



UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET



Slađan Jelić

# Konstitutivno modeliranje i prostiranje talasa u memorijskim materijalima Cenerovog i anti-Cenerovog tipa

DOKTORSKA DISERTACIJA

Mentor  
prof. dr Dušan Zorica

Novi Sad, 2024.



КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА<sup>1</sup>

Врста рада:	Докторска дисертација
Име и презиме аутора:	Слађан Јелић
Ментор (титула, име, презиме, звање, институција)	др Душан Зорица редовни професор Природно-математички факултет у Новом Саду
Наслов рада:	Конститутивно моделирање и простирање таласа у меморијским материјалима Ценеровог и анти-Ценеровог типа
Језик публикације (писмо):	српски латиница
Физички опис рада:	Унети број: Страница 139 Поглавља 9 Референци 102 Табела 17 Слика 30 Графикона 0 Прилога 0
Научна област:	Теоријска физика
Ужа научна област (научна дисциплина):	Теоријска физика кондензоване матерije
Кључне речи / предметна одредница:	реолошка аналогија, фракционализација зенерових и анти-зенерових модела, анализа термодинамичке конзистентности, својства енергетског биланса у временском домену, енергија и снага дисипације по јединици запремине, модуло релаксације и функција пузња, комплетно монотона и бернштајнова функција, одзив на хармонијску побуду, фракциона таласна једначина, меморијске и нелокалне фракционе конститутивне једначине, дисипација и очување енергије
Резиме на језику рада:	Анализирани су ефекти простирања таласа кроз тродимензионо, хомогено, изотропно и вискоеластично тело, које је у једној димензији моделирано линеарним моделима фракционог реда. Коришћењем реолошких шема које одговарају класичним Ценеровим и анти-Ценеровим моделима, формулисани су Ценерови и анти-Ценерови модели фракционог реда, при чему се опруга и пригушница, уместо класичним законима, моделирају њиховим фракционим уопштењима. Формулисано је осам конститутивних модела асиметричног типа, као и седам модела симетричног типа. Анализом термодинамичке конзистентности је показано да за известан број модела не постоје везе између параметара модела које би осигурале дисипативност модела, док се дисипативност за остале моделе обезбеђује наметањем

<sup>1</sup> Аутор докторске дисертације потписао је и приложио следеће Обрасце:

5б – Изјава о ауторству;

5в – Изјава о истоветности штампане и електронске верзије и о личним подацима;

5г – Изјава о коришћењу.

Ове Изјаве се чувају на факултету у штампаном и електронском облику и не кориче се са тезом.

	термодинамичких рестрикција на параметре модела. Изведени су изрази за модуо релаксације и функцију пузаша, који одговарају фракционим Ценеровим и анти-Ценеровим моделима, као и сужене термодинамичке рестрикције, наметнуте како би се обезбедило да су модуо релаксације и функција пузаша редом комплетно монотона и Бернштајнова функција, а које априори обезбеђују позитивност енергије складиштене у вискоеластичном телу и снаге дисипације по јединици запремине, изведене у временском домену разматрајући снагу по јединици запремине. Напон, као одзив на деформацију задату у облику хармонијске побуде, анализиран је коришћењем метода Лапласове трансформације, те је одзив вискоеласичног тела, моделираног термодинамички конзистентним фракционим Ценеровим и анти-Ценеровим моделима, разматран како у транзијентном, тако и у квазистационарном режиму. Изражавајући снагу по јединици запремине преко модула релаксације и функције пузаша, а која је претходно изведена као збир брзине промене енергије складиштене у вискоеластичном телу и снаге дисипације, нумеричком анализом је испитана еквивалентност израза за снагу, енергију и снагу дисипације по јединици запремине. Како би се анализирало простирање таласа у тродимензионом, хомогеном, изотропном и вискоеластичном телу разматрана је таласна једначина представљена системом фракционих парцијалних диференцијалних једначина, који се састоји од једначине кретања тродимензионог чврстог тела, једначине деформације, као и конститутивне једначине добијене уопштењем класичног Хуковог закона заменом Ламеових коефицијената са модулима релаксације, како би се узела у обзир различита меморијска језгра која одговарају простирању компресионих и вртложних таласа. За одређивање поља померања, као решења таласне једначине, изложеног преко Гринових функција, које одговарају компресионим и вртложним таласима, коришћена су два приступа: у првом је поље померања изражено преко скаларног и векторског поља, док се у другом приступу поље померања добија деловањем резолвентног тензора на почетне услове.
Датум прихватања теме од стране надлежног већа:	16.03.2023.
Датум одбране: (Попуњава одговарајућа служба)	
Чланови комисије: (титула, име, презиме, звање, институција)	<p>Председник: <b>др Милица Павков Хрвојевић, редовни професор, Природно-математички факултет у Новом Саду</b></p> <p>Члан: <b>др Жељка Џвејић, редовни професор, Природно-математички факултет у Новом Саду</b></p> <p>Члан: <b>др Љубица Опарница, редовни професор, Педагошки факултет у Сомбору</b></p> <p>Члан: <b>др Данило Карличић, виши научни сарадник, Математички институт САНУ у Београду</b></p> <p>Члан: <b>др Душан Зорица, редовни професор Природно-математички факултет у Новом Саду</b></p>
Напомена:	

**UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCES**

**KEY WORD DOCUMENTATION<sup>2</sup>**

Document type:	Doctoral dissertation
Author:	Sladjan Jelić
Supervisor (title, first name, last name, position, institution)	Dr. Dušan Zorica full profesor Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Thesis title:	Constitutive modeling and wave propagation in Zener and anti-Zener type memory materials
Language of text (script):	Serbian language latin script
Physical description:	Number of: Pages 139 Chapters 9 References 102 Tables 17 Illustrations 30 Graphs 0 Appendices 0
Scientific field:	Theoretical physics
Scientific subfield (scientific discipline):	Theoretical physics of condensed matter
Subject, Key words:	rheological analogy, fractionalization of zener and anti-zener models, thermodynamical consistency analysis, energy balance properties in time domain, stored energy and dissipated power per unit volume, relaxation modulus and creep compliance, completely monotonic and bernstein functions, response to harmonic excitation, fractional wave equation, hereditary and non-local fractional constitutive equations, energy dissipation and conservation
Abstract in English language:	The effects of wave propagation through three-dimensional homogeneous, isotropic, and viscoelastic body, which is modeled by linear models of fractional order in one dimension, are analyzed. Using rheological schemes corresponding to the classical Zener and anti-Zener models, the fractional order Zener and anti-Zener models are formulated, where the spring and dashpot, instead of the classical laws are modeled with their fractional generalizations using fractional integral and derivative. Eight constitutive models of asymmetric type are formulated, as well as seven models of symmetric type. Analysis of models' thermodynamical consistency yielded

---

<sup>2</sup> The author of doctoral dissertation has signed the following Statements:

56 – Statement on the authority,

5B – Statement that the printed and e-version of doctoral dissertation are identical and about personal data,

5r – Statement on copyright licenses.

The paper and e-versions of Statements are held at the faculty and are not included into the printed thesis.

	<p>that for a number of models there is no such combination of model parameters that ensures energy dissipativity, while the energy dissipativity of the rest of the models is ensured by posing the restrictions on model parameters. Relaxation modulus and creep compliance, corresponding to the fractional Zener and anti-Zener models, are derived along with narrowed thermodynamical restrictions, imposed to ensure that the relaxation modulus and creep compliance respectively represent completely monotonic function and a Bernstein function, which a priori ensures the positivity of the energy stored in a viscoelastic body and dissipated power per unit volume, derived in the time domain considering power per unit volume. The stress, as a response to the strain given as a harmonic excitation is analyzed using the Laplace transform method, so that the response of a viscoelastic body, modeled by a thermodynamically consistent fractional Zener and anti-Zener models, is considered both in the transient and in the steady-state regime. Expressing power per unit volume via the relaxation modulus and creep compliance, which are previously derived as a sum of the rate of change of the energy stored in viscoelastic body and dissipated power, the equivalence of the expressions for power, energy, and dissipated power per unit volume, which are written in the above-mentioned way, is numerically examined by comparing the graphs of their time evolution. In order to analyze the wave propagation in a three-dimensional, homogeneous, isotropic, and viscoelastic body, the wave equation is represented by the system of fractional partial differential equations, which consists of the equation of motion of a three-dimensional solid body, the equation of infinitesimal strain, as well as of the constitutive equation, obtained by generalizing the classical Hooke's law by replacing the Lamé coefficients with relaxation moduli, in order to take into account different memory kernels corresponding to the propagation of compressive and shear waves. In order to obtain displacement field, as a solution of the wave equation expressed through Green's functions, which correspond to the compressive and shear waves, two approaches are adopted: in the first one, the displacement field is expressed through the scalar and vector fields, while in the second approach, the displacement field is obtained by the action of resolvent tensor to the initial conditions.</p>
Accepted on Scientific Board on:	16.03.2023.
Defended: (Filled by the faculty service)	
Thesis Defend Board: (title, first name, last name, position, institution)	<p>President: <b>Dr. Milica Pavkov Hrvojević, full profesor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad</b></p> <p>Member: <b>Dr. Željka Cvejić, full profesor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad</b></p> <p>Member: <b>Dr. Ljubica Oparnica, full profesor, Faculty of Education in Sombor</b></p> <p>Member: <b>Dr. Danilo Karličić, Senior Research Associate, Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, Belgrade</b></p> <p>Member: <b>Dr. Dušan Zorica, full profesor Faculty of Sciences, University of Novi Sad</b></p>
Note:	

---

*Zahvaljujem se mentoru dr Dušanu Zorici na izuzetnoj dugogodišnjoj saradnji, pruženom znanju i nesebičnoj pomoći u radu! Privilegija je raditi sa vrhunskim istraživačem, profesorom, a pre svega Čovekom.*



# Sadržaj

<b>Sažetak</b>	v
<b>Abstract</b>	vii
<b>1 Uvod</b>	1
<b>2 Modeli viskoelastičnog tela frakcionog tipa</b>	3
2.1 Moduo relaksacije i funkcija puzanja . . . . .	4
2.2 Linearni frakcioni modeli . . . . .	6
2.2.1 Linearni modeli frakcionog reda . . . . .	6
2.2.2 Frakcioni Burgersovi modeli . . . . .	7
2.2.3 Frakcioni Cenerovi i anti-Cenerovi modeli . . . . .	9
<b>3 Frakcioni Cenerovi i anti-Cenerovi modeli viskoelastičnog tela</b>	11
3.1 Formulacija modela . . . . .	11
3.2 Termodinamička konzistentnost modela . . . . .	14
3.2.1 Modeli asimetričnog tipa . . . . .	16
3.2.1.1 Frakcioni anti-Cenerovi modeli . . . . .	16
3.2.1.2 Frakcioni anti-Cenerovi/Cenerovi modeli . . . . .	20
3.2.1.3 Frakcioni Cenerovi modeli . . . . .	23
3.2.2 Modeli simetričnog tipa . . . . .	26
3.2.2.1 Skup modela koji potiču od modela ID.DD . . . . .	26
3.2.2.2 Skup modela koji potiču od modela IDD.IDD . . . . .	29
3.2.2.3 Skup modela koji potiču od modela IID.IID . . . . .	34
3.2.2.4 Skup modela koji potiču od modela IID.IDD . . . . .	39
<b>4 Svojstva energetskog bilansa frakcionih Cenerovih i anti-Cenerovih modela</b>	43
4.1 Energija i snaga disipacije . . . . .	43
4.2 Moduo relaksacije i funkcija puzanja . . . . .	45
4.2.1 Moduo relaksacije . . . . .	45
4.2.2 Funkcija puzanja . . . . .	47
4.2.3 Određivanje izraza za moduo relaksacije i funkciju puzanja . . . . .	48
4.2.3.1 Određivanje izraza za moduo relaksacije . . . . .	48
4.2.3.2 Određivanje izraza za funkciju puzanja . . . . .	51
4.2.4 Položaj i broj nula funkcija $\phi_\sigma$ i $\phi_\varepsilon$ . . . . .	54
4.2.4.1 Funkcija koja sadrži dva člana . . . . .	55
4.2.4.2 Funkcija koja sadrži tri člana . . . . .	55
4.2.4.3 Kvadratna funkcija po $s^\xi$ . . . . .	56
4.3 Sužene termodinamičke restrikcije . . . . .	58
4.3.1 Simetrični modeli . . . . .	58
4.3.1.1 Model ID.ID . . . . .	58
4.3.1.2 Model ID.DD <sup>+</sup> . . . . .	58
4.3.1.3 Model IID.IID . . . . .	59
4.3.1.4 Model IDD.IDD . . . . .	60
4.3.1.5 Model IID.IDD . . . . .	61
4.3.1.6 Model I <sup>+</sup> .ID.I <sup>+</sup> .ID . . . . .	62
4.3.1.7 Model IDD <sup>+</sup> .IDD . . . . .	63

---

4.3.1.8	Model $I^+ID.IDD^+$	64
4.3.2	Asimetrični modeli	65
4.3.2.1	Model $IID.ID$	65
4.3.2.2	Model $IDD.DD^+$	66
4.3.2.3	Model $I^+ID.ID$	66
4.3.2.4	Model $IDD^+.DD^+$	67
4.3.2.5	Model $ID.IDD$	68
4.3.2.6	Model $ID.DDD^+$	69
4.3.2.7	Model $ID.IDD^+$	69
4.4	Numerički primeri	70
4.4.1	Moduo relaksacije za model $I^+ID.ID$	70
4.4.2	Funkcija puzanja za model $I^+ID.ID$	72
<b>5</b>	<b>Energija i snaga disipacije u kvazistacionarnom stanju</b>	<b>77</b>
5.1	Tranzijentni odziv i kvazistacionarni režim	77
5.1.1	Tranzijentni odziv na harmonijsku pobudu	77
5.1.2	Kvazistacionarni odziv na harmonijsku pobudu	82
5.1.3	Numerički primeri	83
5.2	Vremenska evolucija snage po jedinici zapremine	85
<b>6</b>	<b>Prostiranje talasa u trodimenzionom frakcionom viskoelastičnom telu</b>	<b>95</b>
6.1	Polje pomeranja	96
6.1.1	Polje pomeranja izraženo preko funkcija $\varphi$ i $\Omega$	97
6.1.2	Polje pomeranja izraženo preko rezolventnog tenzora $\hat{R}$	100
6.1.3	Grinove funkcije	102
6.2	Numerički primeri	105
6.2.1	Grinova funkcija $G^{(x)}$ - beskonačna brzina prostiranja talasa	106
6.2.2	Grinova funkcija $G^{(x)}$ - konačna brzina prostiranja talasa	107
6.2.3	Funkcija $g^{(x)}$	111
6.3	Asimptotika memorijske funkcije $\tilde{c}_x$	111
6.4	Određivanje Grinove funkcije, njene asimptotike i funkcije $g^{(x)}$	117
6.4.1	Određivanje Grinove funkcije	117
6.4.2	Određivanje funkcije $g^{(x)}$	120
6.4.3	Određivanje asimptotike Grinove funkcije za kratka vremena	122
<b>7</b>	<b>Zaključak</b>	<b>125</b>
<b>A</b>	<b>Dodatak</b>	<b>127</b>
A.1	Termodinamički konzistentni linearni modeli frakcionog reda	127
A.2	Termodinamički konzistentni frakcioni Burgersovi modeli	127
A.3	Termodinamički konzistentni frakcioni Cenerovi i anti-Cenerovi modeli	129
A.3.1	Simetrični modeli	129
A.3.2	Asimetrični modeli	132
<b>Literatura</b>		<b>135</b>

# Sažetak

Poglavlja 3, 4, 5 i 6 sadrže originalni naučni doprinos, a jedan deo dobijenih rezultata predstavlja sadržaj radova [1, 2], koji su objavljeni u časopisima sa SCI liste, dok autorski rukopisi [3, 4], koji su na recenziji u časopisima sa SCI liste, sadrže drugi deo dobijenih rezultata.

Analizirani su efekti prostiranja talasa kroz trodimenzionalno, homogeno, izotropno i viskoelastično telo, koje je u jednoj dimenziji modelirano linearnim modelima frakcionog reda opisanim u poglavlju 2. Korišćenjem reoloških šema koje odgovaraju klasičnim Cenerovim i anti-Cenerovim modelima, u poglavlju 3 su formulisani Cenerovi i anti-Cenerovi modeli frakcionog reda, videti takođe i [1], pri čemu se opruga i prigušnica, umesto klasičnim zakonima: Hukovim zakonom elastičnosti i Njutnovim zakonom viskoznosti, modeliraju njihovim frakcionim uopštenjima, korišćenjem frakcionog integrala i izvoda respektivno. Formulisano je osam konstitutivnih modela asimetričnog tipa, u smislu da sadrže različit broj operatora koji deluju na napon i deformaciju, kao i sedam modela simetričnog tipa. Analizom termodinamičke konzistentnosti je pokazano da za isvestan broj modela ne postoje veze između parametara modela koje bi osigurale disipativnost modela, dok se disipativnost za ostale modele obezbeđuje nametanjem termodinamičkih restrikcija na parametre modela. Izvedeni su izrazi za moduo relaksacije i funkciju puzanja, koji odgovaraju frakcionim Cenerovim i anti-Cenerovim modelima, kao i sužene termodinamičke restrikcije, nametnute kako bi se obezbedilo da su moduo relaksacije i funkcija puzanja redom kompletno monotona i Bernštajnova funkcija, a koje apriori obezbeđuju pozitivnost energije skladištene u viskoelastičnom telu i snage disipacije po jedinici zapremine, izvedene u vremenskom domenu razmatrajući snagu po jedinici zapremine, što predstavlja sadržaj poglavlja 4, videti takođe [2]. Napon, kao odziv na deformaciju zadatu u obliku harmonijske pobude, analiziran je u poglavlju 5, kao i u rukopisu [3], korišćenjem metoda Laplasove transformacije, te je odziv viskoelastičnog tela, modeliranog termodinamički konzistentnim frakcionim Cenerovim i anti-Cenerovim modelima, razmatran kako u tranzijentnom, tako i u kvazistacionarnom režimu. Izražavajući snagu po jedinici zapremine preko modula relaksacije i funkcije puzanja, a koja je prethodno izvedena kao zbir brzine promene energije skladištene u viskoelastičnom telu i snage disipacije, numeričkom analizom je ispitana ekvivalentnost izraza za snagu, energiju i snagu disipacije po jedinici zapremine.

Kako bi se analiziralo prostiranje talasa u trodimenzionom, homogenom, izotropnom i viskoelastičnom telu, u poglavlju 6 je razmatrana talasna jednačina predstavljena sistemom frakcionih parcijalnih diferencijalnih jednačina, koji se sastoji od jednačine kretanja trodimenzionog čvrstog tela, jednačine deformacije, kao i konstitutivne jednačine dobijene uopštenjem klasičnog Hukovog zakona koji odgovara trodimenzionom, homogenom, izotropnom i elastičnom telu zamenom Lameovih koeficijenata sa modulima relaksacije, kako bi se uzela u obzir različita memorijska jezgra koja odgovaraju prostiranju kompresionih i vrtložnih talasa. Za određivanje polja pomeranja, kao rešenja talasne jednačine, izraženog preko Grinovih funkcija, koje odgovaraju kompresionim i vrtložnim talasima, korišćena su dva pristupa: u prvom je polje pomeranja izraženo preko skalarnog i vektorskog polja, dok se u drugom pristupu polje pomeranja dobija delovanjem rezolventnog tenzora na početne uslove. Rezultati istraživanja opisanog u ovom poglavlju pripadaju rukopisu [4].



# Abstract

Chapters 3, 4, 5, and 6 contain the original scientific contribution, so that one part of the obtained results presents the content from papers [1, 2], which are published in journals from the SCI list, while manuscripts [3, 4], which are under review in journals from the SCI list, contain the other part of the obtained results.

The effects of wave propagation through three-dimensional homogeneous, isotropic, and viscoelastic body, which is modeled by linear models of fractional order described in Chapter 2, in one dimension. Using rheological schemes corresponding to the classical Zener and anti-Zener models, the fractional order Zener and anti-Zener models are formulated in Chapter 3, see also [1], where the spring and dashpot, instead of the classical laws: Hooke's law of elasticity and Newton's law of viscosity, are modeled with their fractional generalizations using fractional integral and derivative respectively. Eight constitutive models of asymmetric type, in the sense that they contain a different number of operators acting on stress and strain, are formulated, as well as seven models of symmetric type. Analysis of models' thermodynamical consistency yielded that for a number of models there is no such combination of model parameters that ensures energy dissipativity, while the energy dissipativity of the rest of the models is ensured by posing the restrictions on model parameters. Relaxation modulus and creep compliance, corresponding to the fractional Zener and anti-Zener models, are derived along with narrowed thermodynamical restrictions, imposed to ensure that the relaxation modulus and creep compliance respectively represent completely monotonic function and a Bernstein function, which a priori ensures the positivity of the energy stored in a viscoelastic body and dissipated power per unit volume, derived in the time domain considering power per unit volume, that is the content of Chapter 4, see also [2]. The stress, as a response to the strain given as a harmonic excitation, is analyzed in Chapter 5, as well as in manuscript [3], using the Laplace transform method, so that the response of a viscoelastic body, modeled by a thermodynamically consistent fractional Zener and anti-Zener models, is considered both in the transient and in the steady-state regime. Expressing power per unit volume via the relaxation modulus and creep compliance, which are previously derived as a sum of the rate of change of the energy stored in viscoelastic body and dissipated power, the equivalence of the expressions for power, energy, and dissipated power per unit volume, which are written in the above-mentioned way, is numerically examined by comparing the graphs of their time evolution.

In order to analyze the wave propagation in a three-dimensional, homogeneous, isotropic, and viscoelastic body, in Chapter 6, the wave equation is represented by the system of fractional partial differential equations, which consists of the equation of motion of a three-dimensional solid body, the equation of infinitesimal strain, as well as of the constitutive equation, obtained by generalizing the classical Hooke's law corresponding to a three-dimensional, homogeneous, isotropic, and elastic body by replacing the Lamé coefficients with relaxation moduli, in order to take into account different memory kernels corresponding to the propagation of compressive and shear waves. In order to obtain displacement field, as a solution of the wave equation expressed through Green's functions, which correspond to the compressive and shear waves, two approaches are adopted: in the first one, the displacement field is expressed through the scalar and vector fields, while in the second approach, the displacement field is obtained by the action of resolvent tensor to the initial conditions. The results of the research described in Chapter 6 belong to the manuscript [4].



# 1. Uvod

Poglavlja 3, 4, 5 i 6 sadrže originalni naučni doprinos, a jedan deo dobijenih rezultata predstavlja sadržaj radova [1, 2], koji su objavljeni u časopisima sa SCI liste, dok autorski rukopisi [3, 4], koji su na recenziji u časopisima sa SCI liste, sadrže drugi deo dobijenih rezultata.

U cilju analize efekata prostiranja talasa, kako kroz jednodimenziono, tako i kroz trodimenziono homogeno, izotropno i viskoelastično telo, u poglavlju 2 su navedeni korišćeni linearni modeli frakcionog reda: linearni modeli frakcionog reda koji sadrže isključivo Riman-Liuvilove frakcione izvode reda u intervalu  $(0, 1)$ , frakcioni Burgersovi modeli koji sadrže Riman-Liuvilove frakcione izvode reda i u intervalu  $(0, 1)$  i u intervalu  $(1, 2)$ , kao i frakcioni Cenerovi i anti-Cenerovi modeli koji sadrže frakcione integrale i Riman-Liuvilove frakcione izvode reda kako u intervalu  $(0, 1)$ , tako i u intervalu  $(1, 2)$ , a koji su formulisani u poglavlju 3. Naime, frakcioni račun je korišćen kako bi se uopštile konstitutivne relacije, koje opisuju odziv viskoelastičnog materijala, odnosno daju vezu između napona i malih deformacija, dok se jednačina kretanja čvrstog deformabilnog tela, koja je posledica postulata klasične mehanike, kao i tenzor deformacije, koji je posledica geometrijskih razmatranja, ne uopštavaju. Dinamika čvrstog viskoelastičnog deformabilnog tela, kao i važenje konstitutivnih relacija u slučaju konačnih deformacija nisu razmatrani.

U poglavlju 3 su formulisani Cenerovi i anti-Cenerovi modeli frakcionog reda, takođe videti i [1], korišćenjem reoloških šema koje odgovaraju klasičnim Cenerovim i anti-Cenerovim modelima, pri čemu se opruga i prigušnica, umesto klasičnim zakonima: Hukovim zakonom elastičnosti i Njutnovim zakonom viskoznosti, modeliraju njihovim frakcionim uopštenjima korišćenjem frakcionog integrala i izvoda respektivno. Sledeći pomenuti pristup, formulisana su četiri konstitutivna modela, koja sadrže i frakcione integrale i frakcione izvode, te su transformisani u osam konstitutivnih modela asimetričnog tipa, u smislu da sadrže različit broj operatora koji deluju na napon i deformaciju, dok je za formulaciju dodatnih sedam modela koji su simetričnog tipa, simetrična forma klasičnih Cenerovih i anti-Cenerovih modela poslužila kao inspiracija. Analizom termodinamičke konzistentnosti se pokazuje da za isvestan broj modela ne postoje veze između parametara modela koje bi osigurale disipativnost modela, dok se disipativnost za ostale modele obezbeđuje nametanjem ograničenja na parametre modela, koja predstavljaju termodinamičke restrikcije.

Izvođenje izraza za moduo relaksacije i funkciju puzanja, koji odgovaraju frakcionim Cenerovim i anti-Cenerovim modelima, zajedno sa formulacijom suženih termodinamičkih restrikcija, nametnutih kako bi se obezbedilo da su moduo relaksacije i funkcija puzanja redom kompletno monotona i Bernštajnova funkcija, a koje apriori garantuju pozitivnost energije skladištene u viskoelastičnom telu i snage disipacije po jedinici zapremine, izvedenih u vremenskom domenu razmatrajući snagu po jedinici zapremine, predstavlja sadržaj poglavlja 4, videti takođe [2]. Kako za moduo relaksacije, tako i za funkciju puzanja, pokazano je da i kada parametri modela zadovoljavaju termodinamička ograničenja, izvedena u poglavlju 2, one mogu biti oscilatorne funkcije sa opadajućom amplitudom.

Napon, kao odziv na deformaciju zadatu u obliku harmonijske pobude, analiziran je u poglavlju 5, kao i u rukopisu [3], korišćenjem metoda Laplasove transformacije, te je odziv viskoelastičnog tela, modeliranog termodinamički konzistentnim frakcionim Cenerovim i anti-Cenerovim modelima, razmatran kako u tranzijentnom, tako i u kvazistacionarnom režimu. Izražavajući snagu po jedinici zapremine preko modula relaksacije i funkcije puzanja, a koja je prethodno izvedena kao zbir brzine promene energije skladištene u viskoelastičnom telu i snage disipacije, i prepostavljajući da je deformacija sinusna funkcija, numeričkom analizom je ispitana ekvivalentnost izraza za snagu, energiju i snagu disipacije po jedinici zapremine, koji su zapisani na prethodno navedeni način, poređenjem grafika njihove vremenske evolucije.

Kako bi se analiziralo prostiranje talasa u trodimenzionom, homogenom, izotropnom i viskoelastičnom telu, u poglavlju 6 je razmatran Košijev početni problem na neograničenom domenu za talasnu jednačinu predstavljenu sistemom frakcionalih parcijalnih diferencijalnih jednačina, koji se sastoji od jednačine kretanja trodimenzionog čvrstog tela, jednačine deformacije, kao i konstitutivne jednačine, dobijene uopštenjem klasičnog Hukovog zakona koji odgovara trodimenzionom, homogenom, izotropnom i elastičnom telu zamenom Lameovih koeficijenata sa modulima relaksacije, kako bi se uzela u obzir različita memorijska jezgra koja odgovaraju prostiranju kom-

presionih i vrtložnih talasa. Korišćenjem metoda integralnih transformacija, odnosno Laplasove i Furijeove transformacije, polje pomeranja, kao rešenje Košijevog početnog problema, je izraženo preko Grinovih funkcija, koje odgovaraju kompresionim i vrtložnim talasima. Usvojena su dva pristupa u rešavanju Košijevog problema: u prvom je polje pomeranja izraženo preko skalarnog i vektorskog polja, dobijenih kao rešenja talasnih jednačina koje su posledica dekuplovanja talasne jednačine za polje pomeranja, dok se u drugom pristupu polje pomeranja dobija delovanjem rezolventnog tenzora na početne uslove. Frakcioni Cenerov i anti-Cenerov model  $I^+ ID.ID$ , kao i frakcioni Burgersov model VII, kao predstavnici modela koji daju beskonačnu i konačnu brzinu prostiranja talasa, korišćeni su u numeričkim proračunima i grafičkim reprezentacijama Grinove funkcije i njenog asymptotskog ponašanja. Rezultati istraživanja opisanog u ovom poglavlju pripadaju rukopisu [4].

## 2. Modeli viskoelastičnog tela frakcionog tipa

Najjednostavnija veza između napona  $\sigma$  i deformacije  $\varepsilon$ , koji su funkcije vremena  $t > 0$ , data je Hukovim zakonom elastičnosti i Njutnovim zakonom viskoznosti

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) \quad \text{i} \quad \sigma(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t), \quad (2.1)$$

koji važe za elastična i viskozna tela, respektivno, pri čemu je  $\dot{\varepsilon}(t) = \frac{d}{dt}\varepsilon(t)$ , a  $E$  i  $\eta$  su Jangov moduo i koeficijent viskoznosti. U okviru fenomenološkog konstitutivnog modeliranja svojstava materijala korišćenjem reološke analogije, Hukovim i Njutnovim zakonom (2.1) se modeliraju opruga i prigušnica, kao najjednostavniji elementi reoloških šema različitih elastičnih, viskoznih i viskoelastičnih klasičnih modela. Frakcionalo uopštenje modela viskoelastičnog tela se može postići frakcionim uopštenjem konstitutivnih jednačina osnovnih elemenata reoloških šema koje im odgovaraju, tako da se opruga može, umesto Hukovim zakonom (2.1)<sub>1</sub>, modelirati zakonom koji povezuje napon sa frakcionim integralom deformacije, a prigušnica, umesto Njutnovim zakonom viskoznosti (2.1)<sub>2</sub>, zakonom koji povezuje napon sa frakcionim izvodom deformacije, odnosno

$$\sigma(t) = E_0 I_t^\xi \varepsilon(t) \quad \text{i} \quad \sigma(t) = \eta_0 D_t^\zeta \varepsilon(t), \quad \xi, \zeta \in (0, 1), \quad (2.2)$$

pri čemu je  $E$  uopšteni Jangov moduo, a  $\eta$  uopšteni koeficijent viskoznosti, dok su operatori frakcionog integrala reda  $\xi > 0$  i frakcionog izvoda reda  $\zeta \in (0, 1)$  respektivno definisani sa

$${}_0 I_t^\xi f(t) = \frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^t \frac{f(t')}{(t-t')^{1-\xi}} dt' \quad \text{i} \quad (2.3)$$

$${}_0 D_t^\zeta f(t) = \frac{d}{dt} {}_0 I_t^{1-\zeta} f(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{t^{-\zeta}}{\Gamma(1-\zeta)} * f(t) \right), \quad (2.4)$$

a operator frakcionog izvoda reda  $n + \zeta$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\zeta \in (0, 1)$ , je definisan sa

$${}_0 D_t^{n+\zeta} f(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} {}_0 I_t^{1-\zeta} f(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left( \frac{t^{-\zeta}}{\Gamma(1-\zeta)} * f(t) \right), \quad (2.5)$$

pri čemu su frakcioni izvodi Riman-Liuvilovog tipa. Treba primetiti da se za celobrojne vrednosti redova frakcionog integrala i frakcionog izvoda, tj. za  $\xi = 0$  i  $\zeta = 1$ , frakcioni Hukov i Njutnov zakon (2.2) svode na klasični Hukov i Njutnov zakon, respektivno, dok za  $\xi = 1$  i  $\zeta = 0$ , frakcioni Hukov zakon postaje model koji uključuje uniformnu memoriju, odnosno  $\sigma(t) = E \int_0^t \varepsilon(t') dt'$ , a frakcioni Njutnov zakon postaje klasični Hukov zakon.

Frakcioni element, poznat i pod nazivom Skot-Blerov element, modeliran konstitutivnom jednačinom (2.2)<sub>2</sub>, a koji uopštava klasičnu prigušnicu, korišćen je u klasičnim reološkim šemama da bi se izveo model viskoelastičnog tela, što je sprovedeno među prvima u [5], dok se u [6] pomije u kontekstu fraktalnih reoloških modela. Nekoliko najšire korišćenih modela frakcionog reda, koji proističu iz reoloških šema koje uključuju Skot-Blerov element, datih u [7, 8], uključuju Kelvin-Vojtov, Maksvelov, Cenerov, anti-Cenerov i Burgersov model. Pristup frakcionog uopštenja konstitutivnih relacija opisan u ovoj tezi korišćen je u [9] za formulaciju frakcionog uopštenja Burgersovog modela, dok je u [10, 11, 12] korišćena reološka šema koja sadrži beskonačan broj opruga i prigušnica, dajući Beselov model, tj. model izražen preko Beselove funkcije Kaputovog frakcionog izvoda.

Različiti tipovi vremenskih frakcionih izvoda, uključujući Kaputov, uopšteni Kaputov, Kaputo-Fabriciov i Atangana-Baleanuov frakcioni izvod, su korišćeni u [13, 14, 15] za modeliranje prostiranja talasa u disipativnim materijalima, dok su u [16, 17] korišćeni u cilju postavljanja konstitutivnih jednačina i modeliranja disipativnosti

frakcionog oscilatora. Prostorni frakcioni izvodi Risovog tipa korišćeni su u [18] da bi se ispitalo haotično ponašanje modela koji proističu iz hidrodinamike.

Linearni modeli frakcionog reda jednodimenzionog viskoelastičnog tela, u najopštijem obliku su dati izrazom

$$\sum_{k=1}^{N_1} a_k {}_0I_t^{\alpha_k} \sigma(t) + \sum_{k=1}^{N_2} b_k {}_0D_t^{\beta_k} \sigma(t) = \sum_{k=1}^{M_1} c_k {}_0I_t^{\mu_k} \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^{M_2} d_k {}_0D_t^{\nu_k} \varepsilon(t) \quad (2.6)$$

i sadrže nenegativne parametre modela  $a_k, b_k, c_k, d_k$ , kao i redove frakcionih integrala i izvoda  $\alpha_k, \beta_k, \mu_k, \nu_k$ , koji mogu pripadati intervalu  $(0, 1)$ , ali i intervalu  $(1, 2)$ , pri čemu se sa (2.3) definišu frakcioni integrali, a sa (2.4) i (2.5) frakcioni izvodi čiji su redovi u intervalu  $(0, 1)$  i intervalu  $(1, 2)$ . Na osnovu svojstava transformacije frakcionog integrala i Riman-Liuvilovog izvoda pri transformaciji nezavisne promenljive  $\bar{t} = \frac{t}{T}$  i zavisne promenljive  $\bar{u}(\bar{t}) = u(t)$ , koja je oblika

$${}_0I_t^\xi u(t) = \frac{1}{T^\xi} {}_0I_{\bar{t}}^\xi \bar{u}(\bar{t}) = \frac{1}{T^\xi} {}_0I_{\bar{t}}^\xi u(\bar{t}) \quad \text{i} \quad {}_0D_t^\zeta u(t) = T^\zeta {}_0D_{\bar{t}}^\zeta \bar{u}(\bar{t}) = T^\zeta {}_0D_{\bar{t}}^\zeta u(\bar{t}),$$

kao i na osnovu zahteva dimenziione homogenosti konstitutivnog modela (2.6), zaključuje se da su dimenziije parametara modela date sa  $[a_k] = \frac{1}{s^{\alpha_k}}$ ,  $[b_k] = s^{\beta_k}$ ,  $[c_k] = \frac{P_a}{s^{\mu_k}}$  i  $[d_k] = P_a s^{\nu_k}$ , respektivno.

Primena Laplasove transformacije po vremenu, definisane kao

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad \text{Re } s > 0, \quad (2.7)$$

zajedno sa Laplasovim transformacijama frakcionog integrala i Riman-Liuvilovog frakcionog izvoda

$$\mathcal{L}\left[{}_0I_t^\xi f(t)\right](s) = \frac{1}{s^\xi} \tilde{f}(s), \quad \xi > 0 \quad \text{i} \quad (2.8)$$

$$\mathcal{L}\left[{}_0D_t^\zeta f(t)\right](s) = s^\zeta \tilde{f}(s) - \left[{}_0I_t^{1-\zeta} f(t)\right]_{t=0} = s^\zeta \tilde{f}(s), \quad \zeta \in (0, 1), \quad (2.9)$$

odnosno

$$\mathcal{L}\left[{}_0D_t^{n+\zeta} f(t)\right](s) = s^{n+\zeta} \hat{f}(s) - \sum_{k=0}^n \left[ \frac{d^k}{dt^k} {}_0I_t^{1-\zeta} f(t) \right]_{t=0} s^{n-k} = s^{n+\zeta} \hat{f}(s), \quad \zeta \in (0, 1),$$

za neprekidnu funkciju  $f$  ograničenu u nuli, transformiše konstitutivni model (2.6) u

$$\Phi_\sigma(s) \tilde{\sigma}(s) = \Phi_\varepsilon(s) \tilde{\varepsilon}(s), \quad \text{te je} \quad \tilde{E}(s) = \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\tilde{\varepsilon}(s)} = \frac{\Phi_\varepsilon(s)}{\Phi_\sigma(s)}, \quad \text{sa} \quad (2.10)$$

$$\Phi_\sigma(s) = \sum_{k=1}^{N_1} a_k \frac{1}{s^{\alpha_k}} + \sum_{k=1}^{N_2} b_k s^{\beta_k} \quad \text{i} \quad \Phi_\varepsilon(s) = \sum_{k=1}^{M_1} c_k \frac{1}{s^{\mu_k}} + \sum_{k=1}^{M_2} d_k s^{\nu_k}, \quad (2.11)$$

gde  $\tilde{E}$  označava kompleksni moduo. Više o frakcionom računu se može pronaći u [19, 20].

## 2.1 Moduo relaksacije i funkcija puzanja

Moduo relaksacije definiše se kao funkcija vremenske evolucije napona koja predstavlja odziv na deformaciju zadatu u obliku Hevisajdove funkcije, dok se funkcija puzanja definiše kao funkcija vremenske evolucije deformacije koja predstavlja odziv na napon zadat u obliku Hevisajdove funkcije, stoga su moduo relaksacije i funkcija puzanja u Laplasovom domenu, na osnovu (2.10) dati izrazima

$$\tilde{\sigma}_{sr}(s) = \frac{1}{s} \frac{\Phi_\varepsilon(s)}{\Phi_\sigma(s)} \quad \text{i} \quad \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) = \frac{1}{s} \frac{\Phi_\sigma(s)}{\Phi_\varepsilon(s)}, \quad (2.12)$$

budući da je Laplasova transformacija Hevisajdove funkcije  $H$ :  $\mathcal{L}[H(t)](s) = \frac{1}{s}$ , te se konstitutivna veza između napona i deformacije u Laplasovom domenu, na osnovu (2.10), može predstaviti preko modula relaksacije i funkcije puzanja u Laplasovom domenu

$$\tilde{\sigma}(s) = s \tilde{\sigma}_{sr}(s) \tilde{\varepsilon}(s) \quad \text{i} \quad \tilde{\varepsilon}(s) = s \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) \tilde{\sigma}(s), \quad (2.13)$$

transformišući se u vremenskom domenu u izraze

$$\sigma(t) = \frac{d}{dt} (\sigma_{sr}(t) * \varepsilon(t)) \quad \text{i} \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_{cr}^{(g)} \sigma(t) + \dot{\varepsilon}_{cr}(t) * \sigma(t) = \dot{\varepsilon}_{cr}(t) * \sigma(t), \quad (2.14)$$

ako je  $\varepsilon_{cr}^{(g)} = \varepsilon_{cr}(0) = 0$ , pri čemu je sa \* označena konvolucija definisana sa

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t') g(t - t') dt'.$$

Naime, primenom inverzne Laplasove transformacije, izraz (2.13) se transformiše u (2.14) na sledeći način

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \mathcal{L}^{-1}[s\tilde{\sigma}_{sr}(s)](t) * \varepsilon(t) \quad i \quad \varepsilon(t) = \mathcal{L}^{-1}[s\tilde{\varepsilon}_{cr}(s)](t) * \sigma(t), \\ \sigma(t) &= (\sigma_{sr}^{(g)}\delta(t) + \dot{\sigma}_{sr}(t)) * \varepsilon(t) \quad i \quad \varepsilon(t) = (\varepsilon_{cr}^{(g)}\delta(t) + \dot{\varepsilon}_{cr}(t)) * \sigma(t), \\ \sigma(t) &= \sigma_{sr}^{(g)}\varepsilon(t) + \dot{\sigma}_{sr}(t) * \varepsilon(t) \quad i \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_{cr}^{(g)}\sigma(t) + \dot{\varepsilon}_{cr}(t) * \sigma(t),\end{aligned}\quad (2.15)$$

pri čemu su  $\sigma_{sr}^{(g)} = \sigma_{sr}(0)$  i  $\varepsilon_{cr}^{(g)} = \varepsilon_{cr}(0)$  vrednosti modula relaksacije i funkcije puzanja računate u početnom trenutku, dok se izraz  $(2.15)_1$  transformiše u konačan oblik

$$\sigma(t) = \sigma_{sr}^{(g)}\varepsilon(t) + \frac{d}{dt}(\sigma_{sr}(t) * \varepsilon(t)) - \sigma_{sr}^{(g)}\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}(\sigma_{sr}(t) * \varepsilon(t)),$$

prema izvodu konvolucije

$$\frac{d}{dt}(f(t) * g(t)) = \dot{f}(t) * g(t) + f(0)g(t). \quad (2.16)$$

Konstitutivne relacije, date sa (2.14), odnosno sa (2.15), predstavljaju memorijski tip modela sa modulom relaksacije i funkcijom puzanja kao memorijskim jezgrima.

Treba istaći da je vrednost modula relaksacije računata u početnom trenutku  $\sigma_{sr}^{(g)}$  povezana sa brzinom prostiranja talasa relacijom

$$c = \sqrt{\frac{\sigma_{sr}^{(g)}}{\varrho}}, \quad (2.17)$$

što je pokazano u [7] u slučaju jednodimenzione talasne jednačine, dobijene za linearne frakcione konstitutivne modele koji sadrže Riman-Liuvilove izvode reda u intervalu  $(0, 1)$ , a dalje je prošireno u [21] za slučaj modela raspodeljenog reda, pri čemu je integracija primenjena po redovima frakcionih izvoda u intervalu  $(0, 1)$ , kao i za slučaj termodinamički konzistentnih frakcionih Burgersovih modela koji, pored frakcionih izvoda čiji su redovi u intervalu  $(0, 1)$ , sadrže i frakcione izvode čiji su redovi u intervalu  $(1, 2)$ , razmatranjem prostiranja talasa na beskonačnom domenu u [22], kao i na konačnom domenu u [23]. Mikrolokalna analiza frakcione Cenerove talasne jednačine, kao i talasne jednačine raspodeljenog reda, sprovedena u [24, 25], daje rigorozni matematički dokaz da je fundamentalno rešenje u konusu definisanom brzinom prostiranja talasa.

Takođe, na osnovu modula relaksacije i funkcije puzanja mogu se doneti određeni zaključci o mehaničkim svojstvima materijala, te se materijali klasificuju prema brzini prostiranja mehaničke pobude na materijale sa konačnom i materijale sa beskonačnom brzinom prostiranja talasa, zavisno, prema prethodnoj formuli, da li vrednost modula relaksacije u početnom trenutku ima konačnu ili beskonačnu vrednost. Sa druge strane, na osnovu vrednosti funkcije puzanja u beskonačnosti, materijali se klasificuju na tip materijala sa karakteristikama čvrstog tela, ukoliko je ta vrednost konačna, kao i na tip materijala sa karakteristikama fluidnog tela, ako funkcija puzanja teži u beskonačnost kada vreme teži u beskonačnost. Razlika u ponašanju viskoelastičnih tela čvrstog i fluidnog tipa izučavana je u [23, 26, 27, 28] na primeru štapa uklještenog na jednom svom kraju i podvrgnutog deformaciji, odnosno naponu, na drugom svom kraju, pri čemu je uključena i dinamika deformabilnog tela.

Ukoliko redovi frakcionih izvoda koji figurišu u konstitutivnom modelu pripadaju intervalu  $(0, 1)$ , kao i u slučaju modela koji uključuju izvode prvog reda, pokazuje se da je moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, odnosno pozitivna, opadajuća i konveksna funkcija, dok je funkcija puzanja Bernštajnova funkcija, odnosno pozitivna, rastuća i konkavna funkcija. U [29] je pokazano da navedena svojstva modula relaksacije garantuju disipativnost frakcionih talasnih jednačina u materijalima modeliranim linearnim frakcionim modelima koji sadrže frakcione izvode čiji su redovi u intervalu  $(0, 1)$ . Kvalitativna svojstva modula relaksacije i funkcije puzanja igraju važnu ulogu u osobinama energetskog bilansa viskoelastičnog tela, stoga se određuje njihov eksplizitni oblik i koristi da se nametnu uslovi koji obezbeđuju da je moduo relaksacije kompletno monoton, a funkcija puzanja Bernštajnova funkcija. Naime, korišćenjem konstitutivnog modela u izrazu za snagu u [3] je pokazano da je energija pozitivna, kao i snaga disipacije, odnosno da je materijal disipativan, ukoliko su moduo relaksacije i funkcija puzanja redom kompletno monotona i Bernštajnova funkcija. Postizanje navedenih svojstava modula relaksacije i funkcije puzanja implicira da se termodinamičke restrikcije na parametre modela moraju suziti u slučaju modela koji sadrže izvode i integrale čiji su redovi u intervalu  $(1, 2)$ , što je u slučaju frakcionih Burgersovih modela, formulisanih u [9], pokazano u [30], odnosno u [3] za slučaj frakcionih Cenerovih i anti-Cenerovih modela, formulisanih u [1]. Zapravo, u slučaju navedenih modela, moduo relaksacije i funkcija puzanja mogu biti nemonotone, a čak i oscilatorne funkcije eksponencijalno opadajuće amplitude.

Komplet na monotonost modula relaksacije u slučaju frakcionog Cenerovog modela raspodeljenog reda proučavana je u [31], dok je u [32] reč o frakcionom Burgerovom modelu u testovima puzanja i relaksacije. Uloga Foksove funkcije je istaknuta u [33, 34] u određivanju odziva frakcionih konstitutivnih modela za pretpostavljeni napon ili deformaciju, a u [35] je razmatrana funkcija puzanja u kvazistacionarnom režimu u slučaju viskoelastičnih modela celobrojnog reda. Eksperimentalni podaci, dobijeni u testovima puzanja i relaksacije napona, sprovedenim na biološkim tkivima, su iskorišćeni u [36, 37], kako bi se odredili parametri modela viskoelastičnog tela.

Upotreba konstitutivnih modela u modeliranju propagacije talasa je široka, pri čemu su [38, 39] neki od prvih radova u kojima se analiziraju viskoelastični materijali frakcionog reda. Prigušene oscilacije i prostiranje talasa u viskoelastičnim materijalima modeliranim Cenerovim, modifikovanim Cenerovim i modifikovanim Maksvelovim modelima su razmatrani u [40, 41, 42, 43, 44].

Prostiranje talasa u jednodimenzionom viskoelastičnom materijalu modeliranom frakcionom Cenerovim konstitutivnom jednačinom razmatrano je u [45], dok je višedimenziona frakciona Cenerova talasna jednačina razmatrana u [46, 47, 48]. Viskoelastični konstitutivni modeli frakcionog reda, talasna propagacija, disperzioni i atenuacioni procesi su razmatrani u [7, 49, 50, 51, 52], dok su akustički talasi ispitivani u [53]. Neki od načina za ispitivanje svojstava prostiranja talasa su Buhen-Mainardijev pristup ispitivanju širenja talasnog fronta, uveden u [54] i nedavno korišćen u [55], kao i korišćenje asymptotike fundamentalnih rešenja, što je razvijeno u [56].

## 2.2 Linearni frakcioni modeli

Razmatraju se tri tipa linearnih frakcionih modela viskoelastičnog tela: termodinamički konzistentni linearni modeli frakcionog reda koji sadrže isključivo Riman-Liuvilove frakcione izvode reda u intervalu  $(0, 1)$ , termodinamički konzistentni frakcioni Burgersovi modeli koji sadrže Riman-Liuvilove frakcione izvode reda i u intervalu  $(0, 1)$  i u intervalu  $(1, 2)$ , kao i termodinamički konzistentni frakcioni Cenerovi i anti-Cenerovi modeli koji sadrže frakcione integrale i Riman-Liuvilove frakcione izvode reda, kako u intervalu  $(0, 1)$ , tako i u intervalu  $(1, 2)$ .

### 2.2.1 Linearni modeli frakcionog reda

Linearni modeli frakcionog reda koji sadrže samo Riman-Liuvilove izvode reda u intervalu  $(0, 1)$ , dobijeni iz konstitutivnog modela (2.6) za  $a_k = 0$ , sa  $k = 1, \dots, N_1$ , i  $c_k = 0$ , sa  $k = 1, \dots, M_1$ , uzimajući stoga oblik

$$\sum_{i=1}^n a_i {}_0D_t^{\alpha_i} \sigma(x, t) = \sum_{j=1}^m b_j {}_0D_t^{\beta_j} \varepsilon(x, t), \quad (2.18)$$

za koje je dokazano da poseduju četiri termodinamički konzistentna slučaja

$$\sum_{i=1}^n a_i {}_0D_t^{\alpha_i} \sigma(t) = \sum_{i=1}^n b_i {}_0D_t^{\alpha_i} \varepsilon(t), \quad (2.19)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i {}_0D_t^{\alpha_i} \sigma(t) = \sum_{i=1}^n b_i {}_0D_t^{\alpha_i} \varepsilon(t) + \sum_{i=n+1}^m b_i {}_0D_t^{\beta_i} \varepsilon(t), \quad (2.20)$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} a_i {}_0D_t^{\alpha_i} \sigma(t) + \sum_{i=n-m+1}^n a_i {}_0D_t^{\alpha_i} \sigma(t) = \sum_{j=1}^m b_j {}_0D_t^{\alpha_{n-m+j}} \varepsilon(t), \quad (2.21)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i {}_0D_t^{\alpha_i} \sigma(t) = \sum_{j=1}^m b_j {}_0D_t^{\beta_j} \varepsilon(t), \quad (2.22)$$

izvedeni su u [28] i dati u dodatku A.1. Ispitivanjem asymptotskog ponašanja funkcije puzanja za velika vremena, ispostavlja se da se modeli koji pripadaju klasi modela I i II, datih sa (2.19) i (2.20), odnose na materijale sa karakteristikama čvrstog tela, jer funkcija puzanja teži u konačnu vrednost za beskonačno vreme, dok se modeli koji pripadaju klasi modela III i IV, datih sa (2.21) i (2.22), odnose na fluidni tip materijala, jer funkcija puzanja teži u beskonačnost kada vreme teži u beskonačnost. Sa druge strane, modeli koji pripadaju klasi modela I i III daju konačne brzine prostiranja talasa, jer moduo relaksacije teži u konačnu vrednost kada vreme teži nuli, dok modeli koji pripadaju klasi modela II i IV daju beskonačne brzine prostiranja talasa, jer moduo relaksacije teži u beskonačnu vrednost za vreme blisko nuli. Ove karakteristike modela su korišćene u [29] u dokazivanju dissipativnosti frakcione talasne jednačine korišćenjem a priori energetskih procena.

## 2.2.2 Frakcioni Burgersovi modeli

Na slici 2.1 su date dve reološke šeme za Burgersov model, pri čemu su konstitutivne jednačine koje odgovaraju šemama sa slike 2.1(a) i 2.1(b) respektivno date izrazima

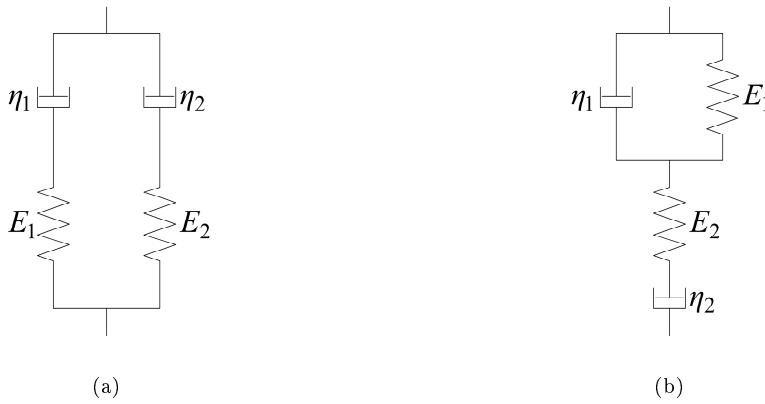
$$\left(1 + \left(\frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_2}{E_2}\right) \frac{d}{dt} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \frac{d^2}{dt^2}\right) \sigma(t) = \left(\left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_2}\right) \frac{d}{dt} + \frac{\eta_1}{E_1} \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right) \frac{d^2}{dt^2}\right) \varepsilon(t), \quad (2.23)$$

$$\left(1 + \frac{\eta_2}{E_1} \left(1 + \frac{E_1}{E_2} + \frac{\eta_1}{\eta_2}\right) \frac{d}{dt} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \frac{d^2}{dt^2}\right) \sigma(t) = \eta_2 \left(\frac{d}{dt} + \frac{\eta_1}{E_1} \frac{d^2}{dt^2}\right) \varepsilon(t). \quad (2.24)$$

gde su  $E_1$  i  $E_2$  moduli elastičnosti odgovarajućih opruga, a  $\eta_1$  i  $\eta_2$  koeficijenti viskoznosti odgovarajućih prigušnica, modeliranih respektivno Hukovim i Njutnovim zakonom (2.1). Obe navedene jednačine su istog matematičkog oblika i predstavljaju klasičnu Burgersovu konstitutivnu jednačinu

$$\left(1 + a_1 \frac{d}{dt} + a_2 \frac{d^2}{dt^2}\right) \sigma(t) = \left(b_1 \frac{d}{dt} + b_2 \frac{d^2}{dt^2}\right) \varepsilon(t), \quad (2.25)$$

sa pozitivnim parametrima  $a_1, a_2, b_1, b_2$ . Klasični Burgersov model je korišćen za opis dinamičkih osobina polimera, viskoelastičnih osobina asfalta i za modeliranje oblikovanja stakla u [57, 58, 59], dok je u [60, 61] korišćen mikromehanički pristup za modeliranje asfaltnih smeša.



Slika 2.1: Reološke šeme klasičnog Burgersovog modela.

Kada su u reološkim šemama datim na slici 2.1, koje odgovaraju klasičnom Burgersovom modelu, prigušnice frakcionog tipa, dobijaju se konstitutivne jednačine viskoelastičnog tela frakcionog Burgersovog tipa u obliku

$$\left(1 + \frac{\eta_1}{E_1} {}_0D_t^\alpha + \frac{\eta_2}{E_2} {}_0D_t^\beta + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \sigma(t) = \left(\eta_1 {}_0D_t^\alpha + \eta_2 {}_0D_t^\beta + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1} \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right) {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \varepsilon(t), \quad (2.26)$$

$$\left(1 + \frac{\eta_1}{E_1} {}_0D_t^\alpha + \frac{\eta_2}{E_2} \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) {}_0D_t^\beta + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \sigma(t) = \eta_2 \left({}_0D_t^\beta + \frac{\eta_1}{E_1} {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \varepsilon(t), \quad (2.27)$$

analognom sa jednačinama (2.23) i (2.24), pri čemu se jednačine (2.26) i (2.27) razlikuju za jedan član. Druga od dve navedene jednačine jednostavnijeg je oblika i korišćena je za opis viskoelastičnog tela frakcionog Burgersovog tipa. Usled proizvoljnosti parametara reoloških modela, jednačina (2.27) postaje

$$\left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma\right) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^\nu) \varepsilon(t), \quad (2.28)$$

sa parametrima modela  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 > 0$ ,  $\alpha, \beta, \mu, \nu \in [0, 1]$ , gde je  $\alpha \leq \beta$ , i  $\gamma, \nu \in [1, 2]$ , što je izvedeno u [9], gde je takođe ispitana termodinamička konzistentnost modela, na osnovu koje je dobijeno osam termodinamički konzistentnih frakcionih Burgersovih modela, a koji se grupišu u dve termodinamički konzistentne klase sa uopštenim konstitutivnim jednačinama

$$\begin{aligned} \left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma\right) \sigma(x, t) &= (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\eta}) \varepsilon(x, t) \quad i \\ \left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{\beta+\eta}\right) \sigma(x, t) &= \left(b_1 {}_0D_t^\beta + b_2 {}_0D_t^{\beta+\eta}\right) \varepsilon(x, t), \end{aligned} \quad (2.29)$$

tako da je za modele prve klase najviši red frakcionog izvoda koji deluje na deformaciju  $\mu + \eta \in [1, 2]$ , sa  $\eta \in \{\alpha, \beta\}$ , dok je najviši red frakcionog izvoda koji deluje na napon ili  $\gamma \in [0, 1]$  u slučaju modela I, sa

Model	Konstitutivna jednačina
<b>ID.ID</b>	$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\mu + a_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta-\mu}) \varepsilon(t)$
<b>ID.DD<sup>+</sup></b>	$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta+\mu}) \varepsilon(t)$
<b>IID.IID</b>	$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0I_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^{\alpha+\gamma-\eta} + b_2 {}_0I_t^{\beta+\gamma-\eta} + b_3 {}_0D_t^\eta) \varepsilon(t)$
<b>IDD.IDD</b>	$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta-\mu} + b_3 {}_0D_t^{\alpha+\gamma-\mu}) \varepsilon(t)$
<b>IID.IDD</b>	$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0I_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\mu + b_2 {}_0D_t^\nu + b_3 {}_0D_t^{\alpha+\gamma-\mu}) \varepsilon(t)$
<b>I<sup>+</sup> ID.I<sup>+</sup> ID</b>	$(a_1 {}_0I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0I_t^{\frac{1+\alpha-\gamma}{2}} + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^{1+\mu} + b_2 {}_0I_t^{\frac{1+\mu-(\alpha+\gamma-\mu)}{2}} + b_3 {}_0D_t^{\alpha+\gamma-\mu}) \varepsilon(t)$
<b>IDD<sup>+</sup>.IDD<sup>+</sup></b>	$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^{\frac{1+\gamma-\alpha}{2}} + a_3 {}_0D_t^{1+\gamma}) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^{\alpha+\gamma-\eta} + b_2 {}_0D_t^{\frac{1+\eta-(\alpha+\gamma-\eta)}{2}} + b_3 {}_0D_t^{1+\eta}) \varepsilon(t)$
<b>I<sup>+</sup> ID.IDD<sup>+</sup></b>	$(a_1 {}_0I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0I_t^{\frac{1+\alpha-\gamma}{2}} + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^{\alpha+\gamma-\eta} + b_2 {}_0D_t^{\frac{1+\eta-(\alpha+\gamma-\eta)}{2}} + b_3 {}_0D_t^{1+\eta}) \varepsilon(t)$
<b>IID.ID</b>	$(a_1 {}_0I_t^{\alpha+\beta-\gamma} + a_2 {}_0I_t^\nu + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\alpha + b_2 {}_0D_t^\beta) \varepsilon(t)$
<b>IDD.DD<sup>+</sup></b>	$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta+\mu}) \varepsilon(t)$
<b>I<sup>+</sup> ID.ID</b>	$(a_1 {}_0I_t^{\alpha+\beta+\nu} + a_2 {}_0I_t^\nu + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta-\nu}) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\alpha + b_2 {}_0D_t^\beta) \varepsilon(t)$
<b>IDD<sup>+</sup>.DD<sup>+</sup></b>	$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{\alpha+2\beta}) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta+\mu}) \varepsilon(t)$
<b>ID.IDD</b>	$(a_1 {}_0I_t^\mu + a_2 {}_0D_t^\nu) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\alpha + b_2 {}_0D_t^\beta + b_3 {}_0D_t^{\mu+\nu-\alpha}) \varepsilon(t)$
<b>ID.DDD<sup>+</sup></b>	$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^\nu + b_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta+\nu}) \varepsilon(t)$
<b>ID.IDD<sup>+</sup></b>	$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^{\alpha+\beta-\nu} + b_2 {}_0D_t^\nu + b_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta+\nu}) \varepsilon(t)$

Tabela 2.1: Simetrični i asimetrični frakcionali Cenerovi i anti-Cenerovi konstitutivni modeli.

$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \mu \leq 1$  i  $\eta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ , ili  $\gamma \in [1, 2]$  u slučaju modela II - V, sa  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1$  i  $(\eta, \gamma) \in \{(\alpha, 2\alpha), (\alpha, \alpha + \beta), (\beta, \alpha + \beta), (\beta, 2\beta)\}$ , dok za modele druge klase važi  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$  i  $\beta + \eta \in [1, 2]$ , sa  $\eta = \alpha$ , u slučaju modela VI;  $\eta = \beta$  u slučaju modela VII; i  $\alpha = \eta = \beta$ ,  $\bar{a}_1 = a_1 + a_2$ , i  $\bar{a}_2 = a_3$  u slučaju modela VIII, videti dodatak A.2.

U konstitutivnim jednačinama modela I - V, redovi frakcionalih izvoda su uređeni od najnižeg do najvišeg, posebno za one u intervalu  $[0, 1]$  i posebno za one u intervalu  $[1, 2]$ . Model I sadrži samo jedan izvod koji deluje na deformaciju i koji je reda u intervalu  $[1, 2]$ , dobijen kao zbir najvišeg reda izvoda u intervalu  $[0, 1]$  i bilo kog od preostala tri reda izvoda. Modeli II - V sadrže dva frakcionala izvoda sa redovima u intervalu  $[0, 1]$  i još jedan reda u intervalu  $[1, 2]$ , koji deluju na napon, tako da se najviši red dobija ili kao zbir redova u intervalu  $[0, 1]$  ili kao dvostruka vrednost bilo kog od njih. Štaviše, modeli II - V sadrže jedan frakcionali izvod reda u intervalu  $[0, 1]$  i jedan reda u intervalu  $[1, 2]$ , koji deluju na deformaciju, tako da se drugi dobija kao zbir prvog i nekog od preostalih redova do jedan.

Modeli VI i VII sadrže dva frakcionala izvoda reda u intervalu  $[0, 1]$  i još jedan reda u intervalu  $[1, 2]$ , koji deluju na napon, kao i jedan frakcionali izvod reda u intervalu  $[0, 1]$  i jedan reda u intervalu  $[1, 2]$ , koji deluju na deformaciju, tako da se najviši red frakcionalog izvoda koji deluje na deformaciju podudara sa najvišim redom frakcionalog izvoda koji deluje na napon bez obzira na interval kom pripadaju. Redovi frakcionalih izvoda u intervalu  $[1, 2]$  se dobijaju ili kao zbir redova iz intervala  $[0, 1]$ , ili kao dvostruka vrednost reda veće vrednosti. Model VIII sadrži dva frakcionala izvoda koja deluju i na napon i na deformaciju, prvi reda u intervalu  $[\frac{1}{2}, 1]$  i drugi čiji se red dobija kao dvostruka vrednost prvog.

U [30] se ispituje moduo relaksacije i funkcija puzanja u slučaju materijala modeliranog frakcionim Burgerso-

vim modelom, tako da razmatranje asymptotskog ponašanja funkcije puzanja za velika vremena kategorizuje ove modele u modele fluidnog tipa, budući da funkcija puzanja teži u beskonačnost za velika vremena, dok razmatranje asymptotike modula relaksacije za vremena bliska nuli grupiše ove modele u dve klase, tako da brzina prostiranja mehaničkog poremećaja ima beskonačnu vrednost za modele prve klase, budući da moduo reklasacije u trenutku  $t = 0$  ima beskonačnu vrednost, dok brzina prostiranja mehaničkog poremećaja ima konačnu vrednost za modele druge klase, budući da moduo reklasacije u trenutku  $t = 0$  ima konačnu vrednost.

### 2.2.3 Frakcioni Cenerovi i anti-Cenerovi modeli

Linearni modeli frakcionog reda koji sadrže i frakcione integrale i Riman-Liuvilove frakcione izvode reda i u intervalu  $(0, 1)$  i u intervalu  $(1, 2)$  su frakcioni Cenerovi i anti-Cenerovi konstitutivni modeli, koji su formulisani i čija je termodinamička analiza sprovedena u [1], kao i u narednom poglavlju. Naime, korišćenjem reoloških šema koje odgovaraju klasičnom Cenerovom i anti-Cenerovom modelu, zamenom klasičnih opruga i prigušnica frakcionim oprugama i prigušnicama, pri čemu su opruge, umesto Hukovim zakonom, modelirane zakonom koji povezuje napon sa frakcionim integralom deformacije, dok su prigušnice, umesto Njutnovim zakonom viskoznosti, opisane zakonom koji povezuje napon sa frakcionim izvodom deformacije, dobijeni su frakcioni Cenerovi i anti-Cenerovi modeli viskoelastičnog tela. Frakcioni Cenerovi i anti-Cenerovi modeli grupisani su u klase simetričnih i asimetričnih modela, pri čemu simetrični modeli sadrže isti broj operatora, frakcionalih integrala i/ili Riman-Liuvilovih frakcionalih izvoda, koji deluju na napon i deformaciju, a asimetrični modeli sadrže različit broj operatora koji deluju na napon i deformaciju. Termodinamičke restrikcije na parametre modela, koje obezbeđuju disipativnost, formulisane su razmatranjem disipirane snage u kvazistacionarnom režimu i praktično su određene zahtevanjem nenegativnosti konzervativnog i disipativnog modula, izvedenog iz konstitutivnog modela, za sve frekvencije harmonijske pobude. Termodinamičkom analizom je utvrđeno da modeli dati u tabeli 2.1 zadovoljavaju termodinamičke restrikcije koje obezbeđuju njihova disipativna svojstva, a predstavljene su u dodatku A.3. Određivanjem funkcije puzanja i modula relaksacije, u poglavlju 4, kao i u [2], pokazano je da frakcioni Cenerovi i anti-Cenerovi modeli opisuju čvrsto telo fluidnog tipa sa beskonačnom brzinom prostiranja talasa, a takođe je ispitivan energetski bilans modela u vremenskom domenu.



### 3. Frakcioni Cenerovi i anti-Cenerovi modeli viskoelastičnog tela

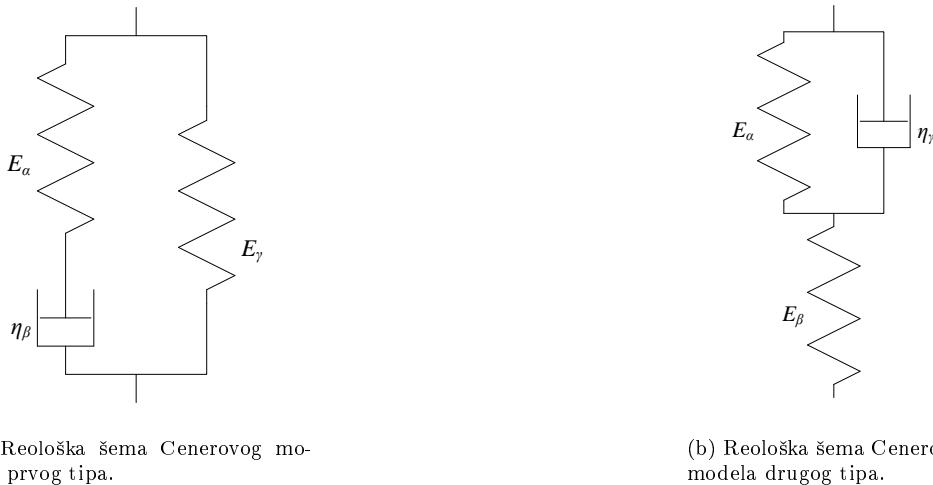
Klasični modeli Cenerovog i anti-Cenerovog tipa predstavljaju standardne konstitutivne jednačine jednodimenzionog viskoelastičnog tela i povezuju napon  $\sigma$  i deformaciju  $\varepsilon$ , koji su funkcije vremena  $t > 0$ . Naime, klasični Cenerov model

$$\left(1 + a \frac{d}{dt}\right) \sigma(t) = E \left(1 + b \frac{d}{dt}\right) \varepsilon(t), \quad (3.1)$$

kao i klasični anti-Cenerov model

$$\left(1 + a \frac{d}{dt}\right) \sigma(t) = \left(b_1 + b_2 \frac{d}{dt}\right) \frac{d}{dt} \varepsilon(t), \quad (3.2)$$

u kojima je  $E$  uopšteni Jangov moduo, a  $a, b, b_1, b_2$  su konstante, mogu se respektivno dobiti korišćenjem reoloških šema datih na slikama 3.1 i 3.2, pretpostavljajući da su opruge elastične i stoga modelirane Hukovim zakonom (2.1)<sub>1</sub>, kao i da su prigušnice modelirane Njutnovim zakonom viskoznosti (2.1)<sub>2</sub>.

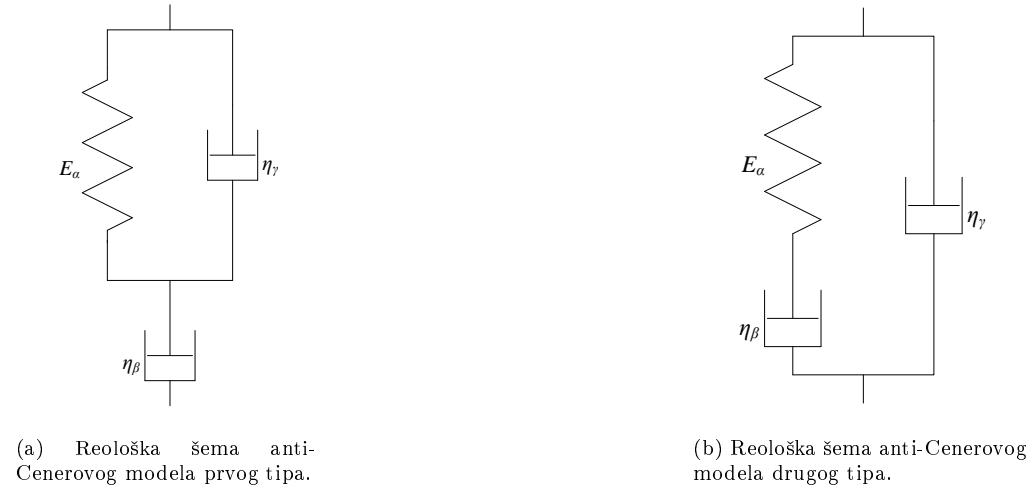


Slika 3.1: Reološke šeme koje odgovaraju Cenerovom modelu.

