_1b\rho^{\alpha+\eta} \cos((\eta + \beta - \alpha)\varphi) + (a_2b + a_3)\rho^{\beta+\eta} \cos(\eta\varphi) + a_3b\rho^{\beta+2\eta}, \\ f^{(\text{II})}(\rho, \varphi) &= \sin(\beta\varphi) + a_1\rho^\alpha \sin((\beta - \alpha)\varphi) + b\rho^\eta \sin((\beta + \eta)\varphi) \\ &\quad + a_1b\rho^{\alpha+\eta} \sin((\eta + \beta - \alpha)\varphi) + a_2 \left(b - \frac{a_3}{a_2} \right) \rho^{\beta+\eta} \sin(\eta\varphi), \end{aligned} \quad (6.5)$$

za drugu klasu. Treba zapaziti da je $b - \frac{a_3}{a_2} > 0$ prema termodinamičkim restrikcijama.

Ako je $s_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$ nula funkcije ψ , tada je njoj kompleksno konjugovana vrednost $\bar{s}_0 = \rho_0 e^{-i\varphi_0}$ takođe nula, budući da je $\operatorname{Im} \psi(\rho, -\varphi) = -\operatorname{Im} \psi(\rho, \varphi)$, prema (6.3), stoga je dovoljno tražiti nule funkcije ψ samo u gornjoj kompleksnoj poluravni. Štaviše, kako je pokazano u apendiksu A u [50], funkcija ψ nema nule u desnoj kompleksnoj poluravni i stoga, da bi se pokazalo da nule funkcije ψ leže u levoj kompleksnoj poluravni, koristi se princip argumenta i kontura γ , prikazana na slici 6.1 zajedno sa svojom parametrizacijom datom u tabeli 6.1, da bi se pokazalo da nule funkcije ψ leže u drugom kvadrantu kompleksne ravni. Princip argumenta tvrdi da je broj nula N funkcije ψ unutar oblasti ograničene konturom γ , ukoliko funkcija ψ nema polova unutar navedene oblasti, određen izrazom $\Delta \arg \psi(s) = 2\pi N$, gde kompleksna promenljiva s uzima vrednosti na konturi γ .



$$\begin{aligned}\gamma_1 &: s = \rho e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \rho \in [r, R], \\ \gamma_2 &: s = Re^{i\varphi}, \quad \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \\ \gamma_3 &: s = \rho e^{i\pi}, \quad \rho \in [r, R], \\ \gamma_4 &: s = re^{i\varphi}, \quad \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi].\end{aligned}$$

Tabela 6.1: Parametrizacija konture γ .

Slika 6.1: Kontura γ .

Argument kompleksnog broja koji pripada konturi γ_1 ima fiksnu vrednost $\varphi = \frac{\pi}{2}$, dok se njegov moduo ρ menja u intervalu $(0, \infty)$, dajući realni i imaginarni deo funkcije ψ , date sa (6.2) i (6.3), u obliku

$$\operatorname{Re} \psi \left(\rho, \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\rho^{2-\xi}}{|1 + b\rho^\eta e^{i\eta\varphi}|^2} g^{(\text{I,II})} \left(\rho, \frac{\pi}{2} \right) + \vartheta, \quad (6.6)$$

$$\operatorname{Im} \psi \left(\rho, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\rho^{2-\xi}}{|1 + b\rho^\eta e^{i\eta\varphi}|^2} f^{(\text{I,II})} \left(\rho, \frac{\pi}{2} \right) > 0, \quad (6.7)$$

budući da su svi članovi u $f^{(\text{I,II})}$ pozitivni, videti (6.4) i (6.5). Asimptotsko ponašanje izraza (6.6) i (6.7) za obe klase modela kada $\rho = r \rightarrow 0$ daje

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \psi \left(r, \frac{\pi}{2} \right) &\sim -r^{2-\xi} \cos \frac{\xi\pi}{2} + \vartheta \rightarrow \vartheta \text{ i} \\ \operatorname{Im} \psi \left(r, \frac{\pi}{2} \right) &\sim r^{2-\xi} \sin \frac{\xi\pi}{2} \rightarrow 0^+,\end{aligned}$$

dok $\rho = R \rightarrow \infty$ za prvu klasu modela daje

$$\operatorname{Re} \psi \left(R, \frac{\pi}{2} \right) \sim -\frac{a_3}{b} R^{2-\mu-\eta+\gamma} \cos \frac{(\mu+\eta-\gamma)\pi}{2} \rightarrow -\infty \text{ i} \quad (6.8)$$

$$\operatorname{Im} \psi \left(R, \frac{\pi}{2} \right) \sim \frac{a_3}{b} R^{2-\mu-\eta+\gamma} \sin \frac{(\mu+\eta-\gamma)\pi}{2} \rightarrow \infty, \quad (6.9)$$

budući da na osnovu termodynamičkih zahteva važi $0 \leq \mu + \eta - \gamma \leq 1$, kao i

$$\operatorname{Re} \psi \left(R, \frac{\pi}{2} \right) \sim -\frac{a_3}{b} R^2 \rightarrow -\infty \text{ i} \quad (6.10)$$

$$\operatorname{Im} \psi \left(R, \frac{\pi}{2} \right) \sim \frac{a_2}{b^2} \left(b - \frac{a_3}{a_2} \right) R^{2-\eta} \sin \frac{\eta\pi}{2} \rightarrow \infty \quad (6.11)$$