#### 3.1 Formulacija modela

Pomenute reološke šeme, koje odgovaraju Cenerovom i anti-Cenerovom modelu, su korišćene da bi se formulisale uopštenije konstitutivne jednačine zamenom klasičnih opruga i prigušnica frakcionim oprugama i prigušnicama, tako da su opruge umesto Hukovim zakonom modelirane zakonom koji povezuje napon sa frakcionim integralom deformacije (2.2)<sub>1</sub>, dok su prigušnice umesto Njutnovim zakonom viskoznosti opisane zakonom koji povezuje napon sa frakcionim izvodom deformacije (2.2)<sub>2</sub>.

Umesto izvođenja konstitutivnih jednačina u vremenskom domenu prema reološkim šemama sa slike 3.1 i 3.2, gde su opruge i prigušnice modelirane frakcionim Hukovim i Njutnovim zakonima (2.2), mogu se izvesti



Slika 3.2: Reološke šeme koje odgovaraju anti-Cenerovom modelu.

konstitutivni modeli korišćenjem njihove Laplasove transformacije

$$\tilde{\sigma}(s) = E \frac{1}{s^\xi} \tilde{\varepsilon}(s) \quad \text{i} \quad \tilde{\sigma}(s) = \eta s^\zeta \tilde{\varepsilon}(s),$$

budući da se frakcioni integral i frakcioni izvod transformišu prema (2.8) i (2.9).

Naime, konstitutivni model u Laplasovom domenu, dobijen prema šemi za Cenerov model prvog tipa, datoj na slici 3.1a, predstavljen je izrazom

$$\left( E_\alpha \frac{1}{s^\alpha} + \eta_\beta s^\beta \right) \tilde{\sigma}(s) = \left( E_\alpha E_\gamma \frac{1}{s^{\alpha+\gamma}} + E_\alpha \eta_\beta \frac{s^\beta}{s^\alpha} + E_\gamma \eta_\beta \frac{s^\beta}{s^\gamma} \right) \tilde{\varepsilon}(s) \quad (3.3)$$

dajući Cenerov model prvog tipa

$$\left( E_\alpha {}_0 I_t^\alpha + \eta_\beta {}_0 D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( E_\alpha E_\gamma {}_0 I_t^{\alpha+\gamma} + E_\alpha \eta_\beta \begin{bmatrix} {}_0 D_t^{\beta-\alpha} \\ {}_0 I_t^{\alpha-\beta} \end{bmatrix} + E_\gamma \eta_\beta \begin{bmatrix} {}_0 D_t^{\beta-\gamma} \\ {}_0 I_t^{\gamma-\beta} \end{bmatrix} \right) \varepsilon(t), \quad (3.4)$$

nakon primene inverzne Laplasove transformacije na (3.3), dok konstitutivni model u Laplasovom domenu

$$\left( E_\alpha \frac{1}{s^\alpha} + E_\beta \frac{1}{s^\beta} + \eta_\gamma s^\gamma \right) \tilde{\sigma}(s) = \left( E_\alpha E_\beta \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} + E_\beta \eta_\gamma \frac{s^\gamma}{s^\beta} \right) \tilde{\varepsilon}(s), \quad (3.5)$$

sledi sa šeme Cenerovog modela drugog tipa, prikazane na slici 3.1b, dajući

$$\left( E_\alpha {}_0 I_t^\alpha + E_\beta {}_0 I_t^\beta + \eta_\gamma {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( E_\alpha E_\beta {}_0 I_t^{\alpha+\beta} + E_\beta \eta_\gamma \begin{bmatrix} {}_0 D_t^{\gamma-\beta} \\ {}_0 I_t^{\beta-\gamma} \end{bmatrix} \right) \varepsilon(t), \quad (3.6)$$

kao Cenerov model drugog tipa. Oznaka  $\begin{bmatrix} {}_0 D_t^\zeta \\ {}_0 I_t^\xi \end{bmatrix}$ , koja se koristi u konstitutivnim modelima (3.4) i (3.6), predstavlja mogućnost izbora ili frakcionog izvoda  ${}_0 D_t^\zeta$  ili frakcionog integrala  ${}_0 I_t^\xi$  u modelu, budući da eksponent kompleksne promenljive  $s$ , koja figuriše u modelima u Laplasovom domenu (3.3) i (3.5), može imati ili pozitivnu vrednost  $\zeta$  ukazujući da se u vremenskom domenu radi o operatoru frakcionog izvoda, ili negativnu vrednost  $-\zeta = \xi$  ukazujući da se u vremenskom domenu radi o operatoru frakcionog integrala. Takođe, red frakcionog izvoda predstavljenog zbirom eksponenata, a koji se pojavljuje u modelima (3.4) i (3.6), može biti ili u intervalu  $(0, 1)$  ili u intervalu  $(1, 2)$ .

Isti pristup izvođenja konstitutivnih jednačina koristi se prilikom razmatranja reoloških šema sa slike 3.2, koje odgovaraju anti-Cenerovom modelu, stoga je konstitutivni model u Laplasovom domenu, dobijen prema šemi anti-Cenerovog modela prvog tipa, prikazanoj na slici 3.2a, dat izrazom

$$\left( E_\alpha \frac{1}{s^\alpha} + \eta_\beta s^\beta + \eta_\gamma s^\gamma \right) \tilde{\sigma}(s) = \left( E_\alpha \eta_\beta \frac{s^\beta}{s^\alpha} + \eta_\beta \eta_\gamma s^{\beta+\gamma} \right) \tilde{\varepsilon}(s), \quad (3.7)$$

dajući inverznom Laplasovom transformacijom anti-Cenerov model prvog tipa

$$\left( E_\alpha {}_0I_t^\alpha + \eta_\beta {}_0D_t^\beta + \eta_\gamma {}_0D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( E_\alpha \eta_\beta \begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^{\beta-\alpha} \\ \hline {}_0I_t^{\alpha-\beta} \\ \hline \end{array} + \eta_\beta \eta_\gamma {}_0D_t^{\beta+\gamma} \right) \varepsilon(t), \quad (3.8)$$

dok konstitutivni model u Laplasovom domenu

$$\left( E_\alpha \frac{1}{s^\alpha} + \eta_\beta s^\beta \right) \tilde{\sigma}(s) = \left( E_\alpha \eta_\beta \frac{s^\beta}{s^\alpha} + E_\alpha \eta_\gamma \frac{s^\gamma}{s^\alpha} + \eta_\beta \eta_\gamma s^{\beta+\gamma} \right) \tilde{\varepsilon}(s) \quad (3.9)$$

sledi sa šeme anti-Cenerovog modela drugog tipa, date na slici 3.2b, dajući anti-Cenerov model drugog tipa

$$\left( E_\alpha {}_0I_t^\alpha + \eta_\beta {}_0D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( E_\alpha \eta_\beta \begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^{\beta-\alpha} \\ \hline {}_0I_t^{\alpha-\beta} \\ \hline \end{array} + E_\alpha \eta_\gamma \begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^{\gamma-\alpha} \\ \hline {}_0I_t^{\alpha-\gamma} \\ \hline \end{array} + \eta_\beta \eta_\gamma {}_0D_t^{\beta+\gamma} \right) \varepsilon(t), \quad (3.10)$$

koji se dobija nakon primene inverzne Laplasove transformacije.

Po uzoru na frakcione Cenerove i anti-Cenerove modele (3.4), (3.6), (3.8) i (3.10), usvajaju se konstitutivne jednačine

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^\mu + b_2 \begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^\nu \\ \hline {}_0I_t^\nu \\ \hline \end{array} + b_3 \begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^\eta \\ \hline {}_0I_t^\eta \\ \hline \end{array} \right) \varepsilon(t), \quad (3.11)$$

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0I_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^\mu + b_2 \begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^\nu \\ \hline {}_0I_t^\nu \\ \hline \end{array} \right) \varepsilon(t), \quad (3.12)$$

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 \begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^\mu \\ \hline {}_0I_t^\mu \\ \hline \end{array} + b_2 {}_0D_t^\nu \right) \varepsilon(t), \quad (3.13)$$

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( b_1 \begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^\mu \\ \hline {}_0I_t^\mu \\ \hline \end{array} + b_2 \begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^\nu \\ \hline {}_0I_t^\nu \\ \hline \end{array} + b_3 {}_0D_t^\eta \right) \varepsilon(t), \quad (3.14)$$

respektivno, koje sadrže proizvoljne parametre modela:  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 > 0$  i  $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \eta \in (0, 2)$ .

Model (3.12), koji potiče od frakcionog anti-Cenerovog modela prvog tipa, se grana na dva modela, označena kao IID.II i IID.ID: prvi koji sadrži frakcioni integral i drugi koji sadrži frakcioni izvod, pored frakcionog integrala koji deluje na deformaciju. Slično, frakcioni Cenerov model drugog tipa, razmatran u formi (3.13), daje još dva modela, označena sa IDD.ID i IDD.DD. Svaki od modela (3.11) i (3.14) grana se na tri modela, međutim, dajući dva zajednička modela ID.IID i ID.IID, dok je ID.III treći model koji daje frakcioni Cenerov model prvog tipa (3.11), a ID.DDD treći model koji daje frakcioni anti-Cenerov model drugog tipa (3.14). Ako konstitutivne jednačine sadrže barem dva ista frakcionala operatora, frakcionala izvoda ili frakcionala integrala, koji deluju na napon i/ili na deformaciju, tada se, pored slučaja da redovi oba frakcionala operatora pripadaju intervalu  $(0, 1)$ , takođe razmatra i slučaj da jedan od redova frakcionalog operatora pripada intervalu  $(1, 2)$ , pri čemu se usvoja notacija  $D^+$ , odnosno  $I^+$ , a red je predstavljen sa  $1 + \xi$ , tako da je  $\xi \in (0, 1)$ . Svi prethodno spomenuti modeli, koji su šematski poređani u tabeli 3.1, su asimetrični, u smislu da sadrže dva operatora koji deluju na napon i tri operatora koji deluju na deformaciju ili obrnuto.

Po uzoru na klasični Cenerov i anti-Cenerov model (3.1) i (3.2), koji su simetrični, u smislu da sadrže isti broj operatora sa obe strane jednakosti konstitutivne jednačine, modeli (3.11) i (3.14) postaju konstitutivne jednačine simetričnog tipa izjednačavanjem redova  $\nu = \eta$  u modelu (3.11) i redova  $\mu = \nu$  u modelu (3.14), transformišući modele (3.11) i (3.14) u

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^\mu + (b_2 + b_3) \begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^\nu \\ \hline {}_0I_t^\nu \\ \hline \end{array} \right) \varepsilon(t) = \left( \bar{b}_1 {}_0I_t^\mu + \bar{b}_2 \begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^\nu \\ \hline {}_0I_t^\nu \\ \hline \end{array} \right) \varepsilon(t), \quad (3.15)$$

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( (b_1 + b_2) \begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^\mu \\ \hline {}_0I_t^\mu \\ \hline \end{array} + b_3 {}_0D_t^\eta \right) \varepsilon(t) = \left( \bar{b}_1 \begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^\mu \\ \hline {}_0I_t^\mu \\ \hline \end{array} + \bar{b}_2 {}_0D_t^\nu \right) \varepsilon(t), \quad (3.16)$$

a kada se samo jedan operator u  $\begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^\zeta \\ \hline {}_0I_t^\zeta \\ \hline \end{array}$  u modelima (3.15) i (3.16) izabere da deluje na deformaciju, dajući modele ID.II, ID.ID, i ID.DD, dok modeli (3.12) i (3.13) postaju konstitutivne jednačine simetričnog tipa, odnosno modeli IDD.IDD i IID.IID, kada se izabere da i frakcionali integral i frakcionali izvod u  $\begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^\zeta \\ \hline {}_0I_t^\zeta \\ \hline \end{array}$  deluju na deformaciju. Kako se  $\begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^\zeta \\ \hline {}_0I_t^\zeta \\ \hline \end{array}$  može interpretirati kao delovanje i frakcionalog integrala i izvoda, modeli (3.15) i (3.16) se mogu napisati kao

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 \begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^\beta \\ \hline {}_0I_t^\beta \\ \hline \end{array} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^\mu + b_2 \begin{array}{|c|} \hline {}_0D_t^\nu \\ \hline {}_0I_t^\nu \\ \hline \end{array} \right) \varepsilon(t), \quad (3.17)$$

$$\left( a_1 \begin{bmatrix} {}_0D_t^\alpha \\ {}_0I_t^\alpha \end{bmatrix} + a_2 {}_0D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( b_1 \begin{bmatrix} {}_0D_t^\mu \\ {}_0I_t^\mu \end{bmatrix} + b_2 {}_0D_t^\nu \right) \varepsilon(t), \quad (3.18)$$

stoga se mogu razmotriti još dve varijante modela (3.17) i (3.18), date sa

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 \begin{bmatrix} {}_0D_t^\beta \\ {}_0I_t^\beta \end{bmatrix} \right) \sigma(t) = \left( b_1 \begin{bmatrix} {}_0D_t^\mu \\ {}_0I_t^\mu \end{bmatrix} + b_2 {}_0D_t^\nu \right) \varepsilon(t), \quad (3.19)$$

kada se frakcioni integral u (3.17) zameni frakcionim izvodom, kao i

$$\left( a_1 \begin{bmatrix} {}_0D_t^\alpha \\ {}_0I_t^\alpha \end{bmatrix} + a_2 {}_0D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^\mu + b_2 \begin{bmatrix} {}_0D_t^\nu \\ {}_0I_t^\nu \end{bmatrix} \right) \varepsilon(t), \quad (3.20)$$

kada se frakcioni izvod u (3.18) zameni frakcionim integralom, dajući modele IID.IDD i IDD.IID, respektivno. Ukoliko model sadrži dva operatora istog tipa, tada se razmatra slučaj da su redovi oba operatora u intervalu  $(0, 1)$ , ali se takođe razmatra i slučaj da je jedan od redova operatora u intervalu  $(0, 1)$ , a drugi u intervalu  $(1, 2)$ , te se operator označava sa  $I^+$  ili  $D^+$  u nazivu modela.

Frakcioni model	Tip modela	Oznaka modela
anti-Cener	prvi	IDD.ID
		IDD.DD
	drugi	ID.DDD
anti-Cener/Cener	drugi/prvi	ID.IDD
		ID.IID
Cener	prvi	ID.III
	drugi	IID.II
		IID.ID

Tabela 3.1: Šema modela.

## 3.2 Termodinamička konzistentnost modela

U cilju opisa linearog jednodimenzionog viskoelastičnog tela sa karakterističnim disipativnim svojstvima, sve varijante asimetričnih modela (3.11) - (3.14), kao i simetričnih modela (3.15) - (3.20), se analiziraju u pogledu termodinamičke konzistentnosti, što implicira restrikcije na parametre modela. Naime, prepostavljajući kvazistacionarno stanje, uspostavljeno izlaganjem viskoelastičnog tela deformaciji koja je harmonijska funkcija, što posle dovoljno dugo vremena indukuje takođe harmonijski karakter napona, svaka konstitutivna jednačina se može napisati kao funkcija ugaone frekvencije  $\omega \geq 0$  izrazom

$$\frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \hat{E}(\omega) = \hat{E}'(\omega) + i\hat{E}''(\omega),$$

koristeći kompleksni Jangov moduo  $\hat{E}$ , kao i  $E'$  i  $E''$  koji predstavljaju konzervativni i disipativni deo kompleksnog Jangovog modula, odnosno njegov realni i imaginarni deo, a koji se dobija primenom Furijeove transformacije

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

na konstitutivnu jednačinu.

Alternativno, kompleksni moduo  $\hat{E}$ , kao i njegov konzervativni i disipativni deo,  $E'$  i  $E''$ , mogu se dobiti prepostavljanjem deformacije u obliku harmonijske funkcije ugaone frekvencije  $\omega \geq 0$ , implicirajući, posle dovoljno dugo vremena, napon kao takođe harmonijsku funkciju, odnosno

$$\underline{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad \text{i} \quad \underline{\sigma}(t) = \sigma_0(\omega) e^{i(\omega t + \phi_\sigma(\omega))}, \quad (3.21)$$

pri čemu su  $\varepsilon_0$  i  $\sigma_0$  amplitudne, a  $\phi_\sigma$  je fazni ugao. Zbog činjenice da su ranije pomenuti konstitutivni modeli linearni i činjenice da frakcioni integral i izvod zadovoljavaju sledeće relacije

$${}_0I_t^\xi e^{i(\omega t+\phi)} = \frac{1}{(i\omega)^\xi} e^{i(\omega t+\phi)} \quad \text{i} \quad {}_0D_t^\xi e^{i(\omega t+\phi)} = (i\omega)^\xi e^{i(\omega t+\phi)} \quad \text{kada } t \rightarrow \infty,$$

videti [62], kompleksni Jangov moduo se definiše kao

$$\begin{aligned} \hat{E}(\omega) &= \frac{\underline{\sigma}(t)}{\underline{\varepsilon}(t)} = \frac{\sigma_0(\omega)}{\varepsilon_0} e^{i\phi_\sigma(\omega)} = \hat{E}'(\omega) + i\hat{E}''(\omega), \quad \text{sa} \\ \hat{E}'(\omega) &= \frac{\sigma_0(\omega)}{\varepsilon_0} \cos \phi_\sigma(\omega) \quad \text{i} \quad \hat{E}''(\omega) = \frac{\sigma_0(\omega)}{\varepsilon_0} \sin \phi_\sigma(\omega), \end{aligned} \quad (3.22)$$

koji predstavljaju konzervativni i disipativni deo kompleksnog Jangovog modula.

Termodinamička konzistentnost postiže se zahtevanjem nenegativnosti konzervativnog i disipativnog dela kompleksnog Jangovog modula za sve ugaone frekvencije, tj.

$$\hat{E}'(\omega) \geq 0 \quad \text{i} \quad \hat{E}''(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \geq 0,$$

čime se obezbeđuju disipativna svojstva materijala. Naime, snaga po jedinici zapremine u kvazistacionarnom režimu je oblika

$$P(t) = \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t) = \sigma_0(\omega) \varepsilon_0 \omega \sin(\omega t + \phi_\sigma(\omega)) \cos(\omega t),$$

budući da je deformacija prepostavljena kao harmonijska funkcija, odnosno  $\varepsilon(t) = \text{Im} \underline{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ , dok je napon posle dovoljno dugog vremena takođe harmonijska funkcija defazovana za ugao  $\phi_\sigma$ , odnosno  $\sigma(t) = \text{Im} \underline{\sigma}(t) = \sigma_0(\omega) \sin(\omega t + \phi_\sigma(\omega))$ , videti (3.21), te se za mehanički rad po jedinici zapremine izvršen tokom jednog perioda  $T$ , posle proizvoljnog trenutka  $\tau$ , dobija

$$\begin{aligned} A &= \int_{\tau}^{\tau+T} P(t) dt = \frac{1}{2} \sigma_0(\omega) \varepsilon_0 \omega \int_{\tau}^{\tau+T} (\sin(\phi_\sigma(\omega)) + \sin(2\omega t + \phi_\sigma(\omega))) dt \\ A &= \pi \sigma_0(\omega) \varepsilon_0 \sin(\phi_\sigma(\omega)) = \pi \varepsilon_0^2 \hat{E}''(\omega), \end{aligned}$$

videti (3.22)<sub>2</sub>, te zahtev za njegovu nenegativnost implicira zahtev da je disipativni deo kompleksnog Jangovog modula nenegativan za sve frekvencije, odnosno  $\hat{E}''(\omega) \geq 0$  za svako  $\omega \geq 0$ , dok se zahtev za nenegativnost konzervativnog dela kompleksnog Jangovog modula prirodno nameće, odnosno  $\hat{E}'(\omega) \geq 0$  za svako  $\omega \geq 0$ .

Pristup nametanja termodinamičkih ograničenja preko nenegativnosti konzervativnog i disipativnog modula dat je u [63], dok se više o termodinamičkoj analizi memorijskih materijala može pronaći u [64]. Koristeći pomenuti metod, u [28] je pokazano da postoje četiri termodinamički konzistentne linearne konstitutivne jednačine viskoelastičnog tela koje sadrže frakcione izvode reda do jedan, date sa (2.19) - (2.22), videti takođe dodatak A.1, u [9] je pokazano da postoji osam termodinamički konzistentnih fracionih Burgersovih modela navedenih u dodatku A.2, a grupisanih u dve klase, videti (2.29), dok su u [1], korišćenjem pomenutog metoda, formulisani termodinamički konzistentni frakcioni Cenerovi i anti-Cenerovi modeli, dati u tabeli 2.1 kao i u dodatku A.3, videti takođe poglavlje 2.2 za sve navedene linearne frakcione modele.

Restrikcije na parametre modela u frakcionaloj Burgersovoj jednačini, dobijenoj zamenom običnih izvoda frakcionim izvodima, su izvedene u [65], takođe prateći pristup iz [63]. Termodinamičke restrikcije se takođe mogu dobiti preko disipativnih nejednakosti u vremenskom domenu, videti na primer [66, 67]. Sa druge strane, disipativne karakteristike frakcionalih talasnih jednačina koristeći apriorne energetske ocene proučene su u [29].

Koriste se sledeća pravila u analizi termodinamičke konzistentnosti modela, kako bi se obezbedila nenegativnost konzervativnog i disipativnog dela kompleksnog Jangovog modula, pri čemu je prepostavljeno da  $\theta, \varphi, \vartheta, \phi \in (0, 1)$ .

**Pravilo 1** Ako član u konzervativnom i/ili disipativnom delu kompleksnog Jangovog modula sadrži  $\sin \frac{(\theta-\varphi)\pi}{2}$ , tada se njegova nenegativnost postiže zahtevanjem da je  $\theta \geq \varphi$ .

**Pravilo 2** Ako član u konzervativnom i/ili disipativnom delu kompleksnog Jangovog modula sadrži  $\cos \frac{(\theta+\varphi)\pi}{2}$ , tada se njegova nenegativnost postiže ili zahtevanjem da je  $\theta + \varphi \leq 1$  (budući da je tada  $0 \leq \frac{(\theta+\varphi)\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ ), ili se član kombinuje sa nenegativnim članom i zahteva se nenegativnost zbiru kombinovanih članova.

**Pravilo 3** Ako član u konzervativnom i/ili disipativnom delu kompleksnog Jangovog modula sadrži bilo koji od sledećih članova:  $-\cos \frac{(\theta-\varphi)\pi}{2} \leq 0$ , ili  $-\cos \frac{(\theta+\varphi)\pi}{2} \leq 0$ , ili  $-\sin \frac{(\theta+\varphi)\pi}{2} \leq 0$ , sa  $0 \leq \frac{(\theta-\varphi)\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ , ili  $0 \leq \frac{(\theta+\varphi)\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ , ili  $0 \leq \frac{(\theta+\varphi)\pi}{2} \leq \pi$ , respektivno, tada se član kombinuje sa nenegativnim članom i zahteva se nenegativnost zbiru kombinovanih članova. Treba napomenuti da su članovi koji sadrže  $\cos \frac{(\theta-\varphi)\pi}{2}$ , ili  $\cos \frac{(\theta+\varphi)\pi}{2}$ , ili  $\sin \frac{(\theta+\varphi)\pi}{2}$  nenegativni.

Pravilo 4 Da bi se kombinovao nepozitivni sa nenegativnim čalnovima u konzervativnom i ili disipativnom delu kompleksnog Jangovog modula, eksponenti frekvencija koji pripadaju istom intervalu se izjednačavaju, na primer:  $\theta - \varphi = \vartheta - \phi \in (-1, 1)$  ili  $\theta + \varphi = \vartheta + \phi \in (0, 2)$ .

### 3.2.1 Modeli asimetričnog tipa

Nisu svi asimetrični modeli, šematski predstavljeni u tabeli 3.1, termodinamički konzistentni. Naime, ne mogu se nametnuti termodinamičke restrikcije na parametre modela predstavljenih u zasenčenim poljima u tabeli 3.2, koje bi obezbedile termodinamičku konzistentnost, stoga su ti modeli termodinamički nekonzistentni i njihova analiza se izostavlja, dok su ostali modeli u tabeli 3.2 termodinamički konzistentni uz nametnute odgovarajuće restrikcije na parametre modela.

IDD.ID	IDD <sup>+</sup> .ID	—	—
IDD.DD	IDD <sup>+</sup> .DD	IDD.DD <sup>+</sup>	IDD <sup>+</sup> .DD <sup>+</sup>
ID.DDD	—	ID.DDD <sup>+</sup>	—
ID.IDD	—	ID.IDD <sup>+</sup>	—
ID.IID	—	ID.I <sup>+</sup> ID	—
ID.III	—	ID.I <sup>+</sup> II	—
IID.II	I <sup>+</sup> ID.II	IID.I <sup>+</sup> I	I <sup>+</sup> ID.I <sup>+</sup> I
IID.ID	I <sup>+</sup> ID.ID	—	—

Tabela 3.2: Pregled termodinamičke konzistentnosti asimetričnih modela.

#### 3.2.1.1 Frakcioni anti-Cenerovi modeli

Ispituje se termodinamička konzistentnost modela koji potiču od modela IDD.DD, a koji odgovara anti-Cenerovom modelu prvog tipa (3.13), kao i termodinamička konzistentnost modela koji potiču od modela ID.DDD, a koji odgovara anti-Cenerovom modelu drugog tipa (3.14), videti takođe tabelu 3.1, dok su modeli koji potiču od modela IID.ID, koji odgovara anti-Cenerovom modelu prvog tipa (3.13), termodinamički nekonzistentni i njihova analiza se izostavlja.

**Model IDD.DD** Jedan od modela koji potiče od anti-Cenerovog modela prvog tipa (3.13), videti takođe tabelu 3.1, je model IDD.DD dat konstitutivnom jednačinom

$$(a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0 D_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^\nu) \varepsilon(t), \quad \text{sa } \beta < \gamma, \mu < \nu, \quad (3.23)$$

a njegov kompleksni moduo se dobija izraz

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{b_1(i\omega)^\mu + b_2(i\omega)^\nu}{\frac{a_1}{(i\omega)^\alpha} + a_2(i\omega)^\beta + a_3(i\omega)^\gamma}$$

primenom Furijeove transformacije na (3.23), dajući za konzervativni i disipativni deo kompleksnog modula

$$E'(\omega) = a_1 b_1 \omega^{-\alpha+\mu} \cos \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2} + a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\beta+\mu} \cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} + a_3 b_1 \omega^{\gamma+\mu} \cos \frac{(\mu-\gamma)\pi}{2} + a_3 b_2 \omega^{\gamma+\nu} \cos \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2}, \quad (3.24)$$

$$E''(\omega) = a_1 b_1 \omega^{-\alpha+\mu} \sin \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2} + a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\beta+\mu} \sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} + a_3 b_1 \omega^{\gamma+\mu} \sin \frac{(\mu-\gamma)\pi}{2} + a_3 b_2 \omega^{\gamma+\nu} \sin \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2}, \quad (3.25)$$

pri čemu su  $E'$  i  $E''$  preko kompleksnog modula  $\hat{E}$  dati sa

$$E'(\omega) = \left| \frac{a_1}{(i\omega)^\alpha} + a_2(i\omega)^\beta + a_3(i\omega)^\gamma \right|^2 \hat{E}'(\omega) \quad \text{i} \quad E''(\omega) = \left| \frac{a_1}{(i\omega)^\alpha} + a_2(i\omega)^\beta + a_3(i\omega)^\gamma \right|^2 \hat{E}''(\omega). \quad (3.26)$$

Kombinovanjem prva dva potencijalno nepozitivna člana u konzervativnom modulu (3.24) prema Pravilima 2 i 4 i izjednačavanjem odgovarajućih eksponenata frekvencije  $-\alpha + \mu = -\alpha + \nu$ , dobija se da je  $\mu = \nu$ , što je u suprotnosti sa pretpostavkom da desna strana modela (3.23) sadrži dva operatora frakcionog izvoda različitog reda, stoga je neophodno nametnuti da je  $\alpha + \mu \leq 1$  i  $\alpha + \nu \leq 1$ , prema Pravilu 2. Primenom Pravila 1 na poslednja četiri člana u disipativnom modulu (3.25), dobija se  $\beta \leq \mu$ ,  $\beta \leq \nu$ ,  $\gamma \leq \mu$  i  $\gamma \leq \nu$ , čime se obezbeđuje nenegativnost disipativnog modula (3.25). Stoga su termodynamičke restrikcije na parametre modela u konstitutivnoj jendačini (3.23) date sa

$$\beta < \gamma \leq \mu < \nu \leq 1 - \alpha.$$

Primenom frakcionog izvoda reda  $\alpha$  na model IDD.DD, dat sa (3.23), dobija se konstitutivna jednačina

$$(a_1 + a_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta} + a_2 {}_0D_t^{\alpha+\gamma}) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^{\alpha+\mu} + b_2 {}_0D_t^{\alpha+\nu}) \varepsilon(t), \quad (3.27)$$

koja, prema prethodnoj termodynamičkoj restrikciji, sadrži redove frakcionalih Riman-Liuvilovih izvoda u intervalu  $(0, 1)$ , te pripada grupi modela Case IV, videti dodatak A.1. Konstitutivna jednačina (3.27) se dobija korišćenjem osobina frakcionog izvoda i integrala

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\zeta {}_0I_t^\xi f(t) &= \begin{cases} {}_0D_t^{\zeta-\xi} f(t), & \text{za } \zeta > \xi, \\ {}_0I_t^{\xi-\zeta} f(t), & \text{za } \zeta < \xi, \end{cases} \quad i \\ {}_0D_t^\zeta {}_0D_t^\xi f(t) &= {}_0D_t^{\zeta+\xi} f(t) - D^2 {}_0I_t^{1-\zeta} [{}_0I_t^{1-\xi} f(t)]_{t=0} = {}_0D_t^{\zeta+\xi} f(t), \end{aligned} \quad (3.28)$$

koja važe za funkciju  $f$  ograničenu u nuli.

**Model IDD.DD<sup>+</sup>** Model IDD.DD<sup>+</sup> se dobija iz modela IDD.DD i odgovara slučaju kada je red jednog od frakcionalih izvoda koji deluje na deformaciju u intervalu  $(1, 2)$ , tj. dobija se zamenom  $\nu$  sa  $1 + \nu$  u (3.23), te je odgovarajuća konstitutivna jednačina

$$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{1+\nu}) \varepsilon(t), \quad \text{sa } \beta < \gamma, \quad (3.29)$$

a za kompleksni moduo se dobija

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{b_1(i\omega)^\mu + b_2(i\omega)^{1+\nu}}{\frac{a_1}{(i\omega)^\alpha} + a_2(i\omega)^\beta + a_3(i\omega)^\gamma}$$

primenom Furijeove transformacije na (3.29), dajući za konzervativni i disipativni deo kompleksnog modula

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha+\mu} \cos \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2} + \left[ -a_1 b_2 \omega^{1-\alpha+\nu} \sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\beta+\mu} \cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} \right] \\ &\quad + a_2 b_2 \omega^{1+\beta+\nu} \sin \frac{(\beta-\nu)\pi}{2} + a_3 b_1 \omega^{\gamma+\mu} \cos \frac{(\mu-\gamma)\pi}{2} + a_3 b_2 \omega^{1+\gamma+\nu} \sin \frac{(\gamma-\nu)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} E''(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha+\mu} \sin \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2} + \left[ a_1 b_2 \omega^{1-\alpha+\nu} \cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\beta+\mu} \sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} \right] \\ &\quad + a_2 b_2 \omega^{1+\beta+\nu} \cos \frac{(\beta-\nu)\pi}{2} + a_3 b_1 \omega^{\gamma+\mu} \sin \frac{(\mu-\gamma)\pi}{2} + a_3 b_2 \omega^{1+\gamma+\nu} \cos \frac{(\gamma-\nu)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

pri čemu su  $E'$  i  $E''$  preko kompleksnog modula  $\hat{E}$  dati sa (3.26).

Eksponenti frekvencije članova u zagradi u konzervativnom modulu (3.30) su u istom intervalu  $(0, 2)$  i izjednačeni su prema Pravilu 4 dajući  $1 - \alpha + \nu = \beta + \mu$ , tj.  $1 + \nu = \alpha + \beta + \mu \in (1, 2)$ , što je zahtev (3.32)<sub>1</sub>. Pomenuti članovi su kombinovani prema Pravilu 3, budući da prvi od njih ima nepozitivnu vrednost, a drugi ima nenegativnu vrednost. Treba zapaziti da peti član u (3.30) nije uključen u zbir u zagradi, jer bi se prema Pravilu 4 dobilo da je  $1 - \alpha + \nu = \beta + \mu = \gamma + \mu$  implicirajući  $\beta = \gamma$ , što je u suprotnosti sa pretpostavkom da leva strana modela (3.29) sadrži dva operatora frakcionog izvoda različitog reda. Sa druge strane, zamena trećeg člana sa petim ne stvara značajnu razliku u analizi. Primenom Pravila 1 na četvrti i šesti član u konzervativnom modulu (3.30), redom se dobijaju uslovi  $\nu \leq \beta$  i  $\nu \leq \gamma$ , tj. uslov  $\nu \leq \beta < \gamma$ , koji se svodi na  $\alpha + \mu \leq 1$ , budući da je  $1 + \nu = \alpha + \beta + \mu$ , implicirajući nenegativnost prvog člana u (3.30). Sa druge strane, primenom Pravila 1 na treći i peti član u disipativnom modulu (3.31), redom se dobija  $\beta \leq \mu$  i  $\gamma \leq \mu$ , tj.  $\beta < \gamma \leq \mu$ , što, kombinovano sa  $\alpha + \mu \leq 1$ , daje termodynamičku restrikciju (3.32)<sub>2</sub>. Zbir u zagradi u (3.31) ima nenegativnu vrednost i stoga ne predstavlja termodynamičku restrikciju, budući da je  $\alpha + \nu \leq \alpha + \mu \leq 1$ , zbog  $\nu \leq \beta < \gamma \leq \mu$ , suprotno od zbiru u zagradi u (3.30), koji predstavlja termodynamičku restrikciju (3.33).

Dakle, termodinamički konzistentan model  $\text{IDD}.\text{DD}^+$  se dobija iz (3.29) kao

$$\left( a_1 {}_0\text{I}_t^\alpha + a_2 {}_0\text{D}_t^\beta + a_3 {}_0\text{D}_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0\text{D}_t^\mu + b_2 {}_0\text{D}_t^{\alpha+\beta+\mu} \right) \varepsilon(t),$$

tj. kao

$$\left( a_1 {}_0\text{I}_t^\alpha + a_2 {}_0\text{D}_t^\beta + a_3 {}_0\text{D}_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 + b_2 {}_0\text{D}_t^{\alpha+\beta} \right) {}_0\text{D}_t^\mu \varepsilon(t),$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$1 \leq \alpha + \beta + \mu \leq 2, \quad \beta < \gamma \leq \mu \leq 1 - \alpha, \quad (3.32)$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2}. \quad (3.33)$$

Treba naglasiti da je u restrikciji (3.33) iskorišćena transformacija  $\sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} = -\cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} = \left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|$ , zbog činjenice da je  $\nu = \alpha + \beta + \mu - 1$  i  $2\alpha + \beta + \mu \in (1, 3)$ , prema zahtevu (3.32)<sub>1</sub>.

**Model  $\text{IDD}^+.\text{DD}^+$**  Dozvoljavajući da red jednog od frakcionalih izvoda koji deluju na napon, kao i red jednog od frakcionalih izvoda koji deluju na deformaciju bude veći od jedan, dok su redovi ostalih frakcionalih izvoda manji od jedan, tj. zamenom  $\gamma$  sa  $1 + \gamma$  i  $\nu$  sa  $1 + \nu$  u modelu  $\text{IDD}.\text{DD}$ , datim sa (3.23), dobija se konstitutivna jednačina

$$\left( a_1 {}_0\text{I}_t^\alpha + a_2 {}_0\text{D}_t^\beta + a_3 {}_0\text{D}_t^{1+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0\text{D}_t^\mu + b_2 {}_0\text{D}_t^{1+\nu} \right) \varepsilon(t), \quad (3.34)$$

koja odgovara modelu  $\text{IDD}^+.\text{DD}^+$ , a za kompleksni moduo se dobija

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{b_1 (\text{i}\omega)^\mu + b_2 (\text{i}\omega)^{1+\nu}}{\frac{a_1}{(\text{i}\omega)^\alpha} + a_2 (\text{i}\omega)^\beta + a_3 (\text{i}\omega)^{1+\gamma}}$$

nakon primene Furijeove transformacije na (3.34), dajući za konzervativni i disipativni moduo

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha+\mu} \cos \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2} + \left[ -a_1 b_2 \omega^{1-\alpha+\nu} \sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\beta+\mu} \cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} \right] \\ &\quad + \left[ a_2 b_2 \omega^{1+\beta+\nu} \sin \frac{(\beta-\nu)\pi}{2} + a_3 b_1 \omega^{1+\gamma+\mu} \sin \frac{(\mu-\gamma)\pi}{2} \right] + a_3 b_2 \omega^{2+\gamma+\nu} \cos \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} E''(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha+\mu} \sin \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2} + \left[ a_1 b_2 \omega^{1-\alpha+\nu} \cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\beta+\mu} \sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} \right] \\ &\quad + \left[ a_2 b_2 \omega^{1+\beta+\nu} \cos \frac{(\beta-\nu)\pi}{2} - a_3 b_1 \omega^{1+\gamma+\mu} \cos \frac{(\mu-\gamma)\pi}{2} \right] + a_3 b_2 \omega^{2+\gamma+\nu} \sin \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

pri čemu su  $E'$  i  $E''$  preko kompleksnog modula  $\hat{E}$  dati sa

$$E'(\omega) = \left| \frac{a_1}{(\text{i}\omega)^\alpha} + a_2 (\text{i}\omega)^\beta + a_3 (\text{i}\omega)^{1+\gamma} \right|^2 \hat{E}'(\omega) \quad \text{i} \quad E''(\omega) = \left| \frac{a_1}{(\text{i}\omega)^\alpha} + a_2 (\text{i}\omega)^\beta + a_3 (\text{i}\omega)^{1+\gamma} \right|^2 \hat{E}''(\omega). \quad (3.37)$$

Članovi u prvoj zagradi u konzervativnom modulu (3.35), za koje se pokazuje da čine levu stranu termodinamičke restrikcije (3.39), kao i članovi u prvoj zagradi u disipativnom modulu (3.36), su kombinovani prema Pravilima 3 i 4 u slučaju prvih članova i prema Pravilima 2 i 4 u slučaju drugih članova, tako da se izjednačavanjem odgovarajućih eksponenata frekvencija dobija  $1 - \alpha + \nu = \beta + \mu \in (0, 2)$ , što daje  $1 + \nu = \alpha + \beta + \mu \in (1, 2)$ , i predstavlja restrikciju (3.38)<sub>2</sub>. Sa druge strane, zbir članova u drugoj zagradi u (3.36), koji predstavlja desnu stranu termodinamičke restrikcije (3.39), je posledica primene Pravila 3 i 4, budući da se izjednačavanjem odgovarajućih eksponenata frekvencija dobija  $1 + \beta + \nu = 1 + \gamma + \mu \in (1, 3)$ , što se, korisćenjem  $1 + \nu = \alpha + \beta + \mu$ , transformiše u  $1 + \gamma = \alpha + 2\beta \in (1, 2)$  i predstavlja restrikciju (3.38)<sub>1</sub>. Primenom Pravila 1 u trećem i poslednjem članu u (3.36), redom se dobija  $\beta \leq \mu$  i  $\gamma \leq \nu$ , što se redukuje na  $\beta \leq \mu$ , zbog  $1 + \nu = \alpha + \beta + \mu$  i  $1 + \gamma = \alpha + 2\beta$ . Slično, Pravilo 1 primenjeno na četvrti i peti član u (3.35), redom daje  $\nu \leq \beta$  i  $\gamma \leq \mu$ , što se redukuje na  $\alpha + \mu \leq 1$  i  $\alpha + \beta - (\mu - \beta) \leq 1$ . Treba primetiti da uslovi  $\beta \leq \mu$  i  $\alpha + \mu \leq 1$  daju  $\beta \leq \mu \leq 1 - \alpha$ , što predstavlja termodinamičku restrikciju (3.38)<sub>3</sub>, dok  $\alpha + \beta - (\mu - \beta) \leq 1$  ne predstavlja novi uslov, budući da  $\beta \leq \mu \leq 1 - \alpha$  implicira da je  $\alpha + \beta \leq 1$ . Zbir u prvoj zagradi u (3.36) ne predstavlja termodinamičku restrikciju, jer prema  $\nu \leq \beta$ ,  $\beta \leq \mu$  i  $\alpha + \mu \leq 1$  važi  $\nu \leq \beta \leq \mu \leq 1 - \alpha$ , tj.  $\alpha + \nu \leq 1$ , te je drugi član u (3.36) nenegativan. Dakle, samo zbir u prvoj zagradi u (3.35), kao i zbir u drugoj zagradi u (3.36) impliciraju termodinamičke restrikcije (3.39).

Termodinamički konzistentan model  $\text{IDD}^+.\text{DD}^+$  se dobija iz (3.34) kao

$$\left( a_1 {}_0\text{I}_t^\alpha + a_2 {}_0\text{D}_t^\beta + a_3 {}_0\text{D}_t^{\alpha+2\beta} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0\text{D}_t^\mu + b_2 {}_0\text{D}_t^{\alpha+\beta+\mu} \right) \varepsilon(t),$$

tj. kao

$$\left( a_1 {}_0\text{I}_t^\alpha + a_2 {}_0\text{D}_t^\beta + a_3 {}_0\text{D}_t^{\alpha+2\beta} \right) \sigma(t) = \left( b_1 + b_2 {}_0\text{D}_t^{\alpha+\beta} \right) {}_0\text{D}_t^\mu \varepsilon(t),$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$1 \leq \alpha + 2\beta \leq 2, \quad 1 \leq \alpha + \beta + \mu \leq 2, \quad \beta \leq \mu \leq 1 - \alpha, \quad (3.38)$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\mu)\pi}{2}}. \quad (3.39)$$

Treba naglasiti da je u restrikciji (3.39) iskorišćena transformacija  $\sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} = -\cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} = \left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|$ , zbog činjenice da je  $\nu = \alpha + \beta + \mu - 1$  i  $2\alpha + \beta + \mu \in (1, 3)$  prema zahtevu (3.38)<sub>2</sub>, dok je  $\alpha + 2\beta - \mu = \alpha + \beta - (\mu - \beta) \in (0, 1)$ , prema zahtevima (3.38)<sub>1,3</sub>, što obezbeđuje da je  $\sin \frac{(\alpha+2\beta-\mu)\pi}{2}$  nenegativan.

**Model ID.DDD** Model ID.DDD, dat konstitutivnom jednačinom

$$\left( a_1 {}_0\text{I}_t^\alpha + a_2 {}_0\text{D}_t^\beta \right) \sigma(t) = (b_1 {}_0\text{D}_t^\mu + b_2 {}_0\text{D}_t^\nu + b_3 {}_0\text{D}_t^\eta) \varepsilon(t), \quad \text{sa } \mu < \nu < \eta, \quad (3.40)$$

je jedan od modela koji potiču od frakcionog anti-Cenerovog modela drugog tipa (3.14), videti takođe tabelu 3.1. Furijeova transformacija primenjena na konstitutivnu jednačinu (3.40) daje kompleksni moduo

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{b_1 (\text{i}\omega)^\mu + b_2 (\text{i}\omega)^\nu + b_3 (\text{i}\omega)^\eta}{\left( \frac{a_1}{(\text{i}\omega)^\alpha} + a_2 (\text{i}\omega)^\beta \right)},$$

te se za konzervativni i disipativni deo kompleksnog modula dobijaju izrazi

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha+\mu} \cos \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2} + a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} \\ &\quad + a_1 b_3 \omega^{-\alpha+\eta} \cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\beta+\mu} \cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} \\ &\quad + a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} + a_2 b_3 \omega^{\beta+\eta} \cos \frac{(\eta-\beta)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} E''(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha+\mu} \sin \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2} + a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} \\ &\quad + a_1 b_3 \omega^{-\alpha+\eta} \sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\beta+\mu} \sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} \\ &\quad + a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} + a_2 b_3 \omega^{\beta+\eta} \sin \frac{(\eta-\beta)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

nakon razdvajanja realnog i imaginarnog dela, pri čemu su  $E'$  i  $E''$  dati izrazima

$$E'(\omega) = \left| \frac{a_1}{(\text{i}\omega)^\alpha} + a_2 (\text{i}\omega)^\beta \right|^2 \hat{E}'(\omega) \quad \text{i} \quad E''(\omega) = \left| \frac{a_1}{(\text{i}\omega)^\alpha} + a_2 (\text{i}\omega)^\beta \right|^2 \hat{E}''(\omega). \quad (3.43)$$

Prema Pravilima 2 i 4, kombinovanjem prva tri potencijalno nepozitivna člana u konzervativnom modulu (3.41) i izjednačavanjem odgovarajućih eksponenata frekvencija  $-\alpha+\mu = -\alpha+\nu = -\alpha+\eta$  dobija se  $\mu = \nu = \eta$ , što je u suprotnosti sa pretpostavkom da model ID.DDD na desnoj strani sadrži tri operatora frakcionog izvoda sa različitim redovima, videti (3.40). Da bi se zadržala forma modela ID.DDD, prema Pravilu 2, potrebno je zahtevati da je  $\alpha + \mu \leq 1$ ,  $\alpha + \nu \leq 1$  i  $\alpha + \eta \leq 1$ . Sa druge strane, nenegativnost disipativnog modula (3.42) postiže se primenom Pravila 1 na poslednja tri člana u (3.42), što redom daje  $\beta \leq \mu$ ,  $\beta \leq \nu$  i  $\beta \leq \eta$ . Stoga su termodinamičke restrikcije na parametre modela u konstitutivnoj jednačini (3.40)

$$\beta \leq \mu < \nu < \eta \leq 1 - \alpha.$$

Međutim, model ID.DDD ne predstavlja novi model, budući da se primenom frakcionog izvoda reda  $\alpha$  na (3.40) dobija model

$$\left( a_1 + a_2 {}_0\text{D}_t^{\alpha+\beta} \right) \sigma(t) = (b_1 {}_0\text{D}_t^{\alpha+\mu} + b_2 {}_0\text{D}_t^{\alpha+\nu} + b_3 {}_0\text{D}_t^{\alpha+\eta}) \varepsilon(t),$$

koji pripada klasi modela Case IV, videti dodatak A.1, pri čemu je iskorišćeno svojstvo (3.28) frakcionog integrala i izvoda.

**Model ID.DDD<sup>+</sup>** Za razliku od konstitutivne jednačine (3.40), koja odgovara modelu ID.DDD, koji sadrži tri frakciona izvoda koja deluju na deformaciju i čiji su redovi u intervalu (0, 1), pretpostavlja se da je u slučaju modela ID.DDD<sup>+</sup> red jednog frakcionog izvoda veći od jedan, tako da je konstitutivna jednačina data sa

$$\left(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta\right) \sigma(t) = \left(b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^\nu + b_3 {}_0D_t^{1+\eta}\right) \varepsilon(t) \quad \text{sa } \mu < \nu, \quad (3.44)$$

a izrazi za konzervativni i disipativni moduo

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha+\mu} \cos \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2} + a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} \\ &\quad + \left[ -a_1 b_3 \omega^{1-\alpha+\eta} \sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} \right] \\ &\quad + a_2 b_1 \omega^{\beta+\mu} \cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} + a_2 b_3 \omega^{1+\beta+\eta} \sin \frac{(\beta-\eta)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} E''(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha+\mu} \sin \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2} + a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} \\ &\quad + \left[ a_1 b_3 \omega^{1-\alpha+\eta} \cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} \right] \\ &\quad + a_2 b_1 \omega^{\beta+\mu} \sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} + a_2 b_3 \omega^{1+\beta+\eta} \cos \frac{(\beta-\eta)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

se dobijaju iz kompleksnog modula

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{b_1(i\omega)^\mu + b_2(i\omega)^\nu + b_3(i\omega)^{1+\eta}}{\frac{a_1}{(i\omega)^\alpha} + a_2(i\omega)^\beta},$$

pri čemu su  $E'$  i  $E''$  dati sa (3.43) preko kompleksnog modula  $\hat{E}$ .

Treći član u konzervativnom modulu (3.45), koji je nepozitivan i čiji je eksponent frekvencije  $1 - \alpha + \eta \in (0, 2)$ , može se kombinovati prema Pravilima 3 i 4 sa četvrtim i petim nenegativnim članom, čiji su eksponenti frekvencija redom  $\beta + \nu \in (0, 2)$  i  $\beta + \mu \in (0, 2)$ . Međutim, kombinuje se samo sa jednim članom, jer se u suprotnom, izjednačavanjem  $1 - \alpha + \eta = \beta + \nu = \beta + \mu$ , dobija  $\mu = \nu$ , što je u suprotnosti sa pretpostavkom da desna strana modela ID.DDD<sup>+</sup> sadrži dva operatora frakcionog izvoda sa različitim redovima, a u intervalu (0, 1), videti (3.44). Kako je irelevantno da li treći član u (3.45) treba kombinovati sa četvrtim ili petim članom, kombinovani su treći i četvrti član dajući termodinamičku restrikciju (3.48), jer se, prema Pravilu 4, izjednačavanjem eksponenata frekvencije dobija  $1 - \alpha + \eta = \beta + \nu$ , tj.  $1 + \eta = \alpha + \beta + \nu \in (1, 2)$ , što predstavlja zahtev (3.47)<sub>1</sub>. Primenom Pravila 1 na poslednji član u konzervativnom modulu (3.45), kao i na četvrti i peti član u disipativnom modulu (3.46), redom se dobija  $\eta \leq \beta$ ,  $\beta \leq \mu$  i  $\beta \leq \nu$ , tako da je  $\eta \leq \beta \leq \mu < \nu$ . Uslov  $\alpha + \nu \leq 1$  sledi iz  $1 + \eta = \alpha + \beta + \nu$  i  $\eta \leq \beta$  i uz  $\beta \leq \mu < \nu$  implicira termodinamičku restrikciju (3.47)<sub>2</sub>, dok uz  $\eta \leq \beta \leq \mu < \nu$  implicira uslov  $\alpha + \eta \leq \alpha + \mu < \alpha + \nu \leq 1$  koji obezbeđuje nenegativnu vrednost prvog i drugog člana u (3.45), kao i zbiru u zagradi u (3.46).

Termodinamički konzistentan model ID.DDD<sup>+</sup>, dat sa (3.44), postaje

$$\left(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta\right) \sigma(t) = \left(b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^\nu + b_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta+\nu}\right) \varepsilon(t),$$

i podleže termodinamičkim restrikcijama

$$1 \leq \alpha + \beta + \nu \leq 2, \quad \beta \leq \mu < \nu \leq 1 - \alpha, \quad (3.47)$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{b_2}{b_3}. \quad (3.48)$$

Treba naglasiti da je u restrikciji (3.48) iskorišćena transformacija  $\sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} = -\cos \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2} = \left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2} \right|$ , zbog činjenice da je  $\eta = \alpha + \beta + \nu - 1$  i  $2\alpha + \beta + \nu \in (1, 3)$ , prema zahtevu (3.47)<sub>1</sub>.

### 3.2.1.2 Frakcioni anti-Cenerovi/Cenerovi modeli

Ispituje se termodinamička konzistentnost modela koji potiču od modela ID.IDD, koji odgovara i frakcionom anti-Cenerovom modelu drugog tipa (3.14) i frakcionom Cenerovom modelu prvog tipa (3.11), videti takođe tabelu 3.1, dok su modeli koji potiču od modela ID.IID termodinamički nekonzistentni i stoga se njihova analiza izostavlja.

**Model ID.IDD** Konstitutivni model ID.IDD, dat izrazom

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta \right) \sigma(t) = (b_1 {}_0 I_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^\nu + b_3 {}_0 D_t^\eta) \varepsilon(t), \quad \text{sa } \nu < \eta, \quad (3.49)$$

potiče i od frakcionog anti-Cenerovog modela drugog tipa (3.14) i od frakcionog Cenerovog modela prvog tipa (3.11), videti takođe tabelu 3.1. Kompleksni moduo

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{\frac{b_1}{(i\omega)^\mu} + b_2 (i\omega)^\nu + b_3 (i\omega)^\eta}{\frac{a_1}{(i\omega)^\alpha} + a_2 (i\omega)^\beta}$$

se dobija primenom Fourijeove transformacije na jednačinu (3.49) i redukuje se na konzervativni i disipativni moduo

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \cos \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} \\ &\quad + \left[ a_1 b_3 \omega^{-\alpha+\eta} \cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\beta-\mu} \cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2} \right] \\ &\quad + a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} + a_2 b_3 \omega^{\beta+\eta} \cos \frac{(\eta-\beta)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} E''(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \sin \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} \\ &\quad + \left[ a_1 b_3 \omega^{-\alpha+\eta} \sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} - a_2 b_1 \omega^{\beta-\mu} \sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2} \right] \\ &\quad + a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} + a_2 b_3 \omega^{\beta+\eta} \sin \frac{(\eta-\beta)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

nakon razdvajanja realnog i imaginarnog dela, pri čemu su  $E'$  i  $E''$  dati sa (3.43) preko kompleksnog Jangovog modula  $\hat{E}$ .

Zahtevi  $\mu \leq \alpha$ ,  $\beta \leq \nu$  i  $\beta \leq \eta$ , tj.  $\mu \leq \alpha$  i  $\beta \leq \nu < \eta$ , se dobijaju primenom Pravila 1 na prvi član i na poslednja dva člana u disipativnom modulu (3.51), dajući  $\beta+\mu \leq \alpha+\beta \leq \alpha+\nu < \alpha+\eta$ . Iako bi se drugi, treći i četvrti član u konzervativnom i disipativnom modulu (3.50) i (3.51) mogli kombinovati prema Pravilu 4, budući da su im eksponenti frekvencije  $-\alpha+\nu$ ,  $-\alpha+\eta$  i  $\beta-\mu$  u istom intervalu, eksponenti se ipak ne izjednačavaju, jer bi  $-\alpha+\nu = -\alpha+\eta = \beta-\mu$  dalo  $\eta = \nu$ , što je u suprotnosti sa pretpostavkom da desna strana modela ID.IDD sadrži dva operatora frakcionog izvoda različitog reda, videti (3.49). Prema Pravilu 4, umesto pretpostavke da je  $\beta-\mu = \nu-\alpha$ , pretpostavlja se da važi jednakost  $\beta-\mu = \eta-\alpha$ , što, budući da važi  $\beta+\mu \leq \alpha+\beta \leq \alpha+\nu < \alpha+\eta$  i zahtevanjem da je  $\alpha+\nu \leq 1$ , ili preciznije  $\beta+\mu \leq \alpha+\nu \leq 1$ , obezbeđuje nenegativnost drugog i četvrtog člana u (3.50), dok treći član ima ili pozitivnu ili negativnu vrednost. Prema Pravilu 2, zbir u zagradi u (3.50) predstavlja desnu stranu termodinamičke restrikcije (3.54). Leva strana termodinamičke restrikcije (3.54) potiče iz primene Pravila 3 i 4 na zbir u zagradi u (3.51). Takođe, jednakost  $\beta-\mu = \eta-\alpha$  daje  $\eta = \alpha+\beta-\mu \in (0, 1)$ , što zajedno sa  $\beta \leq \nu < \eta$  daje uslov (3.53)<sub>1</sub>, dok  $\mu \leq \alpha$  zajedno sa  $\alpha+\nu \leq 1$  daje uslov (3.53)<sub>2</sub>.

Termodinamički konzistentan model ID.IDD se dobija iz (3.49) u obliku

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^\nu + b_3 {}_0 D_t^{\alpha+\beta-\mu} \right) \varepsilon(t), \quad (3.52)$$

uvrštavanjem  $\eta = \alpha+\beta-\mu$  za najviši red frakcionog izvoda, a termodinamičke restrikcije kojima podleže su date sa

$$0 \leq \beta \leq \nu < \alpha+\beta-\mu \leq 1, \quad \mu \leq \alpha \leq 1-\nu, \quad (3.53)$$

$$-\frac{a_1}{a_2} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_3} \leq \frac{a_1}{a_2} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}}. \quad (3.54)$$

Treba napomenuti da uslov  $\alpha+\beta-\mu \leq 1$ , koji se pojavljuje u (3.53), zapravo sledi iz  $\alpha \leq 1-\nu$  i  $\beta \leq \nu$ , budući da je  $\alpha+\beta-\mu \leq 1-\mu-(\nu-\beta) \leq 1$ . Takođe, prva nejednakost u (3.54) je ili trivijalno zadovoljena ako je  $2\alpha+\beta-\mu = \alpha+(\alpha+\beta-\mu) \leq 1$ , ili predstavlja restrikciju ako je  $2\alpha+\beta-\mu > 1$ , dok  $\beta+\mu \leq 1$ , videti iznad, i  $2\alpha+\beta-\mu = \alpha+\beta+(\alpha-\mu) \in (0, 1+\alpha)$ , prema zahtevima (3.53), obezbeđuju nenegativnost odgovarajućih sinusa i kosinusa u (3.54).

Primenom frakcionog izvoda reda  $\alpha$  na (3.52), prema (3.28), termodinamički konzistentan model ID.IDD se redukuje na

$$\left( a_1 + a_2 {}_0 D_t^{\alpha+\beta} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 D_t^{\alpha-\mu} + b_2 {}_0 D_t^{\alpha+\nu} + b_3 {}_0 D_t^{2\alpha+\beta-\mu} \right) \varepsilon(t),$$

i, ako je  $2\alpha + \beta - \mu \leq 1$ , predstavlja novu klasu konstitutivnih jednačina koje sadrže frakcione izvode reda u intervalu  $(0, 1)$ , budući da je najviši red izvoda koji deluje na napon veći nego najniži red izvoda koji deluje na deformaciju. Sa druge strane, ako je  $2\alpha + \beta - \mu > 1$ , model (3.52) predstavlja novi tip modela, jer je najviši red frakcionog izvoda iznad jedan.

Specijalan slučaj termodinamički konzistentnog modela ID.IDD dobija se za  $\mu = \beta$ , te se (3.52) redukuje na

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\beta + b_2 {}_0 D_t^\nu + b_3 {}_0 D_t^\alpha \right) \varepsilon(t),$$

sa tremodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} \beta &\leq \nu < \alpha \leq 1 - \nu, \\ -\frac{a_1 \cos(\alpha\pi)}{a_2 \cos(\beta\pi)} &\leq \frac{b_1}{b_3} \leq \frac{a_1 \sin(\alpha\pi)}{a_2 \sin(\beta\pi)}, \end{aligned}$$

predstavljajući novi tip modela, koji se takođe može zapisati i kao

$$\left( a_1 + a_2 {}_0 D_t^{\alpha+\beta} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 D_t^{\alpha-\beta} + b_2 {}_0 D_t^{\alpha+\nu} + b_3 {}_0 D_t^{2\alpha} \right) \varepsilon(t),$$

ako se zapiše preko frakcionih izvoda, koristeći pravilo (3.28). Sa druge strane, za  $\mu = \alpha$  se dobija kontradikcija, odnosno termodinamički uslov (3.53)<sub>1</sub> daje  $\beta \leq \nu < \beta$ .

**Model ID.IDD<sup>+</sup>** Konstitutivna jednačina (3.49), koja odgovara modelu ID.IDD, sadrži dva frakciona izvoda koji deluju na deformaciju i čiji je red u intervalu  $(0, 1)$ , dok je u slučaju modela ID.IDD<sup>+</sup>, red jednog od frakcionih izvoda iznad jedan, te je model ID.IDD<sup>+</sup> dat sa

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^\nu + b_3 {}_0 D_t^{1+\eta} \right) \varepsilon(t), \quad (3.55)$$

dajući sledeće izraze

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \cos \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + \left[ a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\beta-\mu} \cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2} \right] \\ &+ \left[ a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} - a_1 b_3 \omega^{1-\alpha+\eta} \sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} \right] + a_2 b_3 \omega^{1+\beta+\eta} \sin \frac{(\beta-\eta)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} E''(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \sin \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + \left[ a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} - a_2 b_1 \omega^{\beta-\mu} \sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2} \right] \\ &+ \left[ a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} + a_1 b_3 \omega^{1-\alpha+\eta} \cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} \right] + a_2 b_3 \omega^{1+\beta+\eta} \cos \frac{(\beta-\eta)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

za konzervativni i disipativni moduluo, dobijene iz kompleksnog modula

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{\frac{b_1}{(i\omega)^\mu} + b_2 (i\omega)^\nu + b_3 (i\omega)^{1+\eta}}{\frac{a_1}{(i\omega)^\alpha} + a_2 (i\omega)^\beta},$$

pri čemu su  $E'$  i  $E''$  dati sa (3.43) preko kompleksnog modula  $\hat{E}$ .

Članovi u prvoj zagradi u konzervativnom i disipativnom modulu (3.56) i (3.57) se kombinuju prema Pravilima 2 i 3, respektivno, dok Pravilo 4 nameće da je  $-\alpha+\nu = \beta-\mu$  dajući  $\mu = \alpha+\beta-\nu \in (0, 1)$ , što predstavlja zahtev (3.59)<sub>1</sub>. Slično, članovi u drugoj zagradi u (3.56) i (3.57) se kombinuju prema Pravilima 2 i 3, respektivno, dok Pravilo 4 nameće da je  $\beta+\nu = 1+\eta-\alpha$  dajući  $1+\eta = \alpha+\beta+\nu \in (1, 2)$ , što predstavlja zahtev (3.59)<sub>2</sub>. Pravilo 1, primenjeno na poslednji član u (3.56), obezbeđuje da je  $\eta \leq \beta$ , implicirajući da je  $\alpha+\nu \leq 1$ , budući da je  $\eta = \alpha+\beta+\nu-1$ , kao i  $\mu \leq \alpha$  i  $\beta \leq \nu$  nakon primene Pravila 1 na prvi i četvrti član u (3.57), što se redukuje na  $\beta \leq \nu$  zbog  $\mu = \alpha+\beta-\nu$ , te  $\alpha+\nu \leq 1$  i  $\beta \leq \nu$  zajedno daju restrikciji (3.59)<sub>3</sub>. Spomenute nejednakosti daju  $\eta \leq \beta \leq \nu$ , implicirajući  $\alpha+\eta \leq \alpha+\nu \leq 1$  i stoga je zbir u drugoj zagradi u (3.57) nenegativan i ne predstavlja termodinamičku restrikciju. Kako je  $\mu \leq \alpha$ ,  $\beta \leq \nu$  i  $\alpha+\nu \leq 1$ , tj.  $\beta+\mu \leq \alpha+\nu \leq 1$ , zbir u prvoj zagradi u (3.56) je takođe nenegativan, te ne prestavlja termodinamičku restrikciju. Uslov nenegativnosti zbira u drugoj zagradi u (3.56) predstavlja desnu stranu termodinamičke restrikcije (3.60), dok se leva strana restrikcije (3.60) dobija iz zahteva nenegativnosti zbira u prvoj zagradi u (3.57).

Dakle, termodinamički konzistentan model ID.IDD<sup>+</sup> se dobija iz (3.55) kao

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^{\alpha+\beta-\nu} + b_2 {}_0 D_t^\nu + b_3 {}_0 D_t^{\alpha+\beta+\nu} \right) \varepsilon(t), \quad (3.58)$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leq \alpha + \beta - \nu \leq 1, \quad 1 \leq \alpha + \beta + \nu \leq 2, \quad \beta \leq \nu \leq 1 - \alpha, \quad (3.59)$$

$$\frac{b_1}{b_2} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2}} \leq \frac{a_1}{a_2} \leq \frac{b_2}{b_3} \frac{\cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2} \right|}. \quad (3.60)$$

Treba naglasiti da red  $\nu$  frakcionog izvoda koji deluje na deformaciju u (3.58) predstavlja aritmetičku sredinu redova  $\alpha + \beta - \nu$  i  $\alpha + \beta + \nu$  preostala dva operatora koji deluju na deformaciju, pri čemu se uzima da je je red izvoda pozitivan, a red integrala negativan. Takođe, u restrikciji (3.60) je iskorišćena transformacija  $\sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} = -\cos \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2} = \left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2} \right|$ , zbog činjenice da su  $\eta = \alpha + \beta + \nu - 1$  i  $2\alpha + \beta + \nu \in (1, 3)$ , prema uslovu (3.59)<sub>2</sub>, dok  $\alpha + 2\beta - \nu = \alpha + \beta - (\nu - \beta) \in (0, 1)$ , prema uslovima (3.59)<sub>1,3</sub>, obezbeđuje da je  $\sin \frac{(\alpha+2\beta-\nu)\pi}{2}$  nenegativan.

Među specijalnim slučajevima termodinamički konzistentnog modela ID.IDD<sup>+</sup>, datog sa (3.58), izdvajaju se dve konstitutivne jednačine: prva data sa

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\beta + b_2 {}_0 D_t^\alpha + b_3 {}_0 D_t^{2\alpha+\beta} \right) \varepsilon(t),$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$1 \leq 2\alpha + \beta \leq 2, \quad \beta \leq \alpha \leq \frac{1}{2},$$

$$\frac{b_1}{b_2} \frac{\sin(\beta\pi)}{\sin(\alpha\pi)} \leq \frac{a_1}{a_2} \leq \frac{b_2}{b_3} \frac{\cos \frac{(\alpha-\beta)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(3\alpha+\beta)\pi}{2} \right|},$$

koje se dobijaju iz (3.58), (3.59) i (3.60) za  $\nu = \alpha$ , i druga

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\alpha + b_2 {}_0 D_t^\beta + b_3 {}_0 D_t^{\alpha+2\beta} \right) \varepsilon(t),$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$1 \leq \alpha + 2\beta \leq 2, \quad \alpha + \beta \leq 1,$$

$$\frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_1}{a_2} \leq \frac{b_2}{b_3} \frac{1}{\left| \cos(\alpha + \beta)\pi \right|},$$

koje slede iz (3.58), (3.59) i (3.60) za  $\nu = \beta$ .

### 3.2.1.3 Frakcioni Cenerovi modeli

Modeli koji potiču od modela ID.III, a koji odgovara frakcionom Cenerovom modelu prvog tipa (3.11), kao i modeli koji potiču od modela IID.II, koji odgovara frakcionom Cenerovom modelu drugog tipa (3.12), videti takođe tabelu 3.1, su termodinamički nekonzistentni i stoga se njihova analiza izostavlja, dok se termodinamička konzistentnost modela koji potiču od modela IID.ID, koji odgovara frakcionom Cenerovom modelu drugog (3.12) tipa, ispituje.

**Model IID.ID** Model IID.ID je još jedan model koji potiče od frakcionog Cenerovog modela drugog tipa (3.12), videti takođe tabelu 3.1, i dat je izrazom

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 I_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = (b_1 {}_0 I_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^\nu) \varepsilon(t), \quad \text{sa } \beta < \alpha, \quad (3.61)$$

te se kompleksni Jangov moduo dobija kao

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{b_1 \frac{1}{(i\omega)^\mu} + b_2 (i\omega)^\nu}{\frac{a_1}{(i\omega)^\alpha} + \frac{a_2}{(i\omega)^\beta} + a_3 (i\omega)^\gamma}$$

primenom Furijeove transformacije na (3.61), dajući konzervativni i disipativni moduo

$$E'(\omega) = a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \cos \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{-\beta-\mu} \cos \frac{(\beta-\mu)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{-\beta+\nu} \cos \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}$$

$$+ \left[ a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_3 b_1 \omega^{\gamma-\mu} \cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \right] + a_3 b_2 \omega^{\gamma+\nu} \cos \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2}, \quad (3.62)$$

$$E''(\omega) = a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \sin \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{-\beta-\mu} \sin \frac{(\beta-\mu)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{-\beta+\nu} \sin \frac{(\beta+\nu)\pi}{2} \\ + \left[ a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} - a_3 b_1 \omega^{\gamma-\mu} \sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \right] + a_3 b_2 \omega^{\gamma+\nu} \sin \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2}, \quad (3.63)$$

sa  $E'$  i  $E''$  datim sa

$$E'(\omega) = \left| \frac{a_1}{(\text{i}\omega)^\alpha} + \frac{a_2}{(\text{i}\omega)^\beta} + a_3 (\text{i}\omega)^\gamma \right|^2 \hat{E}'(\omega) \quad \text{i} \quad E''(\omega) = \left| \frac{a_1}{(\text{i}\omega)^\alpha} + \frac{a_2}{(\text{i}\omega)^\beta} + a_3 (\text{i}\omega)^\gamma \right|^2 \hat{E}''(\omega). \quad (3.64)$$

Primena Pravila 1 na prvi, drugi i poslednji član u disipativnom modulu (3.63) daje  $\mu \leq \alpha$ ,  $\mu \leq \beta$ , i  $\gamma \leq \nu$ , tj.  $\mu \leq \beta < \alpha$  i  $\gamma \leq \nu$ , implicirajući da je  $\gamma + \mu \leq \mu + \nu \leq \beta + \nu < \alpha + \nu$ . EkspONENTI frekvencija  $-\beta + \nu$ ,  $-\alpha + \nu$ , i  $\gamma - \mu$ , koji odgovaraju trećem, četvrtom i petom članu u konzervativnom i disipativnom modulu (3.62) i (3.63), su u istom intervalu  $(-1, 1)$ . Međutim, Pravilo 4 se ne primenjuje kako bi se kombinovali ovi članovi, budući da bi se izjednačavanjem eksponentata  $-\beta + \nu$ ,  $-\alpha + \nu$ , i  $\gamma - \mu$ , dobilo da je  $\alpha = \beta$ , što je u suprotnosti sa pretpostavkom da model IID.ID sadrži dva frakciona integrala različitih redova koja deluju na napon, videti (3.61). Prema Pravilu 4, umesto pretpostavljanja da je  $-\beta + \nu = \gamma - \mu$ , bira se  $-\alpha + \nu = \gamma - \mu$ , jer se zahtevanjem da je  $\beta + \nu \leq 1$ , takođe dobija  $\gamma + \mu \leq \beta + \nu < \alpha + \nu$ , i stoga je, prema Pravilu 2, nenegativnost trećeg i petog člana u konzervativnom modulu (3.62) obezbedena, dakle, termodinamički zahtev se nameće na zbir u zagradi u (3.62), predstavljajući levu stranu termodinamičke restrikcije (3.67), budući da prvi član u zagradi ima ili negativnu ili pozitivnu vrednost. Desna strana termodinamičke restrikcije (3.67) potiče od nametanja da je zbir u zagradi u disipativnom modulu (3.63) nenegativan, prema Pravilu 3. Treba primetiti da uslov  $-\alpha + \nu = \gamma - \mu$  daje  $\alpha = \mu + \nu - \gamma \in (0, 1)$ , koji  $\mu \leq \beta < \alpha$  i  $\gamma \leq \nu$  redukuje na  $\mu \leq \beta < \mu + \nu - \gamma$ , dajući, zajedno sa zahtevom  $\beta + \nu \leq 1$ , termodinamičku restrikciju (3.66).