za drugu klasu modela. Iz asimptotike izraza (6.8) i (6.9) sledi da $|\psi(R, \frac{\pi}{2})| \sim \frac{a_3}{b} R^{2-\mu-\eta+\gamma} \rightarrow \infty$ i $\tan \arg \psi(R, \frac{\pi}{2}) \sim -\tan \frac{(\mu+\eta-\gamma)\pi}{2}$ dajući $\arg \psi(R, \frac{\pi}{2}) \sim \frac{(2-\mu-\eta+\gamma)\pi}{2}$, sa $\frac{\pi}{2} \leq \frac{(2-\mu-\eta+\gamma)\pi}{2} \leq \pi$, dok iz oblika asimptotike izraza (6.10) i (6.11) sledi da $|\psi(R, \frac{\pi}{2})| \sim \frac{a_3}{b} R^2 \rightarrow \infty$ i $\tan \arg \psi(R, \frac{\pi}{2}) \sim -\frac{a_2}{a_3} \left(b - \frac{a_3}{a_2} \right) \frac{1}{R^\eta} \sin \frac{\eta\pi}{2}$ dajući $\arg \psi(R, \frac{\pi}{2}) \sim \pi$. U zaključku, kada se s menja po konturi γ_1 , argument funkcije ψ se menja od nule do ili $\arg \psi(R, \frac{\pi}{2}) \sim \frac{(2-\mu-\eta+\gamma)\pi}{2}$ u slučaju Burgersovih modela prve klase, ili do $\arg \psi(R, \frac{\pi}{2}) \sim \pi$ u slučaju modela druge klase.

Kompleksni broj koji leži na konturi γ_2 ima velik ali fiksni moduo $\rho = R$, dok se njegov argument menja po konturi γ_2 uzimajući vrednosti $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, tako da asimptotika (6.2) i (6.3) kada $R \rightarrow \infty$ u slučaju Burgersovih modela koji pripadaju prvoj klasi daje

$$\operatorname{Re} \psi(R, \varphi) \sim \frac{a_3}{b} R^{2-\mu-\eta+\gamma} \cos((2-\mu-\eta+\gamma)\varphi) \text{ i} \quad (6.12)$$

$$\operatorname{Im} \psi(R, \varphi) \sim \frac{a_3}{b} R^{2-\mu-\eta+\gamma} \sin((2-\mu-\eta+\gamma)\varphi), \quad (6.13)$$

kao i

$$\operatorname{Re} \psi(R, \varphi) \sim \frac{a_3}{b} R^2 \cos(2\varphi) \text{ i} \quad (6.14)$$

$$\operatorname{Im} \psi(R, \varphi) \sim R^2 \left(\frac{a_3}{b} \sin(2\varphi) - \frac{1}{R^\eta} \frac{a_2}{b^2} \left(b - \frac{a_3}{a_2} \right) \sin(\eta\varphi) \cos(2\varphi) \right), \quad (6.15)$$

za Burgersove modele koji pripadaju drugoj klasi, dok drugi član u $\text{Im } \psi$ iščezava za $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, ali ima dominantnu ulogu ako je $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ili $\varphi = \pi$. Stoga, realni i imaginarni deo funkcije ψ ne mogu biti istovremeno pozitivni za $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, budući da je $\frac{\pi}{2} \leq (2 - \mu - \eta + \gamma)\varphi \leq 2\pi$ u slučaju modela I, III i IV, kao i $\frac{3\pi}{4} \leq (2 - \mu - \eta + \gamma)\varphi \leq 2\pi$ u slučaju modela II i V, i što je očigledno za modele druge klase. Ako je $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tada se (6.12) i (6.13) svode na (6.8) i (6.9), a takođe se i izrazi (6.14) i (6.15) svode na (6.10) i (6.11), dok ako je $\varphi = \pi$, tada (6.12) i (6.13) postaju

$$\text{Re } \psi(R, \pi) \sim \frac{a_3}{b} R^{2-\mu-\eta+\gamma} \cos((\mu + \eta - \gamma)\pi) \rightarrow \pm\infty \quad \text{i} \quad (6.16)$$

$$\text{Im } \psi(R, \pi) \sim -\frac{a_3}{b} R^{2-\mu-\eta+\gamma} \sin((\mu + \eta - \gamma)\pi) \rightarrow -\infty, \quad (6.17)$$

dok (6.14) i (6.15) postaju

$$\text{Re } \psi(R, \pi) \sim \frac{a_3}{b} R^2 \rightarrow \infty \quad \text{i} \quad (6.18)$$

$$\text{Im } \psi(R, \pi) \sim -\frac{a_2}{b^2} \left(b - \frac{a_3}{a_2} \right) R^{2-\eta} \sin(\eta\pi) \rightarrow -\infty. \quad (6.19)$$

Stoga, kada se s menja po konturi γ_2 , argument funkcije ψ prolazi kroz drugi, treći, a moguće i četvrti kvadrant.

Argument kompleksnih brojeva koji leže na konturi γ_3 imaju fiksnu vrednost $\varphi = \pi$, dok se njihov moduo menja u intervalu $\rho \in (0, \infty)$, dajući

$$\text{Re } \psi(\rho, \pi) = \frac{\rho^{2-\xi}}{|1 + b\rho^\eta e^{i\eta\varphi}|^2} g^{(\text{I,II})}(\rho, \pi) + \vartheta, \quad (6.20)$$

$$\text{Im } \psi(\rho, \pi) = -\frac{\rho^{2-\xi}}{|1 + b\rho^\eta e^{i\eta\varphi}|^2} f^{(\text{I,II})}(\rho, \pi) < 0, \quad (6.21)$$

za realni i imaginarni deo funkcije ψ , budući da je $f^{(\text{I,II})}(\rho, \pi) > 0$ za $\rho \in (0, \infty)$, zbog suženih termodinamičkih restrikcija u slučaju svih frakcionih Burgersovih modela, što je pokazano za svaki model pojedinačno. U slučaju modela I, funkcija $f^{(\text{I})}$, dobijena u obliku

$$f^{(\text{I})}(\rho, \pi) = \sin(\mu\pi) + \begin{cases} \rho^\alpha |\sin((\mu + \alpha)\pi)| \left(a_1 \frac{\sin((\mu - \alpha)\pi)}{|\sin((\mu + \alpha)\pi)|} - b \right) + a_2 \rho^\beta \sin((\mu - \beta)\pi) + a_3 \rho^\gamma \sin((\mu - \gamma)\pi) \\ + a_1 b \rho^{2\alpha} \sin(\mu\pi) + a_2 b \rho^{\alpha+\beta} \sin((\mu + \alpha - \beta)\pi) + a_3 b \rho^{\alpha+\gamma} \sin((\mu + \alpha - \gamma)\pi), \\ a_1 \rho^\alpha \sin((\mu - \alpha)\pi) + \rho^\beta |\sin((\mu + \beta)\pi)| \left(a_2 \frac{\sin((\mu - \beta)\pi)}{|\sin((\mu + \beta)\pi)|} - b \right) + a_3 \rho^\gamma \sin((\mu - \gamma)\pi) \\ + a_1 b \rho^{\alpha+\beta} \sin((\mu + \beta - \alpha)\pi) + a_2 b \rho^{2\beta} \sin(\mu\pi) + a_3 b \rho^{\gamma+\beta} \sin((\mu + \beta - \gamma)\pi), \\ a_1 \rho^\alpha \sin((\mu - \alpha)\pi) + a_2 \rho^\beta \sin((\mu - \beta)\pi) + \rho^\gamma |\sin((\mu + \gamma)\pi)| \left(a_3 \frac{\sin((\mu - \gamma)\pi)}{|\sin((\mu + \gamma)\pi)|} - b \right) \\ + a_1 b \rho^{\alpha+\gamma} \sin((\mu + \gamma - \alpha)\pi) + a_2 b \rho^{\beta+\gamma} \sin((\mu + \gamma - \beta)\pi) + a_3 b \rho^{2\gamma} \sin(\mu\pi), \end{cases}$$

prema (6.4), je pozitivna zbog suženih termodinamičkih restrikcija (2.25). U slučaju modela II, funkcija $f^{(\text{I})}$, dobijena kao

$$f^{(\text{I})}(\rho, \pi) = \sin(\mu\pi) + \rho^\alpha \left(a_1 \frac{\sin((\mu - \alpha)\pi)}{|\sin((\mu + \alpha)\pi)|} - b \right) + a_2 \rho^\beta \sin((\mu - \beta)\pi) \\ + a_1 \rho^{2\alpha} \sin(\mu\pi) \left(b - \frac{a_3}{a_1} \frac{|\sin((\mu - 2\alpha)\pi)|}{\sin(\mu\pi)} \right) + a_2 b \rho^{\alpha+\beta} \sin((\mu + \alpha - \beta)\pi) \\ + a_3 b \rho^{3\alpha} \sin((\mu - \alpha)\pi),$$

je pozitivna zbog suženih termodinamičkih restrikcija (2.26). U slučaju modela III, funkcija $f^{(\text{I})}$, dobijena kao

$$f^{(\text{I})}(\rho, \pi) = \sin(\mu\pi) + \rho^\alpha |\sin((\mu + \alpha)\pi)| \left(a_1 \frac{\sin((\mu - \alpha)\pi)}{|\sin((\mu + \alpha)\pi)|} - b \right) + a_2 \rho^\beta \sin((\mu - \beta)\pi) \\ + a_1 b \rho^{2\alpha} \sin(\mu\pi) + a_2 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\mu + \alpha - \beta)\pi) \left(b - \frac{a_3}{a_2} \frac{|\sin((\mu - \beta - \alpha)\pi)|}{\sin((\mu - \beta + \alpha)\pi)} \right) \\ + a_3 b \rho^{2\alpha+\beta} \sin((\mu - \beta)\pi),$$

prema (6.4), je pozitivna zbog suženih termodinamičkih restrikcija (2.27). U slučaju modela IV, funkcija $f^{(\text{I})}$ dobijena kao

$$f^{(\text{I})}(\rho, \pi) = \sin(\mu\pi) + a_1 \rho^\alpha \sin((\mu - \alpha)\pi) + \rho^\beta |\sin((\mu + \beta)\pi)| \left(a_2 \frac{\sin((\mu - \beta)\pi)}{|\sin((\mu + \beta)\pi)|} - b \right)$$

$$+a_1\rho^{\alpha+\beta}\sin((\mu-\alpha+\beta)\pi)\left(b-\frac{a_3}{a_1}\frac{|\sin((\mu-\alpha-\beta)\pi)|}{\sin((\mu-\alpha+\beta)\pi)}\right)+a_2b\rho^{2\beta}\sin(\mu\pi) \\ +a_3b\rho^{\alpha+2\beta}\sin((\mu-\alpha)\pi),$$