Dakle, termodinamički konzistentan model IID.ID se dobija iz (3.61) kao

$$\left( a_1 {}_0 I_t^{\mu+\nu-\gamma} + a_2 {}_0 I_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = (b_1 {}_0 I_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^\nu) \varepsilon(t), \quad (3.65)$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leq \mu \leq \beta < \mu + \nu - \gamma \leq 1, \quad \beta + \nu \leq 1, \quad (3.66)$$

$$-\frac{a_1}{a_3} \frac{\cos \frac{(\mu+2\nu-\gamma)\pi}{2}}{\cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_1}{a_3} \frac{\sin \frac{(\mu+2\nu-\gamma)\pi}{2}}{\sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}}. \quad (3.67)$$

Treba naglasiti da uslov  $\mu + \nu - \gamma \leq 1$ , koji se pojavljuje u (3.66), zapravo sledi iz  $\mu + \nu \leq \beta + \nu \leq 1$ , jer je  $\mu \leq \beta$  i  $\beta + \nu \leq 1$ . Takođe, prva nejednakost u (3.67) je ili trivijalno zadovoljena ako je  $\mu + 2\nu - \gamma = (\mu + \nu - \gamma) + \nu \leq 1$ , ili predstavlja restrikciju ako je  $\mu + 2\nu - \gamma > 1$ , budući da  $\mu + 2\nu - \gamma \in (0, 1 + \nu)$ , prema (3.66)<sub>1</sub>, obezbeđuje nenegativnost za  $\sin \frac{(\mu+2\nu-\gamma)\pi}{2}$ , dok  $\gamma + \mu \leq 1$ , videti iznad, obezbeđuje nenegativnost odgovarajućih sinusa i kosinusa u (3.67).

Pretpostavka da je  $\mu = \gamma$  transformiše konstitutivnu jednačinu (3.65) u

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\nu + a_2 {}_0 I_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = (b_1 {}_0 I_t^\gamma + b_2 {}_0 D_t^\nu) \varepsilon(t), \quad (3.68)$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$\gamma \leq \beta < \nu \leq 1 - \beta, \\ -\frac{a_1}{a_3} \frac{\cos(\nu\pi)}{\cos(\gamma\pi)} \leq \frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_1}{a_3} \frac{\sin(\nu\pi)}{\sin(\gamma\pi)}.$$

Treba istaći da se konstitutivna jednačina (3.68), prema osobini (3.28), redukuje na

$$\left( a_1 + a_2 {}_0 D_t^{\nu-\beta} + a_3 {}_0 D_t^{\nu+\gamma} \right) \sigma(t) = (b_1 {}_0 D_t^{\nu-\gamma} + b_2 {}_0 D_t^{2\nu}) \varepsilon(t),$$

nakon primene frakcionog izvoda reda  $\nu$  na (3.68), predstavljajući novi slučaj konstitutivne jednačine koja sadrži frakcioni izvod reda u intervalu  $(0, 1)$  ako je  $2\nu \leq 1$ . Međutim, pretpostavljanjem da je  $\nu = \gamma$  u termodinamički konzistentnom modelu IID.ID, datom sa (3.65), ne dobija se specijalan slučaj modela IID.ID, budući da jednakost  $\gamma = \nu$  sa termodinamičkom restrikcijom (3.66) daje kontradikciju  $\mu \leq \beta < \mu$ .

**Model I<sup>+</sup>ID.ID** Pretpostavljajući da je jedan od redova frakcionog integrala koji deluje na deformaciju u modelu IID.ID, datom sa (3.61), iznad jedan, konstitutivna jednačina (3.61) postaje

$$\left( a_1 {}_0I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0I_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma \right) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\mu + b_2 {}_0D_t^\nu) \varepsilon(t), \quad (3.69)$$

te se za kompleksni Jangov moduo dobija

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{b_1 \frac{1}{(i\omega)^\mu} + b_2 (i\omega)^\nu}{\frac{a_1}{(i\omega)^{1+\alpha}} + \frac{a_2}{(i\omega)^\beta} + a_3 (i\omega)^\gamma},$$

dajući konzervativni i disipativni moduo

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-1-\alpha-\mu} \sin \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2} + \left[ -a_1 b_2 \omega^{-1-\alpha+\nu} \sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{-\beta-\mu} \cos \frac{(\beta-\mu)\pi}{2} \right] \\ &\quad + \left[ a_2 b_2 \omega^{-\beta+\nu} \cos \frac{(\beta+\nu)\pi}{2} + a_3 b_1 \omega^{\gamma-\mu} \cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \right] + a_3 b_2 \omega^{\gamma+\nu} \cos \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} E''(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-1-\alpha-\mu} \cos \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2} + \left[ a_1 b_2 \omega^{-1-\alpha+\nu} \cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{-\beta-\mu} \sin \frac{(\beta-\mu)\pi}{2} \right] \\ &\quad + \left[ a_2 b_2 \omega^{-\beta+\nu} \sin \frac{(\beta+\nu)\pi}{2} - a_3 b_1 \omega^{\gamma-\mu} \sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \right] + a_3 b_2 \omega^{\gamma+\nu} \sin \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

sa  $E'$  i  $E''$  datim sa

$$E'(\omega) = \left| \frac{a_1}{(i\omega)^{1+\alpha}} + \frac{a_2}{(i\omega)^\beta} + a_3 (i\omega)^\gamma \right|^2 \hat{E}'(\omega) \quad \text{i} \quad E''(\omega) = \left| \frac{a_1}{(i\omega)^{1+\alpha}} + \frac{a_2}{(i\omega)^\beta} + a_3 (i\omega)^\gamma \right|^2 \hat{E}''(\omega). \quad (3.72)$$

Konzervativni i disipativni moduo (3.70) i (3.71) sadrže dva para članova koji se mogu kombinovati prema Pravilu 4, tako da prvi par ima eksponente frekvencije  $-1-\alpha+\nu$  i  $-\beta-\mu$ , i odgovara mu zbir članova u prvoj zagradi u (3.70) i (3.71), a drugi par ima eksponente frekvencije  $-\beta+\nu$  i  $\gamma-\mu$ , i odgovara mu zbir članova u drugoj zagradi u (3.70) i (3.71), stoga  $-1-\alpha+\nu = -\beta-\mu$  daje  $1+\alpha = \mu+\nu+\beta \in (1, 2)$ , a  $-\beta+\nu = \gamma-\mu$  daje  $\gamma = \mu+\nu-\beta \in (0, 1)$ , što predstavlja termodinamičke restrikcije (3.74)<sub>1,2</sub>. Prema Pravilu 1,  $\alpha \leq \mu$ ,  $\mu \leq \beta$ , i  $\gamma \leq \nu$ , obezbeđuju nenegativnost prvog člana u (3.70) i trećeg i poslednjeg člana u (3.71), respektivno. Zbir članova u drugoj zagradi u (3.70) je nenegativan, zbog  $\gamma+\mu \leq \beta+\nu \leq 1$ , budući da  $\mu \leq \beta$  i  $\gamma \leq \nu$  impliciraju da je  $\gamma+\mu \leq \beta+\nu$ , dok  $\alpha \leq \mu$  i  $1+\alpha = \beta+\mu+\nu$  daju  $\beta+\nu \leq 1$ , kao i zbir članova u prvoj zagradi u (3.71), jer  $\alpha \leq \mu$  i  $\mu \leq \beta$ , tj.  $\alpha \leq \mu \leq \beta$ , daju  $\alpha+\nu \leq \beta+\nu \leq 1$ , sa nejednakosću  $\beta+\nu \leq 1$ . Treba primetiti da termodinamički zahtev (3.74)<sub>3</sub> sledi iz  $\mu \leq \beta$  i  $\beta+\nu \leq 1$ , budući da je  $\mu \leq \beta$  takođe posledica nejednakosti  $\gamma \leq \nu$ , pri čemu je  $\gamma = \mu+\nu-\beta$ , dok je  $\beta+\nu \leq 1$  posledica nejednakosti  $\alpha \leq \mu$ , pri čemu je  $\alpha = \beta+\mu+\nu-1$ . Leva strana termodinamičke restrikcije (3.75) se dobija prema Pravilu 3, primjenjenom na zbir članova u prvoj zagradi u (3.70), dok zbir članova u drugoj zagradi u (3.71) predstavlja desnu stranu termodinamičke restrikcije (3.75), zbog Pravila 3.

Termodinamički konzistentan model I<sup>+</sup>ID.ID se dobija iz (3.69) kao

$$\left( a_1 {}_0I_t^{\mu+\nu+\beta} + a_2 {}_0I_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{\mu+\nu-\beta} \right) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\mu + b_2 {}_0D_t^\nu) \varepsilon(t), \quad (3.73)$$

i podleže termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leq \mu + \nu - \beta \leq 1, \quad 1 \leq \mu + \nu + \beta \leq 2, \quad \mu \leq \beta \leq 1 - \nu, \quad (3.74)$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(\mu+2\nu+\beta)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\beta-\mu)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(2\mu+\nu-\beta)\pi}{2}}. \quad (3.75)$$

Treba naglasiti da se red frakcionog integrala  $\beta$  dobija kao aritmetička sredina reda integrala  $\mu+\nu+\beta$  i reda izvoda  $\mu+\nu-\beta$  koji se uzima sa negativnim znakom. Takođe, u restrikciji (3.75), je iskorišćena transformacija  $\sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} = -\cos \frac{(\mu+2\nu+\beta)\pi}{2} = \left| \cos \frac{(\mu+2\nu+\beta)\pi}{2} \right|$ , zbog činjenice da je  $\alpha = \mu+\nu+\beta-1$  i  $\mu+2\nu+\beta \in (1, 3)$ , prema zahtevu (3.74)<sub>2</sub>, dok  $2\mu+\nu-\beta = \mu+\nu-(\beta-\mu) \in (0, 1)$ , zbog restrikcije (3.74)<sub>1,3</sub>, kao i  $\beta+\nu \leq 1$ , videti iznad, obezbeđuju nenegativnost odgovarajućih sinusa u (3.75).

Jedan od specijalnih slučajeva termodinamički konzistentnog modela I<sup>+</sup>ID.ID dobija se iz (3.73) za  $\mu = \beta$ , dajući model

$$\left( a_1 {}_0I_t^{2\beta+\nu} + a_2 {}_0I_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\nu \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^\beta + b_2 {}_0D_t^\nu \right) \varepsilon(t),$$

koji poslaže termodinamičkim restrikcijama

$$1 \leq 2\beta + \nu \leq 2, \quad \beta \leq 1 - \nu,$$

$$\frac{a_1}{a_2} |\cos((\beta + \nu)\pi)| \leq \frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_2}{a_3},$$

dok se drugi specijalni slučaj dobija iz (3.73) za  $\nu = \beta$ , dajući model

$$(a_1 {}_0I_t^{2\beta+\mu} + a_2 {}_0I_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\mu) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\mu + b_2 {}_0D_t^\beta) \varepsilon(t),$$

koji poslaže termodinamičkim restrikcijama

$$1 \leq 2\beta + \mu \leq 2, \quad \mu \leq \beta \leq \frac{1}{2},$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(3\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\beta-\mu)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin(\beta\pi)}{\sin(\mu\pi)}.$$

### 3.2.2 Modeli simetričnog tipa

Kao i u slučaju modela asimetričnog tipa, ispostavlja se da nisu svi modeli simetričnog tipa termodinamički konzistentni. Naime, ne mogu se nametnuti termodinamičke restrikcije na parametre modela predstavljenih u zasenčenim poljima u tabeli 3.3, koje bi obezbedile termodinamičku konzistentnost, stoga su ti modeli termodinamički nekonzistentni i njihova analiza se izostavlja, dok su ostali modeli iz tabele 3.3 termodinamički konzistentni uz nametnute odgovarajuće restrikcije na parametre modela.

ID.DD	—	ID.DD <sup>+</sup>	—
ID.ID	—	—	—
ID.II	—	ID.II <sup>+</sup>	—
IDD.IDD	IDD <sup>+</sup> .IDD	IDD.IDD <sup>+</sup>	IDD <sup>+</sup> .IDD <sup>+</sup>
IID.IID	I <sup>+</sup> ID.IID	IID.I <sup>+</sup> ID	I <sup>+</sup> ID.I <sup>+</sup> ID
IDD.IID	IDD <sup>+</sup> .IID	IDD.I <sup>+</sup> ID	IDD <sup>+</sup> .I <sup>+</sup> ID
IID.IDD	I <sup>+</sup> ID.IDD	IID.IDD <sup>+</sup>	I <sup>+</sup> ID.IDD <sup>+</sup>

Tabela 3.3: Pregled termodinamičke konzistentnosti simetričnih modela.

#### 3.2.2.1 Skup modela koji potiču od modela ID.DD

Pored modela ID.DD, koji sadrži operatore reda u intervalu  $(0, 1)$ , takođe se razmatra model koji sadrži frakcioni izvod reda u intervalu  $(1, 2)$ .

**Model ID.DD** Model ID.DD sledi iz konstitutivne jednačine (3.16), pri čemu je frakcioni izvod odabran kao operator koji deluje na deformaciju, tako da je model ID.DD dat konstitutivnom jednačinom

$$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^\nu) \varepsilon(t), \quad \text{sa } \mu < \nu. \quad (3.76)$$

Izrazi za konzervativni i disipativni moduo

$$E'(\omega) = a_1 b_1 \omega^{-\alpha+\mu} \cos \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2} + a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} \\ + a_2 b_1 \omega^{\beta+\mu} \cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}, \quad (3.77)$$

$$E''(\omega) = a_1 b_1 \omega^{-\alpha+\mu} \sin \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2} + a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} \\ + a_2 b_1 \omega^{\beta+\mu} \sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}, \quad (3.78)$$

slede iz kompleksnog Jangovog modula

$$\hat{E}(\omega) = \frac{b_1(i\omega)^\mu + b_2(i\omega)^\nu}{\frac{a_1}{(i\omega)^\alpha} + a_2(i\omega)^\beta},$$

pri čemu su  $E'$  i  $E''$  dati sa (3.43) preko kompleksnog Jangovog modula.

Prema Pravilu 2, termodinamička konzistentnost modela ID.DD zahteva da je prvi član u konzervativnom modulu (3.77) nenegativan, što se obezbeđuje nametanjem uslova  $\alpha + \mu < \alpha + \nu \leq 1$ . Inače, ako bi se prema Pravilu 4 zahtevalo izjednačavanje eksponenata frekvencija  $-\alpha + \mu$  i  $-\alpha + \nu$  važila bi jednakost  $\mu = \nu$ , koja je u suprotnosti sa pretpostavkom da konstitutivna jednačina (3.76) sadrži dva operatora frakcionog izvoda sa različitim redovima koja deluju na deformaciju. Primena Pravila 1 na poslednja dva člana u disipativnom modulu (3.78) implicira da je  $\beta \leq \mu < \nu$ , dajući

$$\alpha + \beta \leq \alpha + \mu \leq \alpha + \nu \leq 1, \quad (3.79)$$

kao termodinamički zahtev. Nakon primene frakcionog izvoda reda  $\alpha$  na konstitutivnu jednačinu (3.76), prema osobinama frakcionog izvoda i integrala (3.28), dobija se model

$$(a_1 + a_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta}) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^{\alpha+\mu} + b_2 {}_0D_t^{\alpha+\nu}) \varepsilon(t), \quad (3.80)$$

koji ima sve frakcione izvode reda u intervalu  $(0, 1)$  i zadovoljava (3.79), stoga pripada klasi modela Case IV, videti dodatak A.1.

**Model ID.DD<sup>+</sup>** Pretpostavljanjem da je red jednog frakcionog izvoda koji deluje na deformaciju u modelu ID.DD, datom sa (3.76), iznad jedan, konstitutivna jednačina (3.76) postaje

$$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{1+\nu}) \varepsilon(t), \quad (3.81)$$

predstavljajući model ID.DD<sup>+</sup> i dajući kompleksni Jangov moduo

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{b_1(i\omega)^\mu + b_2(i\omega)^{1+\nu}}{\frac{a_1}{(i\omega)^\alpha} + a_2(i\omega)^\beta},$$

te su konzervativni i disipativni moduo izraženi sa

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha+\mu} \cos \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{1+\beta+\nu} \sin \frac{(\beta-\nu)\pi}{2} \\ &\quad + \left[ -a_1 b_2 \omega^{1-\alpha+\nu} \sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\beta+\mu} \cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} \right], \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} E''(\omega) &= a_1 b_1^{-\alpha+\mu} \sin \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{1+\beta+\nu} \cos \frac{(\beta-\nu)\pi}{2} \\ &\quad + \left[ a_1 b_2 \omega^{1-\alpha+\nu} \cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\beta+\mu} \sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} \right], \end{aligned} \quad (3.83)$$

pri čemu su  $E'$  i  $E''$  dati sa (3.43) preko kompleksnog Jangov modula  $\hat{E}$ .

Članovi u zagradi u konzervativnom i disipativnom modulu (3.82) i (3.83) se kombinuju prema Pravilu 3 i prema Pravilu 2, respektivno, dok Pravilo 4 zahteva da je  $1 - \alpha + \nu = \beta + \mu$  dajući  $1 + \nu = \alpha + \beta + \mu \in (1, 2)$ , što predstavlja termodinamičku restrikciju (3.85)<sub>1</sub>. Pravilo 1, primenjeno na drugi član u (3.82) i na drugi član u zagradi u (3.83), obezbeđuje  $\nu \leq \beta$ , što se redukuje na  $\alpha + \mu \leq 1$ , jer je  $\nu = \alpha + \beta + \mu - 1$ , kao i  $\beta \leq \mu$ , dajući  $\beta \leq \mu \leq 1 - \alpha$  kao termodinamičku restrikciju (3.85)<sub>2</sub>. Sa druge strane,  $\nu \leq \beta$  i  $\beta \leq \mu \leq 1 - \alpha$ , tj.  $\nu \leq \beta \leq \mu \leq 1 - \alpha$ , implicira da je  $\alpha + \nu \leq \alpha + \mu \leq 1$ . Stoga, nenegativnost konzervativnog modula, datog sa (3.82), se obezbeđuje nejednakostu  $\nu \leq \beta$ , ili ekvivalentno sa  $\alpha + \mu \leq 1$ , implicirajući da prva dva člana imaju nenegativnu vrednost, kao i zahtevanjem da je zbir članova u zagradi nenegativan, što daje termodinamičku restrikciju (3.86), dok zbir članova u disipativnom modulu (3.83) ne predstavlja termodinamičku restrikciju, jer su oba člana nenegativna, budući da važe nejednakosti  $\beta \leq \mu$  i  $\alpha + \nu \leq \alpha + \mu \leq 1$ .

Termodinamički konzistentan model ID.DD<sup>+</sup> se dobija iz (3.81) kao

$$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta+\mu}) \varepsilon(t), \quad (3.84)$$

tj. kao

$$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta) \sigma(t) = (b_1 + b_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta}) {}_0D_t^\mu \varepsilon(t),$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$1 \leq \alpha + \beta + \mu \leq 2, \quad \beta \leq \mu \leq 1 - \alpha, \quad (3.85)$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2}. \quad (3.86)$$

Treba naglasiti da je argument  $\frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2}$ , koji se pojavljuje u (3.86), u intervalu  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  u kom kosinus ima negativnu vrednost, jer je  $2\alpha + \beta + \mu = (\alpha + \beta + \mu) + \alpha \in (1, 3)$ , a  $\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|$  se dobija iz  $\sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} = -\cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2}$ , uzimajući da je  $\nu = \alpha + \beta + \mu - 1$ .

Primenom frakcionog izvoda reda  $\alpha$ , prema (3.28), termodinamički konzistentan model ID.DD<sup>+</sup>, dat sa (3.84), se transformiše u

$$(a_1 + a_2 {}_0 D_t^{\alpha+\beta}) \sigma(t) = (b_1 + b_2 {}_0 D_t^{\alpha+\beta}) {}_0 D_t^{\alpha+\mu} \varepsilon(t),$$

predstavljajući frakcionalo uopštenje klasičnog anti-Cenerovog modela (3.1)<sub>1</sub>.

**Model ID.ID** Pored modela ID.DD, još jedan model sledi iz konstitutivne jednačine (3.16), model ID.ID, dat izrazom

$$(a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta) \sigma(t) = (b_1 {}_0 I_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^\nu) \varepsilon(t), \quad (3.87)$$

koji sadrži jedan frakcionalni integral i jedan frakcionalni izvod koji deluju na deformaciju umesto dva frakcionala izvoda kao slučaju modela ID.DD, datog sa (3.76). Model ID.ID takođe sledi iz konstitutivne jednačine (3.15), kada se za operator koji deluje na deformaciju izabere frakcionalni izvod. Odgovarajući kompleksni Jangov moduo dobija se u obliku

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{\frac{b_1}{(i\omega)^\mu} + b_2 (i\omega)^\nu}{\frac{a_1}{(i\omega)^\alpha} + a_2 (i\omega)^\beta},$$

dajući konzervativni i disipativni moduo

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \cos \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} \\ &+ \left[ a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\beta-\mu} \cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2} \right], \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} E''(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \sin \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} \\ &+ \left[ a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} - a_2 b_1 \omega^{\beta-\mu} \sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2} \right], \end{aligned} \quad (3.89)$$

pri čemu su  $E'$  i  $E''$  dati sa (3.43) preko kompleksnog Jangovog modula  $\hat{E}$ .

Nenegativnost konzervativnog i disipativnog modula (3.88) i (3.89) obezbeđuje se primenom Pravila 2 i 4 na članove u zagradi u (3.88), primenom Pravila 3 i 4 na članove u zagradi u (3.89) kao i primenom Pravila 1 na prvi i drugi član u (3.89), stoga Pravilo 4 implicira  $-\alpha + \nu = \beta - \mu$  dajući  $\nu = \alpha + \beta - \mu \in (0, 1)$  kao termodinamičku restrikciju (3.91)<sub>1</sub>, dok Pravilo 1 implicira  $\mu \leq \alpha$  i  $\beta \leq \nu$ , što se redukuje na  $\mu \leq \alpha$  zbog  $\nu = \alpha + \beta - \mu$ , i predstavlja termodinamičku restrikciju (3.91)<sub>2</sub>. Da bi se nametnulo da je zbir u zagradi u (3.88) termodinamička restrikcija, zahteva se da je  $\beta + \mu \leq 1$  kao termodinamička restrikcija (3.91)<sub>3</sub>, što obezbeđuje nenegativnost drugog člana u zagradi, jer  $\mu \leq \alpha$  i  $\beta \leq \nu$  daju  $\beta + \mu \leq \alpha + \nu$  i stoga prvi član u zagradi može biti nepozitivan, te se dobija leva strana restrikcije (3.92), dok je desna strana (3.92) posledica zahtevanja nenegativnosti zbiru u zagradi u (3.89).

Termodinamički konzistentan model ID.ID se dobija iz (3.87) kao

$$(a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta) \sigma(t) = (b_1 {}_0 I_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^{\alpha+\beta-\mu}) \varepsilon(t), \quad (3.90)$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leq \alpha + \beta - \mu \leq 1, \quad \mu \leq \alpha, \quad \beta + \mu \leq 1, \quad (3.91)$$

$$-\frac{a_1}{a_2} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_1}{a_2} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}}. \quad (3.92)$$

Treba naglasiti da je prva nejednakost u (3.92) ili trivijalno zadovoljena ako je  $2\alpha + \beta - \mu = \alpha + (\alpha + \beta - \mu) \leq 1$ , jer je  $\cos \frac{(2\alpha + \beta - \mu)\pi}{2} \geq 0$ , ili predstavlja restrikciju ako je  $2\alpha + \beta - \mu > 1$ , jer je  $\cos \frac{(2\alpha + \beta - \mu)\pi}{2} < 0$ , dok je  $\beta + \mu \leq 1$ , videti iznad. Takođe, kako je  $2\alpha + \beta - \mu \in (0, 1 + \alpha)$ , prema (3.91)<sub>1</sub>, sledi da je  $\sin \frac{(2\alpha + \beta - \mu)\pi}{2} > 0$ .

Primenom frakcionog izvoda reda  $\alpha$  na konstitutivnu jednačinu (3.90), prema (3.28), termodinamički konzistentan model ID.ID se transformiše u

$$(a_1 + a_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta}) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^{\alpha-\mu} + b_2 {}_0D_t^{2\alpha+\beta-\mu}) \varepsilon(t), \quad (3.93)$$

što predstavlja novi slučaj konstitutivnih jednačina koje sadrže frakcione izvode reda u intervalu  $(0, 1)$  ako je  $2\alpha + \beta - \mu \leq 1$ , jer je najviši red izvoda koji deluje na napon veći nego najniži red izvoda koji deluje na deformaciju.

Izborom da je  $\mu = \beta$  u (3.90) se dobija specijalni slučaj termodinamički konzistentnog modela ID.ID u obliku

$$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\beta + b_2 {}_0D_t^\alpha) \varepsilon(t),$$

koji podleže termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} \beta &\leq \alpha, \quad \beta \leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{a_1 \cos(\alpha\pi)}{a_2 \cos(\beta\pi)} &\leq \frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_1 \sin(\alpha\pi)}{a_2 \sin(\beta\pi)}, \end{aligned}$$

a koji je istog tipa kao (3.93), budući da je dat izrazom

$$(a_1 + a_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta}) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^{\alpha-\beta} + b_2 {}_0D_t^\alpha) \varepsilon(t),$$

kada se predstavi samo preko frakcionih izvoda. Sa druge strane, kada je  $\mu = \alpha$ , termodinamički konzistentan model ID.ID se redukuje na

$$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\alpha + b_2 {}_0D_t^\beta) \varepsilon(t),$$

sa restrikcijama

$$\alpha + \beta \leq 1, \quad \frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_1}{a_2},$$

i transformiše u dobro poznat frakcioni Cenerov model

$$(a_1 + a_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta}) \sigma(t) = (b_1 + b_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta}) \varepsilon(t),$$

nakon primene frakcionog izvoda reda  $\alpha$ , korišćenjem pravila (3.28) za frakcioni integral i izvod.

### 3.2.2.2 Skup modela koji potiču od modela IDD.IDD

Pored modela IDD.IDD, koji sadrži operatore reda u intervalu  $(0, 1)$ , razmatra se i model  $IDD^+ . IDD^+$  koji sadrži frakcione izvode reda u intervalu  $(1, 2)$ , dok su modeli  $IDD^+ . IDD$  i  $IDD . IDD^+$  termodinamički nekonzistentni i stoga se izostavljaju iz dalje analize.

**Model IDD.IDD** Model IDD.IDD je posledica konstitutivne jednačine (3.13), u kojo se, pored operatora frakcionog izvoda, biraju i operator frakcionog integrala i operator frakcionog izvoda da deluju na deformaciju, implicirajući izraz

$$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\mu + b_2 {}_0D_t^\nu + b_3 {}_0D_t^\eta) \varepsilon(t), \quad \text{sa } \beta < \gamma, \nu < \eta, \quad (3.94)$$

za model IDD.IDD. Konzervativni i disipativni moduo

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \cos \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + \left[ a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\beta-\mu} \cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2} \right] \\ &+ \left[ a_1 b_3 \omega^{-\alpha+\eta} \cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} + a_3 b_1 \omega^{\gamma-\mu} \cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \right] + a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} \\ &+ a_2 b_3 \omega^{\beta+\eta} \cos \frac{(\eta-\beta)\pi}{2} + a_3 b_2 \omega^{\gamma+\nu} \cos \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2} + a_3 b_3 \omega^{\gamma+\eta} \cos \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned}
 E''(\omega) = & a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \sin \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + \left[ a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} - a_2 b_1 \omega^{\beta-\mu} \sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2} \right] \\
 & + \left[ a_1 b_3 \omega^{-\alpha+\eta} \sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} - a_3 b_1 \omega^{\gamma-\mu} \sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \right] + a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} \\
 & + a_2 b_3 \omega^{\beta+\eta} \sin \frac{(\eta-\beta)\pi}{2} + a_3 b_2 \omega^{\gamma+\nu} \sin \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2} + a_3 b_3 \omega^{\gamma+\eta} \sin \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2}, \quad (3.96)
 \end{aligned}$$

slede iz kompleksnog Jangovog modula

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{\frac{b_1}{(i\omega)^\mu} + b_2(i\omega)^\nu + b_3(i\omega)^\eta}{\frac{a_1}{(i\omega)^\alpha} + a_2(i\omega)^\beta + a_3(i\omega)^\gamma},$$

pri čemu su  $E'$  i  $E''$  dati sa (3.26) preko kompleksnog Jangovog modula.

Primenom Pravila 1 na prvi i poslednja četiri člana u disipativnom modulu (3.96), dobijaju se termodinamičke restrikcije  $\mu \leq \alpha, \beta \leq \nu, \beta \leq \eta, \gamma \leq \nu, \gamma \leq \eta$ , tj.  $\mu \leq \alpha < \beta < \gamma \leq \nu < \eta$ . Iako drugi, treći, četvrti i peti član u (3.95) i (3.96) imaju eksponente frekvencije u istom intervalu  $(-1, 1)$ , ne mogu se svi kombinovati prema Pravilima 3 i 4, jer bi se izjednačavanjem  $-\alpha + \nu$  sa  $-\alpha + \eta$  i  $\beta - \mu$  sa  $\gamma - \mu$  dobilo da je  $\nu = \eta$  i  $\beta = \gamma$ , što je u suprotnosti sa pretpostavkom da model IDD.IDD, dat sa (3.94) sadrži po dva frakciona izvoda sa različitim redovima koji deluju na napon i deformaciju.

Postoje dva seta članova u konzervativnom i disipativnom modulu (3.95) i (3.96), svaki sadrži dva člana koji se mogu kombinovati prema Pravilu 4, pri čemu se prvi set članova dobija izjednačavanjem eksponenata frekvencije drugog i trećeg člana dajući  $-\alpha + \nu = \beta - \mu$ , a drugi set članova se dobija izjednačavanjem eksponenata frekvencije četvrtog i petog člana dajući  $-\alpha + \eta = \gamma - \mu$ , dakle izbor da je  $\nu = \beta + (\alpha - \mu) \in (0, 1)$  i da je  $\eta = \gamma + (\alpha - \mu) \in (0, 1)$ , pri čemu poslednja jednakost predstavlja termodinamičku restrikciju (3.98)<sub>1</sub>, je u skladu sa zahtevima  $\nu < \eta$  i  $\beta < \gamma$ , budući da se zamenom  $\nu$  i  $\eta$  u  $\nu < \eta$  dobija  $\beta < \gamma$ , što, zajedno sa  $\mu \leq \alpha$ , predstavlja termodinamičke restrikcije (3.98)<sub>2,3</sub>. Članovi u zagradi u konzervativnom modulu (3.95) se kombinuju prema Pravilu 2, pri čemu je nejednakost  $\gamma + \mu \leq 1$  nametnuta, predstavljajući termodinamičku restrikciju (3.98)<sub>5</sub>, a takođe implicira da je  $\beta + \mu \leq 1$ , jer je  $\beta < \gamma$ , dok  $\alpha + \nu$  i  $\alpha + \eta$  mogu biti ili manji ili veći od jedan, budući da  $\mu \leq \alpha$  i  $\gamma \leq \nu < \eta$  impliciraju  $\gamma + \mu \leq \alpha + \nu < \alpha + \eta$ , stoga odgovarajući kosinusni mogu biti ili pozitivni ili negativni. Stoga, zahtevanje nenegativnosti zbiru članova u zagradi u (3.95) predstavlja leve strane termodinamičkih restrikcija (3.99) i (3.100). Sa druge strane, članovi u disipativnom modulu (3.96) su kombinovani prema Pravilu 3, te zahtevanje nenegativnosti zbiru članova u zagradi predstavlja desne strane termodinamičkih restrikcija (3.99) i (3.100). Treba naglasiti da uslov  $\gamma \leq \nu$  sa  $\nu = \beta + (\alpha - \mu)$  implicira nejednakost u (3.98)<sub>4</sub>.

Postoji i još jenda mogućnost za kreiranje dva seta članova u konzervativnom i disipativnom modulu (3.95) i (3.96), pri čemu se prvi set formira izjednačavanjem eksponenata frekvencija  $-\alpha + \nu$  i  $\gamma - \mu$ , koji odgovaraju drugom i petom članu, dajući  $\nu = \gamma + (\alpha - \mu)$ , dok se drugi set dobija izjednačavanjem eksponenata frekvencija  $-\alpha + \eta$  i  $\beta - \mu$ , koji odgovaraju četvrtom i trećem članu, dajući  $\eta = \beta + (\alpha - \mu)$ , što implicira da je  $\beta > \gamma$ , ako je  $\eta < \nu$  nametnuto, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da su u modelu IDD.IDD, datom sa (3.94) redovi frakcionih izvoda izabrani u rastućem poretku, odnosno da je  $\beta < \gamma$  i  $\eta < \nu$ .

Termodinamički konzistentan model IDD.IDD se dobija iz (3.94) kao

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^{\alpha+\beta-\mu} + b_3 {}_0 D_t^{\alpha+\gamma-\mu} \right) \varepsilon(t), \quad (3.97)$$

i podleže termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leq \alpha + \gamma - \mu \leq 1, \quad \beta < \gamma, \quad \mu \leq \alpha, \quad \gamma + \mu \leq \alpha + \beta, \quad \gamma + \mu \leq 1, \quad (3.98)$$

$$-\frac{b_2}{b_1} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}}, \quad (3.99)$$

$$-\frac{b_3}{b_1} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}}. \quad (3.100)$$

Treba napomenuti da redovi frakcionih izvoda koji deluju na deformaciju zadovoljavaju nejednakosti  $0 \leq \beta + (\alpha - \mu) < \gamma + (\alpha - \mu) \leq 1$ , prema termodinamičkim zahtevima (3.98)<sub>1,2,3</sub>. Takođe, prva nejednakost u (3.99), kao i u (3.100), je trivijalno zadovoljena ako je  $2\alpha + \gamma - \mu \leq 1$ , budući da je tada  $2\alpha + \beta - \mu \leq 1$ , te su  $\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2} \geq 0$  i  $\cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2} \geq 0$ . Još jedan moguć slučaj je  $2\alpha + \beta - \mu \leq 1 < 2\alpha + \gamma - \mu$ , implicirajući da je prva nejednakost u (3.99) trivijalno zadovoljena, dok prva nejednakost u (3.100) predstavlja restrikciju, dok ako je  $2\alpha + \beta - \mu > 1$ , obe nejednakosti u (3.99) i (3.100) predstavljaju termodinamičke restrikcije. Kako je  $2\alpha + \gamma - \mu \in (0, 1 + \alpha)$ , prema (3.98)<sub>1</sub>, i stoga  $2\alpha + \beta - \mu \in (0, 1 + \alpha)$ , sledi da je  $\sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2} > 0$  i  $\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2} > 0$ . Takođe važi da je  $\beta + \mu < \gamma + \mu \leq 1$ , videti iznad.

Prema (3.28), primenom frakcionog izvoda reda  $\alpha$  na termodinamički konzistentan model IDD.IDD, dat sa (3.97), on se transformiše u

$$\left( a_1 + a_2 {}_0 D_t^{\alpha+\beta} + a_3 {}_0 D_t^{\alpha+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 D_t^{\alpha-\mu} + b_2 {}_0 D_t^{2\alpha+\beta-\mu} + b_3 {}_0 D_t^{2\alpha+\gamma-\mu} \right) \varepsilon(t),$$

predstavljajući novi slučaj konstitutivnih jednačina koje sadrže frakcione izvode reda u intervalu  $(0, 1)$  ako je  $2\alpha + \gamma - \mu \leq 1$ , budući da je najviši red izvoda na levoj strani modela veći od najnižeg reda izvoda na desnoj strani modela.

Jedan od specijalnih slučajeva termodinamički konzistentnog modela IDD.IDD, datog sa (3.97), dobija se za  $\mu = \beta$  u obliku

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\beta + b_2 {}_0 D_t^\alpha + b_3 {}_0 D_t^{\alpha-\beta+\gamma} \right) \varepsilon(t), \quad (3.101)$$

koji podleže termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha - \beta + \gamma \leq 1, \quad \beta < \gamma \leq \alpha, \quad \beta + \gamma \leq 1, \\ -\frac{b_2 \cos(\alpha\pi)}{b_1 \cos(\beta\pi)} &\leq \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2 \sin(\alpha\pi)}{b_1 \sin(\beta\pi)}, \\ -\frac{b_3 \cos \frac{(2\alpha+\gamma-\beta)\pi}{2}}{b_1 \cos \frac{(\beta+\gamma)\pi}{2}} &\leq \frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3 \sin \frac{(2\alpha+\gamma-\beta)\pi}{2}}{b_1 \sin \frac{(\beta+\gamma)\pi}{2}}, \end{aligned}$$

i predstavlja novi tip konstitutivnih jednačina ako je  $2\alpha + \gamma - \beta \leq 1$ , budući da se transformiše u

$$\left( a_1 + a_2 {}_0 D_t^{\alpha+\beta} + a_3 {}_0 D_t^{\alpha+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 D_t^{\alpha-\beta} + b_2 {}_0 D_t^{2\alpha} + b_3 {}_0 D_t^{2\alpha+\gamma-\beta} \right) \varepsilon(t),$$

nakon primene frakcionog izvoda reda  $\alpha$  na (3.101), korišćenjem pravila (3.28) za frakcione integrale i izvode. Drugi specijalan slučaj termodinamički konzistentnog modela IDD.IDD, datog sa (3.97), dobija se u obliku

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\gamma + b_2 {}_0 D_t^{\alpha+\beta-\gamma} + b_3 {}_0 D_t^\alpha \right) \varepsilon(t), \quad (3.102)$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} \beta < \gamma \leq \alpha, \quad \gamma &\leq \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \gamma \leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{b_2 \cos \frac{(2\alpha+\beta-\gamma)\pi}{2}}{b_1 \cos \frac{(\beta+\gamma)\pi}{2}} &\leq \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2 \sin \frac{(2\alpha+\beta-\gamma)\pi}{2}}{b_1 \sin \frac{(\beta+\gamma)\pi}{2}}, \\ -\frac{b_3 \cos(\alpha\pi)}{b_1 \cos(\gamma\pi)} &\leq \frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3 \sin(\alpha\pi)}{b_1 \sin(\gamma\pi)}, \end{aligned}$$

ako je  $\mu = \gamma$ , redukujući se na novi tip konstitutivnih jednačina koje sadrže frakcione izvode reda koji pripada intervalu  $(0, 1)$  ako je  $2\alpha \leq 1$ , budući da primena frakcionog izvoda reda  $\alpha$  na (3.102), prema (3.28), daje

$$\left( a_1 + a_2 {}_0 D_t^{\alpha+\beta} + a_3 {}_0 D_t^{\alpha+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 D_t^{\alpha-\gamma} + b_2 {}_0 D_t^{2\alpha+\beta-\gamma} + b_3 {}_0 D_t^{2\alpha} \right) \varepsilon(t).$$

Treba primetiti da izbor parametara  $\mu = \alpha$ ,  $\mu = \alpha + \beta$  i  $\mu = \alpha + \gamma$ , koji bi dao tri specijalna slučaja termodinamički konzistentnog modela IDD.IDD, datog sa (3.97), dovodi do kontradikcije u termodinamičkom zahtevu (3.98), budući da bi se tada respektivno dobilo  $\gamma \leq \beta$ ,  $\gamma \leq 0$  i  $\gamma \leq -(\gamma - \beta)$ , što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je za model IDD.IDD, dat sa (3.97),  $\beta < \gamma$  i  $\gamma \in (0, 1)$ .

**Model  $\text{IDD}^+.\text{IDD}^+$**  Model  $\text{IDD}^+.\text{IDD}^+$  je modifikacija modela IDD.IDD, datog sa (3.94), takva da je red jednog frakcionog izvoda koji deluje na napon, kao i red jendog frakcionog izvoda koji deluje na deformaciju, iznad jedan, dajući izraz

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^{1+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^\nu + b_3 {}_0 D_t^{1+\eta} \right) \varepsilon(t), \quad (3.103)$$

za model  $\text{IDD}^+.\text{IDD}^+$ . Konzervativni i disipativni moduo

$$E'(\omega) = a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \cos \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + \left[ a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\beta-\mu} \cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2} \right]$$

$$+ \left[ -a_1 b_3 \omega^{1-\alpha+\eta} \sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} - a_3 b_1 \omega^{1+\gamma-\mu} \sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \right] \\ + \left[ a_2 b_3 \omega^{1+\beta+\eta} \sin \frac{(\beta-\eta)\pi}{2} + a_3 b_2 \omega^{1+\gamma+\nu} \sin \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2} \right] + a_3 b_3 \omega^{2+\gamma+\eta} \cos \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2}, \quad (3.104)$$

$$E''(\omega) = a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \sin \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + \left[ a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} - a_2 b_1 \omega^{\beta-\mu} \sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2} \right] \\ + \left[ a_1 b_3 \omega^{1-\alpha+\eta} \cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{\beta+\nu} \sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} - a_3 b_1 \omega^{1+\gamma-\mu} \cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \right] \\ + \left[ a_2 b_3 \omega^{1+\beta+\eta} \cos \frac{(\beta-\eta)\pi}{2} - a_3 b_2 \omega^{1+\gamma+\nu} \cos \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2} \right] + a_3 b_3 \omega^{2+\gamma+\eta} \sin \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2}, \quad (3.105)$$

slede iz kompleksnog Jangovog modula

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{\frac{b_1}{(i\omega)^\mu} + b_2(i\omega)^\nu + b_3(i\omega)^{1+\eta}}{\frac{a_1}{(i\omega)^\alpha} + a_2(i\omega)^\beta + a_3(i\omega)^{1+\gamma}},$$

pri čemu su  $E'$  i  $E''$  dati sa (3.37) preko kompleksnog Jangovog modula.

Primenom Pravila 1 na sedmi i osmi član u konyervativnom modulu (3.104), respektivno se dobija  $\eta \leq \beta$  i  $\gamma \leq \nu$ , kao i  $\mu \leq \alpha$ ,  $\beta \leq \nu$ , i  $\gamma \leq \eta$ , iz prvog, petog i poslednjeg člana u disipativnom modulu (3.105), što se svodi na  $\mu \leq \alpha$  i  $\gamma \leq \eta \leq \beta \leq \nu$ . Clanovi u zagradi u (3.104) i (3.105) se kombinuju prema Pravilu 4 izjednačavanjem eksponenata frekvencija koji pripadaju istom opsegu:  $-\alpha + \nu$  i  $\beta - \mu$  odgovarajućih članova u prvoj zagradi,  $1 - \alpha + \eta$ ,  $\beta + \nu$  i  $1 + \gamma - \mu$  odgovarajućih članova u drugoj zagradi, kao i  $1 + \beta + \eta$  i  $1 + \gamma + \nu$  odgovarajućih članova u trećoj zagradi, što daje sistem linearnih jednačina  $-\alpha + \nu = \beta - \mu$ ,  $1 - \alpha + \eta = \beta + \nu = 1 + \gamma - \mu$  i  $1 + \beta + \eta = 1 + \gamma + \nu$ , koji sadrži jednu redundantnu jednačinu, te se razmatra sistem jednačina  $\beta + \nu = 1 - \alpha + \eta$ ,  $\mu = \alpha + \gamma - \eta$ , i  $\beta - \nu = \gamma - \eta$ , tako nepoznatim  $\beta$ ,  $\mu$ , i  $\nu$  i sa poznatim  $\alpha$ ,  $\gamma$  i  $\eta$ , čije je rešenje  $\beta = \frac{1+\gamma-\alpha}{2} \in (0, 1)$ ,  $\mu = \alpha + \gamma - \eta \in (0, 1)$  i  $\nu = \frac{1+\eta-(\alpha+\gamma-\eta)}{2} \in (0, 1)$ .

Ograničenja na parametre modela  $\mu \leq \alpha$  i  $\beta \leq \nu$ , sa  $\beta$ ,  $\mu$  i  $\nu$  datim preko  $\alpha$ ,  $\gamma$  i  $\eta$ , kao iznad, redukuju se na  $\gamma \leq \eta$ , što predstavlja termodinamičku restrikciju (3.107)<sub>2</sub>, dok restrikcija (3.107)<sub>3</sub> sledi iz  $\eta \leq \beta$ , dajući  $\alpha - \gamma + 2\eta = \alpha + \eta + (\eta - \gamma) \leq 1$ , te je takođe  $\alpha + \eta \leq 1$ . Prema  $\mu \leq \alpha$  i  $\gamma \leq \eta$  sledi  $\gamma + \mu \leq \alpha + \eta \leq 1$ , što implicira da su kosinus u prvom i trećem članu u drugoj zagradi u (3.105) nenegativni, i stoga, prema Pravilu 3, druga zagrada u (3.105) predstavlja termoinamičku restrikciju (3.109). Sa druge strane, zbir u prvoj zagradi u (3.104) ne predstavlja termodinamičku restrikciju, budući da su oba kosinusa nenegativna: prvi zbog  $\beta + \mu = \frac{1+\gamma-\alpha}{2} + \alpha + \gamma - \eta = \frac{1+\alpha+\gamma-2(\eta-\gamma)}{2} \leq 1$ , jer je  $\alpha + \gamma \leq \alpha + \eta \leq 1$ , a drugi zbog  $\alpha + \nu = \alpha + \frac{1+\eta-(\alpha+\gamma-\eta)}{2} = \frac{1+\alpha-\gamma+2\eta}{2} \leq 1$ , prema restrikciji (3.107)<sub>3</sub>. Primena Pravila 3 na zbir u drugoj zagradi u (3.104), kao i na zbir u prvoj i trećoj zagradi u (3.105), daje termodinamičku restrikciju (3.110), kao i termodinamičke restrikcije (3.108)<sub>1</sub> i (3.108)<sub>2</sub>. Treba naglasiti da zbir u trećoj zagradi u (3.104) ne predstavlja termodinamičku restrikciju, jer je već nenegativan.

Termodinamički konzistentan model  $\text{IDD}^+.\text{IDD}^+$ , prema (3.103), postaje

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^{\frac{1+\gamma-\alpha}{2}} + a_3 {}_0 D_t^{1+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^{\alpha+\gamma-\eta} + b_2 {}_0 D_t^{\frac{1+\eta-(\alpha+\gamma-\eta)}{2}} + b_3 {}_0 D_t^{1+\eta} \right) \varepsilon(t), \quad (3.106)$$

i podleže je termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leq \alpha + \gamma - \eta \leq 1, \quad \gamma \leq \eta, \quad \alpha + \eta + (\eta - \gamma) = \alpha - \gamma + 2\eta \leq 1, \quad (3.107)$$

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+\alpha+3\gamma-2\eta)\pi}{4}}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\cos \frac{(1-\alpha+\gamma-2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}}, \quad (3.108)$$

$$a_3 b_1 \cos \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2} - a_2 b_2 \sin \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2} \leq a_1 b_3 \cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}, \quad (3.109)$$

$$a_1 b_3 \sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} \leq a_2 b_2 \cos \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2} - a_3 b_1 \sin \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}. \quad (3.110)$$

Treba primetiti da red  $\frac{1+\gamma-\alpha}{2}$  frakcionog izvoda koji deluje na napon predstavlja aritmetičku sredinu redova preostala dva operatora koja deluju na napon, pri čem se red integrala uzima kao negativan red izvoda. Slično, red  $\frac{1+\eta-(\alpha+\gamma-\eta)}{2}$  frakcionog izvoda koji deluje na deformaciju predstavlja aritmetičku sredinu redova preostala dva operatora koja deluju na deformaciju, pri čem se red integrala uzima kao negativan red izvoda. Termodinamički zahtev (3.107)<sub>1</sub> potiče od pretpostavke da je red  $\mu = \alpha - (\eta - \gamma)$  frakcionog integrala u modelu  $\text{IDD}^+.\text{IDD}^+$ , datom sa (3.103) u intervalu  $(0, 1)$ , i nema dodatnih restrikcija da bi se obezbedilo da su  $\beta = \frac{1+\gamma-\alpha}{2} \in (0, 1)$

i  $\nu = \frac{1+\eta-(\alpha+\gamma-\eta)}{2} \in (0, 1)$ . Treba naglasiti da prema (3.107)<sub>3</sub>,  $1 + \alpha - \gamma + 2\eta \in (1, 2)$  obezbeđuje nenegetivnost za  $\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}$ , dok  $1 - \alpha + \gamma - 2\eta = 1 - (\alpha - \gamma + 2\eta) \in (0, 1)$  obezbeđuje nenegativnost za  $\cos \frac{(1-\alpha+\gamma-2\eta)\pi}{4}$ . Slično,  $\alpha + 3\gamma - 2\eta = (\alpha + \gamma - \eta) - (\eta - \gamma) + \gamma \in (-1, 2)$  obezbeđuje nenegativnost i za  $\sin \frac{(1+\alpha+3\gamma-2\eta)\pi}{4}$  i za  $\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}$ , jer je  $1 + \alpha + 3\gamma - 2\eta \in (0, 3)$  i  $1 - \alpha - 3\gamma + 2\eta \in (-1, 2)$ . Takođe,  $\alpha + 2\gamma - \eta = \alpha + \gamma - (\eta - \gamma) \leq \alpha + \eta + (\eta - \gamma) \leq 1$ , prema (3.107)<sub>2,3</sub>, kao i  $\alpha + \eta \leq 1$ , videti iznad, obezbeđuje nenegativnost odgovarajućih sinusa i kosinusa u (3.109) i (3.110).

Jedan od specijalnih slučajeva termodinamički konzistentnog modela  $\text{IDD}^+.\text{IDD}^+$  dobija se kada se  $\gamma = \alpha$  uvrsti u konstitutivnoj jednačini (3.106), dajući model

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^{\frac{1}{2}} + a_3 {}_0D_t^{1+\alpha} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^{2\alpha-\eta} + b_2 {}_0D_t^{\frac{1+\eta-(2\alpha-\eta)}{2}} + b_3 {}_0D_t^{1+\eta} \right) \varepsilon(t),$$

koji podleže termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2\alpha - \eta \leq 1, \quad \alpha \leq \eta \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{a_2}{a_1} &\leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\sin \frac{(1+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+2(2\alpha-\eta))\pi}{4}}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\cos \frac{(1-2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+2(2\alpha-\eta))\pi}{4}}, \\ a_3 b_1 \cos \frac{(\alpha + (2\alpha - \eta))\pi}{2} - a_2 b_2 \sin \frac{(\eta - \alpha)\pi}{2} &\leq a_1 b_3 \cos \frac{(\alpha + \eta)\pi}{2}, \\ a_1 b_3 \sin \frac{(\alpha + \eta)\pi}{2} &\leq a_2 b_2 \cos \frac{(\eta - \alpha)\pi}{2} - a_3 b_1 \sin \frac{(\alpha + (2\alpha - \eta))\pi}{2}. \end{aligned}$$

Još jedan specijalan slučaj termodinamički konzistentnog modela  $\text{IDD}^+.\text{IDD}^+$ , datog sa (3.103), dobija se za  $\eta = \alpha$  u obliku

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^{\frac{1+\gamma-\alpha}{2}} + a_3 {}_0D_t^{1+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^\gamma + b_2 {}_0D_t^{\frac{1+\alpha-\gamma}{2}} + b_3 {}_0D_t^{1+\alpha} \right) \varepsilon(t), \quad (3.111)$$

i podleže termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} \gamma &\leq \alpha \leq \frac{1+\gamma}{3}, \\ \frac{a_2}{a_1} &\leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\sin \frac{(1+3\alpha-\gamma)\pi}{4}}{\sin \frac{(1-\alpha+3\gamma)\pi}{4}}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\cos \frac{(1-3\alpha+\gamma)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+\alpha-3\gamma)\pi}{4}}, \\ a_3 b_1 \cos(\gamma\pi) - a_2 b_2 \sin \frac{(\alpha - \gamma)\pi}{2} &\leq a_1 b_3 \cos(\alpha\pi), \\ a_1 b_3 \sin(\alpha\pi) &\leq a_2 b_2 \cos \frac{(\alpha - \gamma)\pi}{2} - a_3 b_1 \sin(\gamma\pi). \end{aligned}$$

Ako je  $\gamma = \alpha$ , tj. ako je  $\gamma = \eta = \alpha$  u (3.106), model (3.111) se dalje transformiše u

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^{\frac{1}{2}} + a_3 {}_0D_t^{1+\alpha} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^\alpha + b_2 {}_0D_t^{\frac{1}{2}} + b_3 {}_0D_t^{1+\alpha} \right) \varepsilon(t),$$

i podleže termodinamičkim restrikcijama

$$\alpha \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{b_1}{a_1} \leq \frac{b_2}{a_2} \leq \frac{b_3}{a_3}, \quad \left( \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_3}{a_3} \right) \sin(\alpha\pi) \leq \frac{a_2 b_2}{a_1 a_3}.$$

Pretpostavka da je  $\eta = \gamma$  u (3.106) transformiše model  $\text{IDD}^+.\text{IDD}^+$  u

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^{\frac{1+\gamma-\alpha}{2}} + a_3 {}_0D_t^{1+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^\alpha + b_2 {}_0D_t^{\frac{1+\alpha+\gamma}{2}} + b_3 {}_0D_t^{1+\alpha+\gamma} \right) \varepsilon(t),$$

koji podleže termodinamičkim restrikcijama

$$\alpha + \gamma \leq 1, \quad \frac{b_1}{a_1} \leq \frac{b_2}{a_2} \leq \frac{b_3}{a_3}, \quad \left( \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_3}{a_3} \right) \sin \frac{(\alpha + \gamma)\pi}{2} \leq \frac{a_2 b_2}{a_1 a_3}.$$

Termodinamički konzistentan model  $\text{IDD}^+.\text{IDD}^+$ , prema (3.106) sa pretpostavkom da je  $\eta = \alpha + \gamma$  postaje model

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^{\frac{1+\gamma-\alpha}{2}} + a_3 {}_0D_t^{1+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 + b_2 {}_0D_t^{\frac{1+\alpha+\gamma}{2}} + b_3 {}_0D_t^{1+\alpha+\gamma} \right) \varepsilon(t),$$

koji podleže termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} 3\alpha + \gamma &\leq 1, \\ \frac{a_2}{a_1} &\leq \frac{b_2 \sin \frac{(1+3\alpha-\gamma)\pi}{4}}{b_1 \sin \frac{(1-\alpha+\gamma)\pi}{4}}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3 \cos \frac{(1-3\alpha-\gamma)\pi}{4}}{b_2 \cos \frac{(1+\alpha-\gamma)\pi}{4}}, \\ a_3 b_1 \cos \frac{\gamma\pi}{2} - a_2 b_2 \sin \frac{\alpha\pi}{2} &\leq a_1 b_3 \cos \frac{(2\alpha+\gamma)\pi}{2}, \\ a_1 b_3 \sin \frac{(2\alpha+\gamma)\pi}{2} &\leq a_2 b_2 \cos \frac{\alpha\pi}{2} - a_3 b_1 \sin \frac{\gamma\pi}{2}. \end{aligned}$$

### 3.2.2.3 Skup modela koji potiču od modela IID.IID

Pored modela IID.IID, koji sadrži operatore reda u intervalu  $(0, 1)$ , razmatra se i model  $I^+ ID \cdot I^+ ID$  koji sadrži frakcione integrale u intervalu  $(1, 2)$ , dok su modeli  $I^+ ID \cdot IID$  i  $IID \cdot I^+ ID$  termodinamički nekonzistentni i stoga se izostavljaju iz dalje analize.

**Model IID.IID** Kada se pored frakcionog integrala na desnoj strani konstitutivne jednačine (3.12) odaberu i frakcioni izvod i frakcioni integral dobija se model IID.IID u obliku

$$(a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 I_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0 I_t^\mu + b_2 {}_0 I_t^\nu + b_3 {}_0 D_t^\eta) \varepsilon(t), \quad \text{sa } \beta < \alpha, \nu < \mu, \quad (3.112)$$

za koji su konzervativni i disipativni moduo

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \cos \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + a_1 b_2 \omega^{-\alpha-\nu} \cos \frac{(\alpha-\nu)\pi}{2} + a_1 b_3 \omega^{-\alpha+\eta} \cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} \\ &+ a_2 b_1 \omega^{-\beta-\mu} \cos \frac{(\beta-\mu)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{-\beta-\nu} \cos \frac{(\beta-\nu)\pi}{2} + a_2 b_3 \omega^{-\beta+\eta} \cos \frac{(\beta+\eta)\pi}{2} \\ &+ a_3 b_1 \omega^{\gamma-\mu} \cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} + a_3 b_2 \omega^{\gamma-\nu} \cos \frac{(\gamma+\nu)\pi}{2} + a_3 b_3 \omega^{\gamma+\eta} \cos \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} E''(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \sin \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + a_1 b_2 \omega^{-\alpha-\nu} \sin \frac{(\alpha-\nu)\pi}{2} + a_1 b_3 \omega^{-\alpha+\eta} \sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} \\ &+ a_2 b_1 \omega^{-\beta-\mu} \sin \frac{(\beta-\mu)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{-\beta-\nu} \sin \frac{(\beta-\nu)\pi}{2} + a_2 b_3 \omega^{-\beta+\eta} \sin \frac{(\beta+\eta)\pi}{2} \\ &- a_3 b_1 \omega^{\gamma-\mu} \sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} - a_3 b_2 \omega^{\gamma-\nu} \sin \frac{(\gamma+\nu)\pi}{2} + a_3 b_3 \omega^{\gamma+\eta} \sin \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.114)$$

koji se dobijaju iz kompleksnog Jangovog modula

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{\frac{b_1}{(i\omega)^\mu} + \frac{b_2}{(i\omega)^\nu} + b_3 (i\omega)^\eta}{\frac{a_1}{(i\omega)^\alpha} + \frac{a_2}{(i\omega)^\beta} + a_3 (i\omega)^\gamma},$$

pri čemu su  $E'$  i  $E''$  dati sa (3.64) preko kompleksnog Jangovog modula.

Primenom Pravila 1 na prvi, drugi, četvrti, peti i poslednji član u disipativnom modulu (3.114), dobijaju se termodinamičke restrikcije  $\mu \leq \alpha, \nu \leq \alpha, \mu \leq \beta, \nu \leq \beta$  i  $\gamma \leq \eta$ , tj.  $\nu < \mu \leq \beta < \alpha$  i  $\gamma \leq \eta$ . Iako treći, šesti, sedmi i osmi član u konzervativnom i disipativnom modulu (3.113) i (3.114) imaju eksponente frekvencije u istom intervalu  $(-1, 1)$ , ne mogu se svi kombinovati prema Pravilu 4, jer bi se izjednačavanjem  $-\alpha+\eta$  sa  $-\beta+\eta$  i  $\gamma-\mu$  sa  $\gamma-\nu$  dobilo da je  $\alpha=\beta$  i  $\mu=\nu$ , što je u suprotnosti sa pretpostavkom da modela IID.IID, dat sa (3.112), ima po dva frakciona izvoda sa različitim redovima koji deluju na napon i deformaciju. Stoga se biraju dva seta članova u konzervativnom i disipativnom modulu (3.113) i (3.114), tako da svaki sadrži dva člana, koji se kombinuju prema Pravilu 4: prvi set članova se dobija izjednačavanjem eksponenata frekvencije koji odgovaraju trećem i sedmom članu, dajući  $\Omega_1 = -\alpha + \eta = \gamma - \mu$ , a drugi set članova se dobija izjednačavanjem eksponenata frekvencije koje odgovaraju šestom i osmom članu, dajući  $\Omega_2 = -\beta + \eta = \gamma - \nu$ , dakle sledi da je  $\mu = \alpha - (\eta - \gamma) \in (0, 1)$  i  $\nu = \beta - (\eta - \gamma) \in (0, 1)$  u saglasnosti sa zahtevima  $\nu < \mu$  i  $\beta < \alpha$ , jer se zamenom  $\mu$  i  $\nu$  u  $\nu < \mu$  dobija  $\beta < \alpha$ , dok  $\mu \leq \beta$  daje  $\alpha + \gamma \leq \beta + \eta$ , što, zajedno sa  $\gamma \leq \eta$ , predstavlja termodinamičke zahteve (3.118)<sub>1,2,4</sub>, a  $\nu = \beta - (\eta - \gamma) \in (0, 1)$  predstavlja prvu nejednakost u termodinamičkom zahtevu (3.118)<sub>3</sub>.

Mogu se i drugačije kreirati dva seta članova u konzervativnom i disipativnom modulu (3.113) i (3.114), tako da se prvi set članova dobija izjednačavanjem eksponenata frekvencije  $-\alpha + \eta$  i  $\gamma - \nu$  koji odgovaraju trećem i osmom članu, dajući  $\nu = \alpha - (\eta - \gamma)$ , a drugi set članova izjednačavanjem eksponenata frekvencije  $-\beta + \eta$  i  $\gamma - \mu$  koji odgovaraju šestom i sedmom članu, dajući  $\mu = \beta - (\eta - \gamma)$ , što implicira da je  $\beta > \alpha$ , ako je  $\nu < \mu$  nametnuto, što je u suprotnosti sa postavkom da su u modelu IID.IID, datom sa (3.112), redovi frakcionalih integrala izabrani u opadajućem poretku, odnosno da je  $\beta < \alpha$ , ako je  $\nu < \mu$ .

Nakon izbora  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ , konzervativni i disipativni moduo (3.113) i (3.114) se transformišu u

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \cos \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + a_1 b_2 \omega^{-\alpha-\nu} \cos \frac{(\alpha-\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{-\beta-\mu} \cos \frac{(\beta-\mu)\pi}{2} \\ &\quad + \omega^{\Omega_1} \left[ a_1 b_3 \cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} + a_3 b_1 \cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \right] + a_2 b_2 \omega^{-\beta-\nu} \cos \frac{(\beta-\nu)\pi}{2} \\ &\quad + \omega^{\Omega_2} \left[ a_2 b_3 \cos \frac{(\beta+\eta)\pi}{2} + a_3 b_2 \cos \frac{(\gamma+\nu)\pi}{2} \right] + a_3 b_3 \omega^{\gamma+\eta} \cos \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} E''(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \sin \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + a_1 b_2 \omega^{-\alpha-\nu} \sin \frac{(\alpha-\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{-\beta-\mu} \sin \frac{(\beta-\mu)\pi}{2} \\ &\quad + \omega^{\Omega_1} \left[ a_1 b_3 \sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} - a_3 b_1 \sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \right] + a_2 b_2 \omega^{-\beta-\nu} \sin \frac{(\beta-\nu)\pi}{2} \\ &\quad + \omega^{\Omega_2} \left[ a_2 b_3 \sin \frac{(\beta+\eta)\pi}{2} - a_3 b_2 \sin \frac{(\gamma+\nu)\pi}{2} \right] + a_3 b_3 \omega^{\gamma+\eta} \sin \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2}. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Članovi u zgradama u konzervativnom i disipativnom modulu (3.115) se kombinuju prema Pravilu 2, pri čemu se nameće da je  $\gamma+\mu \leq 1$ , što takođe implicira da je  $\gamma+\nu \leq 1$ , jer je  $\nu < \mu$ , dok  $\alpha+\eta < \beta+\eta$  mogu biti ili manji ili veći od jedan, stoga odgovarajući kosinusni mogu biti ili pozitivni ili negativni. Zahtevanjem nenegativnosti zbiru članova u zgradama u (3.115) dobija se leva strana termodinamičkih restrikcija (3.119) i (3.120). Sa druge strane, članovi u disipativnom modulu (3.116) se kombinuju prema Pravilu 3, tako da nenegativnosti zbiru članova u zgradama predstavlja desnu stranu termodinamičkih restrikcija (3.119) i (3.120). Treba napomenuti da uslov  $\gamma+\mu \leq 1$  sa  $\mu = \alpha - (\eta - \gamma)$  implicira poslednju nejednakost u (3.118)<sub>3</sub>.

Termodinamički konzistentan model IID.IID se dobija iz (3.112) kao

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 I_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^{\alpha+\gamma-\eta} + b_2 {}_0 I_t^{\beta+\gamma-\eta} + b_3 {}_0 D_t^\eta \right) \varepsilon(t), \quad (3.117)$$

i podleže termodinamičkim restrikcijama

$$\beta < \alpha, \quad \gamma \leq \eta, \quad 0 \leq \beta + \gamma - \eta \leq \alpha + 2\gamma - \eta \leq 1, \quad \alpha + \gamma \leq \beta + \eta, \quad (3.118)$$

$$-\frac{b_3}{b_1} \frac{\cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \leq \frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}}, \quad (3.119)$$

$$-\frac{b_3}{b_2} \frac{\cos \frac{(\beta+\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \leq \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\sin \frac{(\beta+\eta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+2\gamma-\eta)\pi}{2}}. \quad (3.120)$$

Treba naglasiti da redovi frakcionalih integrala koji deluju na deformaciju zadovoljavaju nejednakosti  $0 \leq \beta + \gamma - \eta < \alpha + \gamma - \eta \leq \alpha + 2\gamma - \eta \leq 1$ , prema termodinamičkim zahtevima (3.118)<sub>1,3</sub>. Takođe, prva nejednakost u (3.119), kao i u (3.120), je ili trivijalno zadovoljena ako je  $\alpha + \eta \leq 1$ , jer je tada  $\cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} \geq 0$  i  $\cos \frac{(\beta+\eta)\pi}{2} > 0$ , ili predstavlja restrikciju ako je  $\beta + \eta > 1$ , jer je tada  $\cos \frac{(\beta+\eta)\pi}{2} \leq 0$  i  $\cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} < 0$ . Drugi mogući slučaj je  $\beta + \eta \leq 1 < \alpha + \eta$ , implicirajući da je prva nejednakost u (3.120) trivijalno zadovoljena, dok prva nejednakost u (3.119) predstavlja restrikciju. Prema termodinamičkoj restrikciji (3.118)<sub>3</sub>, važi da je  $\beta + 2\gamma - \eta \leq \alpha + 2\gamma - \eta \leq 1$  što obezbeđuje nenegativnost odgovarajućih sinusa i kosinusa u (3.119) i (3.120).

Prema (3.28), primena frakcionog izvoda reda  $\alpha$  na termodinamički konzistentan model IID.IID, dat sa (3.117), transformiše model na

$$\left( a_1 + a_2 {}_0 D_t^{\alpha-\beta} + a_3 {}_0 D_t^{\alpha+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 D_t^{\eta-\gamma} + b_2 {}_0 D_t^{(\alpha-\beta)+(\eta-\gamma)} + b_3 {}_0 D_t^{\alpha+\eta} \right) \varepsilon(t),$$

predstavljajući novi slučaj konstitutivnih jednačina koje sadrže frakcione izvode reda u intervalu  $(0, 1)$  ako je  $\alpha + \eta \leq 1$ , budući da najviši red izvoda na levoj strani modela ima veću vrednost nego najniži red izvoda na desnoj strani modela.

Jedan od specijalnih slučajeva termodinamički konzistentog modela IID.IID, datog sa (3.117), dobija se za  $\eta = \gamma$ , u obliku

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 I_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\alpha + b_2 {}_0 I_t^\beta + b_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \varepsilon(t),$$

i podleže termodinamičkim restrikcijama

$$\beta < \alpha, \quad \alpha + \gamma \leq 1, \quad \frac{b_1}{a_1} \leq \frac{b_3}{a_3}, \quad \frac{b_2}{a_2} \leq \frac{b_3}{a_3},$$

predstavljajući konstitutivnu jednačinu koja pripada klasi modela Case I, videti dodatak, budući da se primenom frakcionog izvoda reda  $\alpha$  na prethodnu konstitutivnu jednačinu, prema (3.28), dobija

$$\left( a_1 + a_2 {}_0 D_t^{\alpha-\beta} + a_3 {}_0 D_t^{\alpha+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 + b_2 {}_0 D_t^{\alpha-\beta} + b_3 {}_0 D_t^{\alpha+\gamma} \right) \varepsilon(t).$$

Drugi specijalan slučaj termodinamički konzistentog modela IID.IID, datog sa (3.117), dobija se u obliku

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0I_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^{\alpha-\beta+\gamma} + b_2 {}_0I_t^\gamma + b_3 {}_0D_t^\beta \right) \varepsilon(t), \quad (3.121)$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} \gamma &\leq \beta < \alpha, \quad 0 \leq \gamma \leq \alpha - \beta + 2\gamma \leq 1, \quad \alpha + \gamma \leq 2\beta, \\ -\frac{b_3}{b_1} \frac{\cos \frac{(\alpha+\beta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha-\beta+2\gamma)\pi}{2}} &\leq \frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(\alpha+\beta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha-\beta+2\gamma)\pi}{2}}, \\ -\frac{b_3}{b_2} \frac{\cos (\beta\pi)}{\cos (\gamma\pi)} &\leq \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\sin (\beta\pi)}{\sin (\gamma\pi)}, \end{aligned}$$

za  $\eta = \beta$ , predstavljajući konstitutivnu jednačinu novog tipa modela koji sadrži frakcione izvode reda koji pripada intervalu  $(0, 1)$  ako je  $\alpha + \beta \leq 1$ , budući da primena frakcionog izvoda reda  $\alpha$  na (3.121), prema (3.28), daje

$$\left( a_1 + a_2 {}_0D_t^{\alpha-\beta} + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0D_t^{\beta-\gamma} + b_2 {}_0D_t^{\alpha-\gamma} + b_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta} \right) \varepsilon(t).$$

Još jedan specijalan slučaj modela (3.117) se dobija za  $\eta = \alpha$  u obliku

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0I_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^\gamma + b_2 {}_0I_t^{-\alpha+\beta+\gamma} + b_3 {}_0D_t^\alpha \right) \varepsilon(t),$$

koji podleže termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} \gamma &\leq \beta < \alpha, \quad 0 \leq -\alpha + \beta + \gamma \leq 2\gamma \leq 1, \\ -\frac{b_3}{b_1} \frac{\cos (\alpha\pi)}{\cos (\gamma\pi)} &\leq \frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin (\alpha\pi)}{\sin (\gamma\pi)}, \\ -\frac{b_3}{b_2} \frac{\cos \frac{(\alpha+\beta)\pi}{2}}{\cos \frac{(-\alpha+\beta+2\gamma)\pi}{2}} &\leq \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\sin \frac{(\alpha+\beta)\pi}{2}}{\sin \frac{(-\alpha+\beta+2\gamma)\pi}{2}}, \end{aligned}$$

i predstavlja konstitutivnu jednačinu novog tipa modela koja sadrži frakcione izvode reda koji pripada intervalu  $(0, 1)$  ako je  $2\alpha \leq 1$ , budući da on postaje

$$\left( a_1 + a_2 {}_0D_t^{\alpha-\beta} + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0D_t^{\alpha-\gamma} + b_2 {}_0D_t^{(\alpha-\beta)+(\alpha-\gamma)} + b_3 {}_0D_t^{2\alpha} \right) \varepsilon(t),$$

kada se predstavi preko frakcionih izvoda. Specijalni slučaj modela (3.117) dobija se i ako je  $\eta = \beta + \gamma$ , transformišući (3.117) u

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0I_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^{\alpha-\beta} + b_2 + b_3 {}_0D_t^{\beta+\gamma} \right) \varepsilon(t),$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} \beta &< \alpha \leq 2\beta, \quad \beta + \gamma \leq 1, \quad \alpha - \beta + \gamma \leq 1, \\ -\frac{b_3}{b_1} \frac{\cos \frac{(\alpha+\beta+\gamma)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha-\beta+\gamma)\pi}{2}} &\leq \frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(\alpha+\beta+\gamma)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha-\beta+\gamma)\pi}{2}}, \\ -\frac{b_3}{b_2} \frac{\cos \frac{(2\beta+\gamma)\pi}{2}}{\cos \frac{\gamma\pi}{2}} &\leq \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\sin \frac{(2\beta+\gamma)\pi}{2}}{\sin \frac{\gamma\pi}{2}}, \end{aligned}$$

dajući model

$$\left( a_1 + a_2 {}_0D_t^{\alpha-\beta} + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0D_t^\beta + b_2 {}_0D_t^\alpha + b_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta+\gamma} \right) \varepsilon(t),$$

nakon primene frakcionog izvoda reda  $\alpha$ , prema pravilu (3.28) za frakcioni integral i izvod, te model pripada novom tipu konstitutivnih jednačina koje sadrže frakcione izvode reda u intervalu  $(0, 1)$ , ako je  $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$ . Za specijalan slučaj kada je  $\eta = \alpha + \gamma$  javlja se kontradikcija, budući da red  $\beta + \gamma - \eta$  frakcionog integrala u (3.117) postaje  $\beta - \alpha < 0$ , što je u suprotnosti sa pretpostavkom da su u modelu IID.IID, datom sa (3.117), redovi frakcionih izvoda izabrani u opadajućem poretku, odnosno da je  $\alpha > \beta$ .

**Model  $I^+ID \cdot I^+ID$**  Pretpostavljanjem da je jedan od frakcionalih integrala koji deluje na napon i jedan koji deluje na deformaciju, u modelu  $IID \cdot IID$ , datom sa (3.112), reda iznad jedan, konstitutivna jednačina (3.112) postaje

$$\left( a_1 {}_0I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0I_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^{1+\mu} + b_2 {}_0I_t^\nu + b_3 {}_0D_t^\eta \right) \varepsilon(t), \quad (3.122)$$

dok se konzervativni i disipativni moduo

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-2-\alpha-\mu} \cos \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + \left[ a_1 b_2 \omega^{-1-\alpha-\nu} \sin \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{-1-\beta-\mu} \sin \frac{(\beta-\mu)\pi}{2} \right] \\ &\quad + \left[ -a_1 b_3 \omega^{-1-\alpha+\eta} \sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} - a_3 b_1 \omega^{-1+\gamma-\mu} \sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{-\beta-\nu} \cos \frac{(\beta-\nu)\pi}{2} \right] \\ &\quad + \left[ a_2 b_3 \omega^{-\beta+\eta} \cos \frac{(\beta+\eta)\pi}{2} + a_3 b_2 \omega^{\gamma-\nu} \cos \frac{(\gamma+\nu)\pi}{2} \right] + a_3 b_3 \omega^{\gamma+\eta} \cos \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned} E''(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-2-\alpha-\mu} \sin \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + \left[ a_1 b_2 \omega^{-1-\alpha-\nu} \cos \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2} - a_2 b_1 \omega^{-1-\beta-\mu} \cos \frac{(\beta-\mu)\pi}{2} \right] \\ &\quad + \left[ a_1 b_3 \omega^{-1-\alpha+\eta} \cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} - a_3 b_1 \omega^{-1+\gamma-\mu} \cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{-\beta-\nu} \sin \frac{(\beta-\nu)\pi}{2} \right] \\ &\quad + \left[ a_2 b_3 \omega^{-\beta+\eta} \sin \frac{(\beta+\eta)\pi}{2} - a_3 b_2 \omega^{\gamma-\nu} \sin \frac{(\gamma+\nu)\pi}{2} \right] + a_3 b_3 \omega^{\gamma+\eta} \sin \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.124)$$

dobijaju iz kompleksnog Jangovog modula

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{\frac{b_1}{(i\omega)^{1+\mu}} + \frac{b_2}{(i\omega)^\nu} + b_3(i\omega)^\eta}{\frac{a_1}{(i\omega)^{1+\alpha}} + \frac{a_2}{(i\omega)^\beta} + a_3(i\omega)^\gamma},$$

pri čemu su  $E'$  i  $E''$  dati sa (3.72) preko kompleksnog Jangovog modula  $\hat{E}$ .

Članovi u zgradama u konzervativnom i disipativnom modulu (3.123) i (3.124) se kombinuju prema Pravilu 4 izjednačavanjem eksponenata frekvencije:  $-1-\alpha-\nu$  i  $-1-\beta-\mu$  odgovarajućih članova u prvoj zgradi,  $-1-\alpha+\eta$ ,  $-1+\gamma-\mu$  i  $-\beta-\nu$  odgovarajućih članova u drugoj zgradi, kao i  $\eta-\beta$  i  $\gamma-\nu$  odgovarajućih članova u trećoj zgradi, dajući sistem linearnih jednačina  $-1-\alpha-\nu = -1-\beta-\mu$ ,  $-1-\alpha+\eta = -1+\gamma-\mu = -\beta-\nu$  i  $\eta-\beta = \gamma-\nu$  koji sadrži jednu redundantnu jednačinu. Stoga se razmatra sistem jednačina:  $\beta-\nu = \alpha-\mu$ ,  $\eta = \alpha+\gamma-\mu$  i  $\beta+\nu = 1-\gamma+\mu$  sa nepoznatim  $\beta$ ,  $\nu$  i  $\eta$  i poznatim  $\alpha$ ,  $\gamma$  i  $\mu$ , tako da se za rešenje sistema dobija  $\beta = \frac{1+\alpha-\gamma}{2} \in (0, 1)$ ,  $\nu = \frac{1+\mu-(\alpha+\gamma-\mu)}{2} \in (0, 1)$  i  $\eta = \alpha+\gamma-\mu \in (0, 1)$ .

Primenom Pravila 1 na drugi i treći član u (3.123), se dobija da je  $\alpha \leq \nu$  i  $\mu \leq \beta$ , dok primena Pravila 1 na prvi, šesti i poslednji član u (3.124) implicira  $\mu \leq \alpha$ ,  $\nu \leq \beta$  i  $\gamma \leq \eta$ , tj.  $\mu \leq \alpha \leq \nu \leq \beta$  i  $\gamma \leq \eta$ , što se, nakon uvrštavanja izraza za  $\beta$ ,  $\nu$  i  $\eta$  kao rešenja sistema jednačina, redukuje na  $\mu \leq \alpha$  i  $3\alpha + \gamma - 2\mu = \alpha + \gamma + 2(\alpha - \mu) \leq 1$ , predstavljajući termoinamičku restrikciju (3.126).

Prema Pravilu 3, termodinamičko ograničenje (3.127) se dobija iz izraza u prvoj i trećoj zgradi u (3.124). Zatim, zahtev (3.128) sledi iz druge zgrade u (3.124), dok je ograničenje (3.129) posledica zahtevanja nenegativnosti zbiru u drugoj zgradi u (3.123). Treba primetiti da je u drugoj zgradi u (3.124) prvi član nenegativan, a drugi član nepozitivan, jer su odgovarajući kosinusu nenegativni zbog  $\alpha+\eta = \alpha+\gamma+(\alpha-\mu) \leq \alpha+\gamma+2(\alpha-\mu) \leq 1$  i  $\gamma+\mu \leq \gamma+\alpha \leq \alpha+\gamma+2(\alpha-\mu) \leq 1$ . Takođe, ni zbir u prvoj i trećoj zgradi u (3.123) ne predstavlja termodinamičko ograničenje, budući da nametnuti uslovi  $\alpha \leq \nu$  i  $\mu \leq \beta$  obezbeđuju nenegativnost sinusa u prvom slučaju, dok u drugom slučaju, prema termodinamičkom zahtevu (3.126)<sub>2</sub>, sledi da je

$$\beta + \eta = \frac{1 + \alpha + \gamma + 2(\alpha - \mu)}{2} \leq 1 \quad \text{i} \quad \gamma + \nu = \frac{1 + \alpha + \gamma - 2(\alpha - \mu)}{2} \leq 1,$$

implicirajući nenegativnu vrednost kosinusa, zbog  $\alpha + \gamma - 2(\alpha - \mu) \leq \alpha + \gamma + 2(\alpha - \mu) \leq 1$ , prema (3.126)<sub>2</sub>.

Termodinamički konzistentan model  $I^+ID \cdot I^+ID$ , koji potiče iz (3.122), dat je u obliku

$$\left( a_1 {}_0I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0I_t^{\frac{1+\alpha-\gamma}{2}} + a_3 {}_0D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^{1+\mu} + b_2 {}_0I_t^{\frac{1+\mu-(\alpha+\gamma-\mu)}{2}} + b_3 {}_0D_t^{\alpha+\gamma-\mu} \right) \varepsilon(t), \quad (3.125)$$

i podleže termodinamičkim restrikcijama

$$\mu \leq \alpha, \quad \alpha + \gamma + 2(\alpha - \mu) = 3\alpha + \gamma - 2\mu \leq 1, \quad (3.126)$$

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\cos \frac{(1-3\alpha-\gamma+2\mu)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma-2\mu)\pi}{4}}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\sin \frac{(1+3\alpha+\gamma-2\mu)\pi}{4}}{\sin \frac{(1-\alpha+\gamma+2\mu)\pi}{4}}, \quad (3.127)$$

$$a_3 b_1 \cos \frac{(\gamma + \mu) \pi}{2} - a_2 b_2 \sin \frac{(\alpha - \mu) \pi}{2} \leq a_1 b_3 \cos \frac{(2\alpha + \gamma - \mu) \pi}{2}, \quad (3.128)$$

$$a_1 b_3 \sin \frac{(2\alpha + \gamma - \mu) \pi}{2} \leq a_2 b_2 \cos \frac{(\alpha - \mu) \pi}{2} - a_3 b_1 \sin \frac{(\gamma + \mu) \pi}{2}. \quad (3.129)$$

Treba naglasiti da je red  $\frac{1+\alpha-\gamma}{2}$  ( $\frac{1+\mu-(\alpha+\gamma-\mu)}{2}$ ) frakcionog integrala koji deluje na napon (deformaciju) u (3.125) predstavlja aritmetičku sredinu redova preostala dva operatora koja deluju na napon (deformaciju), pri čemu se red izvoda uzima kao negativan red integrala. Osim termodinamičkih zahteva (3.126) nema potrebe za dodatnim restrikcijama kojima bi se obezdbilo da su  $\beta = \frac{1+\alpha-\gamma}{2} \in (0, 1)$ ,  $\nu = \frac{1+\mu-(\alpha+\gamma-\mu)}{2} \in (0, 1)$  i  $\eta = \alpha + \gamma - \mu \in (0, 1)$ . Treba naglasiti da (3.126)<sub>2</sub>,  $1+3\alpha+\gamma-2\mu \in (1, 2)$  obezbeduje nenegativnost za  $\sin \frac{(1+3\alpha+\gamma-2\mu)\pi}{4}$ , dok  $1-3\alpha-\gamma+2\mu = 1 - (3\alpha + \gamma - 2\mu) \in (0, 1)$  obezbeduje nenegativnost za  $\cos \frac{(1-3\alpha-\gamma+2\mu)\pi}{4}$ . Slično, prema (3.126)<sub>1,2</sub>,  $-\alpha + \gamma + 2\mu = \gamma + \mu - (\alpha - \mu) \in (-1, 1)$  obezbeduje nenegativnost i za  $\sin \frac{(1-\alpha+\gamma+2\mu)\pi}{4}$  i za  $\cos \frac{(1+\alpha-\gamma-2\mu)\pi}{4}$ , jer važi da je  $1 - \alpha + \gamma + 2\mu \in (0, 2)$  i  $1 + \alpha - \gamma - 2\mu \in (0, 2)$ . Takođe,  $2\alpha + \gamma - \mu = \alpha + \gamma + (\alpha - \mu) \leq 1$ , prema (3.126)<sub>2</sub>, kao i  $\gamma + \mu \leq 1$ , videti iznad, obezbeduju nenegativnost odgovarajućih sinusa i kosinusa u (3.128) i (3.129).

Među specijalnim slučajevima termodinamički konzistentnog modela  $I^+ ID \cdot I^+ ID$ , datog sa (3.125), se izdvaja model

$$\left( a_1 {}_0I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0I_t^{\frac{1}{2}} + a_3 {}_0D_t^\alpha \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^{1+\mu} + b_2 {}_0I_t^{\frac{1+\mu-(2\alpha-\mu)}{2}} + b_3 {}_0D_t^{2\alpha-\mu} \right) \varepsilon(t),$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} \mu &\leq 2\alpha - \mu \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{a_2}{a_1} &\leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\cos \frac{(1-2(2\alpha-\mu))\pi}{4}}{\cos \frac{(1-2\mu)\pi}{4}}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\sin \frac{(1+2(2\alpha-\mu))\pi}{4}}{\sin \frac{(1+2\mu)\pi}{4}}, \\ a_3 b_1 \cos \frac{(\alpha + \mu) \pi}{2} - a_2 b_2 \sin \frac{(\alpha - \mu) \pi}{2} &\leq a_1 b_3 \cos \frac{(3\alpha - \mu) \pi}{2}, \\ a_1 b_3 \sin \frac{(3\alpha - \mu) \pi}{2} &\leq a_2 b_2 \cos \frac{(\alpha - \mu) \pi}{2} - a_3 b_1 \sin \frac{(\alpha + \mu) \pi}{2}, \end{aligned}$$

koji se dobija za  $\gamma = \alpha$ , dok se model

$$\left( a_1 {}_0I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0I_t^{\frac{1+\alpha-\gamma}{2}} + a_3 {}_0D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^{1+\gamma} + b_2 {}_0I_t^{\frac{1+\gamma-\alpha}{2}} + b_3 {}_0D_t^\alpha \right) \varepsilon(t),$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} 3\gamma - \alpha &\leq 3\alpha - \gamma \leq 1, \\ \frac{a_2}{a_1} &\leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\cos \frac{(1-3\alpha+\gamma)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+\alpha-3\gamma)\pi}{4}}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\sin \frac{(1+3\alpha-\gamma)\pi}{4}}{\sin \frac{(1-\alpha+3\gamma)\pi}{4}}, \\ a_3 b_1 \cos(\gamma\pi) - a_2 b_2 \sin \frac{(\alpha - \gamma)\pi}{2} &\leq a_1 b_3 \cos(\alpha\pi), \\ a_1 b_3 \sin(\alpha\pi) &\leq a_2 b_2 \cos \frac{(\alpha - \gamma)\pi}{2} - a_3 b_1 \sin(\gamma\pi), \end{aligned}$$

dobija za  $\mu = \gamma$ . Slično, ako je  $\mu = \alpha$ , model  $I^+ ID \cdot I^+ ID$ , dat sa (3.125), postaje

$$\left( a_1 {}_0I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0I_t^{\frac{1+\alpha-\gamma}{2}} + a_3 {}_0D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^{1+\alpha} + b_2 {}_0I_t^{\frac{1+\alpha-\gamma}{2}} + b_3 {}_0D_t^\gamma \right) \varepsilon(t),$$

i podlože termodinamičkim restrikcijama

$$\alpha + \gamma \leq 1, \quad \frac{b_1}{a_1} \leq \frac{b_2}{a_2} \leq \frac{b_3}{a_3} \leq \frac{a_2 b_2}{a_1 a_3 \sin \frac{(\alpha + \gamma)\pi}{2}} - \frac{b_1}{a_1},$$

dok ako je dodatno i  $\gamma = \alpha$ , tj. za  $\gamma = \mu = \alpha$ , model se transformiše u

$$\left( a_1 {}_0I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0I_t^{\frac{1}{2}} + a_3 {}_0D_t^\alpha \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^{1+\alpha} + b_2 {}_0I_t^{\frac{1}{2}} + b_3 {}_0D_t^\alpha \right) \varepsilon(t),$$

i podlože termodinamičkim restrikcijama

$$\alpha \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{b_1}{a_1} \leq \frac{b_2}{a_2} \leq \frac{b_3}{a_3} \leq \frac{a_2 b_2}{a_1 a_3 \sin(\alpha\pi)} - \frac{b_1}{a_1}.$$

### 3.2.2.4 Skup modela koji potiču od modela IID.IDD

Pored modela IID.IDD, koji sadrži operatore reda u intervalu  $(0, 1)$ , takođe se razmatra model  $I^+ ID.IDD^+$  koji sadrži i frakcionalni integral i frakcionalni izvod reda u intervalu  $(1, 2)$ , dok su modeli  $I^+ ID.IDD$  i  $IID.IDD^+$  termodinamički nekonzistentni i stoga se njihova analiza izostavlja.

**Model IID.IDD** Model IID.IDD ima kombinaciju dva frakcionalna integrala i frakcionalog izvoda koji deluju na napon i kombinaciju dva frakcionala izvoda i frakcionalog integrala koji deluju na deformaciju, što za konstitutivnu jednačinu daje

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 I_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = (b_1 {}_0 I_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^\nu + b_3 {}_0 D_t^\eta) \varepsilon(t), \quad \text{sa } \beta < \alpha, \nu < \eta. \quad (3.130)$$

Odgovarajući konzervativni i disipativni moduli su dati izrazima

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \cos \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} \\ &+ \left[ a_1 b_3 \omega^{-\alpha+\eta} \cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} + a_3 b_1 \omega^{\gamma-\mu} \cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \right] \\ &+ a_2 b_1 \omega^{-\beta-\mu} \cos \frac{(\beta-\mu)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{-\beta+\nu} \cos \frac{(\beta+\nu)\pi}{2} + a_2 b_3 \omega^{-\beta+\eta} \cos \frac{(\beta+\eta)\pi}{2} \\ &+ a_3 b_2 \omega^{\gamma+\nu} \cos \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2} + a_3 b_3 \omega^{\gamma+\eta} \cos \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} E''(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-\alpha-\mu} \sin \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + a_1 b_2 \omega^{-\alpha+\nu} \sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} \\ &+ \left[ a_1 b_3 \omega^{-\alpha+\eta} \sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} - a_3 b_1 \omega^{\gamma-\mu} \sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \right] \\ &+ a_2 b_1 \omega^{-\beta-\mu} \sin \frac{(\beta-\mu)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{-\beta+\nu} \sin \frac{(\beta+\nu)\pi}{2} + a_2 b_3 \omega^{-\beta+\eta} \sin \frac{(\beta+\eta)\pi}{2} \\ &+ a_3 b_2 \omega^{\gamma+\nu} \sin \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2} + a_3 b_3 \omega^{\gamma+\eta} \sin \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.132)$$

a dobijaju se iz kompleksnog Jangovog modula

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{\frac{b_1}{(\mathrm{i}\omega)^\mu} + b_2 (\mathrm{i}\omega)^\nu + b_3 (\mathrm{i}\omega)^\eta}{\frac{a_1}{(\mathrm{i}\omega)^\alpha} + \frac{a_2}{(\mathrm{i}\omega)^\beta} + a_3 (\mathrm{i}\omega)^\gamma},$$

pri čemu su  $E'$  i  $E''$  dati sa (3.64) preko kompleksnog Jangovog modula  $\hat{E}$ .

Termodinamičke restrikcije  $\mu \leq \alpha$  i  $\mu \leq \beta$ , tj.  $\mu \leq \beta < \alpha$ , videti (3.134)<sub>1</sub>, kao i  $\gamma \leq \nu$ , videti (3.134)<sub>2</sub> i  $\gamma \leq \eta$ , tj.  $\gamma \leq \nu < \eta$ , se doibijaju primenom Pravila 1 na prvi i peti član, kao i na poslednja dva člana u disipativnom modulu (3.132). Članovi u zagradi u konzervativnom modulu (3.131) se kombinuju prema Pravilima 2 i 4, dajući  $-\alpha + \eta = \gamma - \mu$ , tj.  $\eta = \alpha + \gamma - \mu \in (0, 1)$ , dok drugi, šesti i sedmi član u konzervativnom modulu nisu uključeni. Naime, eksponenti frekvencije:  $-\alpha + \eta, -\alpha + \nu, -\beta + \eta, -\beta + \nu$  i  $\gamma - \mu$  pripadaju istom intervalu  $(-1, 1)$ , implicirajući da odgovarajući članovi mogu biti kombinovani prema Pravilima 2 i 4. Međutim, postoje dva seta članova koji se mogu kombinovati, a imaju eksponente frekvencije ili  $-\alpha + \eta, -\beta + \nu$  i  $\gamma - \mu$ , ili  $-\alpha + \nu, -\beta + \eta$  i  $\gamma - \mu$ , tako da oba seta sadrže član sa eksponentom frekvencije  $\gamma - \mu$ , zbog četvrtog člana u (3.132), dok bi druge kombinacije dale  $\alpha = \beta$  i/ili  $\eta = \nu$  što bi bilo u suprotnosti sa pretpostavkom da model IID.IDD, dat sa (3.130), sadrži dva frakcionalna integrala sa različitim redovima koji deluju na napon i/ili dva frakcionala izvoda sa različitim redovima koji deluju na deformaciju.

Bira se kombinacija članova čiji su eksponenti  $-\alpha + \eta, -\beta + \nu$  i  $\gamma - \mu$ , zbog činjenice da je  $\gamma + \mu \leq \beta + \nu \leq \alpha + \eta$ , kao i  $\beta + \nu < \alpha + \nu < \alpha + \eta$  i  $\beta + \nu < \beta + \eta < \alpha + \eta$ , tako da se zahtevanjem da je  $\alpha + \nu \leq 1$  i  $\beta + \eta \leq 1$ , dobija  $\beta + \nu \leq 1$  i  $\gamma + \mu \leq 1$ , što implicira da je dovoljno nametnuti da je  $-\alpha + \eta = \gamma - \mu$ , tj.  $\eta = \alpha + \gamma - \mu$ , jer samo prvi član u zagradi u (3.131) može biti nepozitivan, dok je, prema Pravilu 2, nenegativnost drugog člana u zagradi, kao i drugog, šestog i sedmog člana u (3.131) već obezbeđena. Stoga, zbir članova u zagradi u (3.131) daje levu stranu termodinamičkog zhteva (3.135), dok, Prema Pravilu 3, zbir u zagradi u (3.132), na koji se nameće nenegativnost, daje desnu stranu termodinamičkog zhteva (3.135). Termodinamički zhtevi (3.134)<sub>3,4</sub> slede iz  $\beta + \eta \leq 1$  i  $\alpha + \nu \leq 1$ , koji su kombinovani sa  $\nu < \eta$ , pri čemu je  $\eta = \alpha + \gamma - \mu$ .

Ako bi se prema Pravilu 4 izjednačavali eksponenti frekvencija  $-\alpha + \nu, -\beta + \eta$  i  $\gamma - \mu$ , bilo bi potrebno nametnuti restrikciju  $\alpha + \eta \leq 1$ , tako da sledi da je  $\gamma + \mu \leq \beta + \nu < \alpha + \nu < \alpha + \eta \leq 1$  i  $\gamma + \mu \leq \beta + \nu < \beta + \eta < \alpha + \eta \leq 1$ , što implicira nenegativnost drugog, trećeg, četvrtog, šestog i sedmog člana u (3.131). Dakle, kombinovanje članova koji sadrže ove eksponente frekvencije prema Pravilu 4 implicira restriktivnije uslove na

parametre modela nego izbor člnova koji imaju eksponente frekvencija  $-\alpha + \eta$ ,  $-\beta + \nu$  i  $\gamma - \mu$ , budući da u prvom slučaju  $\alpha + \eta \leq 1$  predstavlja restrikciju, dok je u drugom slučaju nejednakost  $\alpha + \eta > 1$  dozvoljena.

Termodinamički konzistentan model IID.IDD se dobija iz (3.130) kao

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 I_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^\nu + b_3 {}_0 D_t^{\alpha+\gamma-\mu} \right) \varepsilon(t), \quad (3.133)$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$\mu \leq \beta < \alpha, \quad \gamma \leq \nu, \quad \alpha + \beta + \gamma \leq 1 + \mu, \quad \mu + \nu - \gamma < \alpha \leq 1 - \nu, \quad (3.134)$$

$$-\frac{b_3}{b_1} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}}. \quad (3.135)$$

Treba napomenuti da je red  $\alpha + \gamma - \mu$  frakcionog izvoda koji se pojavljuje u modelu (3.133) takav da je  $0 \leq \alpha + \gamma - \mu \leq \alpha + \beta + \gamma - \mu \leq 1$ , prema restrikcijama (3.134)<sub>1,3</sub>. Takođe, leva strana zahteva (3.135) je ili trivijalno zadovoljena ako je  $2\alpha + \gamma - \mu \leq 1$  ili predstavlja restrikciju ako je  $2\alpha + \gamma - \mu > 1$ , budući da je  $\gamma + \mu \leq 1$ , videti iznad.

Prema (3.28), primena frakcionog izvoda reda  $\alpha$  na termodinamički konzistentan model IID.IDD, dat sa (3.133), transformiše model u

$$\left( a_1 + a_2 {}_0 D_t^{\alpha-\beta} + a_3 {}_0 D_t^{\alpha+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 D_t^{\alpha-\mu} + b_2 {}_0 D_t^{\alpha+\nu} + b_3 {}_0 D_t^{2\alpha+\gamma-\mu} \right) \varepsilon(t),$$

predstavljajući novi tip modela, koji sadrži frakcione izvode reda u intervalu  $(0, 1)$  ako je  $2\alpha + \gamma - \mu \leq 1$ , budući da najviši red izvoda na levoj strani modela ima veću vrednost nego najniži red izvoda na desnoj strani modela.

Samo jedan specijalan slučaj modela IID.IDD, datog sa (3.133), se izdvaja i dobija se za  $\mu = \gamma$  u obliku

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 I_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\gamma + b_2 {}_0 D_t^\nu + b_3 {}_0 D_t^\alpha \right) \varepsilon(t),$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$\gamma \leq \beta < \alpha, \quad \gamma \leq \nu, \quad \alpha + \beta \leq 1, \quad \nu < \alpha \leq 1 - \nu,$$

$$-\frac{b_3}{b_1} \frac{\cos(\alpha\pi)}{\cos(\gamma\pi)} \leq \frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\sin(\gamma\pi)},$$

dok je jednakost  $\mu = \alpha$  u suprotnosti sa pretpostavkom da postoje dva frakcionala integrala različitih redova na levoj strani modela IID.IDD, datog sa (3.133), dok termodinamička restrikcija (3.134)<sub>1</sub> implicira da je  $\alpha \leq \beta < \alpha$ .

**Model  $I^+ ID.IDD^+$**  Prepostavka da jedan od frakcionalih integrala koji deluje na napon i jedan od frakcionalih izvoda koji deluje na deformaciju u modelu IID.IDD, datom sa (3.130), ima red iznad jedan, transformiše model (3.130) u model  $I^+ ID.IDD^+$ , dat izrazom

$$\left( a_1 {}_0 I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0 I_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^\nu + b_3 {}_0 D_t^{1+\eta} \right) \varepsilon(t), \quad (3.136)$$

čiji se konzervativni i disipativni moduo

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-1-\alpha-\mu} \sin \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2} + \left[ -a_1 b_2 \omega^{-1-\alpha+\nu} \sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{-\beta-\mu} \cos \frac{(\beta-\mu)\pi}{2} \right] \\ &\quad + \left[ -a_1 b_3 \omega^{-\alpha+\eta} \cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{-\beta+\nu} \cos \frac{(\beta+\nu)\pi}{2} + a_3 b_1 \omega^{\gamma-\mu} \cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \right] \\ &\quad + \left[ -a_2 b_3 \omega^{1-\beta+\eta} \sin \frac{(\beta+\eta)\pi}{2} + a_3 b_2 \omega^{\gamma+\nu} \cos \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2} \right] + a_3 b_3 \omega^{1+\gamma+\eta} \sin \frac{(\gamma-\eta)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} E''(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{-1-\alpha-\mu} \cos \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2} + \left[ a_1 b_2 \omega^{-1-\alpha+\nu} \cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{-\beta-\mu} \sin \frac{(\beta-\mu)\pi}{2} \right] \\ &\quad + \left[ -a_1 b_3 \omega^{-\alpha+\eta} \sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{-\beta+\nu} \sin \frac{(\beta+\nu)\pi}{2} - a_3 b_1 \omega^{\gamma-\mu} \sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \right] \\ &\quad + \left[ a_2 b_3 \omega^{1-\beta+\eta} \cos \frac{(\beta+\eta)\pi}{2} + a_3 b_2 \omega^{\gamma+\nu} \sin \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2} \right] + a_3 b_3 \omega^{1+\gamma+\eta} \cos \frac{(\gamma-\eta)\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.138)$$

dobijaju iz kompleksnog Jangovog modula

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{\frac{b_1}{(\text{i}\omega)^\mu} + b_2 (\text{i}\omega)^\nu + b_3 (\text{i}\omega)^{1+\eta}}{\frac{a_1}{(\text{i}\omega)^{1+\alpha}} + \frac{a_2}{(\text{i}\omega)^\beta} + a_3 (\text{i}\omega)^\gamma},$$

pri čemu su  $E'$  i  $E''$  datim sa (3.72) preko kompleksnog Jangovog modula  $\hat{E}$ .

Primenom Pravila 1 na prvi i poslednji član u konzervativnom modulu (3.137), respektivno se dobija  $\alpha \leq \mu$  i  $\eta \leq \gamma$ , kao i  $\mu \leq \beta$  i  $\gamma \leq \nu$  iz trećeg i pretposlednjeg člana u disipativnom modulu (3.138), što se redukuje na  $\alpha \leq \mu \leq \beta$  i  $\eta \leq \gamma \leq \nu$ . Članovi u zagrada se kombinuju prema Pravilu 4 izjednačavanjem eksponenata frekvencije:  $-1 - \alpha + \nu$  i  $-\beta - \mu$  odgovarajućih članova u prvoj zagradi,  $-\alpha + \eta$ ,  $-\beta + \nu$  i  $\gamma - \mu$  odgovarajućih članova u drugoj zagradi, kao i  $1 - \beta + \eta$  i  $\gamma + \nu$  odgovarajućih članova u trećoj zagradi, dajući sistem linearnih jednačina  $-1 - \alpha + \nu = -\beta - \mu$ ,  $-\alpha + \eta = -\beta + \nu = \gamma - \mu$  i  $1 - \beta + \eta = \gamma + \nu$ , koje sdrži jednu redundantnu jednačinu. Stoga se razmatra sistem jednačina:  $\beta - \nu = \alpha - \eta$ ,  $\mu = \alpha + \gamma - \eta$  i  $\beta + \nu = 1 - \gamma + \eta$  sa nepoznatim  $\beta$ ,  $\mu$  i  $\nu$  i poznatim  $\alpha$ ,  $\gamma$  i  $\eta$ , te se za rešenje sistema dobija  $\beta = \frac{1+\alpha-\gamma}{2} \in (0, 1)$ ,  $\mu = \alpha + \gamma - \eta \in (0, 1)$  i  $\nu = \frac{1-\alpha-\gamma+2\eta}{2} \in (0, 1)$ .

Prema Pravilu 3, termodinamičko ograničenje (3.141) se dobija iz izraza u prvoj i trećoj zagradi u (3.137), dok druga zagrada u (3.138) predstavlja termodinamičko ograničenje (3.143). Sa druge strane, nema dodatnih pretpostavki za argumente kosinusa koji bi bili potrebni da bi se nametnulo termodinamičko ograničenje (3.142) koje potiče iz druge zgrade u (3.137), jer  $\alpha + \eta \leq \gamma + \mu \leq \beta + \nu \leq 1$  važi zbog  $\alpha \leq \mu \leq \beta$ ,  $\eta \leq \gamma \leq \nu$  i  $\beta + \nu = 1 - (\gamma - \eta) \leq 1$ . Treba primetiti da je zbir članova u prvoj i trećoj zagradi u (3.138) već nenegativan, jer je  $\alpha + \nu \leq \beta + \nu \leq 1$  i  $\beta + \eta \leq \beta + \nu \leq 1$ , impicirajući da su kosinusi nenegativni. Termodinamičke restrikcije (3.140) slede iz nejednakosti  $\alpha \leq \mu$ ,  $\eta \leq \gamma$ ,  $\mu \leq \beta$  i  $\gamma \leq \nu$ , prema  $\beta = \frac{1+\alpha-\gamma}{2}$ ,  $\mu = \alpha + \gamma - \eta$  i  $\nu = \frac{1-\alpha-\gamma+2\eta}{2}$ .

Termodinamički konzistentan model  $I^+ ID.IDD^+$ , koji potiče iz (3.136), postaje

$$\left( a_1 {}_0I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0I_t^{\frac{1+\alpha-\gamma}{2}} + a_3 {}_0D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^{\alpha+\gamma-\eta} + b_2 {}_0D_t^{\frac{1+\eta-(\alpha+\gamma-\eta)}{2}} + b_3 {}_0D_t^{1+\eta} \right) \varepsilon(t), \quad (3.139)$$

i podleže termodinamičkim restrikcijama

$$\eta \leq \gamma, \quad \alpha + \gamma + 2(\gamma - \eta) = \alpha + 3\gamma - 2\eta \leq 1, \quad (3.140)$$

$$\frac{a_1 \sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{b_1 \cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \frac{a_3 \cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}}{b_3 \sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}, \quad (3.141)$$

$$a_1 b_3 \cos \frac{(\alpha + \eta)\pi}{2} - a_2 b_2 \sin \frac{(\gamma - \eta)\pi}{2} \leq a_3 b_1 \cos \frac{(\alpha + 2\gamma - \eta)\pi}{2}, \quad (3.142)$$

$$a_3 b_1 \sin \frac{(\alpha + 2\gamma - \eta)\pi}{2} \leq a_2 b_2 \cos \frac{(\gamma - \eta)\pi}{2} - a_1 b_3 \sin \frac{(\alpha + \eta)\pi}{2}. \quad (3.143)$$

Treba naglasiti da red  $\frac{1+\alpha-\gamma}{2}$  frakcionog integrala koji deluje na napon predstavlja aritmetičku sredinu redova preostala dva operatora koji deluju na napon, sa redom izvoda uzetim kao negativan red integrala, kao i da je red  $\frac{1+\eta-(\alpha+\gamma-\eta)}{2}$  frakcionog izvoda koji deluje na deformaciju, koji takođe predstavlja aritmetičku sredinu redova preostala dva operatora koji deluju na deformaciju, sa redom integrala uzetim kao negativan red izvoda. Osim termodinamičkih restrikcija (3.140) nije potrebno zahtevati dodatne restrikcije da bi se obezbedilo da je  $\beta = \frac{1+\alpha-\gamma}{2} \in (0, 1)$ ,  $\mu = \alpha + \gamma - \eta \in (0, 1)$  i  $\nu = \frac{1-\alpha-\gamma+2\eta}{2} \in (0, 1)$ . Treba naglasiti da prema (3.140)<sub>2</sub>,  $1 - \alpha - 3\gamma + 2\eta = 1 - (\alpha + 3\gamma - 2\eta) \in (0, 1)$  obezbeđuje nenegativnost za  $\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}$ . Slično, prema (3.140)<sub>1,2</sub>,  $\alpha - \gamma + 2\eta = \alpha + \eta - (\gamma - \eta) \in (-1, 1)$  obezbeđuje nenegativnost za  $\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}$ , jer je  $1 + \alpha - \gamma + 2\eta \in (0, 2)$ . Takođe,  $\alpha + 2\gamma - \eta = \alpha + \gamma + (\gamma - \eta) \leq 1$ , prema (3.140)<sub>2</sub>, kao i  $\alpha + \eta \leq 1$ , videti iznad, obezbeđuju nenegativnost odgovarajućih sinusova i kosinusa u (3.142) i (3.143).

Izdvaja se nekoliko specijalnih slučajeva termodinamički konzistentnog modela  $I^+ ID.IDD^+$ , datog sa (3.139). Prvo, modeli koji sadrže bar jedan operator koji ima red sa fiksном vrednošću su:

$$\left( a_1 {}_0I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0I_t^{\frac{1}{2}} + a_3 {}_0D_t^\alpha \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^{2\alpha-\eta} + b_2 {}_0D_t^{\frac{1+\eta-(2\alpha-\eta)}{2}} + b_3 {}_0D_t^{1+\eta} \right) \varepsilon(t), \quad (3.144)$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} \eta &\leq \alpha, \quad 2\alpha - \eta \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{a_1 \sin \frac{(1+2\eta)\pi}{4}}{b_1 \cos \frac{(1-2(2\alpha-\eta))\pi}{4}} &\leq \frac{a_2}{b_2} \leq \frac{a_3 \cos \frac{(1-2(2\alpha-\eta))\pi}{4}}{b_3 \sin \frac{(1+2\eta)\pi}{4}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 b_3 \cos \frac{(\alpha + \eta) \pi}{2} - a_2 b_2 \sin \frac{(\alpha - \eta) \pi}{2} &\leqslant a_3 b_1 \cos \frac{(3\alpha - \eta) \pi}{2}, \\ a_3 b_1 \sin \frac{(3\alpha - \eta) \pi}{2} &\leqslant a_2 b_2 \cos \frac{(\alpha - \eta) \pi}{2} - a_1 b_3 \sin \frac{(\alpha + \eta) \pi}{2}, \end{aligned}$$

koji se dobija za  $\gamma = \alpha$ , i model koji sadrži operatore redova izraženih samo preko  $\alpha$

$$\left( a_1 {}_0 I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0 I_t^{\frac{1}{2}} + a_3 {}_0 D_t^\alpha \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\alpha + b_2 {}_0 D_t^{\frac{1}{2}} + b_3 {}_0 D_t^{1+\alpha} \right) \varepsilon(t),$$

koji podleže termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} \alpha &\leqslant \frac{1}{2}, \quad \frac{a_1}{b_1} \frac{\sin \frac{(1+2\alpha)\pi}{4}}{\cos \frac{(1-2\alpha)\pi}{4}} \leqslant \frac{a_2}{b_2} \leqslant \frac{a_3}{b_3} \frac{\cos \frac{(1-2\alpha)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+2\alpha)\pi}{4}}, \\ \frac{a_1}{b_1} &\leqslant \frac{a_3}{b_3}, \quad \left( \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_3}{b_3} \right) \sin(\alpha\pi) \leqslant \frac{a_2 b_2}{b_1 b_3}, \end{aligned}$$

a dobija se iz (3.139) za  $\gamma = \eta = \alpha$ , predstavlja specijalni slučaj modela (3.144), zbog jednakosti  $\eta = \alpha$ .

Zatim, termodinamički konzistentan model  $I^+ ID.IDD^+$ , dat sa (3.139), za  $\eta = \alpha$  daje još jedan specijalan slučaj

$$\left( a_1 {}_0 I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0 I_t^{\frac{1+\alpha-\gamma}{2}} + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\gamma + b_2 {}_0 D_t^{\frac{1+\alpha-\gamma}{2}} + b_3 {}_0 D_t^{1+\alpha} \right) \varepsilon(t),$$

sa termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} \alpha &\leqslant \gamma, \quad 3\gamma - \alpha \leqslant 1, \\ \frac{a_1}{b_1} \frac{\sin \frac{(1+3\alpha-\gamma)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+\alpha-3\gamma)\pi}{4}} &\leqslant \frac{a_2}{b_2} \leqslant \frac{a_3}{b_3} \frac{\cos \frac{(1+\alpha-3\gamma)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+3\alpha-\gamma)\pi}{4}}, \\ a_1 b_3 \cos(\alpha\pi) - a_2 b_2 \sin \frac{(\gamma - \alpha)\pi}{2} &\leqslant a_3 b_1 \cos(\gamma\pi), \\ a_3 b_1 \sin(\gamma\pi) &\leqslant a_2 b_2 \cos \frac{(\gamma - \alpha)\pi}{2} - a_1 b_3 \sin(\alpha\pi), \end{aligned}$$

dok specijalan slučaj modela  $I^+ ID.IDD^+$ , datog sa (3.139), čiji je oblik

$$\left( a_1 {}_0 I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0 I_t^{\frac{1+\alpha-\gamma}{2}} + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\alpha + b_2 {}_0 D_t^{\frac{1+\gamma-\alpha}{2}} + b_3 {}_0 D_t^{1+\gamma} \right) \varepsilon(t),$$

podleže termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &\leqslant 1, \quad \frac{a_1}{b_1} \frac{\sin \frac{(1+\alpha+\gamma)\pi}{4}}{\cos \frac{(1-\alpha-\gamma)\pi}{4}} \leqslant \frac{a_2}{b_2} \leqslant \frac{a_3}{b_3} \frac{\cos \frac{(1-\alpha-\gamma)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+\alpha+\gamma)\pi}{4}}, \\ \frac{a_1}{b_1} &\leqslant \frac{a_3}{b_3}, \quad \left( \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_3}{b_3} \right) \sin \frac{(\alpha + \gamma)\pi}{2} \leqslant \frac{a_2 b_2}{b_1 b_3}, \end{aligned}$$

a dobija se za  $\eta = \gamma$ . Model koji sadrži operatore koji imaju redove na levoj strani izražene preko  $\alpha$ , a na desnoj strani izražene preko  $\eta$ , uzima oblik

$$\left( a_1 {}_0 I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0 I_t^\alpha + a_3 {}_0 D_t^{1-\alpha} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^{1-\eta} + b_2 {}_0 D_t^\eta + b_3 {}_0 D_t^{1+\eta} \right) \varepsilon(t),$$

i podleže termodinamičkim restrikcijama

$$\alpha + \eta = 1, \quad \frac{a_1}{b_1} \leqslant \frac{a_2}{b_2} \leqslant \frac{a_3}{b_3}, \quad \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_3}{b_3} \leqslant \frac{a_2 b_2}{b_1 b_3}.$$

a dobija se iz modela (3.139) za  $\alpha + \gamma = 1$ . Treba naglasiti da ako je  $\alpha + \gamma = 1$  u (3.140)<sub>1</sub> dobija se  $\eta \leqslant \gamma$  i  $\gamma \leqslant \eta$ , tj.  $\gamma = \eta$ .

# 4. Svojstva energetskog bilansa frakcionalih Cenerovih i anti-Cenerovih modela

Svojstva energetskog bilansa za modele okarakterisane modulom relaksacije, odnosno funkcijom puzanja, kao memorijskim jezgrom, videti (2.15), ispitivana su a priori u vremenskom domenu i pokazuje se da se snaga po jedinici zapremine sastoji od dva člana: vremenskog izvoda energije po jedinici zapremine skladištene u viskoelastičnom telu i snage disipacije po jedinici zapremine, videti (4.9). Skladištena energija po jedinici zapremine izražena preko deformacije (4.4), sastoji se od člana sa trenutnim doprinosom, koji je istog oblika kao potencijalna energija elastičnog tela, pri čemu moduo relaksacije zamenjuje Jangov moduo, kao i od memorijskog člana, gde vremenski izvod modula relaksacije predstavlja memorijsko jezgro razlike trenutne deformacije i deformacije u prethodnim trenucima.

Snaga disipacije po jedinici zapremine izražena preko deformacije, videti (4.6), koja se takođe sastoji od člana sa trenutnim doprinosom i člana memorijskog tipa, koji respektivno poseduju prvi i drugi izvod po vremenu modula relaksacije. Pozitivnost skladištene energije i snage disipacije po jedinici zapremine se obezbeđuje ako je moduo relaksacije pozitivna, monotono opadajuća i konveksna funkcija, odnosno kompletno monotona funkcija. Treba naglasiti da je moduo relaksacije funkcija koja predstavlja vremensku evoluciju napona za zadatu deformaciju, primenjenu trenutno nakon čega ona ima konstantnu vrednost, odnosno za deformaciju zadatu u obliku Hevisajdove funkcije.

Energija po jedinici zapremine se može izraziti i preko napona i tada postoji samo član memorijskog tipa, koji sadrži vremenski izvod funkcije puzanja kao memorijsko jezgro koje množi vremensku evoluciju napona, videti (4.5), dok se snaga disipacije po jedinici zapremine sastoji od trenutnog člana i člana memorijskog tipa, koji respektivno sadrže prvi i drugi vremenski izvod funkcije puzanja, videti (4.7). Opet, pozitivnost skladištene energije i snage disipacije po jedinici zapremine je obezbedena ako je funkcija puzanja pozitivna, monotono rastuća i konkavna funkcija, odnosno Bernštajnova funkcija. Treba naglasiti da funkcija puzanja predstavlja vremensku evoluciju deformacije za zadati napon primenjen trenutno, nakon čega on ima konstantnu vrednost, odnosno za napon zadat u obliku Hevisajdove funkcije.

## 4.1 Energija i snaga disipacije

Snaga po jedinici zapremine je definisana izrazom

$$P(t) = \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t), \quad (4.1)$$

i može se zapisati preko deformacije

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sigma_{sr}(t) \varepsilon^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t (-\dot{\sigma}_{sr}(t-t')) (\varepsilon(t) - \varepsilon(t'))^2 dt' \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (-\dot{\sigma}_{sr}(t)) \varepsilon^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \ddot{\sigma}_{sr}(t-t') (\varepsilon(t) - \varepsilon(t'))^2 dt', \end{aligned} \quad (4.2)$$

koristeći (2.15)<sub>1</sub>, ili preko napona

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{cr}^{(g)} \sigma^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \dot{\varepsilon}_{cr}(t-t') \sigma^2(t') dt' \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{cr}(t) \sigma^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t (-\ddot{\varepsilon}_{cr}(t)(t-t')) (\sigma(t) - \sigma(t'))^2 dt', \end{aligned} \quad (4.3)$$

koristeći (2.15)<sub>2</sub>, pri čemu se članovi

$$W(t) = \frac{1}{2}\sigma_{sr}(t)\varepsilon^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t(-\dot{\sigma}_{sr}(t-t'))(\varepsilon(t)-\varepsilon(t'))^2dt' > 0 \quad i \quad (4.4)$$

$$W(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_{cr}^{(g)}\sigma^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t\dot{\varepsilon}_{cr}(t-t')\sigma^2(t')dt' > 0, \quad (4.5)$$

koji se pojavljuju u (4.2) i (4.3) respektivno, mogu interpretirati kao energija po jedinici zapremine uskladištena u viskoelastičnom telu, uzimajući u obzir memorijski karakter deformacije, odnosno napona, otežana izvodom modula relaksacije, odnosno funkcije puzanja, dajući informaciju o svojstvima materijala, pri čemu prvi članovi u (4.4) i (4.5) podsećaju na potencijalnu energiju elastičnog tela sa Jangovim modulom zamenjenim modulom relaksacije, odnosno funkcijom puzanja računatom u početnom trenutku. Sa druge strane, članovi

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{2}(-\dot{\sigma}_{sr}(t))\varepsilon^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t\ddot{\sigma}_{sr}(t-t')(\varepsilon(t)-\varepsilon(t'))^2dt' > 0 \quad i \quad (4.6)$$

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{cr}(t)\sigma^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t(-\ddot{\varepsilon}_{cr}(t)(t-t'))(\sigma(t)-\sigma(t'))^2dt' > 0, \quad (4.7)$$

koji se pojavljuju u (4.2) i (4.3) respektivno, mogu se interpretirati kao snaga disipacije po jedinici zapremine i imaju dva tipa doprinosa: prvi koji je trenutan i zavisi od pozitivne i opadajuće funkcije  $-\dot{\sigma}_{sr}$ , odnosno  $\dot{\varepsilon}_{cr}$ , koja je karakteristika materijala, i drugi doprinos koji je memorijskog tipa sa jezgrom zavisnim od osobina materijala. Pozitivnost energije i snage disipacije obezbeđuje se osobinama modula relaksacije i funkcije puzanja, naime zahtevom da je moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, tj. da važi

$$\sigma_{sr}(t) \geq 0 \quad i \quad (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \dot{\sigma}_{sr}(t) \leq 0, \quad za \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (4.8)$$

kao i zahtevom da je funkcija puzanja Bernštajnova funkcija, tj. pozitivna funkcija sa kompletno monotonim prvim izvodom. Treba naglasiti da su moduo relaksacije i funkcija puzanja, zajedno sa svojim izvodima, koji se pojavljuju u izrazima za snagu po jedinici zapremine (4.2) i (4.3), tj. u (4.4) - (4.7), funkcije koje se razmatraju za  $t > 0$ , budući da su njihove vrednosti u  $t = 0$  eksplisitno uzete u obzir prilikom izvođenja konstitutivnog modela (2.15) i izraza za snagu po jedinici zapremine.

Uvođenjem energije i snage disipacije po jedinici zapremine, snaga po jedinici zapremine se može predstaviti izrazom

$$P(t) = \frac{d}{dt}W(t) + \mathcal{P}(t), \quad (4.9)$$

pri čemu prvi član odgovara elastičnom tipu osobina viskoelastičnog tela, dok drugi član odgovara njegovim osobinama viskoznog tipa.

Izraz (4.2) za snagu po jedinici zapremine sledi iz

$$P(t) = \frac{d}{dt}(\sigma_{sr}(t) * \varepsilon(t))\dot{\varepsilon}(t),$$

što se dobija iz (4.1) i (2.15)<sub>1</sub>, transformišući se u

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(\sigma_{sr}(t) * \varepsilon(t))\varepsilon(t)\right) - \frac{d}{dt}\left(\dot{\sigma}_{sr}(t) * \varepsilon(t) + \sigma_{sr}^{(g)}\varepsilon(t)\right)\varepsilon(t) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(\sigma_{sr}(t) * \varepsilon(t))\varepsilon(t)\right) - \frac{d}{dt}(\dot{\sigma}_{sr}(t) * \varepsilon(t))\varepsilon(t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sigma_{sr}^{(g)}\varepsilon^2(t)\right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

korišćenjem izvoda proizvoda dve funkcije i izvoda konvolucije (2.16), jer se prva dva člana u (4.10) transformišu u

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\sigma_{sr}(t) * \varepsilon(t))\varepsilon(t) \\ &= \frac{1}{2}\sigma_{sr}(t)\varepsilon^2(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\sigma_{sr}(t) * \varepsilon^2(t)) - \frac{1}{2}\int_0^t\dot{\sigma}_{sr}(t-t')(\varepsilon(t)-\varepsilon(t'))^2dt' \\ &= \frac{1}{2}\sigma_{sr}(t)\varepsilon^2(t) + \frac{1}{2}\dot{\sigma}_{sr}(t) * \varepsilon^2(t) + \frac{1}{2}\sigma_{sr}^{(g)}\varepsilon^2(t) - \frac{1}{2}\int_0^t\dot{\sigma}_{sr}(t-t')(\varepsilon(t)-\varepsilon(t'))^2dt' \end{aligned}$$

i

$$\frac{d}{dt}(\dot{\sigma}_{sr}(t) * \varepsilon(t))\varepsilon(t)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{sr}(t) \varepsilon^2(t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\sigma}_{sr}(t) * \varepsilon^2(t)) - \frac{1}{2} \int_0^t \ddot{\sigma}_{sr}(t-t') (\varepsilon(t) - \varepsilon(t'))^2 dt',$$

prema

$$\frac{d}{dt} (k(t) * u(t)) u(t) = \frac{1}{2} k(t) u^2(t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (k(t) * u^2(t)) - \frac{1}{2} \int_0^t \dot{k}(t-t') (u(t) - u(t'))^2 dt' \quad (4.11)$$

i prema izvodu konvolucije.

Sa druge strane, izraz (4.3) za snagu po jedinici zapremine sledi iz

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{d}{dt} \left( \varepsilon_{cr}^{(g)} \sigma(t) + \dot{\varepsilon}_{cr}(t) * \sigma(t) \right) \sigma(t) \\ &= \varepsilon_{cr}^{(g)} \frac{d}{dt} \frac{\sigma^2(t)}{2} + \frac{d}{dt} (\dot{\varepsilon}_{cr}(t) * \sigma(t)) \sigma(t), \end{aligned}$$

što se dobija se iz (4.1) i (2.15)<sub>2</sub>, transformišući se u

$$P(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_{cr}^{(g)} \frac{d}{dt} \sigma^2(t) + \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{cr}(t) \sigma^2(t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\varepsilon}_{cr}(t) * \sigma^2(t)) - \frac{1}{2} \int_0^t \ddot{\varepsilon}_{cr}(t-t') (\sigma(t) - \sigma(t'))^2 dt',$$

prema (4.11).

## 4.2 Moduo relaksacije i funkcija puzanja

Moduo relaksacije i funkcija puzanja igraju važnu ulogu u osobinama energetskog bilansa viskoelastičnog tela, budući da, ako su ove funkcije respektivno kompletno monotona funkcija i Bernštajnova funkcija, obezbeđuju pozitivnost energije skladištene u viskoelastičnom telu, videti (4.4) i (4.5), kao i pozitivnost snage disipacije, viditi (4.6) i (4.7). Stoga se osobine modula relaksacije i funkcije puzanja, datih sa (4.13) i (4.14) u Laplasovom domenu, ispituju u vremenskom domenu, a zaključak je da moduo relaksacije i funkcija puzanja jesu respektivno kompletno monotona i Bernštajnova funkcija, ako parametri modela zadovoljavaju sužene termodinamičke restrikcije i ukoliko moduo relaksacije i funkcija puzanja u Laplasovom domenu (4.13) i (4.14) nemaju polova, dok se karakter modula relaksacije i funkcije puzanja u vremenskom domenu menja ukoliko oni u Laplasovom domenu imaju polova. Naime, u slučaju kada moduo relaksacije i funkcija puzanja u Laplasovom domenu (4.13) i (4.14) imaju negativan realan pol, u izrazima za moduo relaksacije i funkciju puzanja u vremenskom domenu postoji dodatni član koji eksponencijalno opada sa vremenom, dok u slučaju kada moduo relaksacije i funkcija puzanja u Laplasovom domenu (4.13) i (4.14) imaju par kompleksno konjugovanih polova sa negativnim realnim delom, tada u izrazima za moduo relaksacije i funkciju puzanja u vremenskom domenu postoji dodatni član sa izraženim prigušenim oscilatornim karakterom.

Konstitutivna jednačina koja povezuje napon i deformaciju (2.10) u Laplasovom domenu je, u slučaju termodinamički konzistentnih frakcionalih Cenerovih i anti-Cenerovih modela, data izrazom

$$\tilde{\sigma}(s) = s^\xi \frac{\phi_\varepsilon(s)}{\phi_\sigma(s)} \tilde{\varepsilon}(s) \quad (4.12)$$

sa funkcijama  $\phi_\sigma$  i  $\phi_\varepsilon$ , kao i eksponentom  $\xi$ , datim u tabeli 6.5. Stoga su moduo relaksacije i funkcija puzanja u Laplasovom domenu, dati sa (2.12) u opštem obliku za sve linearne frakcione modele, u slučaju frakcionalih Cenerovih i anti-Cenerovih modela, dati sa

$$\tilde{\sigma}_{sr}(s) = \frac{1}{s^{1-\xi}} \frac{\phi_\varepsilon(s)}{\phi_\sigma(s)}, \quad (4.13)$$

i

$$\tilde{\varepsilon}_{cr}(s) = \frac{1}{s^{1+\xi}} \frac{\phi_\sigma(s)}{\phi_\varepsilon(s)}. \quad (4.14)$$

### 4.2.1 Moduo relaksacije

Za moduo relaksacije u vremenskom domenu se dobija izraz

$$\sigma_{sr}(t) = \sigma_{sr}^{(NP)}(t) + \begin{cases} 0, & \text{ako } \tilde{\sigma}_{sr} \text{ nema polova,} \\ \sigma_{sr}^{(RP)}(t), & \text{ako } \tilde{\sigma}_{sr} \text{ ima negativan realan pol,} \\ \sigma_{sr}^{(CCP)}(t), & \text{ako } \tilde{\sigma}_{sr} \text{ ima par kompleksno konjugovanih polova,} \end{cases} \quad (4.15)$$

primenom inverzne Laplasove transformacije u izrazu za moduo relaksacije u Laplasovom domenu  $\tilde{\sigma}_{sr}$ , datom sa (4.13), koristeći definiciju i integraciju u kompleksnoj ravni zajedno sa Bromvičevom konturom, sa funkcijama  $\sigma_{sr}^{(NP)}$ ,  $\sigma_{sr}^{(RP)}$  i  $\sigma_{sr}^{(CCP)}$  koje su respektivno date sa

$$\sigma_{sr}^{(NP)}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^{1-\xi}} \frac{|\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi})|}{|\phi_\sigma(\rho e^{i\pi})|} \sin(\arg \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) - \arg \phi_\sigma(\rho e^{i\pi}) + \xi\pi) e^{-\rho t} d\rho, \quad (4.16)$$

$$\sigma_{sr}^{(RP)}(t) = -\frac{1}{\rho_{RP}^{1-\xi}} \frac{|\phi_\varepsilon(s_{RP})|}{|\phi'_\sigma(s_{RP})|} \cos(\arg \phi_\varepsilon(s_{RP}) - \arg \phi'_\sigma(s_{RP}) + \xi\pi) e^{-\rho_{RP} t}, \quad (4.17)$$

$$\sigma_{sr}^{(CCP)}(t) = 2 \frac{1}{\rho_{CCP}^{1-\xi}} \frac{|\phi_\varepsilon(s_{CCP})|}{|\phi'_\sigma(s_{CCP})|} e^{-|\operatorname{Re} s_{CCP}|t} \cos(\operatorname{Im} s_{CCP} t + \arg \phi_\varepsilon(s_{CCP}) - \arg \phi'_\sigma(s_{CCP}) - (1-\xi)\varphi_{CCP}), \quad (4.18)$$

pri čemu je  $\phi'_\sigma(s) = \frac{d}{ds}\phi_\sigma(s)$  i gde su polovi funkcije  $\tilde{\sigma}_{sr}$ :  $s_{RP} = \rho_{RP} e^{i\pi}$  i  $s_{CCP} = \rho_{CCP} e^{i\varphi_{CCP}}$  respektivno negativna realna nula funkcije  $\phi_\sigma$  i njena kompleksna nula koja ima negativan realni deo.

Ekvivalentan oblik funkcije  $\sigma_{sr}^{(NP)}$ , date sa (4.16), je

$$\sigma_{sr}^{(NP)}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^{1-\xi}} \frac{K(\rho)}{|\phi_\sigma(\rho e^{i\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho, \quad (4.19)$$

gde je

$$\begin{aligned} K(\rho) &= \frac{1}{2i} (e^{i\xi\pi} \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) \bar{\phi}_\sigma(\rho e^{i\pi}) - e^{-i\xi\pi} \bar{\phi}_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) \phi_\sigma(\rho e^{i\pi})) \\ &= |\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi})| |\phi_\sigma(\rho e^{i\pi})| \sin(\arg \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) - \arg \phi_\sigma(\rho e^{i\pi}) + \xi\pi) \\ &= \cos(\xi\pi) (\operatorname{Im} \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) \operatorname{Re} \phi_\sigma(\rho e^{i\pi}) - \operatorname{Re} \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) \operatorname{Im} \phi_\sigma(\rho e^{i\pi})) \\ &\quad + \sin(\xi\pi) (\operatorname{Re} \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) \operatorname{Re} \phi_\sigma(\rho e^{i\pi}) + \operatorname{Im} \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) \operatorname{Im} \phi_\sigma(\rho e^{i\pi})), \end{aligned} \quad (4.20)$$

izraz pogodan za ispitivanje kompletne monotonosti funkcije  $\sigma_{sr}^{(NP)}$ , što se obezbeđuje zahtevanjem da je

$$K(\rho) \geq 0, \quad \text{tj. } \sin(\arg \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) - \arg \phi_\sigma(\rho e^{i\pi}) + \xi\pi) \geq 0 \quad \text{za } \rho \geq 0, \quad (4.21)$$

dok, ako uslovi (4.21) nisu zadovoljeni, funkcija  $\sigma_{sr}^{(NP)}$  može biti nemonotona. Funkcija  $\sigma_{sr}^{(RP)}$  je ili pozitivna eksponencijalno opadajuća funkcija koja teži u nulu ili negativna eksponencijalno rastuća funkcija koja takođe teži u nulu, sa vremenskom konstantom  $\rho_{RP}$  koja se dobija kao negativan realan pol funkcije  $\tilde{\sigma}_{sr}$ , videti (4.17), dok je funkcija  $\sigma_{sr}^{(CCP)}$  oscilatorna funkcija sa eksponencijalno opadajućom amplitudom, čija je ugaona frekvencija određena imaginarnim delom kompleksnog pola funkcije  $\tilde{\sigma}_{sr}$ , tj. sa  $\operatorname{Im} s_{CCP}$ , i čiji je parametar prigušenja definisan realnim delom kompleksnog pola funkcije  $\tilde{\sigma}_{sr}$ , tj. sa  $|\operatorname{Re} s_{CCP}|$ , videti (4.18).

Ako funkciju  $\phi_\sigma$ , koja figuriše u modulu relaksacije u Laplasovom domenu (4.13), čine dva člana, kao u slučaju modela ID.ID, ID.DD<sup>+</sup>, ID.IDD, ID.DDD<sup>+</sup> i ID.IDD<sup>+</sup>, videti tabelu 6.5, tada se moduo relaksacije može zapisati preko dvoparametarske Mitag-Leflerove funkcije  $e_{\xi,\zeta,\lambda}$  kao

$$\sigma_{sr}(t) = \frac{b_1}{a_2} e_{\alpha+\beta, 1-\xi+\alpha+\beta, \frac{a_1}{a_2}}(t) + \frac{b_2}{a_2} e_{\alpha+\beta, 1-\xi+\alpha+\beta-\lambda, \frac{a_1}{a_2}}(t) + \frac{b_3}{a_2} e_{\alpha+\beta, 1-\xi+\alpha+\beta-\kappa, \frac{a_1}{a_2}}(t), \quad (4.22)$$

pri čemu je  $b_3 = 0$  za modele ID.ID i ID.DD<sup>+</sup>, sa notacijom

$$e_{\xi,\zeta,\lambda}(t) = t^{\zeta-1} E_{\xi,\zeta}(-\lambda t^\xi), \quad \text{gde je } E_{\xi,\zeta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\xi n + \zeta)}, \quad (4.23)$$

videti [68]. Naime, moduo relaksacije u Laplasovom domenu (4.13) za navedene modele može se napisati kao

$$\tilde{\sigma}_{sr}(s) = \frac{1}{s^{1-\xi}} \frac{b_1 + b_2 s^\lambda + b_3 s^\kappa}{a_1 + a_2 s^{\alpha+\beta}},$$

videti tabelu 6.5, transformišući se u

$$\tilde{\sigma}_{sr}(s) = \frac{b_1}{a_2} \frac{s^{-(1-\xi)}}{s^{\alpha+\beta} + \frac{a_1}{a_2}} + \frac{b_2}{a_2} \frac{s^{-(1-\xi-\lambda)}}{s^{\alpha+\beta} + \frac{a_1}{a_2}} + \frac{b_3}{a_2} \frac{s^{-(1-\xi-\kappa)}}{s^{\alpha+\beta} + \frac{a_1}{a_2}},$$

što daje moduo relaksacije u obliku (4.22) nakon primene Laplasove transformacije dvoparametarske Mitag-Leflerove funkcije

$$e_{\xi,\zeta,\lambda}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^{\xi-\zeta}}{s^\xi + \lambda} \right] (t). \quad (4.24)$$

Još jedan oblik integralne reprezentacije modula relaksacije, već datog sa (4.19) u slučaju kada  $\tilde{\sigma}_{sr}$  nema polova, koristeći moduo relaksacije (4.22) izražen preko dvoparametarske Mitag-Leflerove funkcije (4.23) i koristeći integralnu reprezentaciju Mitag-Leflerove funkcije

$$e_{\xi,\zeta,\lambda}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda \sin((\zeta - \xi)\pi) + \rho^\xi \sin(\zeta\pi)}{|\rho^\xi e^{i\xi\pi} + \lambda|^2} \rho^{\xi-\zeta} e^{-\rho t} d\rho, \quad (4.25)$$

videti [68], pod uslovom da je  $\xi \in (0, 1)$  i  $\zeta < 1 + \xi$ , dobija se kao

$$\begin{aligned} \sigma_{sr}(t) = & \frac{1}{a_2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^{1-\xi}} \left( \frac{a_1 b_1 \sin(\xi\pi) + b_2 \rho^\lambda \sin((\xi + \lambda)\pi) + b_3 \rho^\kappa \sin((\xi + \kappa)\pi)}{\left| \rho^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\pi} + \frac{a_1}{a_2} \right|^2} \right. \\ & \left. + \rho^{\alpha+\beta} \frac{b_1 \sin((\xi - \alpha - \beta)\pi) + b_2 \rho^\lambda \sin((\xi + \lambda - \alpha - \beta)\pi) + b_3 \rho^\kappa \sin((\xi + \kappa - \alpha - \beta)\pi)}{\left| \rho^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\pi} + \frac{a_1}{a_2} \right|^2} \right) e^{-\rho t} d\rho, \end{aligned} \quad (4.26)$$

te je kompletna monotonost, pod uslovom da je  $\alpha + \beta \in (0, 1)$ , obezbeđena zahtevom da je funkcija

$$\begin{aligned} K(\rho) = & a_1 b_1 \sin(\xi\pi) + a_1 b_2 \rho^\lambda \sin((\xi + \lambda)\pi) + a_1 b_3 \rho^\kappa \sin((\xi + \kappa)\pi) + a_2 b_1 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\xi - \alpha - \beta)\pi) \\ & + a_2 b_2 \rho^{\alpha+\beta+\lambda} \sin((\xi + \lambda - \alpha - \beta)\pi) + a_2 b_3 \rho^{\alpha+\beta+\kappa} \sin((\xi + \kappa - \alpha - \beta)\pi) \end{aligned}$$

nenegativna za  $\rho \geq 0$ . Treba naglasiti da se izrazi (4.19) i (4.26) za moduo relaksacije podudaraju.

#### 4.2.2 Funkcija puzanja

Za funkciju puzanja u vremenskom domenu se dobija izraz

$$\varepsilon_{cr}(t) = \varepsilon_{cr}^{(NP)}(t) + \begin{cases} 0, & \text{ako } \tilde{\varepsilon}_{cr} \text{ nema polova,} \\ \varepsilon_{cr}^{(RP)}(t), & \text{ako } \tilde{\varepsilon}_{cr} \text{ ima negativan realan pol,} \\ \varepsilon_{cr}^{(CCP)}(t), & \text{ako } \tilde{\varepsilon}_{cr} \text{ ima par kompleksno konjugovanih polova,} \end{cases} \quad (4.27)$$

sa funkcijama  $\varepsilon_{cr}^{(NP)}$ ,  $\varepsilon_{cr}^{(RP)}$  i  $\varepsilon_{cr}^{(CCP)}$  respektivno datim izrazima

$$\varepsilon_{cr}^{(NP)}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^{1+\xi}} \frac{|\phi_\sigma(\rho e^{i\pi})|}{|\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi})|} \sin(\arg \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) - \arg \phi_\sigma(\rho e^{i\pi}) + \xi\pi) (1 - e^{-\rho t}) d\rho, \quad (4.28)$$

$$\varepsilon_{cr}^{(RP)}(t) = -\frac{1}{\rho_{RP}^{1+\xi}} \frac{|\phi_\sigma(s_{RP})|}{|\phi'_\varepsilon(s_{RP})|} \cos(\arg \phi'_\varepsilon(s_{RP}) - \arg \phi_\sigma(s_{RP}) + \xi\pi) (1 - e^{-\rho_{RP}t}), \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cr}^{(CCP)}(t) = & 2 \frac{1}{\rho_{CCP}^{1+\xi}} \frac{|\phi_\sigma(s_{CCP})|}{|\phi'_\varepsilon(s_{CCP})|} \\ & \times \left( e^{-|\operatorname{Re}s_{CCP}|t} \cos(\operatorname{Im}s_{CCP}t - \arg \phi'_\varepsilon(s_{CCP}) + \arg \phi_\sigma(s_{CCP}) - (1 + \xi)\varphi_{CCP}) \right. \\ & \left. - \cos(\arg \phi'_\varepsilon(s_{CCP}) - \arg \phi_\sigma(s_{CCP}) + (1 + \xi)\varphi_{CCP}) \right), \end{aligned} \quad (4.30)$$

pri čemu je  $\phi'_\varepsilon(s) = \frac{d}{ds}\phi_\varepsilon(s)$  i gde su  $s_{RP} = \rho_{RP} e^{i\pi}$  i  $s_{CCP} = \rho_{CCP} e^{i\varphi_{CCP}}$  respektivno negativna realna nula funkcije  $\phi_\varepsilon$  i njena kompleksna nula koja ima negativan realni deo.