prema (6.4), je pozitivna zbog suženih termodinamičkih restrikcija (2.28). U slučaju modela V, funkcija $f^{(I)}$, dobijena kao

$$f^{(I)}(\rho, \pi) = \sin(\mu\pi) + a_1\rho^\alpha\sin((\mu-\alpha)\pi) + \rho^\beta|\sin((\mu+\beta)\pi)|\left(a_2\frac{\sin((\mu-\beta)\pi)}{|\sin((\mu+\beta)\pi)|} - b\right) \\ + a_1b\rho^{\alpha+\beta}\sin((\mu+\beta-\alpha)\pi) + a_2\rho^{2\beta}\sin(\mu\pi)\left(b - \frac{a_3}{a_2}\frac{|\sin((\mu-2\beta)\pi)|}{\sin(\mu\pi)}\right) \\ + a_3b\rho^{3\beta}\sin((\mu-\beta)\pi),$$

prema (6.4), je pozitivna zbog suženih termodinamičkih restrikcija (2.29). U slučaju modela VI, funkcija $f^{(II)}$, dobijena kao

$$f^{(II)}(\rho, \pi) = \sin(\beta\pi) + \rho^\alpha|\sin((\alpha+\beta)\pi)|\left(a_1\frac{\sin((\beta-\alpha)\pi)}{|\sin((\beta+\alpha)\pi)|} - b\right) \\ + a_1b\rho^{2\alpha}\sin(\beta\pi) + a_2\left(b - \frac{a_3}{a_2}\right)\rho^{\alpha+\beta}\sin(\alpha\pi),$$

prema (6.5), je pozitivna zbog suženih termodinamičkih restrikcija (2.30). U slučaju modela VII, pozitivnost funkcije $f^{(II)}$, dobijene kao

$$f^{(II)}(\rho, \pi) = a_1\rho^\alpha\sin((\beta-\alpha)\pi) + a_1b\rho^{\alpha+\beta}\sin((2\beta-\alpha)\pi) + \left(1 + 2b\rho^\beta\cos(\beta\pi) + a_2\left(b - \frac{a_3}{a_2}\right)\rho^{2\beta}\right)\sin(\beta\pi),$$

prema (6.5), je posledica zahteva pozitivnosti trinoma kvadratnog po ρ^β , što je ostvareno suženim termodinamičkim restrikcijama (2.31). U slučaju modela VIII, pozitivnost funkcije $f^{(II)}$, dobijene kao

$$f^{(II)}(\rho, \pi) = \left(1 + 2b\rho^\alpha\cos(\alpha\pi) + \bar{a}_1\left(b - \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1}\right)\rho^{2\alpha}\right)\sin(\alpha\pi),$$

prema (6.5), je posledica zahteva pozitivnosti trinoma kvadratnog po ρ^α , što je ostvareno suženim termodinamičkim restrikcijama (2.32). Asimptotika realnog i imaginarnog dela funkcije ψ , datih sa (6.20) i (6.21), kada $\rho = R \rightarrow \infty$ svodi se na izraze (6.16) i (6.17) za Burgersove modele prve klase, kao i na izraze (6.18) i (6.19) za Burgersove modele druge klase, dok za $\rho = r \rightarrow 0$ realni i imaginarni deo funkcije ψ postaju

$$\operatorname{Re} \psi(\rho, \pi) \sim \rho^{2-\xi}\cos(\xi\varphi) + \vartheta \rightarrow \vartheta \quad (6.22)$$

$$\operatorname{Im} \psi(\rho, \pi) \sim -\rho^{2-\xi}\sin(\xi\varphi) \rightarrow 0^- \quad (6.23)$$

Stoga, kada se s menja po konturi γ_3 , prema izrazima (6.21) i (6.23), imaginarni deo funkcije ψ je negativan kada $\rho \rightarrow 0$, a prema izrazu (6.22), realni deo funkcije ψ teži ka ϑ .

Moduo kompleksnih brojeva koji pripadaju konturi γ_4 ima fiksnu ali malu vrednost $\rho = r$, dok se njihov argument menja u intervalu $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, tako da izrazi (6.2) i (6.3) postaju

$$\operatorname{Re} \psi(r, \varphi) \sim r^{2-\xi}\cos((2-\xi)\varphi) + \vartheta \sim \vartheta, \\ \operatorname{Im} \psi(r, \varphi) \sim r^{2-\xi}\sin((2-\xi)\varphi),$$

obezbeđujući da, bez obzira na predznak $\operatorname{Im} \psi$, funkcija ψ ostaje u okolini konačnog pozitivnog broja ϑ .

Dakle, promena argumenta funkcije ψ je $\Delta \arg \psi(s) = 2\pi$ kada se s menja po konturi γ , implicirajući da funkcija ψ ima jednu nulu u drugom kvadrantu kompleksne ravni za svako $k \in \mathbb{N}$.

7. Zaključak

Frakciona Burgersova talasna jednačina, napisana kao sistem jednačina koji sadrži jednačine kretanja i deformacije (4.1), kojima su pridruženi Burgersovi modeli prve klase (4.2) ili modeli druge klase (4.3), iskorišćena je za modeliranje dinamičkog odziva u početnom trenutku neopterećenog jednodimenzionog viskoelastičnog štapa konačne dužine, sa fiksiranim jednim krajem i drugim krajem opterećenim zadatim pomeranjem ili naponom, prema graničnim uslovima (4.5). Metoda Laplasove transformacije koristi se za dobijanje vremenske evolucije funkcija pomeranja i napona proizvoljne tačke štapa, predstavljene konvolucijom jezgra rešenja i zadatog graničnog uslova.

Asimptotika jezgara rešenja, za kratak vremenski interval blizak početnom trenutku, daje vremenske profile koji kontinualno rastu od nulte vrednosti kako se vreme povećava, sa značajnim rastom zavisnim od položaja tačke u slučaju Burgersovih modela prve klase, videti asimptotiku za jezgra rešenja P , R , Q i S , datih izrazima (4.22), (4.35), (4.44) i (4.50), respektivno, što implicira beskonačnu brzinu prostiranja talasa. Kada su u pitanju frakcioni Burgersovi modeli druge klase, jezgra rešenja P , R i S neophodno je regularizovati. Asimptotika regularizovanih jezgara rešenja P_{reg} i S_{reg} za kratka vremena je Hevisajdova funkcija sa argumentom $t - \sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)$, implicirajući skok vrednosti funkcija P_{reg} i S_{reg} u trenutku $t = \frac{1-x}{c}$, što podrazumeva konačnu brzinu propagacije talasa $c = \sqrt{\frac{b}{a_3}}$. Jezgro rešenja R je regularizovano drugačije, implicirajući da se za malu vrednost vremena njegova regularizovana forma ponaša kao vremenski izvod Dirakove delta funkcije, računate u $t - \sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)$, videti (4.35). Važno je napomenuti da regularizacija jezgra rešenja Q nije neophodna, jer je njegova asimptotika, za kratak vremenski interval blizak početnom trenutku, Hevisajdova funkcija sa argumentom $t - \sqrt{\frac{a_3}{b}}(1-x)$, videti (4.45).

Sva jezgra rešenja se sastoje od dva člana: prvog integralnog koji je nemonotonog karaktera kako prostorno, tako i vremenski i drugog izraženog preko sinusnog ili kosinusnog Furijeovog reda kojim je predstavljena superpozicija stojećih talasa, pri čemu svaki osciluje sa vremenski prigušenom amplitudom i ugaonom frekvencijom određenom polom jezgra rešenja u slici. Štaviše, oblik jezgra rešenja takođe zavisi od tačaka grananja jezgra rešenja u slici.

Vremenski profili, dobijeni kao odzivi na zadato pomeranje ili napon, imaju prilično klasičan oblik koji odgovara prigušenom oscilatornom ponašanju u slučaju Burgersovih modela prve klase, dok su u slučaju modela druge klase vremenski profili specifičnog oblika koji liče na niz ekscitacionih i relaksacionih procesa. Ipak, za asimptotsko ponašanje odziva, nakon dovoljno dugo vremena, pri zadatom pomeranju slobodnog kraja štapa, dobiju se izrazi

$$\varepsilon_{\Upsilon}(x, t) \sim 1 \text{ i } \sigma_{\Upsilon}(x, t) \sim \frac{t^{-\xi}}{\Gamma(1-\xi)}, \text{ kada } t \rightarrow \infty,$$

dok se u slučaju zadatog napona koji deluje na slobodni kraj štapa dobija

$$\varepsilon_{\Sigma}(x, t) \sim \frac{t^{\xi}}{\Gamma(1+\xi)}, \text{ i } \sigma_{\Sigma}(x, t) \sim 1 \text{ kada } t \rightarrow \infty,$$

videti (4.6)₂, (4.38), (4.40), (4.58) i (4.59), respektivno, što se poklapa sa ponašanjem funkcije relaksacije i funkcije puzanja, proučavanih u [49] za termodinamički konzistentne frakcione Burgersove modele.

Literatura

- [1] J. Abate and P. P. Valkó. Multi-precision Laplace transform inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:979–993, 2004.
- [2] A. Abbas, E. Masad, T. Papagiannakis, and T. Harman. Micromechanical modeling of the viscoelastic behavior of asphalt mixtures using the discrete-element method. *International Journal of Geomechanics*, 7:131–139, 2007.
- [3] T. M. Atanackovic, M. Janev, and S. Pilipovic. On the thermodynamical restrictions in isothermal deformations of fractional Burgers model. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 378:20190278–1–13, 2020.
- [4] T. M. Atanackovic, S. Konjik, Lj. Oparnica, and D. Zorica. Thermodynamical restrictions and wave propagation for a class of fractional order viscoelastic rods. *Abstract and Applied Analysis*, 2011:ID975694–1–32, 2011.
- [5] T. M. Atanackovic, S. Pilipovic, B. Stankovic, and D. Zorica. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Vibrations and Diffusion Processes*. Wiley-ISTE, London, 2014.
- [6] T. M. Atanackovic, S. Pilipovic, B. Stankovic, and D. Zorica. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Wave Propagation, Impact and Variational Principles*. Wiley-ISTE, London, 2014.
- [7] T. M. Atanackovic, S. Pilipovic, and D. Zorica. Distributed-order fractional wave equation on a finite domain: creep and forced oscillations of a rod. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 23:305–318, 2011.
- [8] T. M. Atanackovic, S. Pilipovic, and D. Zorica. Distributed-order fractional wave equation on a finite domain. Stress relaxation in a rod. *International Journal of Engineering Science*, 49:175–190, 2011.
- [9] E. Bazhlekova and I. Bazhlekov. Complete monotonicity of the relaxation moduli of distributed-order fractional Zener model. In *Proceedings of the 44th International Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics, AIP Conference Proceedings 2048*, pages 050008–1–8, 2018.
- [10] E. Bazhlekova and K. Tsocheva. Fractional Burgers' model: thermodynamic constraints and completely monotonic relaxation function. *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, 69:825–834, 2016.
- [11] P. W. Buchen and F. Mainardi. Asymptotic expansions for transient viscoelastic waves. *Journal de mécanique*, 14:597–608, 1975.
- [12] W. Cai, W. Chen, J. Fang, and S. Holm. A survey on fractional derivative modeling of power-law frequency-dependent viscous dissipative and scattering attenuation in acoustic wave propagation. *Applied Mechanics Reviews*, 70:1–12, 2018.
- [13] C. Celauro, C. Fecarotti, A. Pirrotta, and A. C. Collop. Experimental validation of a fractional model for creep/recovery testing of asphalt mixtures. *Construction and Building Materials*, 36:458–466, 2012.
- [14] I. Colombaro, A. Giusti, and F. Mainardi. A class of linear viscoelastic models based on Bessel functions. *Meccanica*, 52:825–832, 2017.
- [15] I. Colombaro, A. Giusti, and F. Mainardi. On the propagation of transient waves in a viscoelastic bessel medium. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 68:62–1–13, 2017.
- [16] I. Colombaro, A. Giusti, and F. Mainardi. On transient waves in linear viscoelasticity. *Wave Motion*, 74:191–212, 2017.