Ekvivalentan oblik funkcije  $\varepsilon_{cr}^{(NP)}$ , date sa (4.28), je

$$\varepsilon_{cr}^{(NP)}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^{1+\xi}} \frac{K(\rho)}{|\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi})|^2} (1 - e^{-\rho t}) d\rho, \quad (4.31)$$

sa funkcijom  $K$  definisanim sa (4.20), te uslovi (4.21), koji obezbeđuju da je moduo relaksacije  $\sigma_{sr}^{(NP)}$ , videti (4.19), kompletno monoton, takođe obezbeđuju da je funkcija puzanja  $\varepsilon_{cr}^{(NP)}$  Bernštajnova funkcija. Sa druge strane, ako uslov (4.21) nije zadovoljen, tada funkcija  $\varepsilon_{cr}^{(NP)}$  može biti nemonotona. Funkcija  $\varepsilon_{cr}^{(RP)}$  je funkcija koja kreće iz nule, te ili eksponencijalno raste ka pozitivnoj horizontalnoj asymptoti, ili eksponencijalno opada ka negativnoj horizontalnoj asymptoti, čija se vremenska konstanta  $\rho_{RP}$  dobija kao negativan realan pol funkcije  $\tilde{\varepsilon}_{cr}$ , videti (4.29), dok je funkcija  $\varepsilon_{cr}^{(CCP)}$  vertikalno pomerena oscilatorna funkcija sa eksponencijalno opadajućom

amplitudom čija je ugaona frekvencija definisana imaginarnim delom kompleksnog pola funkcije  $\tilde{\varepsilon}_{cr}$ , tj.  $\text{Im } s_{\text{CCP}}$ , dok je parametar prigušenja definisan kao realni deo kompleksnog pola funkcije  $\tilde{\varepsilon}_{cr}$ , tj.  $|\text{Re } s_{\text{CCP}}|$ , videti (4.30).

Ako funkciju  $\phi_\varepsilon$ , koja se pojavljuje u funkciji puzanja u Laplasovom domenu (4.14), čine dva člana, što je slučaj sa modelima ID.ID, ID.DD<sup>+</sup>, IID.ID, IDD.DD<sup>+</sup>, I<sup>+</sup>ID.ID i IDD<sup>+</sup>.DD<sup>+</sup>, videti tabelu 6.5, tada se funkcija puzanja može zapisati preko dvoparametarske Mitag-Leflerove funkcije  $e_{\xi,\zeta,\lambda}$ , date sa (4.23), kao

$$\varepsilon_{cr}(t) = \frac{a_1}{b_2} e_{\alpha+\beta, 1+\xi+\alpha+\beta, \frac{b_1}{b_2}}(t) + \frac{a_2}{b_2} e_{\alpha+\beta, 1+\xi+\alpha+\beta-\lambda, \frac{b_1}{b_2}}(t) + \frac{a_3}{b_2} e_{\alpha+\beta, 1+\xi+\alpha+\beta-\kappa, \frac{b_1}{b_2}}(t), \quad (4.32)$$

pri čemu je  $a_3 = 0$  za modele ID.ID i ID.DD<sup>+</sup>. Naime, funkcija puzanja u Laplasovom domenu (4.14) za navedene modele se može napisati kao

$$\tilde{\varepsilon}_{cr}(s) = \frac{1}{s^{1+\xi}} \frac{a_1 + a_2 s^\lambda + a_3 s^\kappa}{b_1 + b_2 s^{\alpha+\beta}},$$

videti tabelu 6.5, transformišući se u

$$\tilde{\varepsilon}_{cr}(s) = \frac{a_1}{b_2} \frac{s^{-(1+\xi)}}{s^{\alpha+\beta} + \frac{b_1}{b_2}} + \frac{a_2}{b_2} \frac{s^{-(1+\xi-\lambda)}}{s^{\alpha+\beta} + \frac{b_1}{b_2}} + \frac{a_3}{b_2} \frac{s^{-(1+\xi-\kappa)}}{s^{\alpha+\beta} + \frac{b_1}{b_2}},$$

što daje funkciju puzanja u obliku (4.32) nakon Laplasove transformacije dvoparametarske Mitag-Leflerove funkcije, date sa (4.24).

Treba naglasiti da funkcija puzanja zapisana preko dvoparametarske Mitag-Leflerove funkcije (4.32) ne dozvoljava integralnu reprezentaciju u obliku (4.25), jer uslov  $\zeta < 1 + \xi$  nije zadovoljen za prvi član u (4.32). Međutim, prvi izvod funkcije puzanja (4.32), dat izrazom

$$\dot{\varepsilon}_{cr}(t) = \frac{a_1}{b_2} e_{\alpha+\beta, \xi+\alpha+\beta, \frac{b_1}{b_2}}(t) + \frac{a_2}{b_2} e_{\alpha+\beta, \xi+\alpha+\beta-\lambda, \frac{b_1}{b_2}}(t) + \frac{a_3}{b_2} e_{\alpha+\beta, \xi+\alpha+\beta-\kappa, \frac{b_1}{b_2}}(t),$$

prema osobini  $\frac{d}{dt} e_{\xi,\zeta,\lambda}(t) = e_{\xi,\zeta-1,\lambda}(t)$  dvoparametarske Mitag-Leflerove funkcije, dozvoljava integralnu reprezentaciju u obliku

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{cr}(t) = & \frac{1}{b_2 \pi} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^\xi} \left( \frac{b_1}{b_2} \frac{a_1 \sin(\xi\pi) + a_2 \rho^\lambda \sin((\xi - \lambda)\pi) + a_3 \rho^\kappa \sin((\xi - \kappa)\pi)}{\left| \rho^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\pi} + \frac{b_1}{b_2} \right|^2} \right. \\ & \left. + \rho^{\alpha+\beta} \frac{a_1 \sin((\xi + \alpha + \beta)\pi) + a_2 \rho^\lambda \sin((\xi - \lambda + \alpha + \beta)\pi) + a_3 \rho^\kappa \sin((\xi - \kappa + \alpha + \beta)\pi)}{\left| \rho^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\pi} + \frac{b_1}{b_2} \right|^2} \right) e^{-\rho t} d\rho, \end{aligned} \quad (4.33)$$

prema izrazu (4.25), pod uslovom da je  $\alpha + \beta \in (0, 1)$ , dakle, zahtevom da je funkcija

$$\begin{aligned} K(\rho) = & a_1 b_1 \sin(\xi\pi) + a_2 b_1 \rho^\lambda \sin((\xi - \lambda)\pi) + a_3 b_1 \rho^\kappa \sin((\xi - \kappa)\pi) \\ & + a_1 b_2 \sin((\xi + \alpha + \beta)\pi) + a_2 b_2 \rho^\lambda \sin((\xi - \lambda + \alpha + \beta)\pi) + a_3 b_2 \rho^\kappa \sin((\xi - \kappa + \alpha + \beta)\pi) \end{aligned}$$

nenegativna, obezbeđuje se da je funkcija  $\dot{\varepsilon}_{cr}$ , videti (4.25), kompletno monotona i stoga je funkcija puzanja Bernštajnova funkcija. Treba primetiti da funkcija puzanja data sa (4.31) odgovara integralu (4.33), jer je  $\varepsilon_{cr}(0) = 0$ .

### 4.2.3 Određivanje izraza za moduo relaksacije i funkciju puzanja

Moduo relaksacije i funkcija puzanja imaju važnu ulogu u ispitivanju energetskog bilansa konstitutivnih modela, stoga su izvedeni njihovi eksplicitni oblici za slučaj termodinamički konzistentnih frakcionalih Cenerovih i anti-Cenerovih modela.

#### 4.2.3.1 Određivanje izraza za moduo relaksacije

Moduo relaksacije se dobija u obliku (4.15), sačinjen od funkcija datih sa (4.16), (4.17) i (4.18), inverznom Laplasovom transformacijom modula relaksacije u Laplasovom domenu (4.13) prema definiciji inverzne Laplasove transformacije

$$\sigma_{sr}(t) = \mathcal{L}^{-1} [\tilde{\sigma}_{sr}(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st} ds.$$

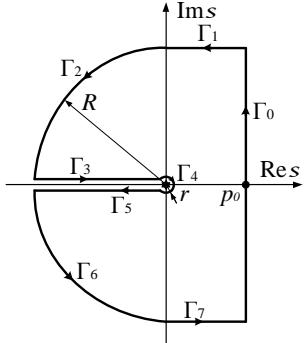
Dakle, moduo relaksacije  $\sigma_{sr}$  u obliku  $\sigma_{sr} = \sigma_{sr}^{(NP)}$  i  $\sigma_{sr} = \sigma_{sr}^{(NP)} + \sigma_{sr}^{(RP)}$  se dobija primenom Košijeve integralne teoreme

$$\oint_{\Gamma^{(I,II)}} \tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st} ds = 0, \quad (4.34)$$

pošto funkcija  $\tilde{\sigma}_{sr}$  ili nema polova i tada se integracija vrši duž konture  $\Gamma^{(I)}$ , prikazane na slici 4.1, ili ima negativan realan pol koji se nalazi izvan konture  $\Gamma^{(II)}$ , prikazane na slici 4.2, dok se moduo relaksacije  $\sigma_{sr}$  u obliku  $\sigma_{sr} = \sigma_{sr}^{(NP)} + \sigma_{sr}^{(CCP)}$  dobija primenom Košijeve teoreme o reziduumima

$$\oint_{\Gamma^{(I)}} \tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st} ds = 2\pi i (\text{Res}(\tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st}, s_{CCP}) + \text{Res}(\tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st}, \bar{s}_{CCP})), \quad (4.35)$$

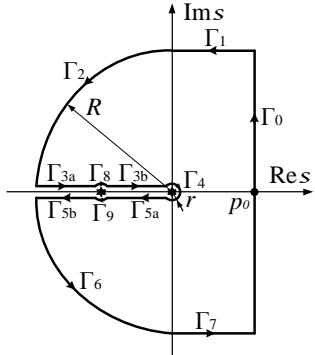
pošto funkcija  $\tilde{\sigma}_{sr}$  ima  $s_{CCP}$  i njemu kompleksno konjugovan  $\bar{s}_{CCP}$  kao polove koji se nalaze unutar konture  $\Gamma^{(I)}$ , prikazane na slici 4.1.



$\Gamma_0$	Bromvičeva kontura,
$\Gamma_1$	$s = p + iR, \quad p \in [0, p_0], \quad p_0 \geq 0$ proizvoljno,
$\Gamma_2$	$\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \quad s = Re^{i\varphi}$ ,
$\Gamma_3$	$\rho \in [r, R], \quad s = \rho e^{i\pi}$ ,
$\Gamma_4$	$\varphi \in [-\pi, \pi], \quad s = re^{i\varphi}$ ,
$\Gamma_5$	$\rho \in [r, R], \quad s = \rho e^{-i\pi}$ ,
$\Gamma_6$	$\varphi \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}], \quad s = Re^{i\varphi}$ ,
$\Gamma_7$	$p \in [0, p_0], \quad p_0 \geq 0$ proizvoljno.

Tabela 4.1: Parametrizacija integracione konture  $\Gamma^{(I)}$ .

Slika 4.1: Integraciona kontura  $\Gamma^{(I)}$ .



$\Gamma_0$	Bromvičeva kontura,
$\Gamma_1$	$p \in [0, p_0], \quad p_0 \geq 0, \quad s = p + iR$ ,
$\Gamma_2$	$\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \quad s = Re^{i\varphi}$ ,
$\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}$	$\rho \in [r, R], \quad s = \rho e^{i\pi}$ ,
$\Gamma_4$	$\varphi \in [-\pi, \pi], \quad s = re^{i\varphi}$ ,
$\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}$	$\rho \in [r, R], \quad s = \rho e^{-i\pi}$ ,
$\Gamma_6$	$\varphi \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}], \quad s = Re^{i\varphi}$ ,
$\Gamma_7$	$p \in [0, p_0], \quad p_0 \geq 0, \quad s = p - iR$ ,
$\Gamma_8$	$\varphi \in [0, \pi], \quad s = -\rho^* + re^{i\varphi}$ ,
$\Gamma_9$	$\varphi \in [-\pi, 0], \quad s = -\rho^* + re^{i\varphi}$ ,

Tabela 4.2: Parametrizacija integracione konture  $\Gamma^{(II)}$ .

Slika 4.2: Integraciona kontura  $\Gamma^{(II)}$ .

U slučaju kada moduo relaksacije u Laplasovom domenu (4.13) nema polova, Košijeva integralna teorema (4.34), sa konturom  $\Gamma^{(I)}$  prikazanim na slici 4.1, uzimajući u obzir integrale koji imaju nenulti doprinos, daje

$$\int_{\Gamma_0} \tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_3} \tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_5} \tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st} ds = 0, \quad (4.36)$$

što, prema parameterizacijama kontura  $\Gamma_3$  i  $\Gamma_5$ , datim u tabeli 4.1, u limesu kada  $r \rightarrow 0$  i  $R \rightarrow \infty$  postaje

$$2\pi i \sigma_{sr}(t) + \int_{\infty}^0 \frac{1}{\rho^{1-\xi} e^{i(1-\xi)\pi}} \frac{\phi_{\varepsilon}(\rho e^{i\pi})}{\phi_{\sigma}(\rho e^{i\pi})} e^{\rho t e^{i\pi}} e^{i\pi} d\rho + \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^{1-\xi} e^{-i(1-\xi)\pi}} \frac{\phi_{\varepsilon}(\rho e^{-i\pi})}{\phi_{\sigma}(\rho e^{-i\pi})} e^{\rho t e^{-i\pi}} e^{-i\pi} d\rho = 0, \quad (4.37)$$

transformišući se u

$$\begin{aligned} \sigma_{sr}(t) &= \sigma_{sr}^{(NP)}(t) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^{1-\xi}} \frac{e^{i(1-\xi)\pi} \bar{\phi}_{\varepsilon}(\rho e^{i\pi}) \phi_{\sigma}(\rho e^{i\pi}) - e^{-i(1-\xi)\pi} \phi_{\varepsilon}(\rho e^{i\pi}) \bar{\phi}_{\sigma}(\rho e^{i\pi})}{|\phi_{\sigma}(\rho e^{i\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho, \quad \text{tj.} \\ \sigma_{sr}(t) &= \sigma_{sr}^{(NP)}(t) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^{1-\xi}} \frac{|\phi_{\varepsilon}(\rho e^{i\pi})|}{|\phi_{\sigma}(\rho e^{i\pi})|} \left( e^{i(1-\xi)\pi - \arg \phi_{\varepsilon}(\rho e^{i\pi}) + \arg \phi_{\sigma}(\rho e^{i\pi})} - e^{-i(1-\xi)\pi + \arg \phi_{\varepsilon}(\rho e^{i\pi}) - \arg \phi_{\sigma}(\rho e^{i\pi})} \right) e^{-\rho t} d\rho, \end{aligned}$$

ekvivalentno izrazu (4.16), odnosno izrazu (4.19) koji sadrži funkciju  $K$ , datu sa (4.20).

Pored integrala duž kontura  $\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}$  i  $\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}$ , koje su deo konture  $\Gamma^{(II)}$  sa slike 4.2, i integrali duž kontura  $\Gamma_8$  i  $\Gamma_9$  imaju nenulti doprinos u slučaju kada moduo relaksacije u Laplasovom domenu (4.13) ima negativan realan pol  $s_{RP} = \rho_{RP} e^{i\pi}$ , te Košijeva integralna teorema (4.34) daje

$$\int_{\Gamma_0} \tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}} \tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}} \tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_8} \tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_9} \tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st} ds = 0,$$

gde su prva tri člana već definisana sa (4.37), a preostali članovi, koji sadrže integrale duž kontura  $\Gamma_8$  i  $\Gamma_9$ , parameterizovanih kao u tabeli 4.2, transformišu prethodni izraz u

$$\begin{aligned} 2\pi i \sigma_{sr}(t) + 2\pi i \sigma_{sr}^{(NP)}(t) + \int_{\pi}^0 \frac{1}{(s_{RP} + re^{i\varphi})^{1-\xi}} \frac{\phi_{\varepsilon}(s_{RP} + re^{i\varphi})}{\phi_{\sigma}(s_{RP} + re^{i\varphi})} e^{(s_{RP} + re^{i\varphi})t} ire^{i\varphi} d\varphi \\ + \int_0^{-\pi} \frac{1}{(\bar{s}_{RP} + re^{i\varphi})^{1-\xi}} \frac{\phi_{\varepsilon}(\bar{s}_{RP} + re^{i\varphi})}{\phi_{\sigma}(\bar{s}_{RP} + re^{i\varphi})} e^{(\bar{s}_{RP} + re^{i\varphi})t} ire^{i\varphi} d\varphi = 0, \end{aligned}$$

u limesu kada  $r \rightarrow 0$  i  $R \rightarrow \infty$ , te je

$$\sigma_{sr}(t) = \sigma_{sr}^{(NP)}(t) + \sigma_{sr}^{(RP)}(t),$$

sa

$$\begin{aligned} \sigma_{sr}^{(RP)}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \left( -i\pi \frac{1}{s_{RP}^{1-\xi}} \frac{\phi_{\varepsilon}(s_{RP})}{\phi'_{\sigma}(s_{RP})} e^{s_{RP}t} - i\pi \frac{1}{\bar{s}_{RP}^{1-\xi}} \frac{\phi_{\varepsilon}(\bar{s}_{RP})}{\phi'_{\sigma}(\bar{s}_{RP})} e^{\bar{s}_{RP}t} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\rho_{RP}^{1-\xi}} \frac{e^{-i(1-\xi)\pi} \phi_{\varepsilon}(s_{RP}) \phi'_{\sigma}(s_{RP}) + e^{i(1-\xi)\pi} \bar{\phi}_{\varepsilon}(s_{RP}) \phi'_{\sigma}(s_{RP})}{|\phi'_{\sigma}(s_{RP})|^2} e^{-\rho_{RP}t} \end{aligned}$$

svodeći se na izraz dat sa (4.17). Za integral duž konture  $\Gamma_8$  dobija se

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_8} \tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st} ds &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{1}{(s_{RP} + re^{i\varphi})^{1-\xi}} \frac{\phi_{\varepsilon}(s_{RP} + re^{i\varphi})}{\phi_{\sigma}(s_{RP} + re^{i\varphi})} e^{(s_{RP} + re^{i\varphi})t} ire^{i\varphi} d\varphi \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{1}{(s_{RP} + re^{i\varphi})^{1-\xi}} \frac{\phi_{\varepsilon}(s_{RP} + re^{i\varphi})}{\phi_{\sigma}(s_{RP}) + \phi'_{\sigma}(s)(s - s_{RP})|_{s=s_{RP}+re^{i\varphi}}} e^{(s_{RP} + re^{i\varphi})t} ire^{i\varphi} d\varphi \\ &= -i\pi \frac{1}{s_{RP}^{1-\xi}} \frac{\phi_{\varepsilon}(s_{RP})}{\phi'_{\sigma}(s_{RP})} e^{s_{RP}t}, \end{aligned}$$

razvojem funkcije  $\phi_{\sigma}$  u red i uzimajući u obzir da je  $\phi_{\sigma}(s_{RP}) = 0$ , a slično se računa i integral duž konture  $\Gamma_9$  dajući

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_9} \tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st} ds = -i\pi \frac{1}{\bar{s}_{RP}^{1-\xi}} \frac{\phi_{\varepsilon}(\bar{s}_{RP})}{\phi'_{\sigma}(\bar{s}_{RP})} e^{\bar{s}_{RP}t}.$$

Na desnoj strani jednačine (4.36), član koji potiče od reziduumma prisutan je kada funkcija  $\tilde{\sigma}_{sr}$ , data sa (4.13), ima par kompleksno konjugovanih polova  $s_{CCP}$  i  $\bar{s}_{CCP}$ , budući da Košijeva teorema o reziduumima (4.35), sa konturom  $\Gamma^{(I)}$  predstavljenom na slici 4.1, pri čemu su polovi unutar oblasti ograničene konturom, uzimajući u obzir integrale sa nenultim doprinosom, daje

$$\int_{\Gamma_0} \tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_3} \tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_5} \tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st} ds = 2\pi i (\text{Res}(\tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st}, s_{CCP}) + \text{Res}(\tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st}, \bar{s}_{CCP})),$$

što postaje

$$\sigma_{sr}(t) - \sigma_{sr}^{(NP)}(t) = \sigma_{sr}^{(CCP)}(t),$$

gde je

$$\begin{aligned} \sigma_{sr}^{(CCP)}(t) &= \frac{1}{\rho_{CCP}^{1-\xi} e^{i(1-\xi)\varphi_{CCP}}} \frac{\phi_{\varepsilon}(s_{CCP})}{\phi'_{\sigma}(s_{CCP})} e^{\text{Re } s_{CCP}t + i \text{Im } s_{CCP}t} \\ &\quad + \frac{1}{\rho_{CCP}^{1-\xi} e^{-i(1-\xi)\varphi_{CCP}}} \frac{\phi_{\varepsilon}(\bar{s}_{CCP})}{\phi'_{\sigma}(\bar{s}_{CCP})} e^{\text{Re } \bar{s}_{CCP}t + i \text{Im } \bar{s}_{CCP}t} \\ &= \frac{1}{\rho_{CCP}^{1-\xi}} e^{\text{Re } s_{CCP}t} \left( \frac{\phi_{\varepsilon}(s_{CCP})}{\phi'_{\sigma}(s_{CCP})} \frac{e^{i \text{Im } s_{CCP}t}}{e^{i(1-\xi)\varphi_{CCP}}} + \frac{\phi_{\varepsilon}(\bar{s}_{CCP})}{\phi'_{\sigma}(\bar{s}_{CCP})} \frac{e^{i \text{Im } \bar{s}_{CCP}t}}{e^{-i(1-\xi)\varphi_{CCP}}} \right) \\ &= \frac{1}{\rho_{CCP}^{1-\xi}} e^{-|\text{Re } s_{CCP}|t} \end{aligned}$$

$$\times \frac{e^{i(\operatorname{Im} s_{CCP} t - (1-\xi)\varphi_{CCP})} \phi_\varepsilon(s_{CCP}) \bar{\phi}'_\sigma(s_{CCP}) + e^{-i(\operatorname{Im} s_{CCP} t - (1-\xi)\varphi_{CCP})} \bar{\phi}_\varepsilon(s_{CCP}) \phi'_\sigma(s_{CCP})}{|\phi'_\sigma(s_{CCP})|^2},$$

izraz koji se svodi na (4.18).

Preostaje da se pokaže da integrali duž kontura  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_6$  i  $\Gamma_7$ , kao delova kontoura  $\Gamma^{(I)}$  i  $\Gamma^{(II)}$  sa slike 4.1 i 4.2, imaju multi doprinos i u Košijevoj integralnoj teoremi i u Košijevoj teoremi o reziduumima, videti (4.34) i (4.35), u limesu kada  $r \rightarrow 0$  i  $R \rightarrow \infty$ .

Integral duž konture  $\Gamma_1$

$$I_{\Gamma_1} = \int_{p_0}^0 \frac{1}{(p+iR)^{1-\xi}} \frac{\phi_\varepsilon(p+iR)}{\phi'_\sigma(p+iR)} e^{(p+iR)t} dp,$$

u kojem je iskorišćena parametrizacija data u tabelama 4.1 i 4.2, ima multi doprinos jer njegova apsolutna vrednost daje

$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_1}| &\leq \int_0^{p_0} \frac{1}{|p+iR|^{1-\xi}} \frac{|\phi_\varepsilon(p+iR)|}{|\phi'_\sigma(p+iR)|} e^{pt} dp \\ &\leq \int_0^{p_0} \frac{1}{R^{1-\xi} |1-i\frac{p}{R}|^{1-\xi}} \frac{|\phi_\varepsilon(p+iR)|}{|\phi'_\sigma(p+iR)|} e^{pt} dp \\ &\leq \int_0^{p_0} \frac{1}{R^{1-\xi}} \frac{|\phi_\varepsilon(p+iR)|}{|\phi'_\sigma(p+iR)|} e^{pt} dp \\ &\leq \int_0^{p_0} \frac{1}{R^{1-\xi-\zeta_R}} e^{pt} dp \rightarrow 0, \quad \text{za } R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ako funkcije  $\phi_\varepsilon$  i  $\phi'_\sigma$ , koje su stepene funkcije, videti tabelu 6.5, zadovoljavaju  $\frac{|\phi_\varepsilon(p+iR)|}{|\phi'_\sigma(p+iR)|} \sim R^{\zeta_R}$ , gde je  $\zeta_R < 1-\xi$  kada  $R \rightarrow \infty$  za  $p \in [0, p_0]$ . Sličnom arumentacijom se pokazuje da integral duž konture  $\Gamma_7$  takođe daje multi doprinos.

Za integral duž konture  $\Gamma_2$ , parametrizacijom kao u tabelama 4.1 i 4.2, se dobija izraz

$$I_{\Gamma_2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{R^{1-\xi} e^{i(1-\xi)\varphi}} \frac{\phi_\varepsilon(R e^{i\varphi})}{\phi'_\sigma(R e^{i\varphi})} e^{R t e^{i\varphi}} i R e^{i\varphi} d\varphi$$

koji daje multi doprinos, što se pokazuje razmatranjem njegove apsolutne vrednosti

$$|I_{\Gamma_2}| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} R^\xi \frac{|\phi_\varepsilon(R e^{i\varphi})|}{|\phi'_\sigma(R e^{i\varphi})|} e^{R t \cos \varphi} d\varphi \rightarrow 0, \quad \text{za } R \rightarrow \infty,$$

budući da  $e^{R t \cos \varphi} \rightarrow 0$  za  $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  kada  $R \rightarrow \infty$  i da su  $\phi_\varepsilon$  i  $\phi'_\sigma$  stepene funkcije, videti tabelu 6.5. Integral duž konture  $\Gamma_6$  takođe ima multi doprinos, što se pokazuje sličnom argumentacijom.

Ukoliko su stepene funkcije  $\phi_\varepsilon$  i  $\phi'_\sigma$ , videti tabelu 6.5, takve da je  $\frac{|\phi_\varepsilon(r e^{i\varphi})|}{|\phi'_\sigma(r e^{i\varphi})|} \sim \frac{1}{r^{\zeta_r}}$ , pri čemu je  $\zeta_r < \xi$  kada  $r \rightarrow 0$  za  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ , može se pokazati da integral duž konture  $\Gamma_4$  ima multi doprinos, budući da, prema parametrizaciji datoj u tabelama 4.1 i 4.2, je integral dat izrazom

$$I_{\Gamma_4} = \int_{-\pi}^{-\pi} \frac{1}{r^{1-\xi} e^{i(1-\xi)\varphi}} \frac{\phi_\varepsilon(r e^{i\varphi})}{\phi'_\sigma(r e^{i\varphi})} e^{r t e^{i\varphi}} i r e^{i\varphi} d\varphi,$$

te je

$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_4}| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} r^\xi \frac{|\phi_\varepsilon(r e^{i\varphi})|}{|\phi'_\sigma(r e^{i\varphi})|} e^{r t \cos \varphi} d\varphi \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} r^{\xi-\zeta_r} d\varphi \rightarrow 0, \quad \text{za } r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

#### 4.2.3.2 Određivanje izraza za funkciju puzanja

Funkcija puzanja u obliku (4.27), koja sadrži funkcije date sa (4.28), (4.29) i (4.30), dobija se prema

$$\varepsilon_{cr}(t) = \int_0^t \epsilon_{cr}(t') dt', \tag{4.38}$$

što je posledica izbora da se razmatra funkcija

$$\tilde{\epsilon}_{cr}(s) = s \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) = \frac{1}{s^\xi} \frac{\phi_\sigma(s)}{\phi_\varepsilon(s)}, \tag{4.39}$$

čijom se inverznom Laplasovom transformacijom dobija

$$\epsilon_{cr}(t) = \frac{d}{dt} \varepsilon_{cr}(t) + \varepsilon_{cr}^{(g)} \delta(t) = \frac{d}{dt} \varepsilon_{cr}(t),$$

sa vrednošću funkcije puzanja u nuli  $\varepsilon_{cr}^{(g)} = \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_{cr}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^\xi} \frac{\phi_\sigma(s)}{\phi_\varepsilon(s)} = 0$  za sve razmatrane frakcione Cenerove i anti-Cenerove modele, umesto izbora da se razmatra funkcija puzanja u Laplasovom domenu (4.14). Funkcija  $\epsilon_{cr}$  se dobija korišćenjem definicije inverzne Laplasove transformacije primenjene na funkciju  $\tilde{\varepsilon}_{cr}$ , videti (4.39), i integracijom u kompleksnoj ravni duž Bromvičeve konture, odnosno

$$\epsilon_{cr}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) e^{st} ds. \quad (4.40)$$

štaviš, funkcija puzanja  $\varepsilon_{cr}$  u oblicima  $\varepsilon_{cr} = \varepsilon_{cr}^{(NP)}$  i  $\varepsilon_{cr} = \varepsilon_{cr}^{(NP)} + \varepsilon_{cr}^{(RP)}$  se dobija prema (4.38), sa funkcijom  $\epsilon_{cr}$  računatom korišćenjem Košijeve integralne teoreme

$$\oint_{\Gamma^{(I,II)}} \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) e^{st} ds = 0, \quad (4.41)$$

pri čemu se integracija primenjuje ili duž konture  $\Gamma^{(I)}$ , predstavljene na slici 4.1, ako funkcija  $\tilde{\varepsilon}_{cr}$  nema polova, ili duž konture  $\Gamma^{(II)}$ , predstavljene na slici 4.2, ako funkcija  $\tilde{\varepsilon}_{cr}$  ima negativan realan pol koji se nalazi izvan konture  $\Gamma^{(II)}$ , dok se funkcija puzanja  $\varepsilon_{cr}$  u obliku  $\varepsilon_{cr} = \varepsilon_{cr}^{(NP)} + \varepsilon_{cr}^{(CCP)}$  dobija prema (4.38), sa funkcijom  $\epsilon_{cr}$  računatom pomoću Košijeve teoreme o reziduumima

$$\oint_{\Gamma^{(I)}} \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) e^{st} ds = 2\pi i (\text{Res}(\tilde{\varepsilon}_{cr}(s) e^{st}, s_{CCP}) + \text{Res}(\tilde{\varepsilon}_{cr}(s) e^{st}, \bar{s}_{CCP})), \quad (4.42)$$

pošto funkcija  $\tilde{\varepsilon}_{cr}$  ima  $s_{CCP}$  i njemu kompleksno konjugovan  $\bar{s}_{CCP}$  kao polove koji se nalaze unutar konture  $\Gamma^{(I)}$ , predstavljene na slici 4.1.

Naime, u slučaju kada funkcija  $\tilde{\varepsilon}_{cr}$ , data sa (4.39), nema polova, Košijeva integralna teorema (4.41), sa konturom  $\Gamma^{(I)}$  predstavljenoj na slici 4.1, izostavljanjem integrala koji daju nulti doprinos, daje

$$\int_{\Gamma_0} \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_3} \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_5} \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) e^{st} ds = 0,$$

pri čemu integrali duž kontura  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_3$  i  $\Gamma_5$ , parameterizovani kao u tabeli 4.1, u limesu kada  $r \rightarrow 0$  i  $R \rightarrow \infty$  postaju

$$2\pi i \epsilon_{cr}(t) + \int_{\infty}^0 \frac{1}{\rho^\xi e^{i\xi\pi}} \frac{\phi_\sigma(\rho e^{i\pi})}{\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi})} e^{\rho t e^{i\pi}} e^{i\pi} d\rho + \int_0^\infty \frac{1}{\rho^\xi e^{-i\xi\pi}} \frac{\phi_\sigma(\rho e^{-i\pi})}{\phi_\varepsilon(\rho e^{-i\pi})} e^{\rho t e^{-i\pi}} e^{-i\pi} d\rho = 0, \quad (4.43)$$

transformišući se u

$$\begin{aligned} \epsilon_{cr}(t) &= \epsilon_{cr}^{(NP)}(t) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^\xi} \frac{e^{i\xi\pi} \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) \bar{\phi}_\sigma(\rho e^{i\pi}) - e^{-i\xi\pi} \bar{\phi}_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) \phi_\sigma(\rho e^{i\pi})}{|\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^\xi} \frac{K(\rho)}{|\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho, \quad \text{tj.} \\ \epsilon_{cr}(t) &= \epsilon_{cr}^{(NP)}(t) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^\xi} \frac{|\phi_\sigma(\rho e^{i\pi})|}{|\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi})|} \left( e^{i(\xi\pi + \arg \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) - \arg \phi_\sigma(\rho e^{i\pi}))} - e^{-i(\xi\pi + \arg \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) - \arg \phi_\sigma(\rho e^{i\pi}))} \right) e^{-\rho t} d\rho \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^\xi} \frac{|\phi_\sigma(\rho e^{i\pi})|}{|\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi})|} \sin(\arg \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) - \arg \phi_\sigma(\rho e^{i\pi}) + \xi\pi) e^{-\rho t} d\rho, \end{aligned}$$

što, prema (4.38) i prema izrazu (4.20) za funkciju  $K$ , postaje funkcija puzanja  $\varepsilon_{cr}^{(NP)}$  u ekvivalentnim oblicima (4.28) i (4.31).

Sa duge strane, ako funkcija  $\tilde{\varepsilon}_{cr}$ , data sa (4.39), ima negativan realan pol  $s_{RP} = \rho_{RP} e^{i\pi}$ , tada Košijevoj integralnoj teoremi (4.41) odgovara kontura  $\Gamma^{(II)}$  sa slike 4.2, te, pored integrala duž kontura  $\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}$  i  $\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}$ , doprinos daju i integrali duž kontura  $\Gamma_8$  i  $\Gamma_9$ , implicirajući izraz

$$\int_{\Gamma_0} \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}} \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}} \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_8} \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_9} \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) e^{st} ds = 0,$$

sa prva tri člana već definisana sa (4.43) i sa preostalim članovima računatim duž kontura  $\Gamma_8$  i  $\Gamma_9$ , parametri-zovanih kao u tabeli 4.2, transformišući prethodni izraz, u limesu kada  $r \rightarrow 0$  i  $R \rightarrow \infty$ , u

$$2\pi i \epsilon_{cr}(t) + 2\pi i \epsilon_{cr}^{(NP)}(t) + \int_{\pi}^0 \frac{1}{(s_{RP} + re^{i\varphi})^\xi} \frac{\phi_{\sigma}(s_{RP} + re^{i\varphi})}{\phi_{\varepsilon}(s_{RP} + re^{i\varphi})} e^{(s_{RP} + re^{i\varphi})t} i r e^{i\varphi} d\varphi \\ + \int_0^{-\pi} \frac{1}{(\bar{s}_{RP} + re^{i\varphi})^\xi} \frac{\phi_{\sigma}(\bar{s}_{RP} + re^{i\varphi})}{\phi_{\varepsilon}(\bar{s}_{RP} + re^{i\varphi})} e^{(\bar{s}_{RP} + re^{i\varphi})t} i r e^{i\varphi} d\varphi = 0,$$

što postaje

$$\epsilon_{cr}(t) = \epsilon_{cr}^{(NP)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \left( -i\pi \frac{1}{s_{RP}^\xi} \frac{\phi_{\sigma}(s_{RP})}{\phi'_{\varepsilon}(s_{RP})} e^{s_{RP}t} - i\pi \frac{1}{\bar{s}_{RP}^\xi} \frac{\phi_{\sigma}(\bar{s}_{RP})}{\phi'_{\varepsilon}(\bar{s}_{RP})} e^{\bar{s}_{RP}t} \right) \\ = \epsilon_{cr}^{(NP)}(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_{RP}^\xi} \frac{e^{-i\xi\pi} \bar{\phi}'_{\varepsilon}(s_{RP}) \phi_{\sigma}(s_{RP}) + e^{i\xi\pi} \phi'_{\varepsilon}(s_{RP}) \bar{\phi}_{\sigma}(s_{RP})}{|\phi'_{\varepsilon}(s_{RP})|^2} e^{-\rho_{RP}t},$$

pri čemu se poslednji član transformiše u

$$\epsilon_{cr}^{(RP)}(t) = -\frac{1}{\rho_{RP}^\xi} \frac{|\phi_{\sigma}(s_{RP})|}{|\phi'_{\varepsilon}(s_{RP})|} \cos(\arg \phi'_{\varepsilon}(s_{RP}) - \arg \phi_{\sigma}(s_{RP}) + \xi\pi) e^{-\rho_{RP}t},$$

dajući funkciju  $\epsilon_{cr}^{(RP)}$  u obliku (4.29), prema (4.38). Integral duž konture  $\Gamma_8$  se računa kao

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_8} \tilde{\epsilon}_{cr}(s) e^{st} ds = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{1}{(s_{RP} + re^{i\varphi})^\xi} \frac{\phi_{\sigma}(s_{RP} + re^{i\varphi})}{\phi_{\varepsilon}(s_{RP} + re^{i\varphi})} e^{(s_{RP} + re^{i\varphi})t} i r e^{i\varphi} d\varphi \\ = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{1}{(s_{RP} + re^{i\varphi})^\xi} \frac{\phi_{\sigma}(s_{RP} + re^{i\varphi})}{\phi_{\varepsilon}(s_{RP}) + \phi'_{\varepsilon}(s)(s - s_{RP})|_{s=s_{RP}+re^{i\varphi}}} e^{(s_{RP} + re^{i\varphi})t} i r e^{i\varphi} d\varphi + \dots \\ = -i\pi \frac{1}{s_{RP}^\xi} \frac{\phi_{\sigma}(s_{RP})}{\phi'_{\varepsilon}(s_{RP})} e^{s_{RP}t},$$

razvojem funkcije  $\phi_{\varepsilon}$  u red i uzimajući u obzir da je  $\phi_{\varepsilon}(s_{RP}) = 0$ , dok sličan račun daje integral duž konture  $\Gamma_9$  u obliku

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_9} \tilde{\epsilon}_{cr}(s) e^{st} ds = -i\pi \frac{1}{\bar{s}_{RP}^\xi} \frac{\phi_{\sigma}(\bar{s}_{RP})}{\phi'_{\varepsilon}(\bar{s}_{RP})} e^{\bar{s}_{RP}t}.$$

Dodatno, kada funkcija  $\tilde{\epsilon}_{cr}$ , videti (4.39), ima par kompleksno konjugovanih polova  $s_{CCP}$  i  $\bar{s}_{CCP}$ , koji se nalaze unutar oblasti ograničene konturom  $\Gamma^{(I)}$  predstavljenoj na slici 4.1, Košijeva teorema o reziduumima (4.42), izostavljajući integrale koji imaju nulti doprinos, daje

$$\int_{\Gamma_0} \tilde{\epsilon}_{cr}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_3} \tilde{\epsilon}_{cr}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_5} \tilde{\epsilon}_{cr}(s) e^{st} ds = 2\pi i (\text{Res}(\tilde{\epsilon}_{cr}(s) e^{st}, s_{CCP}) + \text{Res}(\tilde{\epsilon}_{cr}(s) e^{st}, \bar{s}_{CCP})),$$

što, u limesu kada  $r \rightarrow 0$  i  $R \rightarrow \infty$  i sa članovima na levoj strani prethodnog izraza već definisanim sa (4.43), postaje

$$\epsilon_{cr}(t) - \epsilon_{cr}^{(NP)}(t) = \epsilon_{cr}^{(CCP)}(t),$$

sa

$$\epsilon_{cr}^{(CCP)}(t) = \frac{1}{\rho_{CCP}^\xi} \frac{\phi_{\sigma}(s_{CCP})}{\phi'_{\varepsilon}(s_{CCP})} e^{\text{Re } s_{CCP}t + i \text{Im } s_{CCP}t} \\ + \frac{1}{\rho_{CCP}^\xi} \frac{\phi_{\sigma}(\bar{s}_{CCP})}{\phi'_{\varepsilon}(\bar{s}_{CCP})} e^{\text{Re } \bar{s}_{CCP}t + i \text{Im } \bar{s}_{CCP}t} \\ = \frac{1}{\rho_{CCP}^\xi} e^{\text{Re } s_{CCP}t} \left( \frac{1}{e^{i\xi\varphi_{CCP}}} \frac{\phi_{\sigma}(s_{CCP})}{\phi'_{\varepsilon}(s_{CCP})} e^{i \text{Im } s_{CCP}t} + \frac{1}{e^{-i\xi\varphi_{CCP}}} \frac{\phi_{\sigma}(\bar{s}_{CCP})}{\phi'_{\varepsilon}(\bar{s}_{CCP})} e^{i \text{Im } \bar{s}_{CCP}t} \right) \\ = \frac{1}{\rho_{CCP}^\xi} e^{-|\text{Re } s_{CCP}|t} \\ \times \frac{e^{i(\text{Im } s_{CCP}t - \xi\varphi_{CCP})} \bar{\phi}'_{\varepsilon}(s_{CCP}) \phi_{\sigma}(s_{CCP}) + e^{-i(\text{Im } s_{CCP}t - \xi\varphi_{CCP})} \phi'_{\varepsilon}(s_{CCP}) \bar{\phi}_{\sigma}(s_{CCP})}{|\phi'_{\varepsilon}(s_{CCP})|^2} \\ = 2 \frac{1}{\rho_{CCP}^\xi} \frac{|\phi_{\sigma}(s_{CCP})|}{|\phi'_{\varepsilon}(s_{CCP})|} e^{-|\text{Re } s_{CCP}|t} \cos(\text{Im } s_{CCP}t - \arg \phi'_{\varepsilon}(s_{CCP}) + \arg \phi_{\sigma}(s_{CCP}) - \xi\varphi_{CCP}),$$

implicirajući, prema (4.38), da je

$$\varepsilon_{cr}(t) = \varepsilon_{cr}^{(NP)}(t) + \varepsilon_{cr}^{(CCP)}(t),$$

sa

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cr}^{(CCP)}(t) &= 2 \frac{1}{\rho_{CCP}^{1+\xi}} \frac{|\phi_\sigma(s_{CCP})|}{|\phi'_\varepsilon(s_{CCP})|} \\ &\quad \times \left( e^{-|\operatorname{Re} s_{CCP}|t} \cos(\operatorname{Im} s_{CCP} t - \arg \phi'_\varepsilon(s_{CCP}) + \arg \phi_\sigma(s_{CCP}) - (1+\xi)\varphi_{CCP}) \right. \\ &\quad \left. - \cos(\arg \phi'_\varepsilon(s_{CCP}) - \arg \phi_\sigma(s_{CCP}) + (1+\xi)\varphi_{CCP}) \right), \end{aligned}$$

pri čemu je iskorišćen integral

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\mu t'} \cos(\omega t' + \phi) dt' &= \frac{1}{\mu^2 + \omega^2} (e^{\mu t} (\omega \sin(\omega t + \phi) + \mu \cos(\omega t + \phi)) - (\omega \sin \phi + \mu \cos \phi)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + \omega^2}} (e^{\mu t} \cos(\omega t + \phi - \varphi) - \cos(\phi - \varphi)) \end{aligned}$$

sa smenom  $\mu = \operatorname{Re} s_{CCP}$ ,  $\omega = \operatorname{Im} s_{CCP}$ ,  $\phi = -\arg \phi'_\varepsilon(s_{CCP}) + \arg \phi_\sigma(s_{CCP}) - \xi \varphi_{CCP}$  i  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\mu} = \varphi_{CCP}$ .

Integrali duž kontura  $\Gamma_1$  ( $\Gamma_7$ ),  $\Gamma_2$  ( $\Gamma_6$ ) i  $\Gamma_4$  teže u nulu u Košijevoj integralnoj teoremi (4.41) i Košijevoj teoremi o reziduumima (4.42) u limesu kada  $r \rightarrow 0$  i  $R \rightarrow \infty$ . Naime, ako stepene funkcije  $\phi_\varepsilon$  i  $\phi_\sigma$ , videti tabelu 6.5, zadovoljavaju uslove

$$\frac{|\phi_\varepsilon(p+iR)|}{|\phi_\sigma(p+iR)|} \sim R^{\zeta_R}, \quad \text{kada } R \rightarrow \infty \quad \text{za } p \in [0, p_0],$$

$$\frac{|\phi_\sigma(re^{i\varphi})|}{|\phi_\varepsilon(re^{i\varphi})|} \sim \frac{1}{r^{\zeta_r}}, \quad \text{kada } r \rightarrow 0 \quad \text{za } \varphi \in [-\pi, \pi],$$

koji su već nametnuti u poglavlju 4.2.3.1 radi obezbeđivanja nultih doprinosa integrala funkcije  $\tilde{\sigma}_{sr}(s) e^{st}$  duž kontura  $\Gamma_1$  ( $\Gamma_7$ ),  $\Gamma_2$  ( $\Gamma_6$ ) i  $\Gamma_4$ , tada je takođe

$$\frac{|\phi_\sigma(p+iR)|}{|\phi_\varepsilon(p+iR)|} \sim \frac{1}{R^{\zeta_R}}, \quad \text{kada } R \rightarrow \infty \quad \text{za } p \in [0, p_0], \quad (4.44)$$

$$\frac{|\phi_\sigma(re^{i\varphi})|}{|\phi_\varepsilon(re^{i\varphi})|} \sim r^{\zeta_r}, \quad \text{kada } r \rightarrow 0 \quad \text{za } \varphi \in [-\pi, \pi], \quad (4.45)$$

zbog sličnih oblika modula relaksacije u Laplasovom domenu i funkcije  $\tilde{\varepsilon}_{cr}$ , videti (4.13) i (4.39), te integrali duž kontura  $\Gamma_1$  ( $\Gamma_7$ ) i  $\Gamma_4$  imaju nulti doprinos, ako je  $\zeta_R > -\xi$  i  $\zeta_r > -(1-\xi)$ , implicirajući uslove

$$-\xi < \zeta_R < 1 - \xi \quad \text{i} \quad -(1 - \xi) < \zeta_r < \xi \quad (4.46)$$

pri čemu su  $\zeta_R < 1 - \xi$  i  $\zeta_r < \xi$  već prethodno nametnuti uslovi, dok je nulti doprinos integrala duž konture  $\Gamma_2$  ( $\Gamma_6$ ) prsto obezbeđen zbog činjenice da su  $\phi_\varepsilon$  i  $\phi_\sigma$  stepene funkcije.

#### 4.2.4 Položaj i broj nula funkcija $\phi_\sigma$ i $\phi_\varepsilon$

Funkcije  $\phi_\sigma$  i  $\phi_\varepsilon$  u slučaju frakcionog Cenerovog i anti-Cenerovog modela se svode na neku od sledeće tri forme

$$\phi(s) = \begin{cases} as^\xi + b, \\ as^{1+\xi} + b, \end{cases} \quad \phi(s) = \begin{cases} as^\xi + bs^\zeta + c, \\ as^{1+\xi} + bs^\zeta + c \end{cases} \quad \text{i} \quad \phi(s) = as^{2\xi} + bs^\xi + c,$$

videti tabelu 6.5, gde su  $a, b, c > 0$  i  $\xi, \zeta \in (0, 1)$ . Funkcije koje sadrže stepene kompleksne varijable  $s$  koji su u intervalu  $(0, 1)$ , kao što je dobro poznato, nemaju nula u glavnoj Rimanovoj grani, tj. za  $\arg s \in (-\pi, \pi)$ , dok funkcije sa stepenom vodećeg člana u intervalu  $(1, 2)$  mogu da nemaju nula, mogu da imaju negativnu realnu nulu, ali mogu da imaju i par kompleksno konjugovanih nula sa negativnim realnim delom, o čemu je reč u nastavku.

#### 4.2.4.1 Funkcija koja sadrži dva člana

Funkcije  $\phi_\sigma$  i  $\phi_\varepsilon$  u slučaju modela ID.ID su oblika

$$\phi(s) = as^{1+\xi} + b, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \arg s \in (-\pi, \pi),$$

videti tabelu 6.5, gde su  $a, b > 0$  i  $\xi \in (0, 1)$ . Pokazuje se da funkcija  $\phi$  ima par kompleksno konjugovanih nula

$$s_{\text{CCP}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1+\xi}} e^{i\frac{\pi}{1+\xi}} \quad \text{i} \quad \bar{s}_{\text{CCP}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1+\xi}} e^{-i\frac{\pi}{1+\xi}},$$

sa negativnim realnim delom.

Realni i imaginarni deo funkcije  $\phi$ , uvrštavanjem  $s = \rho e^{i\varphi}$ , postaju

$$\operatorname{Re} \phi(\rho, \varphi) = a\rho^{1+\xi} \cos((1+\xi)\varphi) + b \quad \text{i} \quad \operatorname{Im} \phi(\rho, \varphi) = a\rho^{1+\xi} \sin((1+\xi)\varphi),$$

te  $\operatorname{Im} \phi(\rho, \varphi) = 0$  implicira da je  $\varphi_k = \frac{k\pi}{1+\xi}$ . Iz zahteva da argument odgovara prvoj Rimanovoj grani  $\varphi_k \in (-\pi, \pi)$  sledi nejednakost  $-(1+\xi) \leq k \leq (1+\xi)$ , implicirajući da je  $k \in \{-1, 0, 1\}$ , zbog čega se realni deo funkcije  $\phi$  transformiše u izraz

$$\operatorname{Re} \phi(\rho, \varphi_k) = a\rho^{1+\xi} \cos(k\pi) + b,$$

koji je jednak nuli za  $k \in \{-1, 1\}$ , ako je  $\rho = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1+\xi}}$ , dok je  $\operatorname{Re} \phi(\rho, \varphi_0) = a\rho^{1+\xi} + b > 0$  za  $k = 0$ . Stoga su  $s_1 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1+\xi}} e^{i\frac{\pi}{1+\xi}}$  i  $s_{-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1+\xi}} e^{-i\frac{\pi}{1+\xi}}$  nule funkcije  $\phi$ .

#### 4.2.4.2 Funkcija koja sadrži tri člana

Funkcije  $\phi_\sigma$  i  $\phi_\varepsilon$  u slučaju modela IID.IID i IDD.IDD mogu biti oblika

$$\phi(s) = as^{1+\xi} + bs^\zeta + c, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \arg s \in (-\pi, \pi),$$

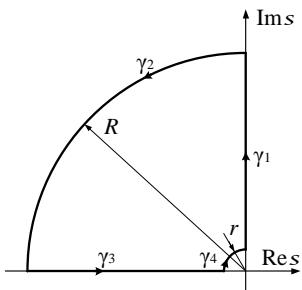
videti tabelu 6.5, gde je  $a, b, c > 0$  i  $\xi, \zeta \in (0, 1)$ . Pokazuje se da funkcija  $\phi$  ima: par kompleksno konjugovanih nula sa negativnim realnim delom ako je  $\operatorname{Re} \phi(\rho^*, \pi) > 0$ , negativnu realnu nulu  $s = -\rho^*$  ako je  $\operatorname{Re} \phi(\rho^*, \pi) = 0$ , odnosno nema nula ako je  $\operatorname{Re} \phi(\rho^*, \pi) < 0$ , gde je  $\operatorname{Re} \phi$  dato sa (4.47)<sub>1</sub> i gde je  $\rho^* = \left(\frac{b \sin(\zeta\pi)}{a \sin(\xi\pi)}\right)^{\frac{1}{1+\xi-\zeta}}$ .

Realni i imaginarni deo funkcije  $\phi$ , uvrštavanjem  $s = \rho e^{i\varphi}$ , postaju

$$\operatorname{Re} \phi(\rho, \varphi) = a\rho^{1+\xi} \cos((1+\xi)\varphi) + b\rho^\zeta \cos(\zeta\varphi) + c \quad \text{i} \quad \operatorname{Im} \phi(\rho, \varphi) = a\rho^{1+\xi} \sin((1+\xi)\varphi) + b\rho^\zeta \sin(\zeta\varphi). \quad (4.47)$$

Na osnovu (4.47)<sub>2</sub>, sledi da je  $\operatorname{Im} \phi(\rho, -\varphi) = -\operatorname{Im} \phi(\rho, \varphi)$  implicirajući da su  $s_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$  i njemu kompleksno konjugovan  $\bar{s}_0 = \rho_0 e^{-i\varphi_0}$  nule funkcije  $\phi$ , te je dovoljno razmatrati samo gornju kompleksnu poluravni. Takođe, nema nula funkcije  $\phi$  koje leže u desnoj kompleksnoj poluravni, jer je  $\operatorname{Im} \phi(\rho, \varphi) > 0$  za  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$  i štaviše nema pozitivnih realnih nula funkcije  $\phi$ , jer je  $\operatorname{Re} \phi(\rho, 0) > 0$ . Stoga se nule funkcije  $\phi$  nalaze u levoj kompleksnoj poluravni.

Da bi se pokazalo da funkcija  $\phi$  ima jednu nulu u drugom kvadrantu, koriste se princip argumenta i kontura  $\gamma$ , prikazana na slici 4.3. Princip argumenta tvrdi da je broj nula  $N$  funkcije  $\phi$  unutar oblasti ograničene konturom  $\gamma$ , ukoliko funkcija  $\phi$  nema polova unutar navedene oblasti, određen izrazom  $\Delta \arg \phi(s) = 2\pi N$ , gde kompleksna promenljiva  $s$  uzima vrednosti duž konture  $\gamma$ .



$\gamma_1 : s = \rho e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \rho \in [r, R],$
$\gamma_2 : s = Re^{i\varphi}, \quad \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi],$
$\gamma_3 : s = pe^{i\pi}, \quad p \in [r, R],$
$\gamma_4 : s = re^{i\varphi}, \quad \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi].$

Tabela 4.3: Parametrizacija konture  $\gamma$ .

Slika 4.3: Kontura  $\gamma$ .

Argument kompleksnih brojeva  $s$  koji pripadaju konturi  $\gamma_1$  ima fiksnu vrednost  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , dok se njihov moduo menja tako da je  $\rho \in (r, R)$ , videti parameterizaciju datu u tabeli 4.3, stoga je

$$\operatorname{Im} \phi\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = a\rho^{1+\xi} \cos \frac{\xi\pi}{2} + b\rho^\zeta \sin \frac{\zeta\pi}{2} > 0,$$

prema (4.47), što takođe implicira da funkcija  $\phi$  nema čisto imaginarnih nula. Asimptotika realnog i imaginarnog dela (4.47) funkcije  $\phi$ , je

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \phi\left(r, \frac{\pi}{2}\right) &\sim c \quad i \quad \operatorname{Im} \phi\left(r, \frac{\pi}{2}\right) \sim b r^{\zeta} \sin \frac{\zeta \pi}{2} \rightarrow 0^{+}, \quad \text{za } r \rightarrow 0, \quad \text{kao i} \\ \operatorname{Re} \phi\left(R, \frac{\pi}{2}\right) &\sim -a R^{1+\xi} \sin \frac{\xi \pi}{2} \rightarrow -\infty \quad i \quad \operatorname{Im} \phi\left(R, \frac{\pi}{2}\right) \sim a R^{1+\xi} \cos \frac{\xi \pi}{2} \rightarrow \infty, \quad \text{za } R \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

tako da je  $|\phi(R, \frac{\pi}{2})| \sim a R^{1+\xi} \rightarrow \infty$  i  $\operatorname{tg} \arg \phi(R, \frac{\pi}{2}) \sim -\operatorname{tg} \frac{\xi \pi}{2}$ , implicirajući  $\arg \phi(R, \frac{\pi}{2}) \sim \pi - \frac{\xi \pi}{2} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ . Stoga, kao se  $s$  menja duž konture  $\gamma_1$ , argument funkcije  $\phi$  se menja od nule do  $\pi - \frac{\xi \pi}{2}$ .

Kompleksni broj  $s$  koji pripada konturi  $\gamma_2$  ima veliku ali fiksiranu vrednost modulua  $\rho = R$ , dok se njegov argument menja duž konture  $\gamma_2$  uzimajući vrednosti  $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , videti tabelu 4.3, te se za asimptotiku (4.47) kada  $R \rightarrow \infty$  dobija

$$\operatorname{Re} \phi(R, \varphi) \sim a R^{1+\xi} \cos((1+\xi)\varphi) \quad i \quad \operatorname{Im} \phi(R, \varphi) \sim a R^{1+\xi} \sin((1+\xi)\varphi),$$

te je  $|\phi(R, \varphi)| \sim a R^{1+\xi} \rightarrow \infty$  i  $\arg \phi(R, \varphi) \sim (1+\xi)\varphi$ , implicirajući  $\arg \phi(R, \varphi) \in \left[\frac{(1+\xi)\pi}{2}, (1+\xi)\pi\right]$ . Stoga, kako se  $s$  menja duž konture  $\gamma_2$ , argument funkcije  $\phi$  kreće iz drugog kvadranta, jer je  $\arg \phi(R, \frac{\pi}{2}) = \frac{(1+\xi)\pi}{2}$  i završava se ili u trećem, ili možda u četvrtom kvadrantu, jer je  $\arg \phi(R, \pi) = (1+\xi)\pi$ , međutim ne prolazi kroz prvi kvadrant, jer realni i imaginarni deo funkcije  $\phi$  ne mogu biti istovremeno pozitivni za  $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , budući da je  $\frac{\pi}{2} \leq (1+\xi)\varphi \leq 2\pi$ .

Argument kompleksnih brojeva  $s$  koji leže na konturi  $\gamma_3$  ima fiksnu vrednost  $\varphi = \pi$ , dok se njihovi moduli menjaju u intervalu  $\rho \in (r, R)$ , dajući za realan i imaginaran deo funkcije  $\phi$

$$\operatorname{Re} \phi(\rho, \pi) = -a \rho^{1+\xi} \cos(\xi\pi) + b \rho^{\zeta} \cos(\zeta\pi) + c \quad i \quad \operatorname{Im} \phi(\rho, \pi) = -a \rho^{1+\xi} \sin(\xi\pi) + b \rho^{\zeta} \sin(\zeta\pi),$$

prema (4.47), te se za asimptotiku realnog i imaginarnog dela funkcije  $\phi$  dobija

$$\operatorname{Re} \phi(R, \pi) \sim -a R^{1+\xi} \cos(\xi\pi) \rightarrow -\infty \quad i \quad \operatorname{Im} \phi(R, \pi) \sim -a R^{1+\xi} \sin(\xi\pi) \rightarrow -\infty, \quad \text{za } R \rightarrow \infty,$$

kao i

$$\operatorname{Re} \phi(r, \pi) \sim c \quad i \quad \operatorname{Im} \phi(r, \pi) \sim b r^{\zeta} \sin(\zeta\pi) \rightarrow 0^{+} \quad \text{za } r \rightarrow 0,$$

implicirajući da  $\arg \phi(R, \pi) \sim (1+\xi)\pi$  kada  $R \rightarrow \infty$ , kao i  $\operatorname{tg} \arg \phi(r, \pi) \sim 0$  kada  $r \rightarrow 0$ . Očigledno,  $\operatorname{Im} \phi(\rho, \pi)$  menja znak kada se  $\rho$  menja od  $R \rightarrow \infty$  do  $r \rightarrow 0$  i ima jednu nulu za  $\rho^* = \left(\frac{b \sin(\zeta\pi)}{a \sin(\xi\pi)}\right)^{\frac{1}{1+\xi-\zeta}}$ , jer je  $\rho^{1+\xi}$  konveksna, a  $\rho^{\zeta}$  konkavna funkcija, obe monotono rastuće od nule do beskonačnosti. Stoga, znak  $\operatorname{Re} \phi(\rho^*, \pi)$  određuje da li argument funkcije  $\phi$ , koji kreće iz  $\arg \phi(R, \pi) = (1+\xi)\pi$  kada se  $s$  menja duž konture  $\gamma_3$ , završava u  $\arg \phi(r, \pi) = 0$  ili u  $\arg \phi(r, \pi) = 2\pi$ , tj. prva tvrdnja važi ako je  $\operatorname{Re} \phi(\rho^*, \pi) < 0$ , odnosno druga tvrdnja važi ako je  $\operatorname{Re} \phi(\rho^*, \pi) > 0$ . Sa druge strane, ako je  $\operatorname{Re} \phi(\rho^*, \pi) = 0$ , tada funkcija  $\phi$  ima negativnu realnu nulu  $s = -\rho^* = -\left(\frac{b \sin(\zeta\pi)}{a \sin(\xi\pi)}\right)^{\frac{1}{1+\xi-\zeta}}$ , jer za  $\rho = \rho^*$  sledi  $\operatorname{Im} \phi(\rho, \pi) = 0$ .

Moduo kompleksnog broja  $s$  koji pripada konturi  $\gamma_4$  ima fiksnu ali malu vrednost  $\rho = r$ , dok se njegov argument menja u intervalu  $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , te asimptotika realnog i imaginarnog dela funkcije  $\phi$ , videti (4.47), postaje

$$\operatorname{Re} \phi(r, \varphi) \sim c \quad i \quad \operatorname{Im} \phi(r, \varphi) \sim b r^{\zeta} \sin(\zeta\varphi) \rightarrow 0^{+} \quad \text{za } r \rightarrow 0,$$

implicirajući da se  $\arg \phi$  ne menja značajno.

Dakle, promena argumenta funkcije  $\phi$ , kada se  $s$  menja duž konture  $\gamma$ , je ili  $\Delta \arg \phi(s) = 2\pi$  ako je  $\operatorname{Re} \phi(\rho^*, \pi) > 0$ , ili  $\Delta \arg \phi(s) = 0$  ako je  $\operatorname{Re} \phi(\rho^*, \pi) < 0$ , implicirajući da funkcija  $\phi$  ili ima jednu nulu, ili nema nula u gornjoj levoj kompleksnoj četvrti. Ako je  $\operatorname{Re} \phi(\rho^*, \pi) = 0$ , tada funkcija  $\phi$  ima negativnu realnu nulu.

#### 4.2.4.3 Kvadratna funkcija po $s^{\xi}$

Funkcija  $\phi_{\sigma}$  u slučaju modela I<sup>+</sup>ID.ID i IDD<sup>+</sup>.DD<sup>+</sup>, kao i funkcija  $\phi_{\varepsilon}$  u slučaju modela ID.IDD<sup>+</sup>, pa tako i obe funkcije  $\phi_{\sigma}$  i  $\phi_{\varepsilon}$  u slučaju modela I<sup>+</sup>ID.I<sup>+</sup>ID, IDD<sup>+</sup>.IDD<sup>+</sup> i I<sup>+</sup>ID.IDD<sup>+</sup>, date su u obliku

$$\phi(s) = a s^{2\xi} + b s^{\xi} + c, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \arg s \in (-\pi, \pi), \tag{4.48}$$

videti tabelu 6.5, gde je  $a, b, c > 0$  i  $\xi \in (0, 1)$ . Ako je  $\xi \in (0, \frac{1}{2}]$ , tada svi stepeni promenljive  $s$  pripadaju intervalu  $(0, 1)$  i, kao što je dobro poznato, funkcija  $\phi$  nema nula, dok ako je  $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$ , tada su nule funkcije  $\phi$  date sa

$$s^{\xi} = -\frac{b}{2a} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}} \right).$$

Pretpostavljajući da je diskriminanta kvadratne jednačine po  $s^\xi$  nenegativna, tj. da je  $\frac{2\sqrt{ac}}{b} \leq 1$ , sledi

$$s^\xi = -\frac{b}{2a} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}} \right) < 0 \quad \text{tj.} \quad \rho^\xi e^{i\varphi} = \frac{b}{2a} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}} \right) e^{i(2k+1)\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

implicirajući

$$\rho = \sqrt[2\xi]{\frac{b}{2a} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}} \right)} \quad \text{i} \quad \varphi = \frac{(2k+1)\pi}{\xi}. \quad (4.49)$$

Kompleksni broj  $s$  sa modulom  $\rho$  i argumentom  $\varphi$ , dat sa (4.49), nije nula funkcije  $\phi$ , date sa (4.48), jer zahtev da je  $\varphi \in (-\pi, \pi)$  ne može biti ispunjen za bilo koje  $k \in \mathbb{Z}$ , zbog  $-\pi < \frac{(2k+1)\pi}{\xi} < \pi$  implicirajući da je  $-1 < -\xi < 2k+1 < \xi < 1$ , tj.  $-1 < k < 0$ .

Sa druge strane, ako je diskriminanta jednačine koja je kvadratna po  $s^\xi$  negativna, tj. ako je  $\frac{2\sqrt{ac}}{b} > 1$ , tada važi

$$s^\xi = -\frac{b}{2a} \left( 1 \pm i\sqrt{\frac{4ac}{b^2} - 1} \right) = -\lambda \pm i\eta = z_\pm \quad \text{sa} \quad \lambda = \frac{b}{2a} > 0 \quad \text{i} \quad \eta = \frac{b}{2a} \sqrt{\frac{4ac}{b^2} - 1} > 0, \quad (4.50)$$

te je

$$s^\xi = \rho^\xi e^{i\varphi_\pm} = |z_\pm| e^{i(\arg z_\pm + 2k\pi)} \quad \text{sa} \quad |z_\pm| = \sqrt{\lambda^2 + \eta^2} \quad \text{i} \quad \arg z_\pm = \pm \left( 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\lambda} \right) \pi, \quad (4.51)$$

implicirajući

$$s_\pm = \rho e^{i\varphi_\pm} \quad \text{sa} \quad \rho = \sqrt[2\xi]{|z_\pm|} \quad \text{i} \quad \varphi_\pm = \frac{\arg z_\pm + 2k\pi}{\xi}. \quad (4.52)$$

Da bi  $\varphi_+$  bio argument nule funkcije  $\phi$ , date sa (4.48), zahteva se da je  $\varphi_+ = \frac{\arg z_+ + 2k\pi}{\xi} = \frac{2k+1-\delta}{\xi}\pi \in (0, \pi)$ , pri čemu je  $\delta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\lambda} \in (0, \frac{1}{2})$ , te se dobija  $0 < (2k+1-\delta)\pi < \xi\pi$ , što se transformiše u  $0 < \delta < 2k+1 < \delta + \xi < \frac{3}{2}$ , tj.  $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{4}$ , dajući  $k = 0$ . Slična argumentacija u slučaju  $\varphi_-$  takođe implicira da je  $k = 0$ . Stoga su nule  $s_\pm = \rho e^{i\varphi_\pm}$  funkcije  $\phi$ , date sa (4.48), takve da je

$$\rho = \sqrt[2\xi]{\lambda^2 + \eta^2} \quad \text{i} \quad \varphi_\pm = \pm \frac{1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\lambda}}{\xi} \pi,$$

sa  $\lambda$  i  $\eta$  definisanim sa (4.50), prema (4.51) i (4.52). Zapravo, funkcija  $\phi$  ima par kompleksno konjugovanih nula

$$s_{\text{CCP}} = \sqrt[2\xi]{\lambda^2 + \eta^2} e^{i \frac{1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\lambda}}{\xi} \pi} \quad \text{i} \quad \bar{s}_{\text{CCP}} = \sqrt[2\xi]{\lambda^2 + \eta^2} e^{-i \frac{1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\lambda}}{\xi} \pi}, \quad (4.53)$$

sa negativnim realnim delom, ako je  $\operatorname{tg}(\xi\pi) > -\frac{\eta}{\lambda}$ , jer  $\varphi_+ = \frac{1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\lambda}}{\xi} \pi < \pi$  implicira  $1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\lambda} < \xi$ , što se redukuje na  $\operatorname{tg}(\xi\pi) > -\frac{\eta}{\lambda}$ , dok se već zna da je  $\arg z_+ = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\lambda} > \frac{\pi}{2}$ , videti (4.51)<sub>3</sub>, i stoga  $\varphi_+ = \frac{\arg z_+}{\xi} > \frac{\pi}{2}$ , videti (4.52), zbog  $\xi < 1$ . Treba primetiti da ako je  $\operatorname{tg}(\xi\pi) < -\frac{\eta}{\lambda}$ , tada je  $\varphi_+ > \pi$  i funkcija  $\phi$ , data sa (4.48) nema nula za  $\arg s \in (-\pi, \pi)$ .

U posebnom slučaju kada je  $\varphi_\pm = \pm \frac{1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\lambda}}{\xi} \pi = \pm\pi$ , tj. kada je  $\frac{1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\lambda}}{\xi} = 1$  što se redukuje na  $\operatorname{tg}(\xi\pi) = -\frac{\eta}{\lambda}$ , funkcija  $\phi$ , data sa (4.48), ima negativnu realnu nulu

$$s_{\text{RP}} = -\sqrt[2\xi]{\lambda^2 + \eta^2}, \quad (4.54)$$

prema (4.53), sa redom  $\xi$  dobijenim kao rešenje jednačine  $\operatorname{tg}(\xi\pi) = -\frac{\eta}{\lambda}$ .

Dakle, funkcija  $\phi$ , data sa (4.48), nema nula ako je  $\xi \in (0, \frac{1}{2}]$ , ili ako je  $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$  i  $\frac{2\sqrt{ac}}{b} \leq 1$ , ili ako je  $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$ ,  $\frac{2\sqrt{ac}}{b} > 1$ , i  $\operatorname{tg}(\xi\pi) < -\sqrt{\frac{4ac}{b^2} - 1}$ , dok ako je  $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$  i  $\frac{2\sqrt{ac}}{b} > 1$ , tada ima ili negativnu realnu nulu

$$s_{\text{RP}} = -\sqrt[2\xi]{\frac{c}{a}}, \quad (4.55)$$

prema (4.54) i (4.50), ako je  $\operatorname{tg}(\xi\pi) = -\sqrt{\frac{4ac}{b^2} - 1}$ , što zapravo određuje red  $\xi$ , ili ima par kompleksno konjugovanih nula

$$s_{\text{CCP}} = \sqrt[2\xi]{\frac{c}{a}} e^{i \frac{1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{4ac}{b^2} - 1}}{\xi}}{\xi} \pi} \quad \text{i} \quad \bar{s}_{\text{CCP}} = \sqrt[2\xi]{\frac{c}{a}} e^{-i \frac{1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{4ac}{b^2} - 1}}{\xi}}{\xi} \pi}, \quad (4.56)$$

prema (4.53) i (4.50), ako je  $\operatorname{tg}(\xi\pi) > -\sqrt{\frac{4ac}{b^2} - 1}$ .

## 4.3 Sužene termodinamičke restrikcije

Disipativna svojstva viskoelastičnog materijala se obezbeđuju nametanjem ograničenja na parametre konstitutivnog modela razmatranog u kvazistacionarnom režimu, tj. nametanjem termodinamičkih restrikcija, dok se, dodatno, disipativnost materijala u tranzijentnom režimu obezbeđuje nametanjem suženih termodinamičkih restrikcija na parametre modela.

### 4.3.1 Simetrični modeli

Formulisane su sužene termodinamičke restrikcije na parametre modela koji sadrže jednak broj operatora koji deluju na napon i deformaciju.