- [17] N. Demirci and E. Tönük. Non-integer viscoelastic constitutive law to model soft biological tissues to in-vivo indentation. *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, 16:14–21, 2014.
- [18] A. Giusti and F. Mainardi. A dynamic viscoelastic analogy for fluid-filled elastic tubes. *Meccanica*, 51:2321–2330, 2016.
- [19] R. Gorenflo and F. Mainardi. *Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order*. In: *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* (eds A. Carpinteri, F. Mainardi), volume 378 of *CISM Courses and Lecture Notes*. Springer Verlag, Wien and New York, 1997.
- [20] N. M. Grahovac and M. M. Žigić. Modelling of the hamstring muscle group by use of fractional derivatives. *Computers and Mathematics with Applications*, 59:1695–1700, 2010.
- [21] A. Hanyga. Wave propagation in linear viscoelastic media with completely monotonic relaxation moduli. *Wave Motion*, 50:909–928, 2013.
- [22] A. Hanyga. Attenuation and shock waves in linear hereditary viscoelastic media; Strick-Mainardi, Jeffreys-Lomnitz-Strick and Andrade creep compliances. *Pure and Applied Geophysics*, 171:2097–2109, 2014.
- [23] A. Hanyga. Dispersion and attenuation for an acoustic wave equation consistent with viscoelasticity. *Journal of Computational Acoustics*, 22:1450006–1–22, 2014.
- [24] A. Hanyga. Asymptotic estimates of viscoelastic Green’s functions near the wavefront. *Quarterly of Applied Mathematics*, 73:679–692, 2015.
- [25] A. Hanyga. Effects of Newtonian viscosity and relaxation on linear viscoelastic wave propagation. *Archive of Applied Mechanics*, 2019.
- [26] N. Heymans. Hierarchical models for viscoelasticity dynamic behaviour in the linear range. *Rheologica Acta*, 35:508–519, 1996.
- [27] S. Holm. *Waves with Power-Law Attenuation*. Springer Nature Switzerland AG, Cham, 2019.
- [28] S. Hyder Ali Muttaqi Shah. Some helical flows of a Burgers’ fluid with fractional derivative. *Meccanica*, 45:143–151, 2010.
- [29] S. Hyder Ali Muttaqi Shah. Unsteady flows of a viscoelastic fluid with the fractional Burgers’ model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11:1714–1721, 2010.
- [30] S. Hyder Ali Muttaqi Shah and H. Qi. Starting solutions for a viscoelastic fluid with fractional Burgers’ model in an annular pipe. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11:547–554, 2010.
- [31] M. Jamil and C. Fetecau. Some exact solutions for rotating flows of a generalized Burgers’ fluid in cylindrical domains. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165:1700–1712, 2010.
- [32] S. Jelić and D. Zorica. Fractional Burgers wave equation on a finite domain. *arXiv:3646858*, pages 1–31, 2021.
- [33] J. Kang, Y. Liu, and T. Xia. Unsteady flows of a generalized fractional Burgers’ fluid between two side walls perpendicular to a plate. *Advances in Mathematical Physics*, 2015:521069–1–9, 2015.
- [34] M. Khan, A. Anjum, C. Fetecau, and H. Qi. Exact solutions for some oscillating motions of a fractional Burgers’ fluid. *Mathematical and Computer Modelling*, 51:682–692, 2010.
- [35] M. Khan, S. Hyder Ali, and H. Qi. Exact solutions of starting flows for a fractional Burgers’ fluid between coaxial cylinders. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10:1775–1783, 2009.
- [36] M. Khan, S. Hyder Ali, and H. Qi. On accelerated flows of a viscoelastic fluid with the fractional Burgers’ model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10:2286–2296, 2009.
- [37] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier B.V., Amsterdam, 2006.
- [38] Y. R. Kim. *Modeling of Asphalt Concrete*. McGraw-Hill, New York, 2009.
- [39] S. Konjik, Lj. Oparnica, and D. Zorica. Distributed-order fractional constitutive stress-strain relation in wave propagation modeling. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 70:51–1–21, 2019.

- [40] Y. Liu, Q. Dai, and Z. You. Viscoelastic model for discrete element simulation of asphalt mixtures. *Journal of Engineering Mechanics*, 135:324–333, 2009.
- [41] Y. Luchko and F. Mainardi. Some properties of the fundamental solution to the signalling problem for the fractional diffusion-wave equation. *Central European Journal of Physics*, 11:666–675, 2013.
- [42] Y. Luchko and F. Mainardi. Cauchy and signaling problems for the time-fractional diffusion-wave equation. *Journal of Vibration and Acoustics*, 136:050904–1–7, 2014.
- [43] Y. Luchko, F. Mainardi, and Y. Povstenko. Propagation speed of the maximum of the fundamental solution to the fractional diffusion-wave equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 66:774–784, 2013.
- [44] F. Mainardi. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. Imperial College Press, London, 2010.
- [45] F. Mainardi and G. Spada. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. *European Physical Journal Special Topics*, 193:133–160, 2011.
- [46] N. Makris. The frequency response function of the creep compliance. *Meccanica*, 54:19–31, 2019.
- [47] M. Oeser, T. Pellinen, T. Scarpas, and C. Kasbergen. Studies on creep and recovery of rheological bodies based upon conventional and fractional formulations and their application on asphalt mixture. *International Journal of Pavement Engineering*, 9:373–386, 2008.
- [48] A. S. Okuka and D. Zorica. Formulation of thermodynamically consistent fractional Burgers models. *Acta Mechanica*, 229:3557–3570, 2018.
- [49] A. S. Okuka and D. Zorica. Fractional Burgers models in creep and stress relaxation tests. *Applied Mathematical Modelling*, 77:1894–1935, 2020.
- [50] Lj. Oparnica, D. Zorica, and A. S. Okuka. Fractional Burgers wave equation. *Acta Mechanica*, 230:4321–4340, 2019.
- [51] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego, 1999.
- [52] Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova. Analysis of dynamic behavior of viscoelastic rods whose rheological models contain fractional derivatives of two different orders. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 81:363–376, 2001.
- [53] Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova. Analysis of rheological equations involving more than one fractional parameters by the use of the simplest mechanical systems based on these equations. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 5:131–175, 2001.
- [54] Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova. A new method for solving dynamic problems of fractional derivative viscoelasticity. *International Journal of Engineering Science*, 39:149–176, 2001.
- [55] Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova. Analysis of the viscoelastic rod dynamics via models involving fractional derivatives or operators of two different orders. *Shock and Vibration Digest*, 36:3–26, 2004.
- [56] Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova. Free damped vibrations of a viscoelastic oscillator based on Rabotnov's model. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 12:129–149, 2008.
- [57] Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results. *Applied Mechanics Reviews*, 63:010801–1–52, 2010.
- [58] H. Xu and X. Jiang. Creep constitutive models for viscoelastic materials based on fractional derivatives. *Computers and Mathematics with Applications*, 73:1377–1384, 2017.
- [59] A. Zbiciak. Mathematical description of rheological properties of asphalt-aggregate mixes. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, 61:65–72, 2013.
- [60] T. Zhou, J. Yan, J. Masuda, and T. Kuriyagawa. Investigation on the viscoelasticity of optical glass in ultraprecision lens molding process. *Journal of Materials Processing Technology*, 209:4484–4489, 2009.
- [61] D. Zorica and Lj. Oparnica. Energy dissipation for hereditary and energy conservation for non-local fractional wave equations. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 378:20190295–1–24, 2020.

Biografija



Slađan Jelić, rođen je 16.04.1997. godine. Diplomirao je 07.09.2020. godine na Departmanu za fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smer diplomirani profesor fizike. Trenutno je student master akademskih studija Primjene fizike - nanonauke, koje je upisao 06.10.2020. godine. Osnovnu školu je završio 2012. godine kao vukovac i đak generacije, zatim je 2016. godine završio gimnaziju kao vukovac, đak generacije, dobitnik Svetosavske povelje i jedan od tri đaka generacije Srema. Studije fizike na Prirodno-matematičkom fakultetu upisao je 2016. godine i u toku studija je nagrađen za postignut uspeh u studiranju *Izuzetnom nagradom za uspeh u toku sudija za školsku 2016/2017. godinu, Izuzetnom nagradom za uspeh u toku sudija za školsku 2017/2018. godinu i Izuzetnom nagradom za uspeh u toku sudija za školsku 2018/2019. godinu.* Nagrađen je za Izradu naučnih i stručnih rada studenata (Tematici) u 2019/2020. godini za naučni rad *Frakciona Burgersova talasna jednačina na konačnom domenu.* Godinu dana je bio student prodekan na Prirodno-matematičkom fakultetu. Tokom 2020. godine volontirao je u Novosadskom humanitarnom centru. Član je Srpskog privrednog društva Privrednik. Od marta 2021. godine zaposlen je na Fakultetu tehničkih nauka kao saradnik u nastavi.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