#### 4.3.1.1 Model ID.ID

Termodinamičke restrikcije (3.91) i (3.92) na parametre modela ID.ID, datog izrazom

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\mu + a_2 {}_0 D_t^{\alpha+\beta-\mu} \right) \varepsilon(t),$$

videti (3.87), zajedno sa suženim termodinamičkim restrikcijama su predstavljene sledećim nejednakostima

$$0 \leq \alpha + \beta - \mu \leq 1, \quad \mu \leq \alpha, \quad \beta + \mu \leq 1, \quad (4.57)$$

$$-\frac{a_1 \cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{a_2 \cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_1 \sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{a_2 \sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{a_1 \sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{a_2 \sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}}, \quad (4.58)$$

pri čemu nejednakost (4.58)<sub>3</sub> sužava termodinamičku restrikciju (3.92) ako je  $\alpha \leq 2\alpha + \beta - \mu < 1$ , a koje se dobijaju zahtevanjem da funkcija  $K$ , data u opštem obliku sa (4.20) i koja se redukuje na izraz

$$\begin{aligned} K(\rho) = & a_1 b_1 \sin((\alpha - \mu)\pi) + a_1 b_2 \rho^{\alpha+\beta} \sin((2\alpha + \beta - \mu)\pi) \\ & - a_2 b_1 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\beta + \mu)\pi) + a_2 b_2 \rho^{2(\alpha+\beta)} \sin((\alpha - \mu)\pi) \end{aligned} \quad (4.59)$$

u slučaju modela ID.ID, ima nenegativnu vrednost. Drugi član u (4.59), koji može biti ili pozitivan za  $2\alpha + \beta - \mu \in [\alpha, 1]$ , ili nepozitivan za  $2\alpha + \beta - \mu \in [1, 1 + \alpha]$ , videti (4.57)<sub>1</sub>, kombinovan sa trećim nepozitivnim članom u (4.59) daje suženu termodinamičku restrikciju (4.58)<sub>3</sub>, ako je  $2\alpha + \beta - \mu \in [\alpha, 1]$ , jer je  $\frac{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leq 1$  zbog  $\beta + \mu \leq 2\alpha + \beta - \mu < 1$  što se redukuje na  $\mu \leq \alpha$ , videti (4.57)<sub>2</sub>, dok su drugi i treći član u (4.59) nepozitivni ako je  $2\alpha + \beta - \mu \in [1, 1 + \alpha]$  i stoga se nenegativnost funkcije  $K$  ne može garantovati, videti (4.59).

Dakle, nenegativnost funkcije  $K$ , koja odgovara modelu ID.ID i data je sa (4.59), je obezbeđena ako je  $2\alpha + \beta - \mu \in [\alpha, 1]$  zahtevanjem (4.58) pored (4.57) implicirajući da je odgovarajući moduo relaksacije kompletno monotona funkcija i da je funkcija puzanja Bernštajnova funkcija, dok ako je  $2\alpha + \beta - \mu \in [1, 1 + \alpha]$ , spomenute osobine se ne mogu garantovati.

#### 4.3.1.2 Model ID.DD<sup>+</sup>

Termodinamičke restrikcije (3.85) i (3.86) na parametre modela ID.DD<sup>+</sup>, datog izrazom

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 D_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^{\alpha+\beta+\mu} \right) \varepsilon(t),$$

videti (3.81), zajedno sa suženim termodinamičkim restrikcijama su predstavljene sledećim nejednakostima

$$1 \leq \alpha + \beta + \mu \leq 2, \quad \beta \leq \mu \leq 1 - \alpha, \quad (4.60)$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2}, \quad (4.61)$$

pri čemu nejednakost (4.61)<sub>1</sub> sužava termodinamičku restrikciju (3.86), a koje se dobijaju zahtevom da je funkcija  $K$ , data u opštem obliku sa (4.20) i koja se redukuje na izraz

$$\begin{aligned} K(\rho) = & a_1 b_1 \sin((\alpha + \mu)\pi) + a_1 b_2 \rho^{\alpha+\beta} \sin((2\alpha + \beta + \mu)\pi) \\ & + a_2 b_1 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\mu - \beta)\pi) + a_2 b_2 \rho^{2(\alpha+\beta)} \sin((\alpha + \mu)\pi), \end{aligned} \quad (4.62)$$

u slučaju modela ID.DD<sup>+</sup>, ima nenegativnu vrednost. Drugi član u (4.62), koji je nepozitivan zbog (4.60)<sub>1</sub> implicira  $2\alpha + \beta + \mu \geq 1 + \alpha$  i zbog (4.60)<sub>2</sub> implicira  $2\alpha + \beta + \mu = (\alpha + \beta) + (\alpha + \mu) \leq 2$  odnosno  $2\alpha + \beta + \mu \in$

$[1 + \alpha, 2]$ , kombinovan sa trećim nenegativnim članom u (4.62) daje suženu termodinamičku restrikciju (4.61)<sub>1</sub>, jer je  $\frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \geq 1$  zbog  $\frac{(\mu-\beta)\pi}{2} \leq \pi - \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$  što se redukuje na  $\alpha + \mu \leq 1$ , videti (4.60)<sub>2</sub>.

Dakle, nenegativnost funkcije  $K$ , koja odgovara modelu ID.DD<sup>+</sup> i data je sa (4.62), se obezbeđuje zahtevanjem (4.61) pored (4.60), implicirajući da je odgovarajući moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, a funkcija puzanja Bernštajnova funkcija.

#### 4.3.1.3 Model IID.IID

Funkcija  $K$ , data sa (4.20), u slučaju modela IID.IID, čija je konstitutivna jednačina

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0I_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^{\alpha+\gamma-\eta} + b_2 {}_0I_t^{\beta+\gamma-\eta} + b_3 {}_0D_t^\eta \right) \varepsilon(t),$$

videti (3.112), sa odgovarajućim termodinamičkim restrikcijama (3.118) - (3.120), kao i sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$\beta < \alpha, \quad \gamma \leq \eta, \quad 0 \leq \beta + \gamma - \eta \leq \alpha + 2\gamma - \eta \leq 1, \quad \alpha + \gamma \leq \beta + \eta, \quad (4.63)$$

$$-\frac{b_3}{b_1} \frac{\cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \leq \frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}}, \quad (4.64)$$

$$-\frac{b_3}{b_2} \frac{\cos \frac{(\beta+\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \leq \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\sin \frac{(\beta+\eta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\beta+\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\sin \frac{(\beta+\eta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+2\gamma-\eta)\pi}{2}}, \quad (4.65)$$

koje važe ako je  $\beta + \eta < \alpha + \eta < 1$ , postaje

$$\begin{aligned} K(\rho) = & a_1 b_1 \sin((\eta - \gamma)\pi) + a_1 b_2 \rho^{\alpha-\beta} \sin((\alpha + \eta - \beta - \gamma)\pi) + a_1 b_3 \rho^{\alpha+\gamma} \sin((\alpha + \eta)\pi) \\ & + a_2 b_1 \rho^{\alpha-\beta} \sin((\beta + \eta - \alpha - \gamma)\pi) + a_2 b_2 \rho^{2(\alpha-\beta)} \sin((\eta - \gamma)\pi) + a_2 b_3 \rho^{2\alpha-\beta+\gamma} \sin((\beta + \eta)\pi) \\ & - a_3 b_1 \rho^{\alpha+\gamma} \sin((\alpha + 2\gamma - \eta)\pi) - a_3 b_2 \rho^{2\alpha-\beta+\gamma} \sin((\beta + 2\gamma - \eta)\pi) + a_3 b_3 \rho^{2(\alpha+\gamma)} \sin((\eta - \gamma)\pi), \end{aligned} \quad (4.66)$$

stoga zahtevanje nenegativnosti funkcije  $K$  implicira sledeće nejednakosti

$$a_1 b_2 \sin((\alpha + \eta - \beta - \gamma)\pi) + a_2 b_1 \sin((\beta + \eta - \alpha - \gamma)\pi) \geq 0, \quad (4.67)$$

$$a_1 b_3 \sin((\alpha + \eta)\pi) - a_3 b_1 \sin((\alpha + 2\gamma - \eta)\pi) \geq 0, \quad (4.68)$$

$$a_2 b_3 \sin((\beta + \eta)\pi) - a_3 b_2 \sin((\beta + 2\gamma - \eta)\pi) \geq 0. \quad (4.69)$$

Prema termodinamičkim restrikcijama (4.63)<sub>1,2</sub>, sledi da je  $\alpha + \eta - \beta - \gamma = (\alpha - \beta) + (\eta - \gamma) \geq 0$ , dok se termodinamički zahtev  $\beta + \gamma - \eta \geq 0$ , dat sa (4.63)<sub>3</sub>, može modifikovati u  $\alpha + \eta - \beta - \gamma \leq \alpha \leq 1$ , i stoga prvi član u (4.67) ima nenegativnu vrednost. Argument  $(\beta + \eta - \alpha - \gamma)\pi = ((\eta - \gamma) - (\alpha - \beta))\pi$  drugog člana u (4.67), sa jedne strane, ima vrednost koja je manja nego vrednost argumenta  $(\alpha + \eta - \beta - \gamma)\pi = ((\eta - \gamma) + (\alpha - \beta))\pi$  prvog člana u (4.67), odnosno  $\beta + \eta - \alpha - \gamma = (\eta - \gamma) - (\alpha - \beta) \leq \alpha + \eta - \beta - \gamma = (\eta - \gamma) + (\alpha - \beta) \leq \alpha \leq 1$ , a sa druge strane, ima nenegativnu vrednost, tj.  $\beta + \eta - \alpha - \gamma = (\beta + \eta) - (\alpha + \gamma) \geq 0$ , prema termodinamičkom zahtevu (4.63)<sub>4</sub>. Stoga je nejednakost (4.67) trivijalno zadovoljena.

Prema (4.63)<sub>3</sub>, sinus u drugom članu u (4.68) ima nenegativnu vrednost, dok prvi član ima ili pozitivnu vrednost ako je  $\alpha + \eta < 1$ , ili nepozitivnu vrednost ako je  $\alpha + \eta \geq 1$ , stoga ako je  $\alpha + \eta < 1$ , tada se zahtev (4.68) transformiše u

$$\frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}},$$

predstavljajući suženu termodinamičku restrikciju (4.64)<sub>3</sub>, jer je  $\frac{\cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \leq 1$  zbog  $\alpha + 2\gamma - \eta \leq \alpha + \eta < 1$ , što se redukuje na  $\gamma \leq \eta$ , videti (4.63)<sub>2</sub>. Slično, prema (4.63)<sub>1,3</sub>, sinus u drugom članu u (4.69) ima nenegativnu vrednost, budući da je  $0 \leq \beta + 2\gamma - \eta \leq \alpha + 2\gamma - \eta \leq 1$ , dok prvi član ima ili pozitivnu vrednost ako je  $\beta + \eta < 1$ , ili nepozitivnu vrednost ako je  $\beta + \eta \geq 1$ , stoga ako je  $\beta + \eta < 1$ , tada se zahtev (4.69) transformiše u

$$\frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\sin \frac{(\beta+\eta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\beta+\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+2\gamma-\eta)\pi}{2}},$$

predstavljajući suženu termodinamičku restrikciju (4.65)<sub>3</sub>, jer je  $\frac{\cos \frac{(\beta+\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \leq 1$  zbog  $\beta + 2\gamma - \eta \leq \beta + \eta < 1$  što se redukuje na  $\gamma \leq \eta$ , videti (4.63)<sub>2</sub>.

Dakle, nenegativnost funkcije  $K$ , koja odgovara modelu IID.IID i data je sa (4.66), je obezbeđena ako je  $\beta + \eta < \alpha + \eta < 1$ , videti (4.63)<sub>1</sub>, zahtevanjem (4.64) i (4.65) pored (4.63) implicirajući da je odgovarajući moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, a funkcija puzanja Bernštajnova funkcija, dok ako je ili  $\alpha + \eta \geq 1$  ili  $\alpha + \eta > \beta + \eta \geq 1$ , tada se spomenute osobine ne mogu garantovati, budući da ili (4.68), ili i (4.68) i (4.69) ne mogu biti zadovoljeni.

#### 4.3.1.4 Model IDD.IDD

Funkcija  $K$ , data sa (4.20), u slučaju modela IDD.IDD, čija je konstitutivna jednačina

$$(a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0 I_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^{\alpha+\beta-\mu} + b_3 {}_0 D_t^{\alpha+\gamma-\mu}) \varepsilon(t),$$

videti (3.94), sa odgovarajućim termodinamičkim restrikcijama (3.98) - (3.100), kao i sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leq \alpha + \gamma - \mu \leq 1, \quad \beta < \gamma, \quad \mu \leq \alpha, \quad \gamma + \mu \leq \alpha + \beta, \quad \gamma + \mu \leq 1, \quad (4.70)$$

$$-\frac{b_2 \cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{b_1 \cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}}, \quad (4.71)$$

$$-\frac{b_3 \cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{b_1 \cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}}, \quad (4.72)$$

koje važe ako je  $2\alpha + \beta - \mu < 2\alpha + \gamma - \mu < 1$ , postaje

$$\begin{aligned} K(\rho) = & a_1 b_1 \sin((\alpha - \mu)\pi) + a_1 b_2 \rho^{\alpha+\beta} \sin((2\alpha + \beta - \mu)\pi) + a_1 b_3 \rho^{\alpha+\gamma} \sin((2\alpha + \gamma - \mu)\pi) \\ & - a_2 b_1 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\beta + \mu)\pi) + a_2 b_2 \rho^{2(\alpha+\beta)} \sin((\alpha - \mu)\pi) + a_2 b_3 \rho^{2\alpha+\beta+\gamma} \sin((\alpha + \gamma - \beta - \mu)\pi) \\ & - a_3 b_1 \rho^{\alpha+\gamma} \sin((\gamma + \mu)\pi) + a_3 b_2 \rho^{2\alpha+\beta+\gamma} \sin((\alpha + \beta - \gamma - \mu)\pi) + a_3 b_3 \rho^{2(\alpha+\gamma)} \sin((\alpha - \mu)\pi), \end{aligned} \quad (4.73)$$

te zahtev za nenegativnost funkcije  $K$  implicira

$$a_2 b_3 \sin((\alpha + \gamma - \beta - \mu)\pi) + a_3 b_2 \sin((\alpha + \beta - \gamma - \mu)\pi) \geq 0, \quad (4.74)$$

$$a_1 b_2 \sin((2\alpha + \beta - \mu)\pi) - a_2 b_1 \sin((\beta + \mu)\pi) \geq 0, \quad (4.75)$$

$$a_1 b_3 \sin((2\alpha + \gamma - \mu)\pi) - a_3 b_1 \sin((\gamma + \mu)\pi) \geq 0. \quad (4.76)$$

Prvi član u (4.74) ima nenegativnu vrednost jer je  $\alpha + \gamma - \beta - \mu = (\alpha - \mu) + (\gamma - \beta) \geq 0$ , prema termodinamičkim zahtevima (4.70)<sub>2,3</sub>, kao i zbog  $\alpha + \gamma - \beta - \mu = (\alpha + \gamma - \mu) - \beta \leq 1 - \beta$ , prema termodinamičkom zahtevu (4.70)<sub>1</sub>. Drugi član u (4.74) takođe ima nenegativnu vrednost, jer je  $\alpha + \beta - \gamma - \mu = (\alpha + \beta) - (\gamma + \mu) \geq 0$ , prema termodinamičkom zahtevu (4.70)<sub>4</sub>, kao i prema  $\alpha + \beta - \gamma - \mu = \alpha - (\gamma + \mu - \beta) \leq \alpha \leq 1$ , jer je  $(\gamma - \beta) + \mu \geq 0$ , prema (4.70)<sub>2</sub>. Stoga je nejednakost (4.74) trivijalno zadovoljena.

Prema (4.70)<sub>2,5</sub>, na osnovu čega važi  $0 \leq \beta + \mu < \gamma + \mu \leq 1$ , sinus u drugom članu u (4.75) kao i u (4.76) ima nenegativnu vrednost, dok prvi član ima ili pozitivnu vrednost ako je  $2\alpha + \beta - \mu < 1$ , ili nepozitivnu vrednost ako je  $2\alpha + \beta - \mu \geq 1$ , stoga ako je  $2\alpha + \beta - \mu < 1$ , tada se zahtev (4.75) transformiše u

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}},$$

predstavljajući suženu termodinamičku restrikciju (4.71)<sub>3</sub>, jer je  $\frac{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leq 1$  zbog  $\beta + \mu \leq 2\alpha + \beta - \mu < 1$ , što se redukuje na  $\mu \leq \alpha$ , videti (4.70)<sub>3</sub>. Slično, drugi član u (4.76), kao što je već pomenuto, ima nenegativnu vrednost, dok prvi član ima ili pozitivnu vrednost ako je  $2\alpha + \gamma - \mu < 1$  ili nepozitivnu vrednost ako je  $2\alpha + \gamma - \mu \geq 1$ , stoga ako je  $2\alpha + \gamma - \mu < 1$ , tada se zahtev (4.76) transformiše u

$$\frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}},$$

predstavljajući suženu termodinamičku restrikciju (4.72)<sub>3</sub>, jer je  $\frac{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \leq 1$  zbog  $\gamma + \mu \leq 2\alpha + \gamma - \mu < 1$  što se redukuje na  $\mu \leq \alpha$ , videti (4.70)<sub>3</sub>.

Dakle, nenegativnost funkcije  $K$ , koja odgovara modelu IDD.IDD i data je sa (4.73), je obezbeđena ako je  $2\alpha + \beta - \mu < 2\alpha + \gamma - \mu < 1$ , videti (4.70)<sub>2</sub>, zahtevanjem (4.71) i (4.72) pored (4.70) implicirajući da je odgovarajući moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, a funkcija puzanja Bernštajnova funkcija, dok ako je ili  $2\alpha + \gamma - \mu \geq 1$  ili  $2\alpha + \gamma - \mu > 2\alpha + \beta - \mu \geq 1$ , tada se navedene osobine ne mogu garantovati, jer ili (4.76), ili i (4.75) i (4.76) ne mogu biti zadovoljeni.

#### 4.3.1.5 Model IID.IDD

Funkcija  $K$ , data sa (4.20), u slučaju modela IID.IDD, čija je konstitutivna jednačina

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 I_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^\nu + b_3 {}_0 D_t^{\alpha+\gamma-\mu} \right) \varepsilon(t),$$

videti (3.130), sa odgovarajućim termodinamičkim restrikcijama (3.134) i (3.135), kao i sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$\mu \leq \beta < \alpha, \quad \gamma \leq \nu, \quad \alpha + \beta + \gamma \leq 1 + \mu, \quad \mu + \nu - \gamma < \alpha \leq 1 - \nu, \quad (4.77)$$

$$0 \leq \left\{ \begin{array}{l} \alpha - \beta - \gamma - \mu \\ \alpha - 2\mu - \nu \end{array} \right\} \leq 2\alpha - \beta - 2\mu - \nu \leq \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha - \beta - \mu \\ 2\alpha + \gamma - 2\mu - \nu \end{array} \right\} \leq 2\alpha + \gamma - \mu < 1, \quad (4.78)$$

$$-\frac{b_3 \cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{b_1 \cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3 \sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{b_1 \sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{b_3 \sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{b_1 \sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}}, \quad (4.79)$$

postaje

$$\begin{aligned} K(\rho) = & a_1 b_1 \sin((\alpha - \mu)\pi) + a_1 b_2 \rho^{\alpha-\beta} \sin((2\alpha - \beta - \mu)\pi) \\ & + a_1 b_3 \rho^{\alpha+\gamma} \sin((2\alpha + \gamma - \mu)\pi) + a_2 b_1 \rho^{\mu+\nu} \sin((\alpha - 2\mu - \nu)\pi) \\ & + a_2 b_2 \rho^{\alpha-\beta+\mu+\nu} \sin((2\alpha - \beta - 2\mu - \nu)\pi) + a_2 b_3 \rho^{\alpha+\gamma+\mu+\nu} \sin((2\alpha + \gamma - 2\mu - \nu)\pi) \\ & - a_3 b_1 \rho^{\alpha+\gamma} \sin((\mu + \gamma)\pi) + a_3 b_2 \rho^{2\alpha-\beta+\gamma} \sin((\alpha - \beta - \gamma - \mu)\pi) + a_3 b_3 \rho^{2(\alpha+\gamma)} \sin((\alpha - \mu)\pi), \end{aligned} \quad (4.80)$$

stoga zahtev nenegativnosti funkcije  $K$  implicira

$$a_1 b_3 \sin((2\alpha + \gamma - \mu)\pi) - a_3 b_1 \sin((\gamma + \mu)\pi) \geq 0, \quad (4.81)$$

$$\sin((2\alpha - \beta - \mu)\pi) \geq 0, \quad \sin((\alpha - 2\mu - \nu)\pi) \geq 0, \quad (4.82)$$

$$\sin((2\alpha - \beta - 2\mu - \nu)\pi) \geq 0, \quad \sin((2\alpha + \gamma - 2\mu - \nu)\pi) \geq 0, \quad \sin((\alpha - \beta - \gamma - \mu)\pi) \geq 0. \quad (4.83)$$

Notacija korišćena u suženim termodinamičkim restrikcijama (4.78)<sub>1,2</sub> znači da su i  $\alpha - \beta - \gamma - \mu$  i  $\alpha - 2\mu - \nu$  nenegativni i ne veći od  $2\alpha - \beta - 2\mu - \nu$ , dok se odnos između  $\alpha - \beta - \gamma - \mu$  i  $\alpha - 2\mu - \nu$  ne može ustanoviti i ista interpretacija važi za notaciju korišćenu u (4.78)<sub>3,4</sub>.

Prvi član u (4.81) ima ili pozitivnu vrednost ako je  $2\alpha + \gamma - \mu < 1$  ili nepozitivnu vrednost ako je  $2\alpha + \gamma - \mu \geq 1$ , jer je  $2\alpha + \gamma - \mu = (\alpha + \gamma) + (\alpha - \mu) \in (0, 2)$ , zbog  $\alpha + \gamma \leq \alpha + \nu \leq 1$ , prema termodinamičkim zahtevima (4.77)<sub>1,2,4</sub>, dok drugi član u (4.81) ima nepozitivnu vrednost, jer je  $\gamma + \mu \leq \alpha + \nu \leq 1$ , prema termodinamičkim zahtevima (4.77)<sub>1,2,4</sub>, stoga ako je  $2\alpha + \gamma - \mu < 1$ , tada se zahtev (4.81) transformiše u

$$\frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3 \sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{b_1 \sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}},$$

predstavljajući suženu termodinamičku restrikciju (4.79)<sub>3</sub>, jer je  $\frac{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \leq 1$  zbog  $\gamma + \mu \leq 2\alpha + \gamma - \mu < 1$  što se redukuje na  $\mu \leq \alpha$ , videti (4.77)<sub>1</sub>.

Niz nejednakosti

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha - \beta - \gamma - \mu \\ \alpha - 2\mu - \nu \end{array} \right\} \leq 2\alpha - \beta - 2\mu - \nu \leq \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha - \beta - \mu \\ 2\alpha + \gamma - 2\mu - \nu \end{array} \right\} \leq 2\alpha + \gamma - \mu,$$

ima dati poredak jer se nejednakost  $\alpha - \beta - \gamma - \mu \leq 2\alpha - \beta - 2\mu - \nu$  redukuje na termodinamičku restrikciju (4.77)<sub>4</sub>, nejednakost  $\alpha - 2\mu - \nu \leq 2\alpha - \beta - 2\mu - \nu$  se redukuje na restrikciju (4.77)<sub>1</sub>, dok su ostale nejednakosti trivijalno zadovoljene. Sa druge strane, niti se može utvrditi da je  $\alpha - 2\mu - \nu \leq \alpha - \beta - \gamma - \mu$ , niti da je  $2\alpha + \gamma - 2\mu - \nu \leq 2\alpha - \beta - \mu$ , je se obe nejednakosti redukuju na  $\beta + \gamma \leq \mu + \nu$ , dok termodinamički zahtevi (4.77)<sub>1,2</sub> impliciraju  $\beta + \gamma \leq \alpha + \nu$ .

Pored zahteva  $2\alpha + \gamma - \mu < 1$ , koji obezbeđuje nenegativnost za (4.81), da bi nejednakosti (4.82) i (4.83) bile zadovoljene, zahteva se da je  $\alpha - \beta - \gamma - \mu \geq 0$  kao i da je  $\alpha - 2\mu - \nu \geq 0$ , budući da je i  $\alpha - \beta - \gamma - \mu = \alpha - \beta - (\gamma + \mu) \geq -1 + \alpha - \beta \geq -1$  i  $\alpha - 2\mu - \nu = \alpha - \mu - (\mu + \nu) \geq -1 + \alpha - \mu \geq -1$ , prema termodinamičkim zahtevima (4.77)<sub>1,2,4</sub>.

Dakle, nenegativnost funkcije  $K$ , koja odgovara modelu IID.IDD i data je sa (4.80), je obezbeđena ako je ograničenje (4.78) na redove frakcionalih integrala i izvoda, zajedno sa termodinamičkom restrikcijom (4.77), zadovoljeno pored ograničenja (4.79) na parametre modela, implicirajući da je moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, a funkcija puzanja Bernštajnova funkcija, dok ako je zahtev (4.78) prekršen, tada se pomenute osobine ne mogu garantovati, jer se neki od uslova u (4.81), (4.82) i (4.83) možda ne mogu zadovoljiti.

#### 4.3.1.6 Model $I^+ ID \cdot I^+ ID$

Funkcija  $K$ , data sa (4.20), u slučaju modela  $I^+ ID \cdot I^+ ID$ , čija je konstitutivna jednačina

$$\left( a_1 {}_0 I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0 I_t^{\frac{1+\alpha-\gamma}{2}} + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^{1+\mu} + b_2 {}_0 I_t^{\frac{1+\mu-(\alpha+\gamma-\mu)}{2}} + b_3 {}_0 D_t^{\alpha+\gamma-\mu} \right) \varepsilon(t),$$

videti (3.122), sa odgovarajućim termodinamičkim restrikcijama (3.126) - (3.129), kao i sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$\mu \leq \alpha, \quad \alpha + \gamma + 2(\alpha - \mu) = 3\alpha + \gamma - 2\mu \leq 1, \quad (4.84)$$

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2 \cos \frac{(1-3\alpha-\gamma+2\mu)\pi}{4} \sin \frac{(1-3\alpha-\gamma+2\mu)\pi}{4}}{b_1 \cos \frac{(1+\alpha-\gamma-2\mu)\pi}{4} \sin \frac{(1+\alpha-\gamma-2\mu)\pi}{4}} \leq \frac{b_2 \cos \frac{(1-3\alpha-\gamma+2\mu)\pi}{4}}{b_1 \cos \frac{(1+\alpha-\gamma-2\mu)\pi}{4}}, \quad (4.85)$$

$$\frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3 \sin \frac{(1+3\alpha+\gamma-2\mu)\pi}{4} \cos \frac{(1+3\alpha+\gamma-2\mu)\pi}{4}}{b_2 \sin \frac{(1-\alpha+\gamma+2\mu)\pi}{4} \cos \frac{(1-\alpha+\gamma+2\mu)\pi}{4}} \leq \frac{b_3 \sin \frac{(1+3\alpha+\gamma-2\mu)\pi}{4}}{b_2 \sin \frac{(1-\alpha+\gamma+2\mu)\pi}{4}}, \quad (4.86)$$

$$a_3 b_1 \cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \leq a_2 b_2 \sin \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + a_1 b_3 \cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}, \quad (4.87)$$

$$a_1 b_3 \sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2} \leq a_2 b_2 \cos \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} - a_3 b_1 \sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}, \quad (4.88)$$

$$a_1 b_3 \sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2} \leq a_2 b_2 \cos \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} \frac{\sin \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}} + a_3 b_1 \sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \frac{\cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}, \quad (4.89)$$

postaje

$$\begin{aligned} K(\rho) = & a_1 b_1 \sin((\alpha - \mu)\pi) + a_1 b_2 \rho^{\frac{1+\alpha+\gamma}{2}} \sin \frac{(1+3\alpha+\gamma-2\mu)\pi}{2} + a_1 b_3 \rho^{1+\alpha+\gamma} \sin((1+2\alpha+\gamma-\mu)\pi) \\ & - a_2 b_1 \rho^{\frac{1+\alpha+\gamma}{2}} \sin \frac{(1-\alpha+\gamma+2\mu)\pi}{2} + a_2 b_2 \rho^{1+\alpha+\gamma} \sin((\alpha - \mu)\pi) \\ & + a_2 b_3 \rho^{3\frac{1+\alpha+\gamma}{2}} \sin \frac{(1+3\alpha+\gamma-2\mu)\pi}{2} - a_3 b_1 \rho^{1+\alpha+\gamma} \sin((1+\gamma+\mu)\pi) \\ & - a_3 b_2 \rho^{3\frac{1+\alpha+\gamma}{2}} \sin \frac{(1-\alpha+\gamma+2\mu)\pi}{2} + a_3 b_3 \rho^{2(1+\alpha+\gamma)} \sin((\alpha - \mu)\pi), \end{aligned} \quad (4.90)$$

stoga zahtev nenegativnosti funkcije  $K$  implicira

$$a_1 b_2 \sin \frac{(1+3\alpha+\gamma-2\mu)\pi}{2} - a_2 b_1 \sin \frac{(1-\alpha+\gamma+2\mu)\pi}{2} \geq 0, \quad (4.91)$$

$$a_2 b_3 \sin \frac{(1+3\alpha+\gamma-2\mu)\pi}{2} - a_3 b_2 \sin \frac{(1-\alpha+\gamma+2\mu)\pi}{2} \geq 0, \quad (4.92)$$

$$-a_1 b_3 \sin((2\alpha+\gamma-\mu)\pi) + a_2 b_2 \sin((\alpha - \mu)\pi) + a_3 b_1 \sin((\gamma + \mu)\pi) \geq 0. \quad (4.93)$$

Sinusi koji figurišu u prvom članu u (4.91) i (4.92) imaju nenegativnu vrednost, jer je  $3\alpha + \gamma - 2\mu \in (0, 1)$ , tj.  $1+3\alpha+\gamma-2\mu \in (1, 2)$ , prema termodinamičkom zahtevu (4.84)<sub>2</sub>, kao i sinusi koji figurišu u drugom članu u (4.91) i u (4.92), jer je  $1-\alpha+\gamma+2\mu \in (0, 2)$ , zbog  $-\alpha+\gamma+2\mu \in (-1, 1)$ , što važi jer je  $-\alpha+\gamma+2\mu = (\alpha + \gamma) - 2(\alpha - \mu) \leq 1 - 4(\alpha - \mu) \leq 1$  prema termodinamičkoj restrikciji (4.84), kao i zbog termodinamičkog zahteva (4.84)<sub>2</sub> koji se transformiše u  $-\alpha+\gamma+2\mu - 2(\alpha + \gamma) = -(3\alpha + \gamma - 2\mu) \geq -1$  implicirajući  $-\alpha+\gamma+2\mu \geq -1 + 2(\alpha + \gamma) \geq -1$ , te je  $1 - \alpha + \gamma + 2\mu \geq 2(\alpha + \gamma) \geq 0$ . Stoga se zahtevi (4.91) i (4.92) respektivno transformišu u

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2 \cos \frac{(1-3\alpha-\gamma+2\mu)\pi}{4} \sin \frac{(1-3\alpha-\gamma+2\mu)\pi}{4}}{b_1 \cos \frac{(1+\alpha-\gamma-2\mu)\pi}{4} \sin \frac{(1+\alpha-\gamma-2\mu)\pi}{4}} \quad \text{i} \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3 \sin \frac{(1+3\alpha+\gamma-2\mu)\pi}{4} \cos \frac{(1+3\alpha+\gamma-2\mu)\pi}{4}}{b_2 \sin \frac{(1-\alpha+\gamma+2\mu)\pi}{4} \cos \frac{(1-\alpha+\gamma+2\mu)\pi}{4}}, \quad (4.94)$$

pri čemu je zahtev (4.91) zapisan kao

$$a_1 b_2 \sin \frac{(1-3\alpha-\gamma+2\mu)\pi}{2} - a_2 b_1 \sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\mu)\pi}{2} \geq 0,$$

budući da je  $\sin(\frac{\pi}{2} + \phi) = \sin(\frac{\pi}{2} - \phi)$ , i stoga transformisan u (4.94)<sub>1</sub> da bi bio kombinovan sa termodinamičkom restrikcijom (3.127)<sub>1</sub>. Izraz dat sa (4.94) predstavlja sužene termodinamičke restrikcije (4.85)<sub>2</sub> i (4.86)<sub>2</sub>, jer su  $\frac{\sin \frac{(1-3\alpha-\gamma+2\mu)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma-2\mu)\pi}{4}} \leq 1$  i  $\frac{\cos \frac{(1+3\alpha+\gamma-2\mu)\pi}{4}}{\cos \frac{(1-\alpha+\gamma+2\mu)\pi}{4}} \leq 1$ , zbog nejednakosti  $1 - 3\alpha - \gamma + 2\mu \leq 1 + \alpha - \gamma - 2\mu$  i  $1 - \alpha + \gamma + 2\mu \leq 1 + 3\alpha + \gamma - 2\mu$ , koje se redukuju na  $\mu \leq \alpha$ , videti (4.84)<sub>1</sub>.

Zahtev  $(4.84)_2$ , zapisan kao  $3\alpha + \gamma - 2\mu = 2\alpha + \gamma - \mu + (\alpha - \mu) \leq 1$ , odnosno  $2\alpha + \gamma - \mu \leq 1 - (\alpha - \mu) \leq 1$ , kombinovan sa zahtevom  $(4.84)_1$  obezbeđuje nenegativnu vrednost sinusa u prvom članu u  $(4.93)$ , dok zahtev  $(4.84)_1$  obezbeđuje nenegativnost sinusa u drugom članu u  $(4.93)$  i konačno nenegativnost sinusa u trećem članu u  $(4.93)$  je obezbeđena zahtevom  $(4.84)_2$ , stoga se zahtev  $(4.93)$  transformiše u suženu termodinamičku restrikciju  $(4.89)$  ako je desna strana  $(4.89)$  manja nego desna strana  $(4.88)$ , jer je  $\frac{\sin \frac{(1-(\alpha-\mu))\pi}{2}}{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}} = \frac{\cos \frac{(1-(\alpha-\mu))\pi}{2}}{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}} \leq 1$  i  $\frac{\cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}} \geq 1$ , zbog  $2\alpha + \gamma - \mu \leq 1 - (\alpha - \mu) < 1$  i  $\gamma + \mu \leq 2\alpha + \gamma - \mu < 1$ , što se respektivno redukuje na  $2\alpha + \gamma - \mu \leq 1$  i  $\mu \leq \alpha$ , videti  $(4.84)$ .

Dakle, nenegativnost funkcije  $K$ , koja odgovara modelu  $I^+ID.I^+ID$  i data je sa  $(4.90)$ , je obezbedena zahtevima  $(4.85)$ ,  $(4.86)$  i možda  $(4.89)$  pored  $(4.84)$ ,  $(4.87)$  i  $(4.88)$  implicirajući da je moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, a funkcija puzanja Bernštajnova funkcija.

#### 4.3.1.7 Model $IDD^+.IDD^+$

Funkcija  $K$ , data sa  $(4.20)$ , u slučaju modela  $IDD^+.IDD^+$ , čija je konstitutivna jednačina

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^{\frac{1+\gamma-\alpha}{2}} + a_3 {}_0D_t^{1+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^{\alpha+\gamma-\eta} + b_2 {}_0D_t^{\frac{1+\eta-(\alpha+\gamma-\eta)}{2}} + b_3 {}_0D_t^{1+\eta} \right) \varepsilon(t),$$

videti  $(3.103)$ , sa odgovarajućim termodinamičkim restrikcijama  $(3.107)$  -  $(3.110)$ , kao i sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leq \alpha + \gamma - \eta \leq 1, \quad \gamma \leq \eta, \quad \alpha + \eta + (\eta - \gamma) = \alpha - \gamma + 2\eta \leq 1, \quad (4.95)$$

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+\alpha+3\gamma-2\eta)\pi}{4}} \frac{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+\alpha+3\gamma-2\eta)\pi}{4}} \leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+\alpha+3\gamma-2\eta)\pi}{4}}, \quad (4.96)$$

$$\frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\cos \frac{(1-\alpha+\gamma-2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}} \frac{\sin \frac{(1-\alpha+\gamma-2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\cos \frac{(1-\alpha+\gamma-2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}}, \quad (4.97)$$

$$a_3 b_1 \cos \frac{(\alpha + 2\gamma - \eta)\pi}{2} - a_2 b_2 \sin \frac{(\eta - \gamma)\pi}{2} \leq a_1 b_3 \cos \frac{(\alpha + \eta)\pi}{2}, \quad (4.98)$$

$$a_1 b_3 \sin \frac{(\alpha + \eta)\pi}{2} \leq a_2 b_2 \cos \frac{(\eta - \gamma)\pi}{2} - a_3 b_1 \sin \frac{(\alpha + 2\gamma - \eta)\pi}{2}, \quad (4.99)$$

$$a_1 b_3 \sin \frac{(\alpha + \eta)\pi}{2} \leq a_2 b_2 \cos \frac{(\eta - \gamma)\pi}{2} \frac{\sin \frac{(\eta - \gamma)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha + \eta)\pi}{2}} + a_3 b_1 \sin \frac{(\alpha + 2\gamma - \eta)\pi}{2} \frac{\cos \frac{(\alpha + 2\gamma - \eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha + \eta)\pi}{2}}, \quad (4.100)$$

postaje

$$\begin{aligned} K(\rho) = & a_1 b_1 \sin((\eta - \gamma)\pi) + a_1 b_2 \rho^{\frac{1+\alpha+\gamma}{2}} \sin \frac{(1 + \alpha - \gamma + 2\eta)\pi}{2} - a_1 b_3 \rho^{1+\alpha+\gamma} \sin((\alpha + \eta)\pi) \\ & - a_2 b_1 \rho^{\frac{1+\alpha+\gamma}{2}} \sin \frac{(1 + \alpha + 3\gamma - 2\eta)\pi}{2} + a_2 b_2 \rho^{1+\alpha+\gamma} \sin((\eta - \gamma)\pi) \\ & + a_2 b_3 \rho^{3\frac{1+\alpha+\gamma}{2}} \sin \frac{(1 + \alpha + 2\eta - \gamma)\pi}{2} + a_3 b_1 \rho^{1+\alpha+\gamma} \sin((\alpha + 2\gamma - \eta)\pi) \\ & - a_3 b_2 \rho^{3\frac{1+\alpha+\gamma}{2}} \sin \frac{(1 + \alpha + 3\gamma - 2\eta)\pi}{2} + a_3 b_3 \rho^{2(1+\alpha+\gamma)} \sin((\eta - \gamma)\pi), \end{aligned} \quad (4.101)$$

stoga zahtev nenegativnosti funkcije  $K$  implicira

$$a_1 b_2 \sin \frac{(1 + \alpha - \gamma + 2\eta)\pi}{2} - a_2 b_1 \sin \frac{(1 + \alpha + 3\gamma - 2\eta)\pi}{2} \geq 0 \quad (4.102)$$

$$a_2 b_3 \sin \frac{(1 + \alpha - \gamma + 2\eta)\pi}{2} - a_3 b_2 \sin \frac{(1 + \alpha + 3\gamma - 2\eta)\pi}{2} \geq 0 \quad (4.103)$$

$$-a_1 b_3 \sin((\alpha + \eta)\pi) + a_2 b_2 \sin((\eta - \gamma)\pi) + a_3 b_1 \sin((\alpha + 2\gamma - \eta)\pi) \geq 0. \quad (4.104)$$

Prema termodinamičkom zahtevu  $(4.95)_3$ , prvi član u  $(4.102)$ , kao i u  $(4.103)$ , ima nenegativnu vrednost, jer je  $1 + \alpha - \gamma + 2\eta \in (1, 2)$ , dok je drugi član u  $(4.102)$ , kao i u  $(4.103)$  nepozitivan, budući da je  $1 + \alpha + 3\gamma - 2\eta \in (0, 2)$ , zbog  $1 + \alpha + 3\gamma - 2\eta = 1 - (\alpha - \gamma + 2\eta) + 2(\alpha + \gamma) \geq 2(\alpha + \gamma) \geq 0$ , pri čemu je restrikcija  $(4.95)_3$  iskorišćena i u obliku  $-(\alpha - \gamma + 2\eta) \geq -1$ , kao i u obliku  $1 + \alpha + 3\gamma - 2\eta = 1 + (\alpha - \gamma + 2\eta) - 4(\eta - \gamma) \leq 2 - 4(\eta - \gamma) \leq 2$ , te se zahtevi  $(4.102)$  i  $(4.103)$  transformišu u

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+\alpha+3\gamma-2\eta)\pi}{4}} \frac{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+\alpha+3\gamma-2\eta)\pi}{4}} \quad \text{i} \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\cos \frac{(1-\alpha+\gamma-2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}} \frac{\sin \frac{(1-\alpha+\gamma-2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}}, \quad (4.105)$$

i predstavljaju sužene termodinamičke restrikcije (4.96) i (4.97), pri čemu zahtev (4.103) postaje

$$a_2 b_3 \sin \frac{(1 - \alpha + \gamma - 2\eta)\pi}{2} - a_3 b_2 \sin \frac{(1 - \alpha - 3\gamma + 2\eta)\pi}{2} \geq 0,$$

budući da je  $\sin(\frac{\pi}{2} + \phi) = \sin(\frac{\pi}{2} - \phi)$  i stoga je transformisan u (4.105)<sub>2</sub> kako bi se kombinovao sa termodinamičkim ograničenjem (3.108)<sub>2</sub>. Izrazi dati sa (4.105) predstavljaju sužene termodinamičke restrikcije (4.96)<sub>2</sub> i (4.97)<sub>2</sub>, budući da su  $\frac{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+\alpha+3\gamma-2\eta)\pi}{4}} \leq 1$  i  $\frac{\sin \frac{(1-\alpha+\gamma-2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}} \leq 1$ , zbog nejednakosti  $1 + \alpha + 3\gamma - 2\eta \leq 1 + \alpha - \gamma + 2\eta$  i  $1 - \alpha + \gamma - 2\eta \leq 1 - \alpha - 3\gamma + 2\eta$ , koje se redukuju na  $\gamma \leq \eta$ , videti (4.95)<sub>2</sub>.

Zahtevi (4.95) obezbeđuju nenegativne vrednosti sinusa u prvom i trećem članu u (4.104), jer je  $\alpha + \eta \leq 1 - (\eta - \gamma) \leq 1$  i  $\alpha + 2\gamma - \eta = (\alpha - \gamma + 2\eta) - 3(\eta - \gamma) \leq 1$  kao i  $\alpha + 2\gamma - \eta = (\alpha + \gamma - \eta) + \gamma \geq \gamma$ , dok drugi član u (4.104) ima nenegativnu vrednost prema (4.95)<sub>2</sub>, te se zahtev (4.104) transformiše u suženu termodinamičku restrikciju (4.100) ako je desna strana (4.100) manja nego desna strana (4.99), budući da je  $\frac{\sin \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}} = \frac{\cos \frac{(1-(\eta-\gamma))\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}} \leq 1$  i  $\frac{\cos \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}} \geq 1$ , zbog nejednakosti  $\alpha + \eta \leq 1 - (\eta - \gamma) < 1$  i  $\alpha + 2\gamma - \eta \leq \alpha + \eta < 1$ , koje se respektivno redukuju na  $\alpha - \gamma + 2\eta \leq 1$  i  $\gamma \leq \eta$ , videti (4.95)<sub>3,2</sub>.

Dakle, nenegativnost funkcije  $K$ , koja odgovara modelu  $\text{IDD}^+.\text{IDD}^+$  i data je sa (4.101), je obezbeđena zahtevima (4.96), (4.97) i možda (4.100) pored (4.95), (4.98) i (4.99) implicirajući da je moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, a funkcija puzanja Bernštajnova funkcija.

#### 4.3.1.8 Model $\mathbf{I}^+ \mathbf{ID.IDD}^+$

Funkcija  $K$ , data sa (4.20), u slučaju modela  $\mathbf{I}^+ \mathbf{ID.IDD}^+$ , čija je konstitutivna jednačina

$$\left( a_1 {}_0\text{I}_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0\text{I}_t^{\frac{1+\alpha-\gamma}{2}} + a_3 {}_0\text{D}_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0\text{I}_t^{\alpha+\gamma-\eta} + b_2 {}_0\text{D}_t^{\frac{1+\eta-(\alpha+\gamma-\eta)}{2}} + b_3 {}_0\text{D}_t^{1+\eta} \right) \varepsilon(t),$$

videti (3.136), sa odgovarajućim termodinamičkim restrikcijama (3.140) - (3.143), kao i sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$\eta \leq \gamma, \quad \alpha + \gamma + 2(\gamma - \eta) = \alpha + 3\gamma - 2\eta \leq 1, \quad (4.106)$$

$$\frac{a_1}{b_1} \frac{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}} \leq \frac{a_1}{b_1} \frac{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}} \frac{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}} \leq \frac{a_2}{b_2}, \quad (4.107)$$

$$\frac{a_2}{b_2} \leq \frac{a_3}{b_3} \frac{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}} \frac{\sin \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}} \leq \frac{a_3}{b_3} \frac{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}, \quad (4.108)$$

$$a_1 b_3 \cos \frac{(\alpha + \eta)\pi}{2} - a_2 b_2 \sin \frac{(\gamma - \eta)\pi}{2} \leq a_3 b_1 \cos \frac{(\alpha + 2\gamma - \eta)\pi}{2}, \quad (4.109)$$

$$a_3 b_1 \sin \frac{(\alpha + 2\gamma - \eta)\pi}{2} \leq a_2 b_2 \cos \frac{(\gamma - \eta)\pi}{2} - a_1 b_3 \sin \frac{(\alpha + \eta)\pi}{2}, \quad (4.110)$$

$$a_3 b_1 \sin \frac{(\alpha + 2\gamma - \eta)\pi}{2} \leq a_2 b_2 \cos \frac{(\gamma - \eta)\pi}{2} \frac{\sin \frac{(\gamma-\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}} + a_1 b_3 \sin \frac{(\alpha + \eta)\pi}{2} \frac{\cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}}, \quad (4.111)$$

postaje

$$\begin{aligned} K(\rho) = & a_1 b_1 \sin((\gamma - \eta)\pi) - a_1 b_2 \rho^{\frac{1+\alpha+\gamma}{2}} \sin \frac{(1 + \alpha - \gamma + 2\eta)\pi}{2} + a_1 b_3 \rho^{1+\alpha+\gamma} \sin((\alpha + \eta)\pi) \\ & + a_2 b_1 \rho^{\frac{1+\alpha+\gamma}{2}} \sin \frac{(1 - \alpha - 3\gamma + 2\eta)\pi}{2} + a_2 b_2 \rho^{1+\alpha+\gamma} \sin((\gamma - \eta)\pi) \\ & - a_2 b_3 \rho^{3 \frac{1+\alpha+\gamma}{2}} \sin \frac{(1 + \alpha - \gamma + 2\eta)\pi}{2} - a_3 b_1 \rho^{1+\alpha+\gamma} \sin((\alpha + 2\gamma - \eta)\pi) \\ & + a_3 b_2 \rho^{3 \frac{1+\alpha+\gamma}{2}} \sin \frac{(1 - \alpha - 3\gamma + 2\eta)\pi}{2} + a_3 b_3 \rho^{2(1+\alpha+\gamma)} \sin((\gamma - \eta)\pi), \end{aligned} \quad (4.112)$$

stoga zahtev nenegativnosti funkcije  $K$  implicira

$$-a_1 b_2 \sin \frac{(1 + \alpha - \gamma + 2\eta)\pi}{2} + a_2 b_1 \sin \frac{(1 - \alpha - 3\gamma + 2\eta)\pi}{2} \geq 0, \quad (4.113)$$

$$-a_2 b_3 \sin \frac{(1 + \alpha - \gamma + 2\eta)\pi}{2} + a_3 b_2 \sin \frac{(1 - \alpha - 3\gamma + 2\eta)\pi}{2} \geq 0, \quad (4.114)$$

$$a_1 b_3 \sin((\alpha + \eta)\pi) + a_2 b_2 \sin((\gamma - \eta)\pi) - a_3 b_1 \sin((\alpha + 2\gamma - \eta)\pi) \geq 0. \quad (4.115)$$

Prema termodinamičkim zahtevima (4.106), sinus u prvom članu u (4.113), kao i u (4.114), ima nenegativnu vrednost, jer su  $1 + \alpha - \gamma + 2\eta \geq (1 - (\gamma - \eta)) + \alpha + \eta \geq 0$  i  $1 + \alpha - \gamma + 2\eta = 1 + (\alpha + 3\gamma - 2\eta) - 4(\gamma - \eta) \leq 2 - 4(\gamma - \eta) \leq 2$ , dok je argument  $\frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{2}$  u drugom članu u (4.113) i (4.114) u intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$ , budući da je  $\alpha + 3\gamma - 2\eta \in (0, 1)$ , prema (4.106)<sub>2</sub>, te se zahtevi (4.113) i (4.114) transformišu u

$$\frac{a_1}{b_1} \frac{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}} \frac{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \frac{a_3}{b_3} \frac{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}} \frac{\sin \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}},$$

i predstavljaju sužene termodinamičke restrikcije (4.107)<sub>1</sub> i (4.108)<sub>2</sub>, kada se kombinuju sa termodinamičkom restrikcijom (3.141), jer su  $\frac{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}} = \frac{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+\alpha+3\gamma-2\eta)\pi}{4}} \geq 1$  i  $\frac{\sin \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}} = \frac{\cos \frac{(1+\alpha+3\gamma-2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}} \leq 1$ , zbog nejednakosti  $1 + \alpha - \gamma + 2\eta \leq 1 + \alpha + 3\gamma - 2\eta$  koja se redukuje na  $\eta \leq \gamma$ , videti (4.107)<sub>1</sub>.

Zahtevi (4.106) obezbeđuju nenegativnu vrednost sinusa u prvom i trećem članu u (4.115), budući da je  $0 \leq \alpha + \eta \leq \alpha + \gamma + 2(\gamma - \eta) \leq 1$  i  $0 \leq \alpha + 2\gamma - \eta = (\alpha + 3\gamma - 2\eta) - (\gamma - \eta) \leq 1$ , dok sinus u drugom članu u (4.115) ima nenegativnu vrednost prema zahtevu (4.106)<sub>1</sub>, te se zahtev (4.115) transformiše u suženu termodinamičku restrikciju (4.111) ako je desna strana (4.111) manja nego desna strana (4.110), budući da je  $\frac{\sin \frac{(\gamma-\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}} = \frac{\cos \frac{(\gamma-\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \leq 1$  i  $\frac{\cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \geq 1$ , zbog nejednakosti  $\alpha + 2\gamma - \eta \leq 1 - (\gamma - \eta) < 1$  i  $\alpha + \eta \leq \alpha + 2\gamma - \eta < 1$ , koje se respektivno redukuju na  $\alpha + 3\gamma - 2\eta \leq 1$  i  $\eta \leq \gamma$ , videti (4.106).

Dakle, nenegativnost funkcije  $K$ , koja odgovara modelu I<sup>+</sup>ID.IDD<sup>+</sup> i data je sa (4.112), je obezbeđena zahtevima (4.107), (4.108) i možda (4.111) pored (4.106), (4.109) i (4.110) implicirajući da je moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, a funkcija puzanja Bernštajnova funkcija.

### 4.3.2 Asimetrični modeli

Formulisane su sužene termodinamičke restrikcije na parametre modela koji sadrže različit broj operatora koji deluju na napon i deformaciju.

#### 4.3.2.1 Model IID.ID

Funkcija  $K$ , data sa (4.20), u slučaju modela IID.ID, čija je konstitutivna jednačina

$$\left( a_1 {}_0I_t^{\alpha+\beta-\gamma} + a_2 {}_0I_t^\nu + a_3 {}_0D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^\alpha + b_2 {}_0D_t^\beta \right) \varepsilon(t),$$

videti (3.61), sa odgovarajućim termodinamičkim restrikcijama (3.66) i (3.67), kao i sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leq \alpha \leq \nu < \alpha + \beta - \gamma \leq 1, \quad \beta + \nu \leq 1, \quad (4.116)$$

$$\frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_1}{a_3} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\gamma)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\alpha+2\beta-\gamma)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2}} \leq \frac{a_1}{a_3} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\gamma)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2}}, \quad (4.117)$$

koje važe ako je  $\alpha + 2\beta - \gamma < 1$ , postaje

$$\begin{aligned} K(\rho) = & a_1 b_1 \sin((\beta - \gamma)\pi) + a_1 b_2 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\alpha + 2\beta - \gamma)\pi) \\ & + a_2 b_1 \rho^{\alpha+\beta-\gamma-\nu} \sin((\nu - \alpha)\pi) + a_2 b_2 \rho^{2(\alpha+\beta)-\gamma-\nu} \sin((\beta + \nu)\pi) \\ & - a_3 b_1 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\alpha + \gamma)\pi) + a_3 b_2 \rho^{2(\alpha+\beta)} \sin((\beta - \gamma)\pi), \end{aligned} \quad (4.118)$$

stoga zahtev nenegativnosti funkcije  $K$  implicira

$$a_1 b_2 \sin((\alpha + 2\beta - \gamma)\pi) - a_3 b_1 \sin((\alpha + \gamma)\pi) \geq 0. \quad (4.119)$$

Prvi član u (4.119) ima ili pozitivnu vrednost ako je  $\alpha + 2\beta - \gamma < 1$ , ili nepozitivnu vrednost ako je  $\alpha + 2\beta - \gamma \geq 1$ , budući da je  $\alpha + 2\beta - \gamma = (\alpha + \beta - \gamma) + \beta \in (0, 2)$ , prema termodinamičkom zahtevu (4.116)<sub>1</sub>, dok drugi član u (4.119) ima nepozitivnu vrednost, budući da termodinamički zahtev (4.116)<sub>1</sub> daje  $\alpha + \gamma \leq \nu + \gamma < \alpha + \beta$  implicirajući  $\gamma < \beta$ , što kombinovano sa  $\alpha \leq \nu$ , videti (4.116)<sub>1</sub>, daje  $\alpha + \gamma \leq \beta + \nu \leq 1$  prema termodinamičkom zahtevu (4.116)<sub>2</sub>, stoga se zahtevana nenegativnost (4.119), kao i nenegativnost funkcije  $K$ , date sa (4.118), može garantovati samo ako je  $\alpha + 2\beta - \gamma < 1$ , i tada se zahtev (4.119) transformiše u

$$\frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_1}{a_3} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\gamma)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\alpha+2\beta-\gamma)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2}},$$

predstavljajući suženu termodinamičku restrikciju  $(4.117)_2$ , jer je  $\frac{\cos \frac{(\alpha+2\beta-\gamma)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2}} \leq 1$  zbog  $\alpha+\gamma \leq \alpha+2\beta-\gamma < 1$  što se redukuje na  $\gamma < \beta$ , videti  $(4.116)_1$ .

Dakle, nenegativnost funkcije  $K$ , koja odgovara modelu IID.ID i data je sa  $(4.118)$ , je obezbeđena ako je  $\alpha+2\beta-\gamma < 1$  zahtevima  $(4.117)$ , pored  $(4.116)$  implicirajući da je moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, a funkcija puzanja Bernštajnova funkcija, dok ako je  $\alpha+2\beta-\gamma \geq 1$ , tada se navedene osobine ne mogu garantovati, budući da se  $(4.119)$  ne može zadovoljiti.

#### 4.3.2.2 Model IDD.DD<sup>+</sup>

Funkcija  $K$ , data sa  $(4.20)$ , u slučaju modela IDD.DD<sup>+</sup>, čija je konstitutivna jednačina

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 D_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^{\alpha+\beta+\mu} \right) \varepsilon(t),$$

videti  $(3.29)$ , sa odgovarajućim termodinamičkim restrikcijama  $(3.32)$  i  $(3.33)$ , kao i sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$1 \leq \alpha + \beta + \mu \leq 2, \quad \beta < \gamma \leq \mu \leq 1 - \alpha, \quad (4.120)$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2}, \quad (4.121)$$

postaje

$$\begin{aligned} K(\rho) = & a_1 b_1 \sin((\alpha + \mu)\pi) + a_1 b_2 \rho^{\alpha+\beta} \sin((2\alpha + \beta + \mu)\pi) \\ & + a_2 b_1 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\mu - \beta)\pi) + a_2 b_2 \rho^{2(\alpha+\beta)} \sin((\alpha + \mu)\pi) + a_3 b_2 \rho^{2\alpha+\beta+\mu} \sin((\alpha + \beta)\pi), \end{aligned} \quad (4.122)$$

stoga zahtev nenegativnosti funkcije  $K$  implicira

$$a_1 b_2 \sin((2\alpha + \beta + \mu)\pi) + a_2 b_1 \sin((\mu - \beta)\pi) > 0. \quad (4.123)$$

Prema termodinamičkom zahtevu  $(4.120)_2$ , važi  $2\alpha + \beta + \mu = (\alpha + \beta) + (\alpha + \mu) \leq 2$ , a prema termodinamičkom zahtevu  $(4.120)_1$ , važi  $2\alpha + \beta + \mu = (\alpha + \beta + \mu) + \alpha \geq 1$ , te prvi član u  $(4.123)$  ima nepozitivnu vrednost, dok drugi član u  $(4.123)$  ima nenegativnu vrednost, prema termodinamičkom zahtevu  $(4.120)_2$ . Stoga se zahtev  $(4.123)$  transformiše u

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2},$$

predstavljajući suženu termodinamičku restrikciju  $(4.121)_1$ , jer je  $\frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \geq 1$  zbog  $\pi - \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \geq \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}$ , što se redukuje na  $\alpha + \mu \leq 1$ , videti  $(4.120)_2$ .

Dakle, nenegativnost funkcije  $K$ , koja odgovara modelu IDD.DD<sup>+</sup> i data je sa  $(4.122)$ , je obezbeđena zahtevanjem  $(4.121)$  pored  $(4.120)$  implicirajući da je moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, a funkcija puzanja Bernštajnova funkcija.

#### 4.3.2.3 Model I<sup>+</sup>ID.ID

Funkcija  $K$ , data sa  $(4.20)$ , u slučaju modela I<sup>+</sup>ID.ID, čija je konstitutivna jednačina

$$\left( a_1 {}_0 I_t^{\alpha+\beta+\nu} + a_2 {}_0 I_t^\nu + a_3 {}_0 D_t^{\alpha+\beta-\nu} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\alpha + b_2 {}_0 D_t^\beta \right) \varepsilon(t), \quad (4.124)$$

videti  $(3.69)$ , sa odgovarajućim termodinamičkim restrikcijama  $(3.74)$  i  $(3.75)$ , kao i sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leq \alpha + \beta - \nu \leq 1, \quad 1 \leq \alpha + \beta + \nu \leq 2, \quad \alpha \leq \nu \leq 1 - \beta, \quad (4.125)$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \leq \frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2}, \quad (4.126)$$

$$\frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}} \leq \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}}, \quad (4.127)$$

postaje

$$\begin{aligned} K(\rho) = & a_1 b_1 \sin((\beta + \nu)\pi) + a_1 b_2 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\alpha + 2\beta + \nu)\pi) \\ & + a_2 b_1 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\nu - \alpha)\pi) + a_2 b_2 \rho^{2(\alpha+\beta)} \sin((\beta + \nu)\pi) \\ & - a_3 b_1 \rho^{2(\alpha+\beta)} \sin((2\alpha + \beta - \nu)\pi) + a_3 b_2 \rho^{3(\alpha+\beta)} \sin((\nu - \alpha)\pi), \end{aligned} \quad (4.128)$$

stoga zahtev nenegativnosti funkcije  $K$  implicira

$$a_1 b_2 \sin((\alpha + 2\beta + \nu)\pi) + a_2 b_1 \sin((\nu - \alpha)\pi) \geq 0, \quad (4.129)$$

$$a_2 b_2 \sin((\beta + \nu)\pi) - a_3 b_1 \sin((2\alpha + \beta - \nu)\pi) \geq 0. \quad (4.130)$$

Prema termodinamičkom zahtevu (4.125)<sub>3</sub> je  $\alpha + 2\beta + \nu = (\alpha + \beta) + (\beta + \nu) \leq 2$ , a prema termodinamičkom zahtevu (4.125)<sub>2</sub> je  $\alpha + 2\beta + \nu = (\alpha + \beta + \nu) + \beta \geq 1$ , te prvi član u (4.129) ima nepozitivnu vrednost, dok drugi član u (4.129) ima nenegativnu vrednost, prema termodinamičkom zahtevu (4.125)<sub>3</sub>. Stoga se nejednakost (4.129) transformiše u

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2},$$

predstavljajući suženu termodinamičku restrikciju (4.126)<sub>1</sub>, jer je  $\frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \geq 1$  zbog  $\pi - \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2} \geq \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}$ , što se redukuje na  $\beta + \nu \leq 1$ , videti (4.125)<sub>3</sub>.

Prema termodinamičkom zahtevu (4.125)<sub>3</sub>, prvi član u (4.130) ima nenegativnu vrednost, a prema termodinamičkom zahtevu (4.125)<sub>1</sub> je  $2\alpha + \beta - \nu = (\alpha + \beta - \nu) + \alpha \geq 0$ , kao i prema termodinamičkom zahtevu (4.125)<sub>3</sub>, važi  $2\alpha + \beta - \nu = (\alpha + \beta) - (\nu - \alpha) \leq 1$ , i stoga drugi član u (4.130) ima nepozitivnu vrednost, te se nejednakost (4.130) transformiše u

$$\frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}},$$

predstavljajući suženu termodinamičku restrikciju (4.127)<sub>2</sub>, jer je  $\frac{\cos \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}} \leq 1$  zbog  $2\alpha + \beta - \nu \leq \beta + \nu < 1$ , što se redukuje na  $\alpha \leq \nu$ , videti (4.125)<sub>3</sub>.

Dakle, nenegativnost funkcije  $K$ , koja odgovara modelu  $I^+ ID.ID$  i data je sa (4.128), se obezbeđuje zahtevanjem (4.126) i (4.127) pored (4.125) implicirajući da je moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, a funkcija puzanja Bernštajnova funkcija.

#### 4.3.2.4 Model $IDD^+.DD^+$

Funkcija  $K$ , data sa (4.20), u slučaju modela  $IDD^+.DD^+$ , čija je konstitutivna jednačina

$$(a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^{\alpha+2\beta}) \sigma(t) = (b_1 {}_0 D_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^{\alpha+\beta+\mu}) \varepsilon(t),$$

videti (3.34), sa odgovarajućim termodinamičkim restrikcijama (3.38) i (3.39), kao i sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$1 \leq \alpha + 2\beta \leq 2, \quad 1 \leq \alpha + \beta + \mu \leq 2, \quad \beta \leq \mu \leq 1 - \alpha, \quad (4.131)$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2}, \quad (4.132)$$

$$\frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\mu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+2\beta-\mu)\pi}{2}} \leq \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\mu)\pi}{2}}, \quad (4.133)$$

koje važe ako je  $2\alpha + \beta - \mu < 1$ , postaje

$$\begin{aligned} K(\rho) = & a_1 b_1 \sin((\alpha + \mu)\pi) + a_1 b_2 \rho^{\alpha+\beta} \sin((2\alpha + \beta + \mu)\pi) \\ & + a_2 b_1 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\mu - \beta)\pi) + a_2 b_2 \rho^{2(\alpha+\beta)} \sin((\alpha + \mu)\pi) \\ & - a_3 b_1 \rho^{2(\alpha+\beta)} \sin((\alpha + 2\beta - \mu)\pi) + a_3 b_2 \rho^{3(\alpha+\beta)} \sin((\mu - \beta)\pi), \end{aligned} \quad (4.134)$$

stoga zahtev nenegativnosti funkcije  $K$  implicira

$$a_1 b_2 \sin((2\alpha + \beta + \mu)\pi) + a_2 b_1 \sin((\mu - \beta)\pi) \geq 0, \quad (4.135)$$

$$a_2 b_2 \sin((\alpha + \mu)\pi) - a_3 b_1 \sin((\alpha + 2\beta - \mu)\pi) \geq 0. \quad (4.136)$$

Prema termodinamičkom zahtevu (4.131)<sub>3</sub>, važi  $\alpha + 2\beta + \mu = (\alpha + \beta) + (\beta + \mu) \leq 2$ , dok prema termodinamičkom zahtevu (4.131)<sub>2</sub>, važi  $\alpha + 2\beta + \mu = (\alpha + \beta + \mu) + \beta \geq 1$ , te prvi član u (4.135) ima nepozitivnu vrednost, dok drugi član u (4.135) ima nenegativnu vrednost prema termodinamičkom zahtevu (4.131)<sub>3</sub>. Stoga se nejednakost (4.135) transformiše u

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right| \sin \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2},$$

predstavljajući suženu termodinamičku restrikciju (4.132)<sub>1</sub>, jer je  $\frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \geq 1$  zbog  $\pi - \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \geq \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}$ , što se redukuje na  $\alpha + \mu \leq 1$ , videti (4.131)<sub>3</sub>.

Prema termodinamičkom zahtevu (4.131)<sub>3</sub>, prvi član u (4.136) ima nenegativnu vrednost, dok prema termodinamičkom zahtevu (4.131)<sub>1</sub>, važi  $\alpha + 2\beta - \mu = (\alpha + 2\beta) - \mu \geq 0$ , kao i prema termodinamičkom zahtevu (4.131)<sub>3</sub>, važi  $\alpha + 2\beta - \mu = (\alpha + \beta) - (\mu - \beta) \leq 1$ , i stoga drugi član u (4.136) ima nepozitivnu prednost, te se nejednakost (4.136) transformiše u

$$\frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\mu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+2\beta-\mu)\pi}{2}},$$

predstavljajući suženu termodinamičku restrikciju (4.133)<sub>2</sub>, jer je  $\frac{\cos \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+2\beta-\mu)\pi}{2}} \leq 1$  zbog  $\alpha + 2\beta - \mu \leq \alpha + \mu < 1$ , što se redukuje na  $\beta \leq \mu$ , videti (4.131)<sub>3</sub>.

Dakle, nenegativnost funkcije  $K$ , koja odgovara modelu ID.DD<sup>+</sup>.DD<sup>+</sup> i data je sa (4.134), se obezbeđuje zahtevanjem (4.132) i (4.133) pored (4.131), implicirajući da je moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, a funkcija puzanja Bernštajnova funkcija.

#### 4.3.2.5 Model ID.IDD

Funkcija  $K$ , data sa (4.20), u slučaju modela ID.IDD, čija je konstitutivna jednačina

$$(a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta) \sigma(t) = (b_1 {}_0 I_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^\nu + b_3 {}_0 D_t^{\alpha+\beta-\mu}) \varepsilon(t),$$

videti (3.49), sa odgovarajućim termodinamičkim restrikcijama (3.53) i (3.54), kao i sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leq \beta \leq \nu < \alpha + \beta - \mu \leq 1, \quad \mu \leq \alpha \leq 1 - \nu, \quad (4.137)$$

$$-\frac{a_1}{a_2} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_3} \leq \frac{a_1}{a_2} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{a_1}{a_2} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}}, \quad (4.138)$$

koje važe ako je  $2\alpha + \beta - \mu < 1$ , postaje

$$K(\rho) = a_1 b_1 \sin((\alpha - \mu)\pi) + a_1 b_2 \rho^{\mu+\nu} \sin((\alpha + \nu)\pi) + a_1 b_3 \rho^{\alpha+\beta} \sin((2\alpha + \beta - \mu)\pi) \\ - a_2 b_1 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\beta + \mu)\pi) + a_2 b_2 \rho^{\alpha+\beta+\mu+\nu} \sin((\nu - \beta)\pi) + a_2 b_3 \rho^{2(\alpha+\beta)} \sin((\alpha - \mu)\pi), \quad (4.139)$$

stoga zahtev nenegativnosti funkcije  $K$  implicira

$$a_1 b_3 \sin((2\alpha + \beta - \mu)\pi) - a_2 b_1 \sin((\beta + \mu)\pi) \geq 0. \quad (4.140)$$

Prvi član u (4.140) ima ili pozitivnu vrednost ako je  $2\alpha + \beta - \mu < 1$ , ili nepozitivnu vrednost ako je  $2\alpha + \beta - \mu \geq 1$ , jer je  $2\alpha + \beta - \mu = (\alpha + \beta - \mu) + \alpha \in (0, 2)$  prema termodinamičkom zahtevu (4.137)<sub>1</sub>, dok drugi član u (4.140) ima nepozitivnu vrednost, jer je  $\beta + \mu \leq \mu + \nu \leq 1$ , prema termodinamičkom zahtevu (4.137). Stoga, nejednakost (4.140) može biti zadovoljena samo ako je  $2\alpha + \beta - \mu < 1$  i transformiše se u

$$\frac{b_1}{b_3} \leq \frac{a_1}{a_2} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}},$$

predstavljajući suženu termodinamičku restrikciju (4.138)<sub>3</sub>, jer je  $\frac{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leq 1$  zbog  $\beta + \mu \leq 2\alpha + \beta - \mu < 1$ , što se redukuje na  $\mu \leq \alpha$ , videti (4.137)<sub>2</sub>.

Dakle, nenegativnost funkcije  $K$ , koja odgovara modelu ID.IDD i data je sa (4.139), se obezbeđuje ako je  $2\alpha + \beta - \mu < 1$  zahtevanjem (4.138) pored (4.137) implicirajući da je moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, a funkcija puzanja Bernštajnova funkcija, dok ako je  $2\alpha + \beta - \mu \geq 1$ , tada spomenute osobine ne mogu biti garantovane, jer (4.140) ne može biti zadovoljeno.

#### 4.3.2.6 Model ID.DDD<sup>+</sup>

Funkcija  $K$ , data sa (4.20), u slučaju modela ID.DDD<sup>+</sup>, čija je konstitutivna jednačina

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 D_t^\mu + b_2 {}_0 D_t^\nu + b_3 {}_0 D_t^{\alpha+\beta+\nu} \right) \varepsilon(t),$$

videti (3.44), sa odgovarajućim termodinamičkim restrikcijama (3.47) i (3.48), kao i sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$1 \leq \alpha + \beta + \nu \leq 2, \quad \beta \leq \mu < \nu \leq 1 - \alpha, \quad (4.141)$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{b_2}{b_3}, \quad (4.142)$$

postaje

$$\begin{aligned} K(\rho) = & a_1 b_1 \sin((\alpha + \mu)\pi) + a_1 b_2 \rho^{\nu-\mu} \sin((\alpha + \nu)\pi) + a_1 b_3 \rho^{\alpha+\beta+\nu-\mu} \sin((2\alpha + \beta + \nu)\pi) \\ & + a_2 b_1 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\mu - \beta)\pi) + a_2 b_2 \rho^{\alpha+\beta+\nu-\mu} \sin((\nu - \beta)\pi) + a_2 b_3 \rho^{2\alpha+2\beta+\nu-\mu} \sin((\alpha + \nu)\pi), \end{aligned} \quad (4.143)$$

stoga zahtev nenegativnosti funkcije  $K$  implicira

$$a_1 b_3 \sin((2\alpha + \beta + \nu)\pi) + a_2 b_2 \sin((\nu - \beta)\pi) \geq 0. \quad (4.144)$$

Prvi član u (4.144) ima nepozitivnu vrednost, jer je sa jedne strane  $2\alpha + \beta + \nu = (\alpha + \beta + \nu) + \alpha \geq 1$ , prema termodinamičkom zahtevu (4.141)<sub>1</sub>, a sa druge strane  $2\alpha + \beta + \nu = (\alpha + \beta) + (\alpha + \nu) \leq 2$  prema termodinamičkom zahtevu (4.141)<sub>2</sub>, dok drugi član u (4.144) ima nenegativnu vrednost, prema termodinamičkom zahtevu (4.141)<sub>2</sub>. Stoga se nejednakost (4.144) transformiše u

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{b_2}{b_3},$$

predstavljajući suženu termodinamičku restrikciju (4.142)<sub>1</sub>, jer je  $\frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}} \geq 1$  zbog  $\frac{(\nu-\beta)\pi}{2} \leq \pi - \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2}$  što se redukuje na  $\alpha + \nu \leq 1$ , videti (4.141)<sub>2</sub>.

Dakle, nenegativnost funkcije  $K$ , koja odgovara modelu ID.DDD<sup>+</sup> i data je sa (4.143), se obezbeđuje zahtevanjem (4.142) pored (4.141) implicirajući da je moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, a funkcija puzaanja Bernštajnova funkcija.

#### 4.3.2.7 Model ID.IDD<sup>+</sup>

Funkcija  $K$ , data sa (4.20), u slučaju modela ID.IDD<sup>+</sup>, čija je konstitutivna jednačina

$$\left( a_1 {}_0 I_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^{\alpha+\beta-\nu} + b_2 {}_0 D_t^\nu + b_3 {}_0 D_t^{\alpha+\beta+\nu} \right) \varepsilon(t),$$

videti (3.55), sa odgovarajućim termodinamičkim restrikcijama (3.59) i (3.60), kao i sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leq \alpha + \beta - \nu \leq 1, \quad 1 \leq \alpha + \beta + \nu \leq 2, \quad \beta \leq \nu \leq 1 - \alpha, \quad (4.145)$$

$$\frac{b_1}{b_2} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\alpha+2\beta-\nu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2}} \leq \frac{a_1}{a_2}, \quad (4.146)$$

$$\frac{a_1}{a_2} \leq \frac{b_2}{b_3} \frac{\cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2} \right|} \frac{\sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}}{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2}} \leq \frac{b_2}{b_3} \frac{\cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2} \right|}, \quad (4.147)$$

postaje

$$\begin{aligned} K(\rho) = & a_1 b_1 \sin((\nu - \beta)\pi) + a_1 b_2 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\alpha + \nu)\pi) + a_1 b_3 \rho^{2(\alpha+\beta)} \sin((2\alpha + \beta + \nu)\pi) \\ & - a_2 b_1 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\alpha + 2\beta - \nu)\pi) + a_2 b_2 \rho^{2(\alpha+\beta)} \sin((\nu - \beta)\pi) + a_2 b_3 \rho^{3(\alpha+\beta)} \sin((\alpha + \nu)\pi), \end{aligned} \quad (4.148)$$

stoga zahtev nenegativnosti funkcije  $K$  implicira

$$a_1 b_2 \sin((\alpha + \nu)\pi) - a_2 b_1 \sin((\alpha + 2\beta - \nu)\pi) \geq 0, \quad (4.149)$$

$$a_1 b_3 \sin((2\alpha + \beta + \nu)\pi) + a_2 b_2 \sin((\nu - \beta)\pi) \geq 0. \quad (4.150)$$

Prema termodinamičkom zahtevu (4.145)<sub>3</sub>, prvi član u (4.149) ima nenegativnu vrednost, dok sa jedne strane važi  $\alpha + 2\beta - \nu = (\alpha + \beta - \nu) + \beta \geq 0$ , prema termodinamičkom zahtevu (4.145)<sub>1</sub>, a sa druge strane važi  $\alpha + 2\beta - \nu = (\alpha + \beta) - (\nu - \beta) \leq 1$ , prema termodinamičkom zahtevu (4.145)<sub>3</sub>, i stoga drugi član u (4.149) ima nepozitivnu vrednost, te se zahtev (4.149) transformiše u

$$\frac{b_1}{b_2} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\alpha+2\beta-\nu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2}} \leq \frac{a_1}{a_2},$$

predstavljajući suženu termodinamičku restrikciju (4.146)<sub>1</sub>, jer je  $\frac{\cos \frac{(\alpha+2\beta-\nu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2}} \geq 1$  zbog  $\alpha + 2\beta - \nu \leq \alpha + \nu < 1$  što se redukuje na  $\beta \leq \nu$ , videti (4.145)<sub>3</sub>.

Prvi član u (4.150) ima nepozitivnu vrednost, jer je sa jedne strane  $2\alpha + \beta + \nu = (\alpha + \beta + \nu) + \alpha \geq 1$ , prema termodinamičkom zahtevu (4.145)<sub>2</sub>, a sa druge strane  $2\alpha + \beta + \nu = (\alpha + \beta) + (\alpha + \nu) \leq 2$ , prema termodinamičkom zahtevu (4.145)<sub>3</sub>, dok drugi član u (4.150) ima nenegativnu vrednost, prema termodinamičkom zahtevu (4.145)<sub>3</sub>. Stoga se nejednakost (4.150) transformiše u

$$\frac{a_1}{a_2} \leq \frac{b_2}{b_3} \frac{\cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2} \right|} \frac{\sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}}{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2}},$$

predstavljajući suženu termodinamičku restrikciju (4.147)<sub>2</sub>, jer je  $\frac{\sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}}{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2}} \leq 1$  zbog  $\frac{(\nu-\beta)\pi}{2} \leq \pi - \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2}$  što se redukuje na  $\alpha + \nu \leq 1$ , videti (4.145)<sub>3</sub>.

Dakle, nenegativnost funkcije  $K$ , koja odgovara modelu I<sup>+</sup>ID.ID<sup>+</sup> i data je sa (4.148), se obezbeđuje zahtevanjem (4.146) i (4.147) pored (4.145) implicirajući da je moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, a funkcija puzanja Bernštajnova funkcija.

## 4.4 Numerički primeri

Termodinamičke i sužene termodinamičke restrikcije na parametre modela I<sup>+</sup>ID.ID, čija je konstitutivna jednačina

$$\left( a_1 {}_0I_t^{\alpha+\beta+\nu} + a_2 {}_0I_t^\nu + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta-\nu} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^\alpha + b_2 {}_0D_t^\beta \right) \varepsilon(t), \quad (4.151)$$

date su sledećim nejednakostima

$$0 \leq \alpha + \beta - \nu \leq 1, \quad 1 \leq \alpha + \beta + \nu \leq 2, \quad \alpha \leq \nu \leq 1 - \beta, \quad (4.152)$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \leq \frac{a_1}{a_2} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \frac{\left| \cos \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2}, \quad (4.153)$$

$$\frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}} \leq \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}}, \quad (4.154)$$

videti takođe poglavlje 4.3.2.3.

### 4.4.1 Moduo relaksacije za model I<sup>+</sup>ID.ID

Za moduo relaksacije modela I<sup>+</sup>ID.ID, datog sa (4.151), dobija se izraz

$$\tilde{\sigma}_{sr}(s) = \frac{1}{s^{1-(\beta+\nu)}} \frac{\phi_\varepsilon(s)}{\phi_\sigma(s)} = \frac{1}{s^{1-(\beta+\nu)}} \frac{b_1 + b_2 s^{\alpha+\beta}}{a_1 + a_2 s^{\alpha+\beta} + a_3 s^{2(\alpha+\beta)}} \quad (4.155)$$

u Laplasovom domenu, nakon primene Laplasove transformacije na konstitutivnu jednačinu (4.151), pri čemu je deformacija  $\varepsilon$  data kao Heavisajdova funkcija, videti takođe (4.13) i tabelu 6.5, te se nakon primene inverzne Laplasove transformacije na (4.155), prema (4.15), dobija moduo relaksacije za model I<sup>+</sup>ID.ID u vremenskom domenu kao

$$\sigma_{sr}(t) = \sigma_{sr}^{(NP)}(t) + \begin{cases} 0, & \text{ako } \tilde{\sigma}_{sr} \text{ nema polova,} \\ \sigma_{sr}^{(RP)}(t), & \text{ako } \tilde{\sigma}_{sr} \text{ ima negativan realan pol,} \\ \sigma_{sr}^{(CCP)}(t), & \text{ako } \tilde{\sigma}_{sr} \text{ ima par kompleksno konjugovanih polova,} \end{cases} \quad (4.156)$$

pri čemu su funkcije  $\sigma_{sr}^{(NP)}$ ,  $\sigma_{sr}^{(RP)}$  i  $\sigma_{sr}^{(CCP)}$  date sa

$$\begin{aligned}\sigma_{sr}^{(NP)}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^{1-(\beta+\nu)}} \frac{|b_1 + b_2 \rho^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\pi}|}{|a_1 + a_2 \rho^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\pi} + a_3 \rho^{2(\alpha+\beta)} e^{2i(\alpha+\beta)\pi}|} \\ &\quad \times \sin((\beta+\nu)\pi + \operatorname{arctg} \frac{b_2 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\alpha+\beta)\pi)}{b_1 + b_2 \rho^{\alpha+\beta} \cos((\alpha+\beta)\pi)}) \\ &\quad - \operatorname{arctg} \frac{a_2 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\alpha+\beta)\pi) + a_3 \rho^{2(\alpha+\beta)} \sin(2(\alpha+\beta)\pi)}{a_1 + a_2 \rho^{\alpha+\beta} \cos((\alpha+\beta)\pi) + a_3 \rho^{2(\alpha+\beta)} \cos(2(\alpha+\beta)\pi)} e^{-\rho t} d\rho, \end{aligned} \quad (4.157)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{sr}^{(NP)}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^{1-(\beta+\nu)}} \frac{K(\rho)}{|a_1 + a_2 \rho^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\pi} + a_3 \rho^{2(\alpha+\beta)} e^{2i(\alpha+\beta)\pi}|^2} e^{-\rho t} d\rho, \\ \sigma_{sr}^{(RP)}(t) &= -\rho_{RP}^{\beta-\mu} \frac{|b_1 + b_2 \rho_{RP}^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\pi}|}{(\alpha+\beta) |a_2 + 2a_3 \rho_{RP}^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\pi}|} \\ &\quad \times \cos((\beta+\nu)\pi + \operatorname{arctg} \frac{b_2 \rho_{RP}^{\alpha+\beta} \sin((\alpha+\beta)\pi)}{b_1 + b_2 \rho_{RP}^{\alpha+\beta} \cos((\alpha+\beta)\pi)}) \\ &\quad - \operatorname{arctg} \frac{a_2 \sin((\alpha+\beta)\pi) + 2a_3 \rho_{RP}^{\alpha+\beta} \sin(2(\alpha+\beta)\pi)}{a_2 \cos((\alpha+\beta)\pi) + 2a_3 \rho_{RP}^{\alpha+\beta} \cos(2(\alpha+\beta)\pi)} e^{-\rho_{RP} t}, \end{aligned} \quad (4.158)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{sr}^{(CCP)}(t) &= 2\rho_{CCP}^{\beta-\mu} \frac{|b_1 + b_2 \rho_{CCP}^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\varphi_{CCP}}|}{(\alpha+\beta) |a_2 + 2a_3 \rho_{CCP}^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\varphi_{CCP}}|} \\ &\quad \times e^{-|\operatorname{Re} s_{CCP}|t} \cos \left( \operatorname{Im} s_{CCP} t - (1 - (\beta+\nu)) \varphi_{CCP} + \operatorname{arctg} \frac{b_2 \rho_{CCP}^{\alpha+\beta} \sin((\alpha+\beta)\varphi_{CCP})}{b_1 + b_2 \rho_{CCP}^{\alpha+\beta} \cos((\alpha+\beta)\varphi_{CCP})} \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{arctg} \frac{a_2 \sin((1-(\alpha+\beta))\varphi_{CCP}) + 2a_3 \rho_{CCP}^{\alpha+\beta} \sin((1-2(\alpha+\beta))\varphi_{CCP})}{a_2 \cos((1-(\alpha+\beta))\varphi_{CCP}) + 2a_3 \rho_{CCP}^{\alpha+\beta} \cos((1-2(\alpha+\beta))\varphi_{CCP})} \right) \end{aligned} \quad (4.159)$$

prema (4.16), (4.19), (4.17) i (4.18) respektivno, sa

$$\phi_\varepsilon(s) = b_1 + b_2 s^{\alpha+\beta} \quad \text{i} \quad \phi_\sigma(s) = a_1 + a_2 s^{\alpha+\beta} + a_3 s^{2(\alpha+\beta)}, \quad (4.160)$$

gde je funkcija  $K$  definisana sa (4.20) i predstavljena izrazom (4.128), odnosno

$$\begin{aligned}K(\rho) &= a_1 b_1 \sin((\beta+\nu)\pi) + \rho^{\alpha+\beta} (a_1 b_2 \sin((\alpha+2\beta+\nu)\pi) + a_2 b_1 \sin((\nu-\alpha)\pi)) \\ &\quad + \rho^{2(\alpha+\beta)} (a_2 b_2 \sin((\beta+\nu)\pi) - a_3 b_1 \sin((2\alpha+\beta-\nu)\pi)) + \rho^{3(\alpha+\beta)} a_3 b_2 \sin((\nu-\alpha)\pi), \end{aligned} \quad (4.161)$$

i sa polovima modula relaksacije u Laplasovom domenu  $\rho_{RP} = -\sqrt[2(\alpha+\beta)]{\frac{a_1}{a_3}}$ , ako je  $\operatorname{tg}((\alpha+\beta)\pi) = -\sqrt{\frac{4a_1 a_3}{a_2^2} - 1}$   
 i  $s_{CCP} = \rho_{CCP} e^{i\varphi_{CCP}}$ , sa  $\rho_{CCP} = \sqrt[2(\alpha+\beta)]{\frac{a_1}{a_3}}$  i  $\varphi_{CCP} = \left(1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4a_1 a_3}{a_2^2} - 1}\right) \frac{\pi}{\alpha+\beta}$ , ako je  $\operatorname{tg}((\alpha+\beta)\pi) > -\sqrt{\frac{4a_1 a_3}{a_2^2} - 1}$ , dobijenim u poglavlju 4.2.4.3 kao nule funkcije  $\phi_\sigma$ , date sa (4.160)<sub>2</sub>, videti (4.55) i (4.56).

U slučaju razmatranog modela I<sup>+</sup>ID.ID, prema (4.155) se za asimptotsko ponašanje modula relaksacije u Laplasovom domenu dobija izraz

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{sr}(s) &= \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{1-(\nu-\alpha)}} \frac{1 + \frac{b_1}{b_2} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}}}{1 + \frac{a_2}{a_3} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} + \frac{a_1}{a_3} \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}}} \\ &= \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{1-(\nu-\alpha)}} \left(1 + \frac{b_1}{b_2} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}}\right) \left(1 + \frac{a_2}{a_3} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} + \frac{a_1}{a_3} \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}}\right)^{-1} \\ &= \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{1-(\nu-\alpha)}} \left(1 + \frac{b_1}{b_2} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}}\right) \left(1 - \frac{a_2}{a_3} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} + \left(-\frac{a_1}{a_3} + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2\right) \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}} + O(s^{-3(\alpha+\beta)})\right) \\ &= \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{1-(\nu-\alpha)}} \left(1 + \left(\frac{b_1}{b_2} - \frac{a_2}{a_3}\right) \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} + \left(\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2 - \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2}{a_3} \frac{b_1}{b_2}\right) \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}} + O(s^{-3(\alpha+\beta)})\right) \\ &= \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{1-(\nu-\alpha)}} + \frac{b_2}{a_3} \left(\frac{b_1}{b_2} - \frac{a_2}{a_3}\right) \frac{1}{s^{1+2\alpha+\beta-\nu}} \\ &\quad + \frac{b_2}{a_3} \left(\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2 - \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2}{a_3} \frac{b_1}{b_2}\right) \frac{1}{s^{1+3\alpha+2\beta-\nu}} + O(s^{-(1+4\alpha+3\beta-\nu)}), \quad \text{kada } s \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

implicirajući da je asimptotsko ponašanje modula relaksacije za vremena bliska nuli

$$\begin{aligned}\sigma_{sr}(t) &= \frac{b_2}{a_3} \frac{t^{-(\nu-\alpha)}}{\Gamma(1-(\nu-\alpha))} + \frac{b_2}{a_3} \left( \frac{b_1}{b_2} - \frac{a_2}{a_3} \right) \frac{t^{2\alpha+\beta-\nu}}{\Gamma(1+2\alpha+\beta-\nu)} \\ &+ \frac{b_2}{a_3} \left( \left( \frac{a_2}{a_3} \right)^2 - \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2 b_1}{a_3 b_2} \right) \frac{t^{3\alpha+2\beta-\nu}}{\Gamma(1+3\alpha+2\beta-\nu)} + O(t^{-(4\alpha+3\beta-\nu)}), \quad \text{kada } t \rightarrow 0,\end{aligned}\quad (4.162)$$

prema teoremi koja tvrdi da ako je  $\tilde{f}(s) \sim \tilde{g}(s)$  kada  $s \rightarrow \infty$ , tada je  $f(t) \sim g(t)$  kada  $t \rightarrow 0$ , dok asimptotsko ponašanje modula relaksacije za velika vremena

$$\sigma_{sr}(t) = \frac{b_1}{a_1} \frac{t^{-(\beta+\nu)}}{\Gamma(1-(\beta+\nu))} + O(t^{-(1-\delta)}), \quad \text{kada } t \rightarrow \infty, \quad (4.163)$$

sledi iz asimptotike modula relaksacije u Laplasovom domenu (4.155), dobijenom kao

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{sr}(s) &= \frac{b_1}{a_1} \frac{1}{s^{1-(\beta+\nu)}} \frac{1 + \frac{b_2}{b_1} s^{\alpha+\beta}}{1 + \frac{a_2}{a_1} s^{\alpha+\beta} + \frac{a_3}{a_1} s^{2(\alpha+\beta)}} \\ &= \frac{b_1}{a_1} \frac{1}{s^{1-(\beta+\nu)}} \left( 1 + \frac{b_2}{b_1} s^{\alpha+\beta} \right) \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} s^{\alpha+\beta} + \frac{a_3}{a_1} s^{2(\alpha+\beta)} \right)^{-1} \\ &= \frac{b_1}{a_1} \frac{1}{s^{1-(\beta+\nu)}} \left( 1 + \frac{b_2}{b_1} s^{\alpha+\beta} \right) \left( 1 - \frac{a_2}{a_1} s^{\alpha+\beta} + O(s^{2(\alpha+\beta)}) \right) \\ &= \frac{b_1}{a_1} \frac{1}{s^{1-(\beta+\nu)}} \left( 1 + \left( \frac{b_2}{b_1} - \frac{a_2}{a_1} \right) s^{\alpha+\beta} + O(s^{2(\alpha+\beta)}) \right) \\ &= \frac{b_1}{a_1} \frac{1}{s^{1-(\beta+\nu)}} + O(s^{-\delta}), \quad \text{kada } s \rightarrow 0,\end{aligned}$$

sa  $0 < \delta < 1 - (\beta + \nu)$ , jer je  $\alpha + 2\beta + \nu > 1$ , prema teoremi koja tvrdi da ako je  $\tilde{f}(s) \sim \tilde{g}(s)$  kada  $s \rightarrow 0$ , tada je  $f(t) \sim g(t)$  kada  $t \rightarrow \infty$ .

Slika 4.4 predstavlja vremensku evoluciju modula relaksacije za različite vrednosti parametara modela datih u tabeli 4.4, te je, u slučaju kada su parametri modela takvi da moduo relaksacije u Laplasovom domenu nema polova i dodatno zadovoljava sužene termodinamičke restrikcije (4.152) - (4.154), moduo relaksacije sa slike 4.4a, dobijen prema (4.156) sa funkcijom  $\sigma_{sr}^{(NP)}$  datom izrazom (4.157), kompletno monoton, dok kompletna monotonost modula relaksacije sa slike 4.4b, dobijenog prema (4.156) sa funkcijom  $\sigma_{sr}^{(RP)}$  datom sa (4.158), se ne može garantovati, iako deluje da jeste kompletno monoton, budući da parametri modela ne zadovoljavaju sužene termodinamičke restrikcije (4.152) - (4.154). Naime, sužene termodinamičke restrikcije impliciraju kompletну monotonost modula relaksacije, međutim obrnuta implikacija ne mora da važi. Slike 4.4c i 4.4d, dobijene prema (4.156) sa funkcijom  $\sigma_{sr}^{(CCP)}$  datom sa (4.159), predstavljaju oscilatorni moduo relaksacije koji ima amplitudu koja eksponencijalno opada sa vremenom, sa izraženim prigušenjem i negativnim naponom za određeni vremenski interval, međutim za veliko vreme napon je pozitivan i teži u nulu. Asimptotsko ponašanje modula relaksacije za mala i velika vremena, predstavljeni isprekidanim linijama na slici 4.4, sledi iz asimptotskih izraza (4.162) i (4.163) i dobro se poklapa sa vremenskim profilima, kao što se vidi sa svih grafika.

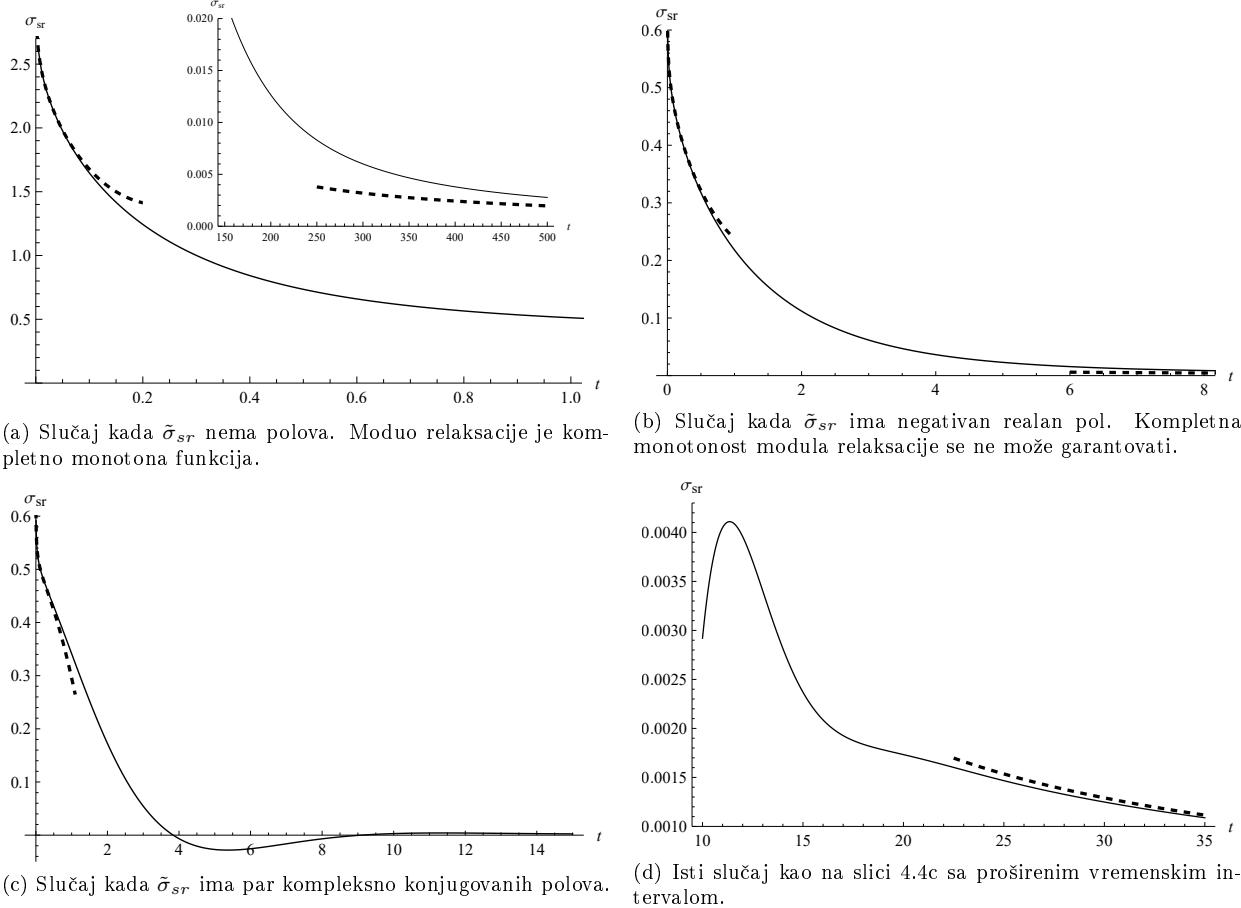
Slučaj kada $\tilde{\sigma}_{sr}$	$\alpha$	$\beta$	$\nu$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$
nema polova				0.05	1.5	0.45	0.7	0.95
ima negativan realan pol	0.35	0.55	0.4	11	28.4029...	20.27	7	9.5
ima par kompleksno konjugovanih polova				11	15	20.27	7	9.5

Tabela 4.4: Parametri modela korišćeni za numeričke primere.

#### 4.4.2 Funkcija puzanja za model I<sup>+</sup>ID.ID

Za funkciju puzanja modela I<sup>+</sup>ID.ID, datog sa (4.124), se dobija izraz

$$\tilde{\varepsilon}_{cr}(s) = \frac{1}{s^{1+\beta+\nu}} \frac{\phi_\sigma(s)}{\phi_\varepsilon(s)} = \frac{1}{s^{1+\beta+\nu}} \frac{a_1 + a_2 s^{\alpha+\beta} + a_3 s^{2(\alpha+\beta)}}{b_1 + b_2 s^{\alpha+\beta}} \quad (4.164)$$



Slika 4.4: Vremenski profili modula relaksacije, predstavljeni punom linijom, poređeni sa asimptotskim profilima za mala i velika vremena, predstavljenim isprekidanom linijom.

u Laplasovom domenu, nakon primene Laplasove transformacije na konstitutivnu jednačinu (4.151), u kojoj je napon  $\sigma$  dat kao Hevisajdova funkcija, videti takođe (4.14) i tabelu 6.5, te se nakon primene inverzne Laplasove transformacije na (4.164), prema (4.27), dobija funkcija puzanja za model I<sup>+</sup>ID.ID u vremenskom domenu

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cr}(t) = \varepsilon_{cr}^{(NP)}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^{1+\beta+\nu}} \frac{|a_1 + a_2 \rho^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\pi} + a_3 \rho^{2(\alpha+\beta)} e^{2i(\alpha+\beta)\pi}|}{|b_1 + b_2 \rho^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\pi}|} \\ &\times \sin \left( (\beta + \nu) \pi + \arctg \frac{b_2 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\alpha + \beta) \pi)}{b_1 + b_2 \rho^{\alpha+\beta} \cos((\alpha + \beta) \pi)} \right. \\ &\quad \left. - \arctg \frac{a_2 \rho^{\alpha+\beta} \sin((\alpha + \beta) \pi) + a_3 \rho^{2(\alpha+\beta)} \sin(2(\alpha + \beta) \pi)}{a_1 + a_2 \rho^{\alpha+\beta} \cos((\alpha + \beta) \pi) + a_3 \rho^{2(\alpha+\beta)} \cos(2(\alpha + \beta) \pi)} \right) (1 - e^{-\rho t}) d\rho, \end{aligned} \quad (4.165)$$

ili ekvivalentno

$$\varepsilon_{cr}(t) = \varepsilon_{cr}^{(NP)}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^{1+\beta+\nu}} \frac{K(\rho)}{|b_1 + b_2 \rho^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\pi}|^2} (1 - e^{-\rho t}) d\rho, \quad (4.166)$$

pri čemu je ekvivalentna forma funkcije  $\varepsilon_{cr}^{(NP)}$  data sa (4.28) i (4.31) i gde je funkcija  $K$  data sa (4.161), budući da funkcija  $\phi_\varepsilon$ , videti (4.160)<sub>1</sub>, nema nula u kompleksnoj ravni, implicirajući da funkcija puzanja u Laplasovom domenu nema polova.

Uместо izraza (4.165) i (4.166), zbog bolje numeričke konvergencije, pogodno je funkciju puzanja u Laplasovom domenu (4.164) transformisati u izraz

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) &= s \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) = \frac{1}{s^{\beta+\nu}} \left( \frac{a_1}{b_2} \frac{1}{s^{\alpha+\beta} + \frac{b_1}{b_2}} + \frac{a_3}{b_2} s^{\alpha+\beta} \frac{s^{\alpha+\beta} + \frac{a_2}{a_3}}{s^{\alpha+\beta} + \frac{b_1}{b_2}} \right) \\ &= \frac{a_3}{b_2} \frac{1}{s^{\nu-\alpha}} + \frac{a_3}{b_2} \left( \frac{a_2}{a_3} - \frac{b_1}{b_2} \right) \frac{1}{s^{\nu-\alpha}} \frac{1}{s^{\alpha+\beta} + \frac{b_1}{b_2}} + \frac{a_1}{b_2} \frac{1}{s^{\beta+\nu}} \frac{1}{s^{\alpha+\beta} + \frac{b_1}{b_2}}, \end{aligned}$$

koji za funkciju puzanja u vremenskom domenu daje

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cr}(t) &= \int_0^t \epsilon_{cr}(t') dt' \\ &= \frac{a_3}{b_2} \frac{t^{-(1-(\nu-\alpha))}}{\Gamma(\nu-\alpha)} + \frac{1}{\pi} \frac{a_3}{b_2} \left( \frac{a_2}{a_3} - \frac{b_1}{b_2} \right) \int_0^\infty \frac{1}{\rho^{1+\nu-\alpha}} \frac{\rho^{\alpha+\beta} \sin((\beta+\nu)\pi) + \frac{b_1}{b_2} \sin((\nu-\alpha)\pi)}{\left| \rho^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\pi} + \frac{b_1}{b_2} \right|^2} (1 - e^{-\rho t}) d\rho \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \frac{a_1}{b_2} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^{1+\beta+\nu}} \frac{\rho^{\alpha+\beta} \sin((\alpha+2\beta+\nu)\pi) + \frac{b_1}{b_2} \sin((\beta+\nu)\pi)}{\left| \rho^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\pi} + \frac{b_1}{b_2} \right|^2} (1 - e^{-\rho t}) d\rho, \end{aligned} \quad (4.167)$$

budući da definicija inverzne Laplasove transformacije (4.40), korišćena zajedno sa Košijevom integralnom teoremom (4.41), gde je kontura predstavljena na slici 4.1, implicira

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^\xi} \frac{1}{s^{\alpha+\beta} + \frac{b_1}{b_2}} \right] (t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^\xi} \frac{\rho^{\alpha+\beta} \sin((\alpha+\beta+\xi)\pi) + \frac{b_1}{b_2} \sin(\xi\pi)}{\left| \rho^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha+\beta)\pi} + \frac{b_1}{b_2} \right|^2} e^{-\rho t} d\rho.$$

Ekvivalentno, funkcija puzanja se takođe dobija preko dvoparametarske Mitag-Leflerove funkcije, videti (4.32), što je u slučaju modela I<sup>+</sup>ID.ID izraz

$$\varepsilon_{cr}(t) = \frac{a_1}{b_2} e_{\alpha+\beta, 1+\alpha+2\beta+\nu, \frac{b_1}{b_2}}(t) + \frac{a_2}{b_2} e_{\alpha+\beta, 1+\beta+\nu, \frac{b_1}{b_2}}(t) + \frac{a_3}{b_2} e_{\alpha+\beta, 1+\nu-\alpha, \frac{b_1}{b_2}}(t). \quad (4.168)$$

U slučaju razmatranog modela I<sup>+</sup>ID.ID asimptotsko ponašanje funkcije puzanja u Laplasovom domenu, prema (4.164), dato je izrazom

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{cr}(s) &= \frac{a_3}{b_2} \frac{1}{s^{1+\nu-\alpha}} \frac{1 + \frac{a_2}{a_3} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} + \frac{a_1}{a_3} \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}}}{1 + \frac{b_1}{b_2} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}}} \\ &= \frac{a_3}{b_2} \frac{1}{s^{1+\nu-\alpha}} \left( 1 + \frac{a_2}{a_3} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} + \frac{a_1}{a_3} \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}} \right) \left( 1 + \frac{b_1}{b_2} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} \right)^{-1} \\ &= \frac{a_3}{b_2} \frac{1}{s^{1+\nu-\alpha}} \left( 1 + \frac{a_2}{a_3} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} + \frac{a_1}{a_3} \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}} \right) \left( 1 - \frac{b_1}{b_2} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} + \left( \frac{b_1}{b_2} \right)^2 \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}} + O(s^{-3(\alpha+\beta)}) \right) \\ &= \frac{a_3}{b_2} \frac{1}{s^{1+\nu-\alpha}} \left( 1 + \left( \frac{a_2}{a_3} - \frac{b_1}{b_2} \right) \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} + \left( \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2}{a_3} \frac{b_1}{b_2} + \left( \frac{b_1}{b_2} \right)^2 \right) \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}} + O(s^{-3(\alpha+\beta)}) \right) \\ &= \frac{a_3}{b_2} \frac{1}{s^{1+\nu-\alpha}} + \frac{a_3}{b_2} \left( \frac{a_2}{a_3} - \frac{b_1}{b_2} \right) \frac{1}{s^{1+\beta+\nu}} \\ &\quad + \frac{a_3}{b_2} \left( \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2}{a_3} \frac{b_1}{b_2} + \left( \frac{b_1}{b_2} \right)^2 \right) \frac{1}{s^{1+\alpha+2\beta+\nu}} + O(s^{-(1+2\alpha+3\beta+\nu)}), \quad \text{kada } s \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

što za asimptotsko ponašanje funkcije puzanja za vremena bliska nuli implicira izraz

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cr}(t) &= \frac{a_3}{b_2} \frac{t^{\nu-\alpha}}{\Gamma(1+\nu-\alpha)} + \frac{a_3}{b_2} \left( \frac{a_2}{a_3} - \frac{b_1}{b_2} \right) \frac{t^{\beta+\nu}}{\Gamma(1+\beta+\nu)} \\ &\quad + \frac{a_3}{b_2} \left( \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2}{a_3} \frac{b_1}{b_2} + \left( \frac{b_1}{b_2} \right)^2 \right) \frac{t^{\alpha+2\beta+\nu}}{\Gamma(1+\alpha+2\beta+\nu)} + O(t^{2\alpha+3\beta+\nu}), \quad \text{kada } t \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (4.169)$$

dok asimptotsko ponašanje funkcije puzanja za velika vremena

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cr}(t) &= \frac{a_1}{b_1} \frac{t^{\beta+\nu}}{\Gamma(1+\beta+\nu)} + \frac{a_1}{b_1} \left( \frac{a_2}{a_1} - \frac{b_2}{b_1} \right) \frac{t^{\nu-\alpha}}{\Gamma(1+\nu-\alpha)} \\ &\quad + \frac{a_1}{b_1} \left( \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} \frac{b_2}{b_1} + \left( \frac{b_2}{b_1} \right)^2 \right) \frac{t^{-2\alpha-\beta+\nu}}{\Gamma(1-2\alpha-\beta+\nu)} + O(t^{-\xi}), \quad \text{kada } t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.170)$$

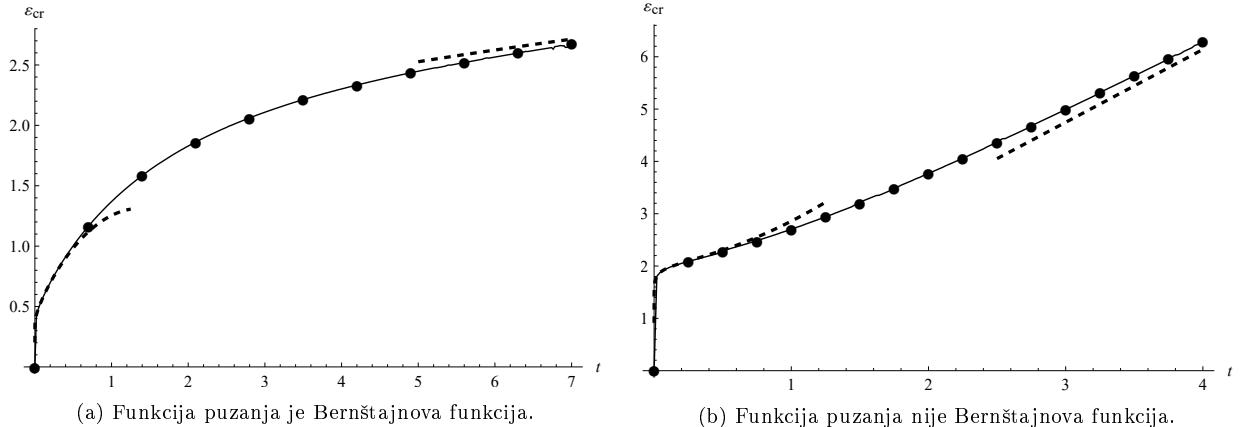
sledi iz asimptotike funkcije puzanja u Laplasovom domenu, dobijene kao

$$\tilde{\varepsilon}_{cr}(s) = \frac{a_1}{b_1} \frac{1}{s^{1+\beta+\nu}} \frac{1 + \frac{a_2}{a_1} s^{\alpha+\beta} + \frac{a_3}{a_2} s^{2(\alpha+\beta)}}{1 + \frac{b_2}{b_1} s^{\alpha+\beta}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a_1}{b_1} \frac{1}{s^{1+\beta+\nu}} \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} s^{\alpha+\beta} + \frac{a_3}{a_1} s^{2(\alpha+\beta)} \right) \left( 1 + \frac{b_2}{b_1} s^{\alpha+\beta} \right)^{-1} \\
 &= \frac{a_1}{b_1} \frac{1}{s^{1+\beta+\nu}} \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} s^{\alpha+\beta} + \frac{a_3}{a_1} s^{2(\alpha+\beta)} \right) \left( 1 - \frac{b_2}{b_1} s^{\alpha+\beta} + \left( \frac{b_2}{b_1} \right)^2 s^{2(\alpha+\beta)} + O(s^{3(\alpha+\beta)}) \right) \\
 &= \frac{a_1}{b_1} \frac{1}{s^{1+\beta+\nu}} \left( 1 + \left( \frac{a_2}{a_1} - \frac{b_2}{b_1} \right) s^{\alpha+\beta} + \left( \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} + \left( \frac{b_2}{b_1} \right)^2 \right) s^{2(\alpha+\beta)} + O(s^{3(\alpha+\beta)}) \right) \\
 &= \frac{a_1}{b_1} \frac{1}{s^{1+\beta+\nu}} + \frac{a_1}{b_1} \left( \frac{a_2}{a_1} - \frac{b_2}{b_1} \right) \frac{1}{s^{1+\nu-\alpha}} \\
 &\quad + \frac{a_1}{b_1} \left( \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} + \left( \frac{b_2}{b_1} \right)^2 \right) \frac{1}{s^{1-2\alpha-\beta+\nu}} + O(s^{-(1-\xi)}), \quad \text{kada } s \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

sa  $\xi \in (0, 1)$ .

Slika 4.5 predstavlja vremensku evoluciju funkcije puzanja za različite vrednosti parametara modela, tako da se funkcija puzanja sa slike 4.5a dobija prema (4.167) za isti set parametara kao moduo relaksacije sa slike 4.4a, i predstavlja Bernštajnovu funkciju, dok funkcija puzanja sa slike 4.5b, koja se dobija za isti set parametara iz tabele 4.4 za koji funkcija  $\tilde{\sigma}_{sr}$  ima par kompleksno konjugovanih polova, očigledno nije Bernštajnova funkcija, budući da je konveksna, a ne konkavna funkcija. Grafici funkcije puzanja sa slike 4.5, dobijene prema integralnoj reprezentaciji (4.167), se odlično poklapaju sa graficima funkcije puzanja predstavljenim tačkama, koje odgovaraju Mitag-Lefflerovoj reprezentaciji (4.168) funkcije puzanja. Konačno, izrazi za asimptotsko ponašanje za mala i velika vremena funkcije puzanja (4.169) i (4.170) generišu krive koje pokazuju zadovoljavajuće preklapanje sa krivama funkcije puzanja.



Slika 4.5: Vremenski profili funkcije puzanja, predstavljeni punom linijom i tačkama, poređeni sa asimptotskim profilima za mala i velika vremena, predstavljenim isprekidanom linijom.



# 5. Energija i snaga disipacije u kvazistacionarnom stanju

U cilju analize ekvivalencije dvaju oblika energije i snage disipacije po jedinici zapremine, kao i ekvivalencije dvaju oblika snage po jedinici zapremine, predstavljenih u poglavlju 4.1 preko modula relaksacije i funkcije puzanja, deformacija, kao pobuda viskoelastičnog tela modeliranog termodinamički konzistentnim frakcionim Cenerovim i anti-Cenerovim modelima, pretpostavljena je u obliku harmonijske funkcije, a određen je napon kao odziv na tako pretpostavljenu deformaciju. Takođe je ispitana vremenska evolucija napona u smislu prelaza iz tranzijentnog u kvazistacionarni režim.

Disipacija energije u viskoelastičnim sredinama Beselovog tipa, termodinamička konzistentnost talasne jednačine i zahtevi koji obezbeđuju kompletну monotonost, kao i analiza Cenerove talasne jednačine su predstavljeni u [69, 70, 71, 72].

## 5.1 Tranzijentni odziv i kvazistacionarni režim

Napon kao odziv na zadatu harmonijsku deformaciju je određen u tranzijentnom i kvazistacionarnom režimu, gde se pod tranzijentnim režimom podrazumeva vremenska evolucija, u konkretnom slučaju napona, počevši od početnog trenutka kao odziv na proizvoljnu pobudu, dok se pod kvazistacionarnim režimom podrazumeva harmonijski odziv na harmonijsku pobudu ustaljen posle dovoljno dugo vremena.

### 5.1.1 Tranzijentni odziv na harmonijsku pobudu

Pretpostavljajući da je viskoelastično telo, modelirano frakcionim Cenerovim i anti-Cenerovim modelima, predstavljenim u tabeli 2.1, videti takođe dodatak A.3, podvrgnuto deformaciji kao pobudi zadatoj u obliku harmonijske funkcije

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t), \quad (5.1)$$

sa konstantnom amplitudom  $\varepsilon_0$  i ugaonom frekvencijom  $\omega$ , određuje se napon, indukovani u telu kao odziv u prelaznom režimu. Polazeći od izraza (4.12) za konstitutivnu vezu između napona i deformacije u Laplasovom domenu, sa konstitutivnim parametrom  $\xi$  i funkcijama  $\phi_\varepsilon$  i  $\phi_\sigma$  datim u tabeli 6.5, za napon u Laplasovom domenu se dobija

$$\tilde{\sigma}(s) = \varepsilon_0 s^\xi \frac{\phi_\varepsilon(s)}{\phi_\sigma(s)} \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad (5.2)$$

nakon Laplasove transformacije kosinusne funkcije u harmonijskoj pobudi, dato sa (5.1).

Napon u vremenskom domenu kao odziv na zadatu harmonijsku deformaciju, nakon primene inverzne Laplasove transformacije u (5.2), dobija se kao

$$\sigma(t) = \sigma^{(V)}(t) + \sigma^{(H)}(t) + \begin{cases} 0, & \text{ako } \phi_\sigma \text{ nema nula,} \\ \sigma^{(RP)}(t), & \text{ako } \phi_\sigma \text{ ima negativnu realnu nulu,} \\ \sigma^{(CCP)}(t), & \text{ako } \phi_\sigma \text{ ima par kompleksno konjugovanih nula,} \end{cases} \quad (5.3)$$

sa funkcijama koje se pojavljuju u (5.3) definisanim izrazima

$$\sigma^{(V)}(t) = \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{K(\rho)}{|\phi_\sigma(\rho e^{i\pi})|^2} \frac{\rho^{1+\xi}}{\rho^2 + \omega^2} e^{-\rho t} d\rho, \quad \text{ili} \quad (5.4)$$

$$\sigma^{(V)}(t) = \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{|\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi})|}{|\phi_\sigma(\rho e^{i\pi})|} \sin(\arg \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) - \arg \phi_\sigma(\rho e^{i\pi}) + \xi\pi) \frac{\rho^{1+\xi}}{\rho^2 + \omega^2} e^{-\rho t} d\rho, \quad (5.5)$$

$$\sigma^{(H)}(t) = \varepsilon_0 |\hat{E}(\omega)| \cos\left(\omega t + \arg\phi_\varepsilon(i\omega) - \arg\phi_\sigma(i\omega) + \frac{\xi\pi}{2}\right), \text{ sa } |\hat{E}(\omega)| = \omega^\xi \frac{|\phi_\varepsilon(i\omega)|}{|\phi_\sigma(i\omega)|}, \quad (5.6)$$

$$\sigma^{(RP)}(t) = -\varepsilon_0 \frac{|\phi_\varepsilon(s_{RP})|}{|\phi'_\sigma(s_{RP})|} \cos(\arg\phi_\varepsilon(s_{RP}) - \arg\phi'_\sigma(s_{RP}) + \xi\pi) \frac{\rho_{RP}^{1+\xi}}{\rho_{RP}^2 + \omega^2} e^{-\rho_{RP}t}, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(CCP)}(t) &= 2\varepsilon_0 \frac{|\phi_\varepsilon(s_{CCP})|}{|\phi'_\sigma(s_{CCP})|} \frac{\rho_{CCP}^{1+\xi}}{|s_{CCP}^2 + \omega^2|} e^{-|\operatorname{Re}s_{CCP}|t} \\ &\times \cos(\operatorname{Im}s_{CCP}t + \arg\phi_\varepsilon(s_{CCP}) - \arg\phi'_\sigma(s_{CCP}) + (1+\xi)\varphi_{CCP} - \phi(\omega)), \end{aligned} \quad (5.8)$$

gde je funkcija  $K$  data izrazom (4.20) dok je  $\phi'_\sigma(s) = \frac{d}{ds}\phi_\sigma(s)$  i pri čemu je  $s_{RP} = \rho_{RP}e^{i\pi}$  negativna realna nula funkcije  $\phi_\sigma$ , dok su  $s_{CCP} = \rho_{CCP}e^{i\varphi_{CCP}}$  i njemu kompleksno konjugovan  $\bar{s}_{CCP}$  kompleksne nule funkcije  $\phi_\sigma$  koje imaju negativan realni deo, sa

$$\operatorname{ctg}\phi(\omega) = \operatorname{ctg}(2\varphi_{CCP}) + \frac{\omega^2}{\rho_{CCP}^2 \sin(2\varphi_{CCP})}. \quad (5.9)$$

Funkcija  $\sigma^{(V)}$  je kompletno monotona, tj. zadovoljava

$$\sigma^{(V)}(t) \geq 0 \quad \text{i} \quad (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \dot{\sigma}^{(V)}(t) \leq 0, \quad \text{za } t > 0, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

ako je  $K(\rho) \geq 0$ , videti (4.20), tj. ako je  $\sin(\arg\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) - \arg\phi_\sigma(\rho e^{i\pi}) + \xi\pi) \geq 0$ , dok ako je  $K(\rho) < 0$ , tj. ako je  $\sin(\arg\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) - \arg\phi_\sigma(\rho e^{i\pi}) + \xi\pi) < 0$ , tada je funkcija  $\sigma^{(V)}$  u najnepovoljnijem slučaju nemonotona, međutim uvek teži u nulu. Funkcija  $\sigma^{(H)}$  je oscilatorna funkcija sa ugaonom frekvencijom  $\omega$  jednakom frekvenciji primjene harmonijske deformacije, videti (5.1), i fazno je pomerena, zavisno od parametara modela, videti (5.6). Funkcija  $\sigma^{(RP)}$  je ili pozitivna eksponencijalno opadajuća funkcija koja teži u nulu, ili negativna eksponencijalno rastuća funkcija koja takođe teži u nulu, sa vremenskom konstantom  $\rho_{RP}$ , dobijenom kao negativnom realnom nulom funkcije  $\phi_\sigma$ , videti (5.7), dok je funkcija  $\sigma^{(CCP)}$  oscilatorna funkcija sa eksponencijalno opadajućom amplitudom i ugaonom frekvencijom definisanom imaginarnim delom kompleksne nule funkcije  $\phi_\sigma$ , tj. sa  $\operatorname{Im}s_{CCP}$ , i parametrom prigušenja definisanim kao realni deo kompleksne nule funkcije  $\phi_\sigma$ , tj. sa  $|\operatorname{Re}s_{CCP}|$ , videti (5.8).

Napon u obliku (5.3), koji sadrži funkcije date sa (5.4) - (5.8), dobija se primenom definicije inverzne Laplasove transformacije

$$\sigma(t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{\sigma}(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds, \quad (5.10)$$

i Košijeve teoreme o reziduumima, sa integracijom ili duž konture  $\Gamma^{(I)}$ , označene na slici 4.1, dajući

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^{(I)}} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds &= \operatorname{Res}(\tilde{\sigma}(s) e^{st}, i\omega) + \operatorname{Res}(\tilde{\sigma}(s) e^{st}, -i\omega) \\ &+ \begin{cases} 0, & \text{ako } \phi_\sigma \text{ nema nula,} \\ \operatorname{Res}(\tilde{\sigma}(s) e^{st}, s_{CCP}) + \operatorname{Res}(\tilde{\sigma}(s) e^{st}, \bar{s}_{CCP}), & \text{ako } \phi_\sigma \text{ ima } s_{CCP} \text{ i } \bar{s}_{CCP} \text{ kao nule,} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.11)$$

ili duž konture  $\Gamma^{(II)}$ , označene na slici 4.2, dajući

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^{(II)}} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds = \operatorname{Res}(\tilde{\sigma}(s) e^{st}, i\omega) + \operatorname{Res}(\tilde{\sigma}(s) e^{st}, -i\omega), \quad (5.12)$$

ako  $\phi_\sigma$  ima negativnu realnu nulu  $s_{RP} = -\rho_{RP}$ , jer pored mogućnosti da funkcija  $\tilde{\sigma}$ , videti (5.2), ima negativan realan pol  $s_{RP}$  ili par kompleksno konjugovanih polova  $s_{CCP}$  i  $\bar{s}_{CCP}$ , koji predstavljaju nule funkcije  $\phi_\sigma$ , funkcija  $\tilde{\sigma}$  dodatno ima dva pola, naime  $\pm i\omega$ , koji potiču od kosinusne funkcije u Laplasovom domenu.

Košijeve teoreme o reziduumima (5.11) i (5.12), sa integralima koji imaju nenulti doprinos u limesu kada  $r \rightarrow 0$  i  $R \rightarrow \infty$ , postaju sledeći izrazi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_5} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds \\ = \sigma^{(H)}(t) + \begin{cases} 0, & \text{ako } \phi_\sigma \text{ nema nula,} \\ \sigma^{(CCP)}(t), & \text{ako } \phi_\sigma \text{ ima } s_{CCP} \text{ i } \bar{s}_{CCP} \text{ kao nule,} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.13)$$

i

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_8} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_9} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds = \sigma^{(H)}(t), \quad (5.14)$$

pri čemu funkcije  $\sigma^{(H)}$  i  $\sigma^{(CCP)}$  potiču od reziduumu u izrazima (5.13) i (5.14), tako da je

$$\sigma^{(H)}(t) = \text{Res}(\tilde{\sigma}(s) e^{st}, \omega e^{i\frac{\pi}{2}}) + \text{Res}(\tilde{\sigma}(s) e^{st}, \omega e^{-i\frac{\pi}{2}}) \quad i \quad (5.15)$$

$$\sigma^{(CCP)}(t) = \text{Res}(\tilde{\sigma}(s) e^{st}, s_{CCP}) + \text{Res}(\tilde{\sigma}(s) e^{st}, \bar{s}_{CCP}). \quad (5.16)$$

Košijeve teoreme o reziduumima (5.13) i (5.14) mogu se transformisati u sledeće izraze

$$\sigma(t) - \sigma^{(V)}(t) = \sigma^{(H)}(t) + \begin{cases} 0, & \text{ako } \phi_\sigma \text{ nema nula,} \\ \sigma^{(CCP)}(t), & \text{ako } \phi_\sigma \text{ ima } s_{CCP} \text{ i } \bar{s}_{CCP} \text{ kao nule,} \end{cases}$$

i, ako  $\phi_\sigma$  ima negativnu realnu nulu, u

$$\sigma(t) - \sigma^{(V)}(t) - \sigma^{(RP)}(t) = \sigma^{(H)}(t),$$

u limesu kada  $r \rightarrow 0$  i  $R \rightarrow \infty$ , sa

$$\sigma(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_0} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds,$$

zbog inverzne Laplasove transformacije (5.10), kao i sa funkcijama  $\sigma^{(V)}$  i  $\sigma^{(RP)}$ , definisanim sa

$$\sigma^{(V)}(t) = - \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3, \Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_5, \Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds \right) \quad i \quad (5.17)$$

$$\sigma^{(RP)}(t) = - \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_8} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_9} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds \right). \quad (5.18)$$

Funkcija  $\sigma^{(H)}$ , definisana sa (5.15), dobija se kao

$$\begin{aligned} \sigma^{(H)}(t) &= \text{Res}(\tilde{\sigma}(s) e^{st}, \omega e^{i\frac{\pi}{2}}) + \text{Res}(\tilde{\sigma}(s) e^{st}, \omega e^{-i\frac{\pi}{2}}) \\ &= \varepsilon_0 (\omega e^{i\frac{\pi}{2}})^\xi \frac{\phi_\varepsilon(\omega e^{i\frac{\pi}{2}})}{\phi_\sigma(\omega e^{i\frac{\pi}{2}})} \frac{s}{\frac{d}{ds}(s^2 + \omega^2)} \Big|_{s=\omega e^{i\frac{\pi}{2}}} e^{\omega e^{i\frac{\pi}{2}} t} \\ &\quad + \varepsilon_0 (\omega e^{-i\frac{\pi}{2}})^\xi \frac{\phi_\varepsilon(\omega e^{-i\frac{\pi}{2}})}{\phi_\sigma(\omega e^{-i\frac{\pi}{2}})} \frac{s}{\frac{d}{ds}(s^2 + \omega^2)} \Big|_{s=\omega e^{-i\frac{\pi}{2}}} e^{\omega e^{-i\frac{\pi}{2}} t} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \omega^\xi \frac{\phi_\varepsilon(\omega e^{i\frac{\pi}{2}})}{\phi_\sigma(\omega e^{i\frac{\pi}{2}})} e^{i\frac{\xi\pi}{2}} e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \omega^\xi \frac{\phi_\varepsilon(\omega e^{-i\frac{\pi}{2}})}{\phi_\sigma(\omega e^{-i\frac{\pi}{2}})} e^{-i\frac{\xi\pi}{2}} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \omega^\xi \frac{|\phi_\varepsilon(\omega e^{i\frac{\pi}{2}})|}{|\phi_\sigma(\omega e^{i\frac{\pi}{2}})|} \left( \frac{e^{i \arg \phi_\varepsilon(\omega e^{i\frac{\pi}{2}})}}{e^{i \arg \phi_\sigma(\omega e^{i\frac{\pi}{2}})}} e^{i\frac{\xi\pi}{2}} e^{i\omega t} + e^{-i\frac{\xi\pi}{2}} \frac{e^{i \arg \phi_\varepsilon(\omega e^{-i\frac{\pi}{2}})}}{e^{i \arg \phi_\sigma(\omega e^{-i\frac{\pi}{2}})}} e^{-i\omega t} \right) \\ &= \varepsilon_0 \omega^\xi \frac{|\phi_\varepsilon(\omega e^{i\frac{\pi}{2}})|}{|\phi_\sigma(\omega e^{i\frac{\pi}{2}})|} \cos \left( \omega t + \arg \phi_\varepsilon(\omega e^{i\frac{\pi}{2}}) - \arg \phi_\sigma(\omega e^{i\frac{\pi}{2}}) + \frac{\xi\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

videti takođe (5.6), jer su  $\pm i\omega$  polovi funkcije  $\tilde{\sigma}$ , date sa (5.2), dok se funkcija  $\sigma^{(CCP)}$ , definisana sa (5.16), dobija kao

$$\begin{aligned} \sigma^{(CCP)}(t) &= \text{Res}(\tilde{\sigma}(s) e^{st}, s_{CCP}) + \text{Res}(\tilde{\sigma}(s) e^{st}, \bar{s}_{CCP}) \\ &= \varepsilon_0 s_{CCP}^\xi \frac{\phi_\varepsilon(s_{CCP})}{\phi'_\sigma(s_{CCP})} \frac{s_{CCP}}{s_{CCP}^2 + \omega^2} e^{s_{CCP} t} + \varepsilon_0 \bar{s}_{CCP}^\xi \frac{\phi_\varepsilon(\bar{s}_{CCP})}{\phi'_\sigma(\bar{s}_{CCP})} \frac{\bar{s}_{CCP}}{\bar{s}_{CCP}^2 + \omega^2} e^{\bar{s}_{CCP} t} \\ &= \varepsilon_0 \frac{|\phi_\varepsilon(s_{CCP})|}{|\phi'_\sigma(s_{CCP})|} \frac{\rho_{CCP}^{1+\xi}}{|s_{CCP}^2 + \omega^2|^2} e^{\operatorname{Re} s_{CCP} t} \\ &\quad \times \left( \frac{e^{i \arg \phi_\varepsilon(s_{CCP})}}{e^{i \arg \phi'_\sigma(s_{CCP})}} (\rho_{CCP}^2 e^{-2i\varphi_{CCP}} + \omega^2) e^{i(1+\xi)\varphi_{CCP}} e^{i \operatorname{Im} s_{CCP} t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-i \arg \phi_\varepsilon(s_{CCP})}}{e^{-i \arg \phi'_\sigma(s_{CCP})}} (\rho_{CCP}^2 e^{2i\varphi_{CCP}} + \omega^2) e^{-i(1+\xi)\varphi_{CCP}} e^{-i \operatorname{Im} s_{CCP} t} \right) \\ &= 2\varepsilon_0 \frac{|\phi_\varepsilon(s_{CCP})|}{|\phi'_\sigma(s_{CCP})|} \frac{\rho_{CCP}^{1+\xi}}{|s_{CCP}^2 + \omega^2|^2} e^{\operatorname{Re} s_{CCP} t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left( \rho_{\text{CCP}}^2 \cos(\operatorname{Im} s_{\text{CCP}} t + \arg \phi_\varepsilon(s_{\text{CCP}}) - \arg \phi'_\sigma(s_{\text{CCP}}) + (1 + \xi) \varphi_{\text{CCP}} - 2\varphi_{\text{CCP}}) \right. \\
 & \quad \left. + \omega^2 \cos(\operatorname{Im} s_{\text{CCP}} t + \arg \phi_\varepsilon(s_{\text{CCP}}) - \arg \phi'_\sigma(s_{\text{CCP}}) + (1 + \xi) \varphi_{\text{CCP}}) \right) \\
 = & 2\varepsilon_0 \frac{|\phi_\varepsilon(s_{\text{CCP}})|}{|\phi'_\sigma(s_{\text{CCP}})|} \frac{\rho_{\text{CCP}}^{1+\xi}}{|s_{\text{CCP}}^2 + \omega^2|^2} e^{\operatorname{Re} s_{\text{CCP}} t} \\
 & \times \left( (\rho_{\text{CCP}}^2 \cos(2\varphi_{\text{CCP}}) + \omega^2) \cos(\operatorname{Im} s_{\text{CCP}} t + \arg \phi_\varepsilon(s_{\text{CCP}}) - \arg \phi'_\sigma(s_{\text{CCP}}) + (1 + \xi) \varphi_{\text{CCP}}) \right. \\
 & \quad \left. + \rho_{\text{CCP}}^2 \sin(2\varphi_{\text{CCP}}) \sin(\operatorname{Im} s_{\text{CCP}} t + \arg \phi_\varepsilon(s_{\text{CCP}}) - \arg \phi'_\sigma(s_{\text{CCP}}) + (1 + \xi) \varphi_{\text{CCP}}) \right), \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

budući da su  $s_{\text{CCP}} = \rho_{\text{CCP}} e^{i\varphi_{\text{CCP}}}$  i  $\bar{s}_{\text{CCP}} = \rho_{\text{CCP}} e^{-i\varphi_{\text{CCP}}}$  polovi funkcije  $\tilde{\sigma}$ , date sa (5.2), koji potiču od nula funkcije  $\phi_\sigma$ , te se

$$\begin{aligned}
 \sigma^{(\text{CCP})}(t) = & 2\varepsilon_0 \frac{|\phi_\varepsilon(s_{\text{CCP}})|}{|\phi'_\sigma(s_{\text{CCP}})|} \frac{\rho_{\text{CCP}}^{1+\xi}}{|s_{\text{CCP}}^2 + \omega^2|^2} e^{-|\operatorname{Re} s_{\text{CCP}}|t} \\
 & \times \cos(\operatorname{Im} s_{\text{CCP}} t + \arg \phi_\varepsilon(s_{\text{CCP}}) - \arg \phi'_\sigma(s_{\text{CCP}}) + (1 + \xi) \varphi_{\text{CCP}} - \phi(\omega)),
 \end{aligned}$$

videti (5.8), dobija korišćenjem smene

$$\begin{aligned}
 A(\omega) \cos \phi(\omega) &= \rho_{\text{CCP}}^2 \cos(2\varphi_{\text{CCP}}) + \omega^2, \\
 A(\omega) \sin \phi(\omega) &= \rho_{\text{CCP}}^2 \sin(2\varphi_{\text{CCP}}),
 \end{aligned}$$

t.j.

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= |s_{\text{CCP}}^2 + \omega^2| = \sqrt{\rho_{\text{CCP}}^4 + 2\rho_{\text{CCP}}^2 \omega^2 \cos(2\varphi_{\text{CCP}}) + \omega^4}, \\
 \operatorname{ctg} \phi(\omega) &= \operatorname{ctg}(2\varphi_{\text{CCP}}) + \frac{\omega^2}{\rho_{\text{CCP}}^2 \sin(2\varphi_{\text{CCP}})}
 \end{aligned}$$

u izrazu (5.19).

Funkcija  $\sigma^{(\text{V})}$ , definisana sa (5.17), koja predstavlja doprinos integrala duž kontura  $\Gamma_3$  i  $\Gamma_5$  u (5.13), kao i integrala duž kontura  $\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}$  i  $\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}$  u (5.14), koje respektivno pripadaju konturama  $\Gamma^{(\text{I})}$  i  $\Gamma^{(\text{II})}$ , označenim na slikama 4.1 i 4.2, u limesu kada  $r \rightarrow 0$  i  $R \rightarrow \infty$ , dobija se kao

$$\begin{aligned}
 \sigma^{(\text{V})}(t) = & - \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3, \Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_5, \Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds \right) \\
 = & -\frac{\varepsilon_0}{2\pi i} \left( \int_{\infty}^0 \rho^\xi e^{i\xi\pi} \frac{\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi})}{\phi'_\sigma(\rho e^{i\pi})} \frac{\rho e^{i\pi}}{\rho^2 e^{2i\pi} + \omega^2} e^{\rho t e^{i\pi}} e^{i\pi} d\rho + \int_0^\infty \rho^\xi e^{-i\xi\pi} \frac{\phi_\varepsilon(\rho e^{-i\pi})}{\phi'_\sigma(\rho e^{-i\pi})} \frac{\rho e^{-i\pi}}{\rho^2 e^{-2i\pi} + \omega^2} e^{\rho t e^{-i\pi}} e^{-i\pi} d\rho \right) \\
 = & \frac{\varepsilon_0}{2\pi i} \int_0^\infty \left( e^{i\xi\pi} \frac{\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi})}{\phi'_\sigma(\rho e^{i\pi})} - e^{-i\xi\pi} \frac{\phi_\varepsilon(\rho e^{-i\pi})}{\phi'_\sigma(\rho e^{-i\pi})} \right) \frac{\rho^{1+\xi}}{\rho^2 + \omega^2} e^{-\rho t} d\rho \\
 = & \frac{\varepsilon_0}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{|\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi})|}{|\phi'_\sigma(\rho e^{i\pi})|} \left( e^{i\xi\pi} \frac{e^{i\arg \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi})}}{e^{i\arg \phi'_\sigma(\rho e^{i\pi})}} - e^{-i\xi\pi} \frac{e^{i\arg \phi_\varepsilon(\rho e^{-i\pi})}}{e^{i\arg \phi'_\sigma(\rho e^{-i\pi})}} \right) \frac{\rho^{1+\xi}}{\rho^2 + \omega^2} e^{-\rho t} d\rho \\
 = & \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{|\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi})|}{|\phi'_\sigma(\rho e^{i\pi})|} \sin(\arg \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) - \arg \phi'_\sigma(\rho e^{i\pi}) + \xi\pi) \frac{\rho^{1+\xi}}{\rho^2 + \omega^2} e^{-\rho t} d\rho \quad \text{t.j.} \\
 = & \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{K(\rho)}{|\phi'_\sigma(\rho e^{i\pi})|^2} \frac{\rho^{1+\xi}}{\rho^2 + \omega^2} e^{-\rho t} d\rho,
 \end{aligned}$$

videti izraz (4.20) za funkciju  $K$  i takođe (5.4) i (5.5), dok se doprinos integrala duž kontura  $\Gamma_8$  i  $\Gamma_9$ , koje okružuju nule  $s_{\text{RP}} = \rho_{\text{RP}} e^{i\pi}$  i  $\bar{s}_{\text{RP}} = \rho_{\text{RP}} e^{-i\pi}$  funkcije  $\phi_\sigma$  i pripadaju konturi  $\Gamma^{(\text{II})}$  označenoj na slici 4.2, dobija kao

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_8} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_9} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds \\
 = & \varepsilon_0 \int_{\pi}^0 (s_{\text{RP}} + r e^{i\varphi})^\xi \frac{\phi_\varepsilon(s_{\text{RP}} + r e^{i\varphi})}{\phi'_\sigma(s_{\text{RP}} + r e^{i\varphi})} \frac{s_{\text{RP}} + r e^{i\varphi}}{(s_{\text{RP}} + r e^{i\varphi})^2 + \omega^2} e^{(s_{\text{RP}} + r e^{i\varphi})t} i r e^{i\varphi} d\varphi \\
 & + \varepsilon_0 \int_0^{-\pi} (s_{\text{RP}} + r e^{i\varphi})^\xi \frac{\phi_\varepsilon(\bar{s}_{\text{RP}} + r e^{i\varphi})}{\phi'_\sigma(\bar{s}_{\text{RP}} + r e^{i\varphi})} \frac{\bar{s}_{\text{RP}} + r e^{i\varphi}}{(\bar{s}_{\text{RP}} + r e^{i\varphi})^2 + \omega^2} e^{(\bar{s}_{\text{RP}} + r e^{i\varphi})t} i r e^{i\varphi} d\varphi,
 \end{aligned}$$

dajući, u limesu kada  $r \rightarrow 0$  u prethodnom izrazu, funkciju  $\sigma^{(\text{RP})}$ , definisanu sa (5.18), u obliku

$$\begin{aligned}\sigma^{(\text{RP})}(t) &= -\lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_8} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_9} \tilde{\sigma}(s) e^{st} ds \right) \\ &= -\frac{\varepsilon_0}{2\pi i} \\ &\quad \lim_{r \rightarrow 0} \left( \int_{\pi}^0 \frac{\phi_{\varepsilon}(s_{\text{RP}} + re^{i\varphi})}{\phi_{\sigma}(s_{\text{RP}}) + \phi'_{\sigma}(s)(s - s_{\text{RP}})} \Big|_{s=s_{\text{RP}}+re^{i\varphi}} + \dots \frac{(s_{\text{RP}} + re^{i\varphi})^{1+\xi}}{(s_{\text{RP}} + re^{i\varphi})^2 + \omega^2} e^{(s_{\text{RP}} + re^{i\varphi})t} ire^{i\varphi} d\varphi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{-\pi} \frac{\phi_{\varepsilon}(\bar{s}_{\text{RP}} + re^{i\varphi})}{\phi_{\sigma}(\bar{s}_{\text{RP}}) + \phi'_{\sigma}(s)(s - \bar{s}_{\text{RP}})} \Big|_{s=\bar{s}_{\text{RP}}+re^{i\varphi}} + \dots \frac{(\bar{s}_{\text{RP}} + re^{i\varphi})^{1+\xi}}{(\bar{s}_{\text{RP}} + re^{i\varphi})^2 + \omega^2} e^{(\bar{s}_{\text{RP}} + re^{i\varphi})t} ire^{i\varphi} d\varphi \right) \\ &= -\frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{\pi}^0 \frac{\phi_{\varepsilon}(s_{\text{RP}})}{\phi'_{\sigma}(s_{\text{RP}})} \frac{s_{\text{RP}}^{1+\xi}}{s_{\text{RP}}^2 + \omega^2} e^{s_{\text{RP}} t} d\varphi - \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_0^{-\pi} \frac{\phi_{\varepsilon}(\bar{s}_{\text{RP}})}{\phi'_{\sigma}(\bar{s}_{\text{RP}})} \frac{\bar{s}_{\text{RP}}^{1+\xi}}{\bar{s}_{\text{RP}}^2 + \omega^2} e^{\bar{s}_{\text{RP}} t} d\varphi \\ &= -\varepsilon_0 \frac{|\phi_{\varepsilon}(s_{\text{RP}})|}{|\phi'_{\sigma}(s_{\text{RP}})|} \cos(\arg \phi_{\varepsilon}(s_{\text{RP}}) - \arg \phi'_{\sigma}(s_{\text{RP}}) + \xi\pi) \frac{\rho_{\text{RP}}^{1+\xi}}{\rho_{\text{RP}}^2 + \omega^2} e^{-\rho_{\text{RP}} t},\end{aligned}$$

videti takođe (5.7).