<i>Redni broj:</i> RBR	
<i>Identifikacioni broj:</i> IBR	
<i>Tip dokumentacije:</i> TD	Monografska dokumentacija
<i>Tip zapisa:</i> TZ	Tekstualni štampani materijal
<i>Vrsta rada:</i> VR	Master rad
<i>Autor:</i> AU	Slađan Jelić
<i>Mentor:</i> MN	dr Dušan Zorica i dr Željka Cvejić
<i>Naslov rada:</i> NR	Prostiranje talasa u viskoelastičnom materijalu frakcionog Burgersovog tipa
<i>Jezik publikacije:</i> JP	srpski (latinica)
<i>Jezik izvoda:</i> JI	srpski/engleski
<i>Zemlja publikovanja:</i> ZP	Srbija
<i>Uže geografsko područje:</i> UGP	Vojvodina
<i>Godina:</i> GO	2021.
<i>Izdavač:</i> IZ	Autorski reprint
<i>Mesto i adresa:</i> MA	Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
<i>Fizički opis rada:</i> FO	broj poglavlja/strana/tabela/slika/referenci: 7/47/5/13/61
<i>Naučna oblast:</i> NO	fizika
<i>Naučna disciplina:</i> ND	teorijska fizika
<i>Predmetna odrednica/ ključne reči:</i> PO UDK	thermodynamically consistent fractional Burgers models, fractional Burgers wave equation, initial-boundary value problem, stress relaxation and creep including dynamics
<i>Čuva se:</i> ČU	Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu
<i>Važna napomena:</i> VN	nema
<i>Izvod:</i> IZ	Analiziran je dinamički odziv jednodimenzionog viskoelastičnog štapa konačne dužine, fiksiranog na jednom, a slobodnog na drugom kraju za zadato pomeranje slobodnog kraja štapa ili za zadati napon primenjen na njegovom slobodnom kraju. Vremenska evolucija funkcije pomeranja i napona proizvoljne tačke štapa, dobijena je u obliku konvolucije jezgra rešenja i zadatog forsiranja slobodnog kraja štapa, primenom metode Laplasove transformacije. Viskoelastična svojstva štapa modelirana su termodinamički konzistentnom frakcionom Burgersovom konstitutivnom jednačinom, koja je pridružena jednačini kretanja jednodimenzionog deformabilnog tela, te je, zajedno sa jednačinom deformacije, rešavan početno-granični problem sa nultim početnim uslovima i graničnim uslovima ili na pomeranje ili na napon slobodnog kraja štapa, uz uslov na nulto pomeranje fiksiranog kraja štapa. Burgersovi modeli frakcionog tipa mogu se podeliti u dve klase, pri čemu je karakteristika prve klase beskonačna brzina prostiranja pobude, dok modeli druge klase ispoljavaju konačnu brzinu propagacije talasa, što je dobijeno analizom rešenja za mali

	vremenski interval blizak početnom trenutku. Vremenski profili odziva funkcije pomeranja i napona na forsiranja data u obliku Hevisajdove funkcije ispoljavaju prigušene oscilatorne karakteristike svojstvene fluidu sličnim viskoelastičnim telima.
<i>Datum prihvatanja teme od NN veća: DP</i>	14.07.2021.
<i>Datum odbrane: DO</i>	10.09.2021.
<i>Članovi komisije: KO</i>	
<i>Predsednik:</i>	dr Milica Pavkov Hrvojević, redovni profesor
<i>član:</i>	dr Srboljub Simić, redovni profesor
<i>član:</i>	dr Željka Cvejić, redovni profesor
<i>član:</i>	dr Dušan Zorica, redovni profesor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

<i>Accession number:</i> ANO	
<i>Identification number:</i> INO	
<i>Document type:</i> DT	Monograph publication
<i>Type of record:</i> TR	Textual printed material
<i>Content code:</i> CC	Master's thesis
<i>Author:</i> AU	Slađan Jelić
<i>Mentor/comentor:</i> MN	dr Dušan Zorica i dr Željka Cvejić
<i>Title:</i> TI	Wave propagation in viscoelastic material of fractional Burgers type
<i>Language of text:</i> LT	Serbian (Latin)
<i>Language of abstract:</i> LA	Serbian/English
<i>Country of publication:</i> CP	Serbia
<i>Locality of publication:</i> LP	Vojvodina
<i>Publication year:</i> PY	2021.
<i>Publisher:</i> PU	Author's reprint
<i>Publication place:</i> PP	Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
<i>Physical description:</i> PD	chapters/pages/tables/figures/references: 7/47/5/13/61
<i>Scientific field:</i> SF	physics
<i>Scientific discipline:</i> SD	theoretical physics
<i>Subject/ Key words:</i> SKW UC	thermodynamically consistent fractional Burgers models, fractional Burgers wave equation, initial-boundary value problem, stress relaxation and creep including dynamics
<i>Holding data:</i> HD	Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4
<i>Note:</i> N	none
<i>Abstract:</i> AB	<p>Dynamic response of the one-dimensional viscoelastic rod of finite length, that has one end fixed and the other subject to prescribed either displacement or stress, is analyzed by the analytical means of Laplace transform, yielding the displacement and stress of an arbitrary rod's point as a convolution of the boundary forcing and solution kernel.</p> <p>Thermodynamically consistent Burgers models are adopted as the constitutive equations describing mechanical properties of the rod. Short-time asymptotics implies the finite wave propagation speed in the case of the second class models, contrary to the case of the first class models.</p> <p>Moreover, Burgers model of the first class yield quite classical shapes of displacement and stress time profiles resulting from the boundary forcing assumed as the Heaviside function, while model of the second class yield responses that resemble to the sequence of excitation and relaxation processes.</p>
<i>Accepted by the Scientific Board:</i> ASB	14.07.2021.

<i>Defended on:</i> DE	10.09.2021.
<i>Thesis defend board:</i> DB	
<i>President:</i>	dr Milica Pavkov Hrvojević, full professor
<i>Member:</i>	dr Srboljub Simić, full professor
<i>Member:</i>	dr Željka Cvejić, full professor
<i>Member:</i>	dr Dušan Zorica, full professor