Ostaje da se pokaže da integrali u Košijevim teoremmama o reziduumima (5.11) i (5.12) duž kontura  $\Gamma_1$  ( $\Gamma_7$ ),  $\Gamma_2$  ( $\Gamma_6$ ) i  $\Gamma_4$ , koje su delovi kontura  $\Gamma^{(\text{I})}$  i  $\Gamma^{(\text{II})}$  označenih na slikama 4.1 i 4.2, teže u nulu u limesu kada  $r \rightarrow 0$  i  $R \rightarrow \infty$ , pri čemu konstitutivne funkcije  $\phi_{\varepsilon}$  i  $\phi_{\sigma}$ , date u tabeli 6.5, moraju da zadovoljavaju uslove 4.44, 4.45 i 4.46, nametnute u poglavlju 4.2.3 da bi se dobili izrazi za moduo relaksacije i funkciju puzanja u integralnoj reprezentaciji.

Integral duž konture  $\Gamma_1$ , dat sa

$$I_{\Gamma_1} = \varepsilon_0 \int_{p_0}^0 \frac{\phi_{\varepsilon}(p + iR)}{\phi_{\sigma}(p + iR)} \frac{(p + iR)^{1+\xi}}{(p + iR)^2 + \omega^2} e^{(p+iR)t} dp,$$

prema parametrizaciji predstavljenoj u tabelama 4.1 i 4.2, ima multi doprinos, budući da je njegova absolutna vrednost

$$\begin{aligned}|I_{\Gamma_1}| &\leq \varepsilon_0 \int_0^{p_0} \frac{|\phi_{\varepsilon}(p + iR)|}{|\phi_{\sigma}(p + iR)|} \frac{|1 - i\frac{p}{R}|^{1-\xi}}{|(1 - i\frac{p}{R})^2 - (i\frac{\omega}{R})^2|} e^{pt} dp \\ &\leq \varepsilon_0 \int_0^{p_0} \frac{1}{R^{1-(\xi+\zeta_R)}} e^{pt} dp \rightarrow 0, \quad \text{za } R \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

prema uslovu (4.44), sa  $\zeta_R < 1 - \xi$  zbog uslova (4.46). Korišćenjem slične argumentacije, može se pokazati da integral duž konture  $\Gamma_7$  takođe ima multi doprinos. Multi doprinos integrala duž konture  $\Gamma_2$ , dobijenog kao

$$I_{\Gamma_2} = \varepsilon_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\phi_{\varepsilon}(Re^{i\varphi})}{\phi_{\sigma}(Re^{i\varphi})} \frac{R^{1+\xi} e^{i(1+\xi)\varphi}}{R^2 e^{2i\varphi} + \omega^2} e^{Rte^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi$$

prema parametrizaciji datoј u tabelama 4.1 i 4.2, je posledica činjenice da su  $\phi_{\varepsilon}$  i  $\phi_{\sigma}$  stepene funkcije, jer je

$$\begin{aligned}|I_{\Gamma_2}| &\leq \varepsilon_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{|\phi_{\varepsilon}(Re^{i\varphi})|}{|\phi_{\sigma}(Re^{i\varphi})|} \frac{R^{2+\xi}}{|R^2 e^{2i\varphi} + \omega^2|} e^{Rt \cos \varphi} d\varphi \\ &\leq \varepsilon_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{|\phi_{\varepsilon}(Re^{i\varphi})|}{|\phi_{\sigma}(Re^{i\varphi})|} \frac{R^{\xi}}{|1 + \frac{\omega^2}{R^2 e^{2i\varphi}}|} e^{Rt \cos \varphi} d\varphi \\ &\leq \varepsilon_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} R^{\xi + \zeta_R} e^{Rt \cos \varphi} d\varphi \rightarrow 0, \quad \text{za } R \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Integral duž konture  $\Gamma_6$  takođe ima multi doprinos, što se može pokazati sličnom argumentacijom. Prema uslovima koje zadovoljavaju funkcije  $\phi_{\varepsilon}$  i  $\phi_{\sigma}$ , datom sa (4.45), i uslovu  $\zeta_r < \xi$ , datom sa (4.46), integral duž konture  $\Gamma_4$

$$\begin{aligned}I_{\Gamma_4} &= \varepsilon_0 \int_{\pi}^{-\pi} \frac{\phi_{\varepsilon}(re^{i\varphi})}{\phi_{\sigma}(re^{i\varphi})} \frac{r^{1+\xi} e^{i(1+\xi)\varphi}}{re^{i\varphi} + \omega^2} e^{rte^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi \\ &= \varepsilon_0 \int_{\pi}^{-\pi} \frac{\phi_{\varepsilon}(re^{i\varphi})}{\phi_{\sigma}(re^{i\varphi})} \frac{r^{2+\xi} e^{i(2+\xi)\varphi}}{re^{i\varphi} + \omega^2} e^{rte^{i\varphi}} id\varphi,\end{aligned}$$

prema parametrizaciji dатој у табелама 4.1 и 4.2, има такође нули допринос, јер је

$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_4}| &\leq \varepsilon_0 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\phi_{\varepsilon}(re^{i\varphi})|}{|\phi_{\sigma}(re^{i\varphi})|} \frac{r^{2+\xi}}{|re^{i\varphi} + \omega^2|} e^{rt\cos\varphi} d\varphi \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{\omega^2} \int_{-\pi}^{\pi} r^{2+\xi-\zeta_r} d\varphi \rightarrow 0, \quad \text{за } r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

### 5.1.2 Kvazistacionarni odziv na harmonijsku pobudu

Уколико се вискоелastičно тело изложи деформацији у облику гармоничке функције угаоне фреквencије  $\omega$  и амплитуде  $\varepsilon_0$ , тада је због дисипативних карактеристика материјала, након довољно дугог времена, напон такође гармоничка функција исте угаоне фреквencије као деформација, са амплитудом  $\sigma_0$ , међутим fazno pomerен у односу на деформацију за fazni ugao  $\varphi_{\sigma}$ , односно

$$\underline{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad \text{i} \quad \underline{\sigma}(t) = \sigma_0(\omega) e^{i(\omega t + \varphi_{\sigma}(\omega))}, \quad (5.20)$$

са величинама

$$\varepsilon(t) = \operatorname{Re} \underline{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t) \quad \text{i} \quad \sigma(t) = \operatorname{Re} \underline{\sigma}(t) = \sigma_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi_{\sigma}(\omega)), \quad (5.21)$$

које имају физичко значење. Pretpostavljajući да је конститутивна једначина која описује механичке карактеристике материјала линеарна, што је случај за све моделе разматране у овој теzi, тада се комплексни модуо дефинише изразом

$$\begin{aligned} \hat{E}(\omega) &= \frac{\sigma(t)}{\underline{\varepsilon}(t)} = \frac{\sigma_0(\omega)}{\varepsilon_0} e^{i\varphi_{\sigma}(\omega)} = \left| \hat{E}(\omega) \right| e^{i\varphi_{\sigma}(\omega)} = \hat{E}'(\omega) + i\hat{E}''(\omega), \quad \text{са} \\ \hat{E}'(\omega) &= \frac{\sigma_0(\omega)}{\varepsilon_0} \cos \varphi_{\sigma}(\omega) \quad \text{i} \quad \hat{E}''(\omega) = \frac{\sigma_0(\omega)}{\varepsilon_0} \sin \varphi_{\sigma}(\omega), \end{aligned} \quad (5.22)$$

те се захтеви

$$\hat{E}'(\omega) \geq 0 \quad \text{i} \quad \hat{E}''(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \geq 0,$$

наметнути на конзервативни и дисипативни модуо  $\hat{E}'$  и  $\hat{E}''$ , коришћени у поглављу 3.2, видети такође [63] и [1], за формулатуру термодинамички конзистентних фракционих Cenerovih и anti-Cenerovih модела, могу еквивалентно навести са

$$\cos \varphi_{\sigma}(\omega) \geq 0 \quad \text{i} \quad \sin \varphi_{\sigma}(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \geq 0.$$

Sa друге стране, комплексни модуо се добија из конститутивног модела у Laplasovom domenu сменом  $s = i\omega$ , стога једначина (4.12) постаје

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\tilde{\varepsilon}(s)} \Big|_{s=i\omega} = (i\omega)^{\xi} \frac{\phi_{\varepsilon}(i\omega)}{\phi_{\sigma}(i\omega)} = \omega^{\xi} \frac{|\phi_{\varepsilon}(i\omega)|}{|\phi_{\sigma}(i\omega)|} e^{i(\arg \phi_{\varepsilon}(i\omega) - \arg \phi_{\sigma}(i\omega) + \frac{\xi\pi}{2})},$$

што, комбиновано са  $\hat{E}(\omega) = \frac{\sigma(t)}{\underline{\varepsilon}(t)}$ , видети (5.22), према предпоставци о гармоничким обличима деформације и напона (5.20), дaje

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(t) &= \varepsilon_0 \omega^{\xi} \frac{|\phi_{\varepsilon}(i\omega)|}{|\phi_{\sigma}(i\omega)|} e^{i(\omega t + \arg \phi_{\varepsilon}(i\omega) - \arg \phi_{\sigma}(i\omega) + \frac{\xi\pi}{2})}, \quad \text{тј.} \\ \sigma(t) &= \operatorname{Re} \underline{\sigma}(t) = \varepsilon_0 \omega^{\xi} \frac{|\phi_{\varepsilon}(i\omega)|}{|\phi_{\sigma}(i\omega)|} \cos \left( \omega t + \arg \phi_{\varepsilon}(i\omega) - \arg \phi_{\sigma}(i\omega) + \frac{\xi\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (5.23)$$

те су амплитуда и fazni ugao напона, који фигуришу у (5.20) и (5.21), дати са

$$\begin{aligned} \sigma_0(\omega) &= \varepsilon_0 \omega^{\xi} \frac{|\phi_{\varepsilon}(i\omega)|}{|\phi_{\sigma}(i\omega)|} = \varepsilon_0 \left| \hat{E}(\omega) \right|, \\ \varphi_{\sigma}(\omega) &= \arg \phi_{\varepsilon}(i\omega) - \arg \phi_{\sigma}(i\omega) + \frac{\xi\pi}{2}. \end{aligned}$$

Напон у kvazistacionarnom režimu, дат са (5.23), има исти облик као функција  $\sigma^{(H)}$ , дата са (5.6), која представља члан у транзидентном одзиву напона који потиче од деформације као гармоничке побуде, који не опада на нулу након довољно дугог времена.

### 5.1.3 Numerički primeri

Vremenska evolucija napona kao odziva na harmonijsku deformaciju, kao i prelazak iz tranzijentnog u kvazistacionarni režim ispituje se za termodinamički konzistentan frakcionalni Cenerov i anti-Cenerov model I<sup>+</sup>ID.ID, dat sa

$$\left( a_1 {}_0I_t^{\alpha+\beta+\nu} + a_2 {}_0I_t^\nu + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta-\nu} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^\alpha + b_2 {}_0D_t^\beta \right) \varepsilon(t), \quad (5.24)$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama na parametre modela

$$0 \leq \alpha + \beta - \nu \leq 1, \quad 1 \leq \alpha + \beta + \nu \leq 2, \quad \alpha \leq \nu \leq 1 - \beta, \\ \frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \leq \frac{a_1}{a_2} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \frac{\left| \cos \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2}, \quad (5.25)$$

$$\frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}} \leq \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}}, \quad (5.26)$$

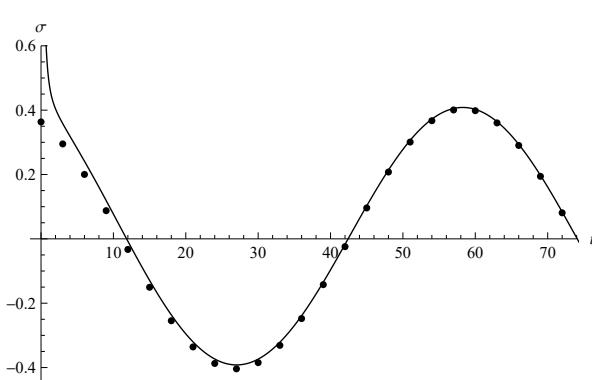
videti takođe (4.124) - (4.127).

Koristeći parametre modela date u tabeli 5.1, vremenski profili napona, kao tranzijentni odziv na kosinusnu harmonijsku deformaciju, videti (5.1), dobijaju se korišćenjem (5.3), predstavljeni su na slikama 5.1a, 5.2a i 5.3a i upoređeni su sa naponskim profilima u kvazistacionarnom režimu, dobijenim korišćenjem (5.23).

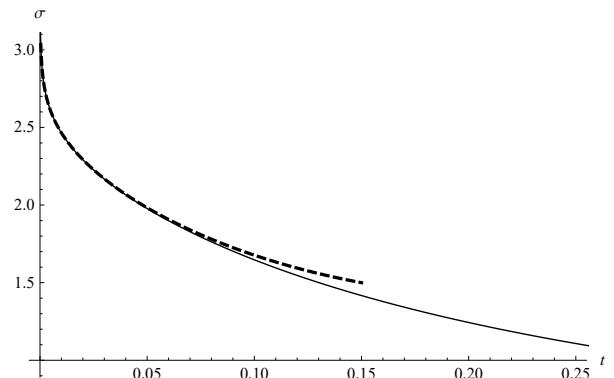
Slučaj kada $\phi_\sigma$	$\alpha$	$\beta$	$\nu$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$
nema nula				0.05	1.5	0.45	0.7	0.95
ima negativnu realnu nulu	0.35	0.55	0.4	11	28.4029...	20.27	7	9.5
ima par kompleksno konjugovanih nula				11	15	20.27	7	9.5

Tabela 5.1: Parametri modela korišćeni za numeričke primere.

Slika 5.1a prikazuje oscilatorni karakter vremenskih profila napona u slučaju kada funkcija  $\phi_\sigma$  nema nula, tako da tranzijentni profili teže u beskonačnost u početnom trenutku, videti asimptotiku za vreme blisko nuli (5.27) ispod, dok se oscilatorno ponašanje ustaljuje u kvazistacionarni mod nakon otprilike polovine perioda, kada doprinos funkcije  $\sigma^{(V)}$ , videti (5.4) i (5.5), u izrazu za napon (5.3) postaje zamenarljiv u poređenju sa  $\sigma^{(H)}$ , videti (5.6), te je, da bi se opisalo oscilatorno ponašanje napona, dovoljno razmatrati funkciju  $\sigma^{(H)}$ , uporediti (5.6) i (5.23).



(a) Poredjivanje tranzijentnog i kvazistacionarnog odziva, predstavljenih punom linijom i tačkama, respektivno.

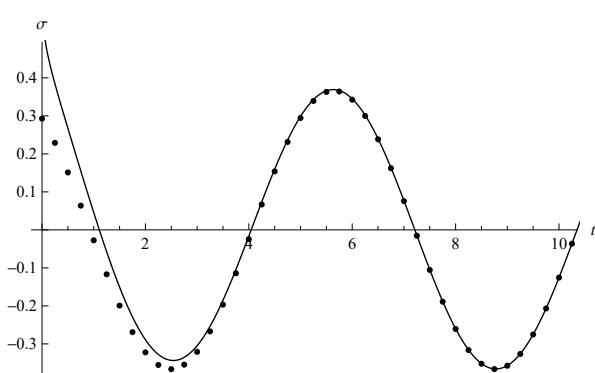


(b) Poredjivanje tranzijentnog odziva i asimptotike za vreme bliska nuli, označenih punom i isprekidanoj linijom, respektivno.

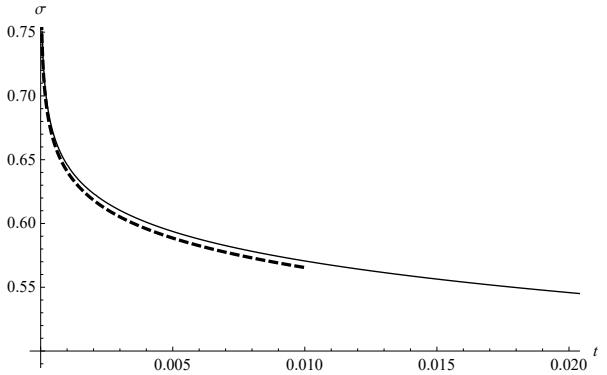
Slika 5.1: Vremenska evolucija napona kao odziva na zadatu deformaciju kao harmonijsku prinudu,  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$ , u slučaju kada  $\phi_\sigma$  nema nula, dobijena za parametre modela kao u tabeli 5.1 i za ugaonu frekvenciju  $\omega = 0.1$ .

Sličan oscilatorni karakter napona, prikazan na slici 5.2a, uočava se u slučaju kada funkcija  $\phi_\sigma$  ima negativnu realnu nulu, dok na slici 5.3a, koja odgovara slučaju kada funkcija  $\phi_\sigma$  ima par kompleksno konjugovanih nula, na

oscilacije koje potiču od funkcije  $\sigma^{(H)}$ , videti (5.6), superponirane su prigušene oscilacije koje potiču od funkcije  $\sigma^{(CCP)}$ , videti (5.8), sa izraženim prigušenjem tako da je primetan samo jedan pik. Budući da dodatna funkcija  $\sigma^{(V)}$ , videti (5.4) i (5.5), opada u nulu, oscilatorno ponašanje napona se ustaljuje u kvazistacionarni režim za manje od četvrtine perioda.

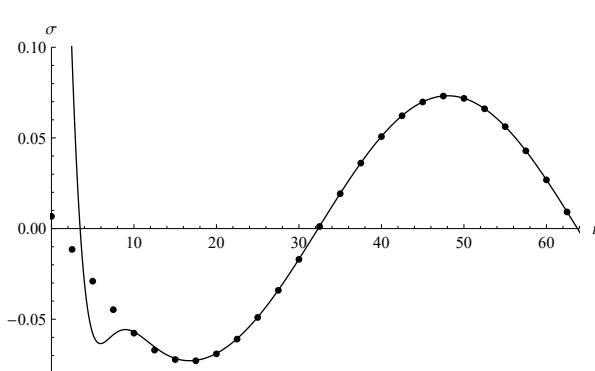


(a) Poredjivanje tranzijentnog i kvazistacionarnog odziva, predstavljenih punom linijom i tačkama, respektivno.

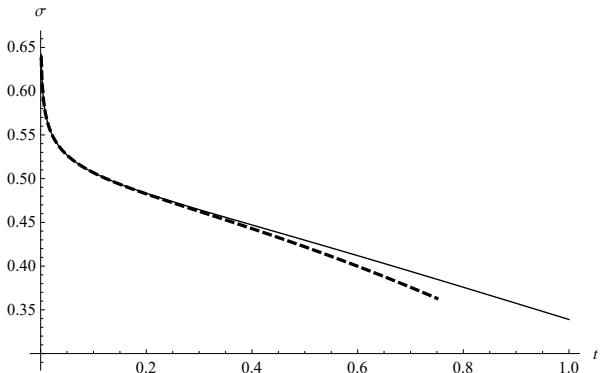


(b) Poredjivanje tranzijentnog odziva i asimptotike za vremena bliska nuli, označenih punom i isprekidanoj linijom, respektivno.

Slika 5.2: Vremenska evolucija napona kao odziva na zadatu deformaciju kao harmonijsku prinudu,  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$ , u slučaju kada  $\phi_\sigma$  ima negativnu realnu nulu, dobijena za parametre modela kao u tabeli 5.1 i za ugaonu frekvenciju  $\omega = 1$ .



(a) Poredjivanje tranzijentnog i kvazistacionarnog odziva, predstavljenih punom linijom i tačkama, respektivno.



(b) Poredjivanje tranzijentnog odziva i asimptotike za vremena bliska nuli, označenih punom i isprekidanoj linijom, respektivno.

Slika 5.3: Vremenska evolucija napona kao odziva na zadatu deformaciju kao harmonijsku prinudu,  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$ , u slučaju kada  $\phi_\sigma$  ima par kompleksno konjugovanih nula, dobijena za parametre modela kao u tabeli 5.1 i za ugaonu frekvenciju  $\omega = 0.1$ .

Slike 5.1b, 5.2b i 5.3b prikazuju dobro slaganje između krivih dobijenih preko analitičkih izraza i preko asimptotike za vremena bliska nuli u slučaju kada funkcija  $\phi_\sigma$  nema nulu, ima negativnu realnu nulu  $s_{RP}$  i ima par kompleksno konjugovanih nula  $s_{CCP}$  i  $\bar{s}_{CCP}$ , respektivno. Asimptotika za vremena bliska nuli, data izrazom

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \varepsilon_0 \frac{b_2}{a_3} \frac{t^{-(\nu-\alpha)}}{\Gamma(1-(\nu-\alpha))} + \varepsilon_0 \frac{b_2}{a_3} \left( \frac{b_1}{b_2} - \frac{a_2}{a_3} \right) \frac{t^{2\alpha+\beta-\nu}}{\Gamma(1+2\alpha+\beta-\nu)} \\ & + \varepsilon_0 \frac{b_2}{a_3} \left( \frac{a_2^2}{a_3^2} - \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2 b_1}{a_3 b_2} \right) \frac{t^{3\alpha+2\beta-\nu}}{\Gamma(1+3\alpha+2\beta-\nu)} - \varepsilon_0 \omega^2 \frac{b_2}{a_3} \frac{t^{2-(\nu-\alpha)}}{\Gamma(3-(\nu-\alpha))} + O(t^{4\alpha+3\beta-\nu}), \end{aligned} \quad (5.27)$$

se dobija korišćenjem teoreme prema kojoj ako je  $\tilde{f}(s) \sim \tilde{g}(s)$  kada  $s \rightarrow \infty$ , tada je  $f(t) \sim g(t)$  kada  $t \rightarrow 0$ , od napona u Laplasovom domenu, datom sa (5.2), što se za model (5.24) transformiše kao

$$\tilde{\sigma}(s) = \varepsilon_0 s^{\beta+\nu} \frac{b_1 + b_2 s^{\alpha+\beta}}{a_1 + a_2 s^{\alpha+\beta} + a_3 s^{2(\alpha+\beta)}} \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_0 \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{1-(\nu-\alpha)}} \frac{1 + \frac{b_1}{b_2} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}}}{1 + \frac{a_2}{a_3} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} + \frac{a_1}{a_3} \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}}} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{s^2}} \\
&= \varepsilon_0 \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{1-(\nu-\alpha)}} \left( 1 + \frac{b_1}{b_2} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} \right) \left( 1 + \frac{a_2}{a_3} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} + \frac{a_1}{a_3} \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}} \right)^{-1} \left( 1 + \frac{\omega^2}{s^2} \right)^{-1} \\
&= \varepsilon_0 \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{1-(\nu-\alpha)}} \left( 1 + \frac{b_1}{b_2} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} \right) \\
&\quad \times \left( 1 - \frac{a_2}{a_3} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} - \frac{a_1}{a_3} \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}} + \frac{a_2^2}{a_3^2} \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}} + O(s^{-3(\alpha+\beta)}) \right) \left( 1 - \frac{\omega^2}{s^2} + O(s^{-4}) \right) \\
&= \varepsilon_0 \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{1-(\nu-\alpha)}} \left( 1 + \left( \frac{b_1}{b_2} - \frac{a_2}{a_3} \right) \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} + \left( \frac{a_2^2}{a_3^2} - \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2 b_1}{a_3 b_2} \right) \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}} - \frac{\omega^2}{s^2} + O(s^{-3(\alpha+\beta)}) \right) \\
&= \varepsilon_0 \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{1-(\nu-\alpha)}} + \varepsilon_0 \frac{b_2}{a_3} \left( \frac{b_1}{b_2} - \frac{a_2}{a_3} \right) \frac{1}{s^{1+2\alpha+\beta-\nu}} \\
&\quad + \varepsilon_0 \frac{b_2}{a_3} \left( \frac{a_2^2}{a_3^2} - \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2 b_1}{a_3 b_2} \right) \frac{1}{s^{1+3\alpha+2\beta-\nu}} - \varepsilon_0 \omega^2 \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{3-(\nu-\alpha)}} + O(s^{-(1+4\alpha+3\beta-\nu)}), \quad \text{kada } s \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Treba primetiti da članovi  $-\varepsilon_0 \omega^2 \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{3-(\nu-\alpha)}}$  i  $-\varepsilon_0 \omega^2 \frac{b_2}{a_3} \frac{t^{2-(\nu-\alpha)}}{\Gamma(3-(\nu-\alpha))}$ , koji se respektivno pojavljuju u (5.28) i (5.27), ne postoje ukoliko je  $3(\alpha+\beta) \leq 2$ , tj. ako je  $\alpha+\beta \leq \frac{2}{3}$ .

## 5.2 Vremenska evolucija snage po jedinici zapremine

Na osnovu analize osobina energetskog bilansa jednodimenzionog viskoelastičnog tela u poglavljiju 4.1, videti takođe [2], snaga po jedinici zapremine (4.1), može se predstaviti preko energije  $W$  i snage disipacije  $\mathcal{P}$  po jedinici zapremine, videti (4.9), sa energijom (4.4) i snagom disipacije (4.6), izraženim preko modula relaksacije  $\sigma_{sr}$ , ili sa energijom (4.5) i snagom disipacije (4.7), izraženim preko funkcije puzanja  $\varepsilon_{cr}$ .

Energiju po jedinici zapremine, izraženu preko modula relaksacije u obliku (4.4), čine član koji podseća na potencijalnu energiju elastičnog tela, sa Jangovim modulom zamenjenim modulom relaksacije, kao i član koji uzima u obzir memorijksa svojstva deformacije, otežan izvodom modula relaksacije. Slično, energija po jedinici zapremine, izražena preko funkcije puzanja u obliku (4.5), uzima u obzir memorijksa svojstva napona, otežana izvodom funkcije puzanja. Snaga disipacije po jedinici zapremine, izražena u oblicima (4.6) i (4.7), ima trenutni doprinos koji zavisi od funkcija  $\dot{\sigma}_{sr}$  i  $\dot{\varepsilon}_{cr}$  respektivno, kao i memorijski doprinos, sa jezgrima koji zavise od funkcija  $\ddot{\sigma}_{sr}$  i  $\ddot{\varepsilon}_{cr}$  respektivno.

Pozitivnost energije, videti (4.4) i (4.5), i disipativnost snage, tj. njena pozitivnost, videti (4.6) i (4.7), se obezbeđuju nametanjem da je moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, te da zadovoljava (4.8) kao i zahtevanjem da je funkcija puzanja Bernštajnova funkcija, tj. pozitivna funkcija sa kompletno monotonim prvim izvodom. Modulu relaksacije i funkciji puzanja odgovaraju spomenute osobine u slučaju kada frakcioni modeli viskoelastičnog tela imaju redove izvoda koji ne prelaze jedan, ako su nametnute termodinamičke restrikcije, videti [29], dok u slučaju termodinamički konzistentnih frakcionalih Burgersovih modela i frakcionalih Cenerovih i anti-Cenerovih modela, gde redovi frakcionalih izvoda mogu biti u intervalu  $(1, 2)$ , spomenute osobine modula relaksacije i funkcije puzanja se uspostavljuju pretpostavkom da su sužene termodinamičke restrikcije ispunjene, videti [30] i [2], respektivno. Razmatranjem kvazistacionarnog režima, termodinamička ograničenja proizilaze iz zahteva nenegativnosti konzervativnog i disipativnog modula za sve frekvencije harmonijske prinude.

Ispostavlja se da energija po jedinici zapremine, kao i snaga disipacije, izražene preko modula relaksacije i preko funkcije puzanja, videti (4.4) i (4.5), kao i (4.6) i (4.7), nisu ekvivalentne, a što je očigledno sa slika 5.4a, 5.5a, 5.7a, 5.7c, 5.9a i 5.9c ispod, nasuprot snazi po jedinici zapremine, dobijenoj prema (4.9), koja daje iste krive vremenske evolucije bez obzira koji oblik energije i snage disipacije se izabere, videti slike 5.6, 5.8 i 5.10 ispod. Stoga je neophodan kriterijum na osnovu kog bi se razlikovali izraz koji odgovara potencijalnoj energiji skladištenoj u viskoelastičnom telu i izraz koji samo ima takav oblik, kada su u pitanju izrazi (4.4) i (4.5), odnosno na osnovu kog bi se razlikovali izraz koji odgovara snazi disipacije i izraz koji samo ima takav oblik, kada su u pitanju izrazi (4.6) i (4.7).

Da bi se obezbedile fizičke interpretacije energija (4.4) i (4.5), kao i snaga disipacije (4.6) i (4.7), jednačina kretanja jednodimenzionog deformabilnog tela čije su tačke određene koordinatama  $x \in \mathbb{R}$ , naime

$$\partial_x \sigma(x, t) = \rho \partial_{tt} u(x, t),$$

gde je  $u$  pomeranje, je pomnožena sa  $\partial_t u$ , a potom je izraz integraljen po prostornoj koordinati duž celog domena  $\mathbb{R}$ , dajući

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_x \sigma(x, t) \partial_t u(x, t) dx = \partial_t \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho (\partial_t u(x, t))^2}{2} dx,$$

što se transformiše u

$$[\partial_t u(x, t) \sigma(x, t)]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} - \int_{\mathbb{R}} \sigma(x, t) \partial_t \varepsilon(x, t) dx = \partial_t \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho(\partial_t u(x, t))^2}{2} dx \quad (5.29)$$

nakon parcijalne integracije, pri čemu je iskorишćena veza između deformacije i pomeranja

$$\varepsilon(x, t) = \partial_x u(x, t), \quad (5.30)$$

te izraz (5.29), uz granične uslove

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma(x, t) = 0,$$

postaje

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho(\partial_t u(x, t))^2}{2} dx &= - \int_{\mathbb{R}} \sigma(x, t) \partial_t \varepsilon(x, t) dx = - \int_{\mathbb{R}} P(x, t) dx = - \int_{\mathbb{R}} (\partial_t W(x, t) + \mathcal{P}(x, t)) dx, \quad \text{tj.} \\ \partial_t \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{T}(x, t) + W(x, t)) dx &= - \int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}(x, t) dx, \end{aligned} \quad (5.31)$$

prema (4.1) i (4.9), pri čemu je

$$\mathcal{T}(x, t) = \frac{\rho(\partial_t u(x, t))^2}{2} \quad (5.32)$$

kinetička energija po jedinici zapremine, implicirajući da se izraz (5.31) može interpretirati kao zakon promene ukupne mehaničke energije po jedinici površine. Treba naglasiti da je snaga po jedinici zapremine  $P$ , koja opisuje i elastična i viskozna svojstva materijala, dekomponovana prema (4.9) na zbir dva člana: član  $\partial_t W$ , koji opisuje elastična svojstva materijala i stoga predstavlja vremensku promenu potencijalne energije i član  $\mathcal{P}$ , koji opisuje viskozna svojstva materijala i stoga predstavlja snagu disipacije, videti (5.31). Takođe, zakon promene ukupne mehaničke energije po jedinici površine (5.31), zapisan kao

$$\int_{\mathbb{R}} (\partial_t (\mathcal{T}(x, t) + W(x, t)) + \mathcal{P}(x, t)) dx = 0 \quad (5.33)$$

implicira zakon promene ukupne mehaničke energije po jedinici zapremine

$$\partial_t (\mathcal{T}(x, t) + W(x, t)) = -\mathcal{P}(x, t). \quad (5.34)$$

Korišćenjem izraza za energiju (4.4) i snagu disipacije (4.6) zajedno sa kinetičkom energijom po jedinici zapremine (5.32), zakon promene ukupne mehaničke energije (5.34) se transformiše u

$$\begin{aligned} \partial_t \left( \frac{\rho(\partial_t u(x, t))^2}{2} + \frac{1}{2} \sigma_{sr}(t) (\partial_x u(x, t))^2 + \frac{1}{2} \int_0^t (-\dot{\sigma}_{sr}(t-t')) (\partial_x u(x, t) - \partial_x u(x, t'))^2 dt' \right) \\ = -\frac{1}{2} (-\dot{\sigma}_{sr}(t)) (\partial_x u(x, t))^2 - \frac{1}{2} \int_0^t \ddot{\sigma}_{sr}(t-t') (\partial_x u(x, t) - \partial_x u(x, t'))^2 dt', \end{aligned} \quad (5.35)$$

dok zakon promene ukupne mehaničke energije (5.34), korišćenjem izraza za energiju po jedinici zapremine (4.5), snagu disipacije po jedinici zapremine (4.7) i kinetičku energiju po jedinici zapremine (5.32), postaje

$$\begin{aligned} \partial_t \left( \frac{\rho(\partial_t u(x, t))^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t \dot{\varepsilon}_{cr}(t-t') \sigma^2(x, t') dt' \right) \\ = -\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{cr}(t) \sigma^2(x, t) - \frac{1}{2} \int_0^t (-\ddot{\varepsilon}_{cr}(t-t')) (\sigma(x, t) - \sigma(x, t'))^2 dt'. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Očigledno, zakon promene ukupne mehaničke energije je izražen preko pomeranja u (5.35), dok u (5.36) pored pomeranja figuriše i napon, te je potrebno korišćenjem konstitutivne jednačine (2.15)<sub>1</sub> i deformacije (5.30) eliminisati napon iz izraza (5.36). Stoga, oblik zakona promene ukupne mehaničke energije (5.35) ukazuje da su potencijalna energija i disipirana snaga u viskoelastičnom telu dati sa (4.4) i (4.6), pre nego sa (4.5) i (4.7) koji predstavljaju izraze koji samo imaju oblik potencijalne energije i snage disipacije.

Dalje, kada se ispituje disipativnost memorijskih frakcionalih talasnih jednačina u [29], izrazi

$$\frac{1}{2} \rho \|\partial_t u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2} \sigma_{sr}(t) \|\partial_x u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t (-\dot{\sigma}_{sr}(t')) \|\partial_x u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt' \leq \frac{1}{2} \rho \|v_0(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (5.37)$$

i

$$\frac{1}{2}\rho \|\partial_t u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\sigma_{sr}(t') *_{t'} \partial_{t'} x u(x, t')) \partial_{t'} x u(x, t') dx dt' = \frac{1}{2}\rho \|v_0(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \quad (5.38)$$

u kojima je korišćena sledeća notacija

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} (u(x, t))^2 dx,$$

respektivno se dobijaju u slučaju konačne i beskonačne brzine prostiranja talasa, navodeći da je kinetička energija po jedinici površine viskoelastičnog tela u proizvoljnom vremenskom trenutku manja nego kinetička energija u početnom vremenskom trenutku, budući da je  $v_0 = v_0(x)$  početno polje brzine, stoga implicirajući disipativnost materijala. Da bi se dobili (5.37) i (5.38), frakciona talasna jednačina se izražava preko modula relaksacije sa

$$\begin{aligned} \rho \partial_{tt} u(x, t) &= \sigma_{sr}^{(g)} \partial_{xx} u(x, t) + \dot{\sigma}_{sr}(t) *_{t'} \partial_{xx} u(x, t) \quad \text{i} \\ \rho \partial_{tt} u(x, t) &= \sigma_{sr}(t) *_{t'} \partial_{txx} u(x, t), \end{aligned}$$

respektivno, dok se izražavanjem frakcione talasne jednačine preko funkcije puzanja kao

$$\rho \varepsilon_{cr}^{(g)} \partial_{tt} u(x, t) + \rho \dot{\varepsilon}_{cr}(t) *_{t'} \partial_{tt} u(x, t) = \partial_{xx} u(x, t),$$

energetska ocena dobija u obliku

$$\frac{1}{2}\rho \frac{1}{\varepsilon_{cr}(t)} \partial_t \left( \varepsilon_{cr}(t) *_{t'} \|\partial_t u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right) + \frac{1}{2\varepsilon_{cr}(t)} \|\partial_x u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{1}{2}\rho \|v_0(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \quad (5.39)$$

koji ne sadrži kinetičku energiju u proizvoljnom vremenskom trenutku i stoga se ne može izvesti zaključak o disipativnosti talasne jednačine. Dakle, zaključuje se da se energetske ocene (5.37) i (5.38), izražene preko modula relaksacije, mogu interpretirati kao zakon promene ukupne mehaničke energije (5.33), dok se energetska ocena izražena preko funkcije puzanja (5.39) ne može. Apriorne energetske ocene (5.37) i (5.38), kada se uporede sa (5.39), takođe ukazuju da izrazi (4.4) i (4.6), koji sadrže moduo relaksacije, odgovaraju potencijalnoj energiji i snazi disipacije, dok izrazi (4.5) i (4.7), koji sadrže funkciju puzanja, odgovaraju izrazima koji samo imaju takav oblik.

U cilju dobijanja krivih koje ilustruju vremenu evoluciju energije, date sa (4.4) i (4.5), kao i snage disipacije, date sa (4.6) i (4.7), pored snage po jedinici zapremine, date sa (4.9), deformacija se prepostavlja kao sinusna funkcija

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t), \quad (5.40)$$

što je dovoljno da se izračunaju energija, snaga disipacije i snaga po jedinici zapremine izraženi preko modula relaksacije, prema (4.4), (4.6) i (4.9), budući da je eksplisitni oblik modula relaksacije dat sa (4.15), videti poglavljje 4.2.3.1. Sa druge strane, izračunavanje energije, snage disipacije i snage po jedinici zapremine izraženih preko funkcije puzanja, prema (4.5), (4.7) i (4.9), osim funkcije puzanja čiji je eksplisitni oblik dat sa (4.27), videti poglavljje 4.2.3.2, zahteva izračunavanje naponu kao odziva na deformaciju u obliku (5.40), koja je primenjena analogno kao u poglavljju 5.1.

Naime, napon kao odziv na deformaciju prepostavljenu kao kosinusnu funkciju, videti (5.1), izveden je i dat izrazom (5.3) u poglavljju 5.1, dok se u slučaju deformacije primenjene kao sinusne funkcije, videti (5.40), dobija odziv korišćenjem konstitutivne jednačine u Laplasovom domenu (4.12) zajedno sa Laplasovom transformacijom sinusne funkcije, dajući

$$\tilde{\sigma}(s) = \varepsilon_0 s^\xi \frac{\phi_\varepsilon(s)}{\phi_\sigma(s)} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad (5.41)$$

te se dobija

$$\sigma(t) = \sigma^{(v)}(t) + \sigma^{(h)}(t) + \begin{cases} 0, & \text{ako } \phi_\sigma \text{ nema nula,} \\ \sigma^{(rp)}(t), & \text{ako } \phi_\sigma \text{ ima negativnu realnu nulu,} \\ \sigma^{(ccp)}(t), & \text{ako } \phi_\sigma \text{ ima par kompleksno konjugovanih nula,} \end{cases} \quad (5.42)$$

nakon primene inverzne Laplasove transformacije na (5.41), sa funkcijama

$$\sigma^{(v)}(t) = -\frac{\omega \varepsilon_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{K(\rho)}{|\phi_\sigma(\rho e^{i\pi})|^2} \frac{\rho^\xi}{\rho^2 + \omega^2} e^{-\rho t} d\rho, \quad \text{ili} \quad (5.43)$$

$$\sigma^{(v)}(t) = -\frac{\omega \varepsilon_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{|\phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi})|}{|\phi_\sigma(\rho e^{i\pi})|} \sin(\arg \phi_\varepsilon(\rho e^{i\pi}) - \arg \phi_\sigma(\rho e^{i\pi}) + \xi\pi) \frac{\rho^\xi}{\rho^2 + \omega^2} e^{-\rho t} d\rho, \quad (5.44)$$

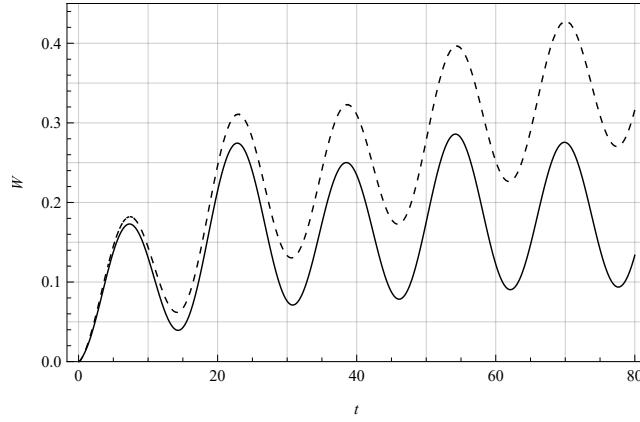
$$\sigma^{(h)}(t) = \varepsilon_0 |\hat{E}(\omega)| \sin \left( \omega t + \arg \phi_\varepsilon(i\omega) - \arg \phi_\sigma(i\omega) + \frac{\xi\pi}{2} \right), \text{ sa } |\hat{E}(\omega)| = \omega^\xi \frac{|\phi_\varepsilon(i\omega)|}{|\phi_\sigma(i\omega)|}, \quad (5.45)$$

$$\sigma^{(RP)}(t) = \omega \varepsilon_0 \frac{|\phi_\varepsilon(s_{RP})|}{|\phi'_\sigma(s_{RP})|} \cos \left( \arg \phi_\varepsilon(s_{RP}) - \arg \phi'_\sigma(s_{RP}) + \xi\pi \right) \frac{\rho_{RP}^\xi}{\rho_{RP}^2 + \omega^2} e^{-\rho_{RP}t}, \quad (5.46)$$

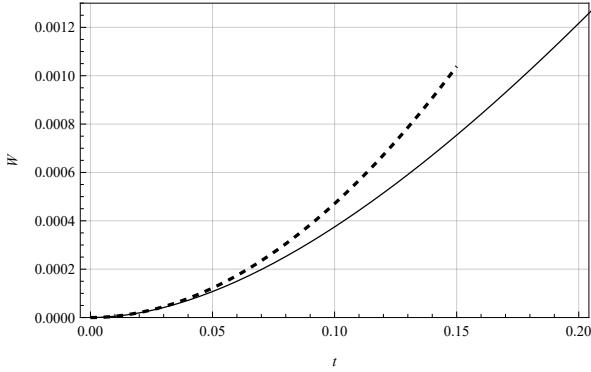
$$\begin{aligned} \sigma^{(CCP)}(t) &= 2\omega \varepsilon_0 \frac{|\phi_\varepsilon(s_{CCP})|}{|\phi'_\sigma(s_{CCP})|} \frac{\rho_{CCP}^\xi}{|s_{CCP}^2 + \omega^2|} e^{-|\operatorname{Re} s_{CCP}|t} \\ &\times \cos \left( \operatorname{Im} s_{CCP} t + \arg \phi_\varepsilon(s_{CCP}) - \arg \phi'_\sigma(s_{CCP}) + \xi\varphi_{CCP} - \phi(\omega) \right), \end{aligned} \quad (5.47)$$

gde je funkcija  $K$  data sa (4.20) i  $\phi$  je dat sa (5.9), sa realnom negativnom nulom  $s_{RP} = \rho_{RP} e^{i\pi}$  funkcije  $\phi_\sigma$ , dok su  $s_{CCP} = \rho_{CCP} e^{i\varphi_{CCP}}$  i njemu kompleksno konjugovan  $\bar{s}_{CCP}$  kompleksne nule funkcije  $\phi_\sigma$  koje imaju negativni realni deo. Izvođenje je analogno izvođenju sprovedenom u poglavljiju 5.1 i stoga je izostavljeno.

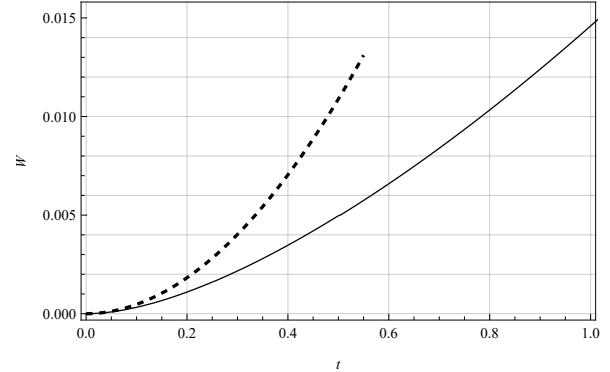
Da bi se ilustrovali vremenski profili energije, snage disipacije i snage po jedinici zapremine, korišćen je konstitutivni model I<sup>+</sup>ID.ID, dat sa (5.24) sa parametrima modela kao u tabeli 5.1. Slike 5.4a i 5.5a prikazuju vremenske profile energije i snage disipacije, respektivno, koje su pozitivne i oscilatorne funkcije u slučaju kada funkcija  $\phi_\sigma$  nema nula. Pozitivnost je obezbeđena činjenicom da parametri modela zadovoljavaju sužene termodinamičke restrikcije, videti (5.25) i (5.26), koje obezbeđuju da je moduo relaksacije kompletno monotoni i da je funkcija puzanja Bernštajnova funkcija, i koje takođe impliciraju pozitivnost energije, date izrazima (4.4) i (4.5), kao i pozitivnost disipirane snage, date izrazima (4.6) i (4.7). Razlike između energija, kao i između snaga disipacije, datih preko modula relaksacije i funkcije puzanja su savim male, sa rastućom tendencijom u slučaju energija, videti slike 5.4a i 5.5a, međutim dajući iste vremenske profile snage, kao što je ilustrovano na slici 5.6. Asimptotsko ponašanje energija, koje je, prema asimptotskim izrazima (5.48) i (5.51) izvedenim ispod, srazmerno sa  $t^{2-(\nu-\alpha)}$ , pokazuje dobro slaganje sa krivama vremenske evolucije, videti slike 5.4b i 5.4c, kao i asimptotsko ponašanje snaga disipacije, koje je srazmerno sa  $t^{1-(\nu-\alpha)}$  prema asimptotskim izrazima (5.49) i (5.52) datim ispod i ilustrovano na slikama 5.5b i 5.5c.



(a) Skladištena energija izražena: preko deformacije - označena punom linijom i preko napona - označena isprekidanom linijom.

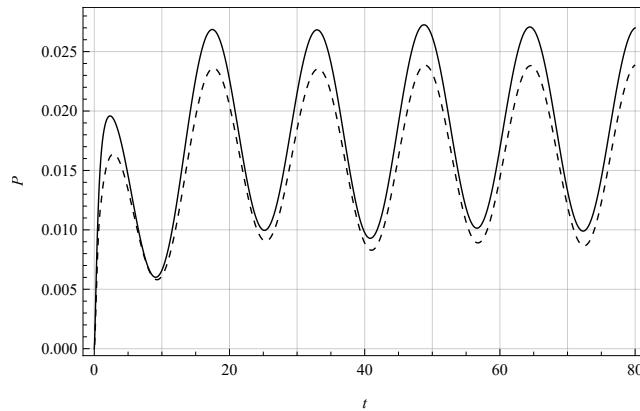


(b) Asimptotika energije izražene preko deformacije za vreme bliska nuli, označena isprekidanom linijom.

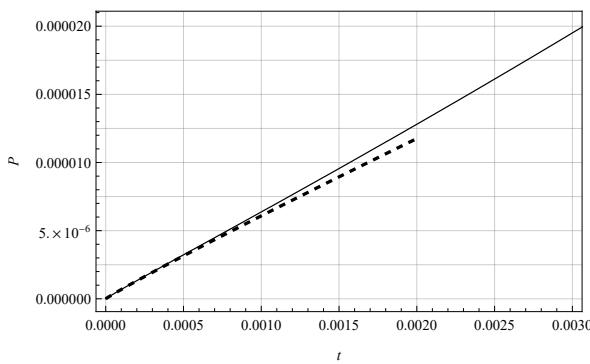


(c) Asimptotika energije izražene preko napona za vreme bliska nuli, označena isprekidanom linijom.

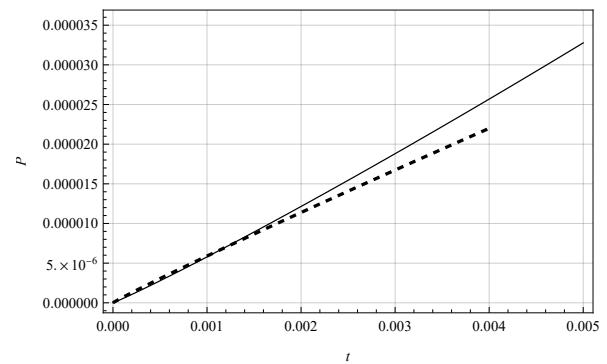
Slika 5.4: Vremenska evolucija skladištene energije po jedinici zapremine kao odziv na zadatu deformaciju kao harmonijsku prinudu,  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ , u slučaju kada  $\phi_\sigma$  nema nula, dobijena za parametre modela kao u tabeli 5.1.



(a) Snaga disipacije izražena: preko deformacije - označena punom linijom i preko napona - označena isprekidanom linijom.

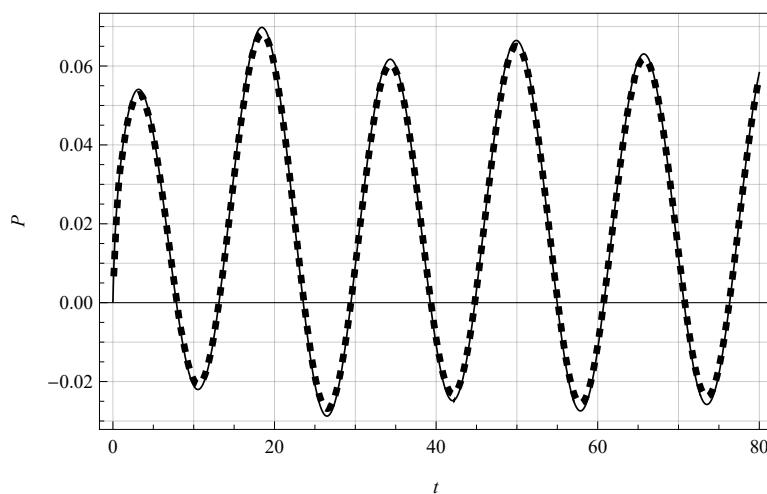


(b) Asimptotika snage disipacije izražene preko deformacije za vremena bliska nuli, označena isprekidanom linijom.



(c) Asimptotika snage disipacije izražene preko napona za vremena bliska nuli, označena isprekidanom linijom.

Slika 5.5: Vremenska evolucija skladištene energije po jedinici zapremine kao odziv na zadatu deformaciju kao harmonijsku prinudu,  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ , u slučaju kada  $\phi_\sigma$  nema nula, dobijena za parametre modela kao u tabeli 5.1.



Slika 5.6: Poredjenje vremenske evolucije snage po jedinici zapremine izražene preko deformacije - označene punom linijom i preko napona - označene isprekidanom linijom, koje predstavljaju odzive na zadatu deformaciju kao harmonijsku prinudu,  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ , u slučaju kada  $\phi_\sigma$  nema nula, dobijene za parametre modela kao u tabeli 5.1.

Iako parametri modela, u slučaju kada funkcija  $\phi_\sigma$  ima negativnu realnu nulu, ne zadovoljavaju sužene termodinamičke restrikcije, videti (5.25) i (5.26), i energije i snage disipacije su pozitivne i oscilatorne funkcije, videti sliku 5.7, ukazujući na činjenicu da su sužene termodinamičke restrikcije dovoljan, ali ne i potreban uslov da moduluo relaksacije bude kompletno monotona funkcija, a funkcija puzanja da bude Bernštajnova funkcija. Razlike u vremenskim profilima, kako energija, tako i snaga disipacije, istaknutije su nego u prethodnom slučaju, sa prilično velikim neskladom između energija, koji se povećava sa vremenom, uporediti slike 5.7a i 5.7c. Vremenski profili snage su isti, bez obzira da li su energija i snaga disipacije izraženi preko modula relaksacije ili preko funkcije puzanja, videti sliku 5.8.

Nasuprot prethodnim slučajevima, ako su parametri modela takvi da funkcija  $\phi_\sigma$  ima par kompleksno konjugovanih nula, energija izražena preko modula relaksacije je negativna na određenim vremenskim intervalima, kao i snaga disipacije, videti slike 5.9b i 5.9c, budući da sužene termodinamičke restrikcije nisu zadovoljene, dok su termodinamičke restrikcije zadovoljene. Dakle, energija izražena preko funkcije puzanja je pozitivna, oscilatorna i rastuća sa vremenom, kao što se vidi na slici 5.9a. Iako je potencijalna energija isključivo nenegativna za elastično telo, negativnost potencijalne energije nije neuobičajena pojava u mehanici materijalne tačke, dok je uprkos činjenici da je snaga disipacije na određenim intervalima negativna, njen integral od početnog trenutka, koji predstavlja ukupnu disipiranu energiju, pozitivan. Treba naglasiti da, u poređenju sa prethodna dva slučaja, intervali kada je snaga negativna, kao i njene apsolutne vrednosti, su najmanji u ovom slučaju, dok najveći intervali i apsolutne vrednosti odgovaraju slučaju kada funkcija  $\phi_\sigma$  nema nula, uporediti sliku 5.10 sa slikama 5.6 i 5.8.

Da bi se izveli asimptotski izrazi za energiju i disipiranu snagu po jedinici zapremine izraženi preko modula relaksacije, prema (4.4) i (4.6), potrebno je poznavati asimptotsko ponašanje modula relaksacije, datog sa (4.15), koje se dobija u obliku (4.162), te je asimptotika izraza za energiju po jedinici zapremine, prema (4.4) i vodećem članu u (4.162), data sa

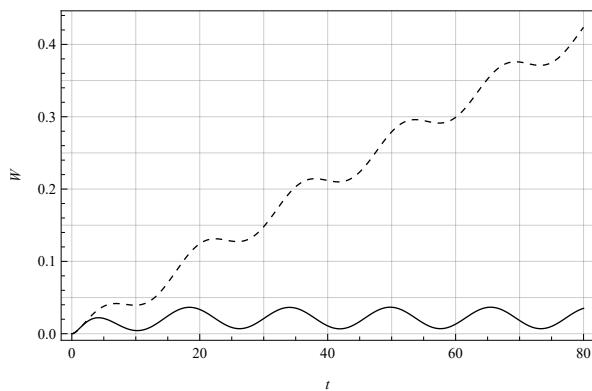
$$\begin{aligned}
 W(t) &= \frac{1}{2} \sigma_{sr}(t) \varepsilon^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t (-\dot{\sigma}_{sr}(t-t')) (\varepsilon(t) - \varepsilon(t'))^2 dt' \\
 &\sim \frac{1}{2} \frac{b_2}{a_3} \frac{t^{-(\nu-\alpha)}}{\Gamma(1-(\nu-\alpha))} \varepsilon_0^2 \omega^2 t^2 - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{b_2}{a_3} \frac{(t-t')^{-1-(\nu-\alpha)}}{\Gamma(-(\nu-\alpha))} \varepsilon_0^2 \omega^2 (t-t')^2 dt' \\
 &\sim \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \omega^2 \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{|\Gamma(-(\nu-\alpha))|} \left( \frac{t^{2-(\nu-\alpha)}}{\nu-\alpha} + \int_0^t (t-t')^{1-(\nu-\alpha)} dt' \right) \\
 &\sim \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \omega^2 \frac{b_2}{a_3} \frac{t^{2-(\nu-\alpha)}}{|\Gamma(-(\nu-\alpha))|} \left( \frac{1}{\nu-\alpha} + \frac{1}{2-(\nu-\alpha)} \right) \\
 &\sim (1-(\nu-\alpha)) \frac{b_2}{a_3} \varepsilon_0^2 \omega^2 \frac{t^{2-(\nu-\alpha)}}{\Gamma(3-(\nu-\alpha))}, \quad \text{kada } t \rightarrow 0,
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

gde je iskorišćeno ponašanje  $\sin x \sim x$ , kada  $x \rightarrow 0$ , dok je asimptotika izraza za snagu disipacije po jedinici zapremine, prema (4.6) i vodećem članu u (4.162), data sa

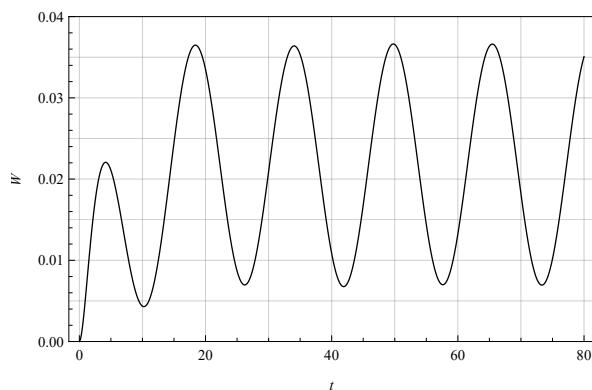
$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(t) &= \frac{1}{2} (-\dot{\sigma}_{sr}(t)) \varepsilon^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \ddot{\sigma}_{sr}(t-t') (\varepsilon(t) - \varepsilon(t'))^2 dt' \\
 &\sim \frac{1}{2} \frac{b_2}{a_3} \frac{t^{-1-(\nu-\alpha)}}{|\Gamma(-(\nu-\alpha))|} \varepsilon_0^2 \omega^2 t^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{b_2}{a_3} \frac{(t-t')^{-2-(\nu-\alpha)}}{\Gamma(-1-(\nu-\alpha))} \varepsilon_0^2 \omega^2 (t-t')^2 dt' \\
 &\sim \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \omega^2 \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{\Gamma(-1-(\nu-\alpha))} \left( -\frac{t^{1-(\nu-\alpha)}}{-1-(\nu-\alpha)} + \int_0^t (t-t')^{-(\nu-\alpha)} dt' \right) \\
 &\sim \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \omega^2 \frac{b_2}{a_3} \frac{t^{1-(\nu-\alpha)}}{\Gamma(-1-(\nu-\alpha))} \left( -\frac{1}{-1-(\nu-\alpha)} + \frac{1}{1-(\nu-\alpha)} \right) \\
 &\sim (\nu-\alpha) \varepsilon_0^2 \omega^2 \frac{b_2}{a_3} \frac{t^{1-(\nu-\alpha)}}{\Gamma(2-(\nu-\alpha))}, \quad \text{kada } t \rightarrow 0.
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Sa druge strane, izvođenje asimptotike izraza za energiju i snagu disipacije po jedinici zapremine izraženih preko funkcije puzanja, prema (4.5) i (4.7), zahteva poznavanje asimptotike funkcije puzanja, date sa (4.27), što je izvedeno u obliku (4.169), kao i poznavanje asimptotike napona, date u obliku

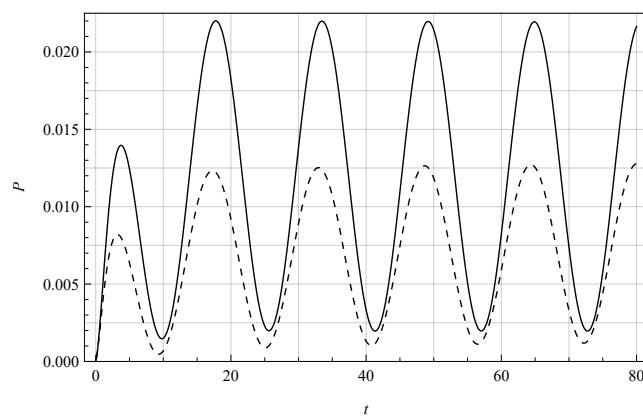
$$\begin{aligned}
 \sigma(t) &= \varepsilon_0 \omega \frac{b_2}{a_3} \frac{t^{1-(\nu-\alpha)}}{\Gamma(2-(\nu-\alpha))} + \varepsilon_0 \omega \frac{b_2}{a_3} \left( \frac{b_1}{b_2} - \frac{a_2}{a_3} \right) \frac{t^{1+2\alpha+\beta-\nu}}{\Gamma(2+2\alpha+\beta-\nu)} \\
 &\quad + \varepsilon_0 \omega \frac{b_2}{a_3} \left( \frac{a_2^2}{a_3^2} - \frac{a_2}{a_3} \frac{b_1}{b_2} - \frac{a_1}{a_3} \right) \frac{t^{1+3\alpha+2\beta-\nu}}{\Gamma(2+3\alpha+2\beta-\nu)} - \varepsilon_0 \omega^3 \frac{b_2}{a_3} \frac{t^{3-(\nu-\alpha)}}{\Gamma(4-(\nu-\alpha))} + O(t^{1+4\alpha+3\beta-\nu}),
 \end{aligned} \tag{5.50}$$



(a) Skladištena energija izražena: preko deformacije - označena punom linijom i preko napona - označena isprekidanom linijom.

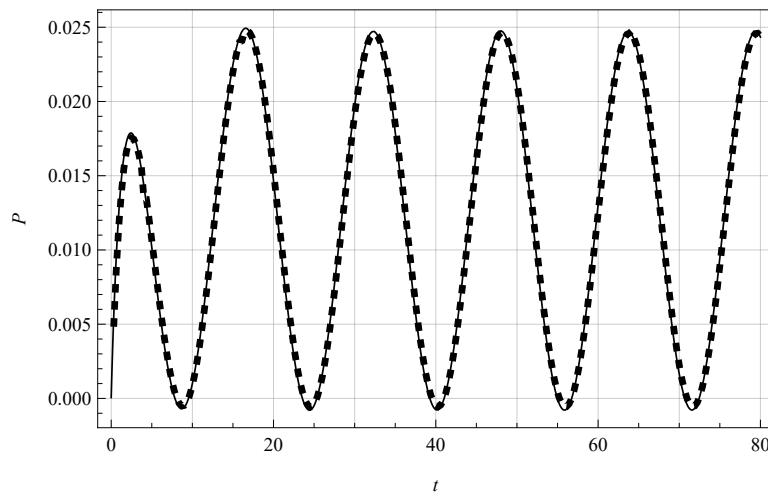


(b) Skladištena energija izražena preko deformacije.

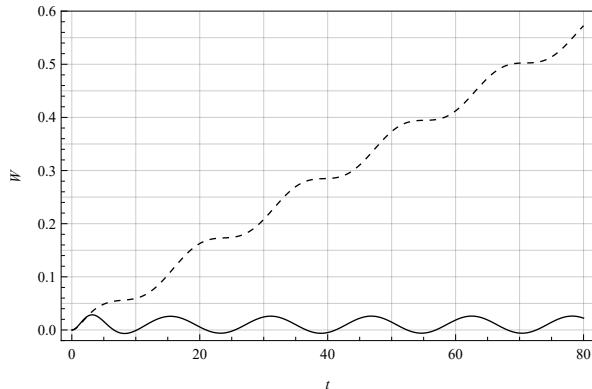


(c) Snaga disipacije izražena: preko deformacije - označena punom linijom i preko napona - označena isprekidanom linijom.

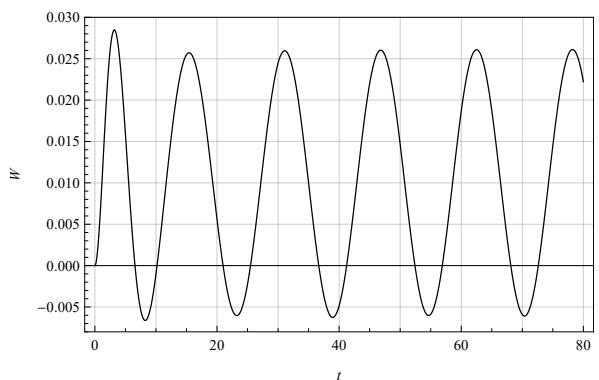
Slika 5.7: Vremenska evolucija skladištene energije i snage disipacije po jedinici zapremine kao odziv na zadatu deformaciju kao harmonijsku prinudu,  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ , u slučaju kada  $\phi_\sigma$  ima negativnu realnu nulu, dobijene za parametre modela kao u tabeli 5.1.



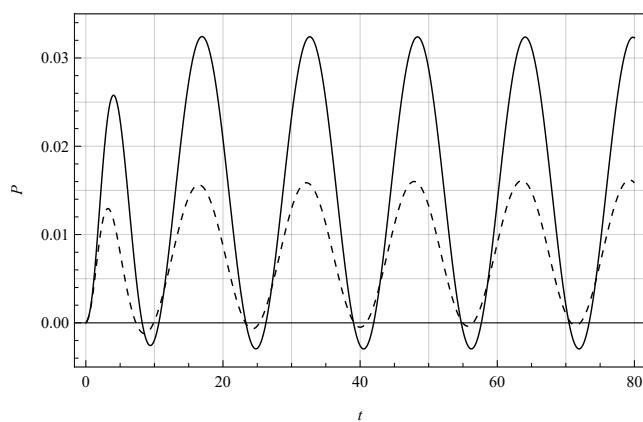
Slika 5.8: Poredanje vremenske evolucije snage po jedinici zapremine izražene preko deformacije - označene punom linijom i preko napona - označene isprekidanom linijom, koje predstavljaju odzive na zadatu deformaciju kao harmonijsku prinudu,  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ , u slučaju kada  $\phi_\sigma$  ima negativnu realnu nulu, dobijene za parametre modela kao u tabeli 5.1.



(a) Skladištena energija izražena: preko deformacije - označena punom linijom i preko napona - označena isprekidanom linijom.

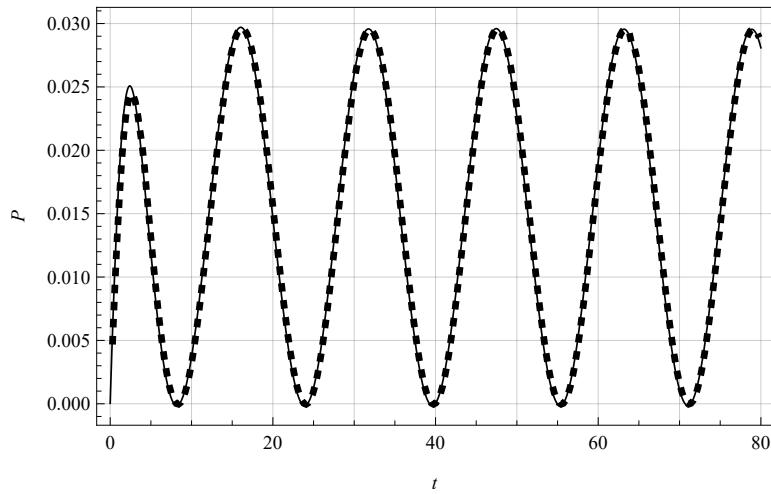


(b) Skladištena energija izražena preko deformacije.



(c) Snaga disipacije izražena: preko deformacije - označena punom linijom i preko napona - označena isprekidanom linijom.

Slika 5.9: Vremenska evolucija skladištene energije i snage disipacije po jedinici zapremine kao odziv na zadatu deformaciju kao harmonijsku prinudu,  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ , u slučaju kada  $\phi_\sigma$  ima par kompleksno konjugovanih nula, dobijene za parametre modela kao u tabeli 5.1.



Slika 5.10: Poređenje vremenske evolucije snage po jedinici zapremine izražene preko deformacije - označene punom linijom i preko napona - označene isprekidanom linijom, koje predstavljaju odzive na zadatu deformaciju kao harmonijsku prinudu,  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ , u slučaju kada  $\phi_\sigma$  ima par kompleksno konjugovanih nula, dobijene za parametre modela kao u tabeli 5.1.

kada  $t \rightarrow 0$ , gde napon predstavlja odziv na harmonijsku deformaciju (5.40) i dat je sa (5.42). Stoga se za asimptotiku energije po jedinici zapremine, prema (4.5) i vodećim članovima u (4.169) i (5.50), dobija

$$\begin{aligned} W(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \dot{\varepsilon}_{cr}(t-t') \sigma^2(t') dt' \\ &\sim \frac{1}{2} \int_0^t \frac{a_3}{b_2} \frac{(t-t')^{-1+(\nu-\alpha)}}{\Gamma(\nu-\alpha)} \varepsilon_0^2 \omega^2 \frac{b_2^2}{a_3^2} \frac{t'^{2-2(\nu-\alpha)}}{\Gamma^2(2-(\nu-\alpha))} dt' \\ &\sim \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \omega^2 \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{\Gamma(\nu-\alpha) \Gamma^2(2-(\nu-\alpha))} \int_0^t \frac{t'^{2-2(\nu-\alpha)}}{(t-t')^{1-(\nu-\alpha)}} dt' \\ &\sim \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \omega^2 \frac{b_2}{a_3} \frac{\Gamma(3-2(\nu-\alpha))}{\Gamma^2(2-(\nu-\alpha)) \Gamma(3-(\nu-\alpha))} t^{2-(\nu-\alpha)}, \quad \text{kada } t \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.51)$$

dok se za asimptotiku snage disipacije po jedinici zapremine, prema (4.7) i vodećim članovima u (4.169) i (5.50), dobija

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t) &= \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{cr}(t) \sigma^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t (-\ddot{\varepsilon}_{cr}(t-t')) (\sigma(t) - \sigma(t'))^2 dt' \\ &\sim \frac{1}{2} \frac{a_3}{b_2} \frac{t^{-1+(\nu-\alpha)}}{\Gamma(\nu-\alpha)} \varepsilon_0^2 \omega^2 \frac{b_2^2}{a_3^2} \frac{t^{2-2(\nu-\alpha)}}{\Gamma^2(2-(\nu-\alpha))} - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{a_3}{b_2} \frac{(t-t')^{-2+(\nu-\alpha)}}{\Gamma(-1+\nu-\alpha)} \varepsilon_0^2 \omega^2 \frac{b_2^2}{a_3^2} \frac{(t^{1-(\nu-\alpha)} - t'^{1-(\nu-\alpha)})^2}{\Gamma^2(2-(\nu-\alpha))} dt' \\ &\sim \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \omega^2 \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{\Gamma(-1+\nu-\alpha) \Gamma^2(2-(\nu-\alpha))} \\ &\quad \times \left( \frac{t^{1-(\nu-\alpha)}}{-1+\nu-\alpha} - \int_0^t (t-t')^{-2+(\nu-\alpha)} (t^{1-(\nu-\alpha)} - t'^{1-(\nu-\alpha)})^2 dt' \right) \\ &\sim \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \omega^2 \frac{b_2}{a_3} \left( \frac{1}{-1+\nu-\alpha} - \frac{\pi}{\sin(\nu-\alpha)\pi} \left( 2 - \frac{\Gamma(3-2(\nu-\alpha))}{\Gamma^2(2-(\nu-\alpha))} - \frac{1}{\Gamma(\nu-\alpha)\Gamma(2-(\nu-\alpha))} \right) \right) \\ &\quad \times \frac{t^{1-(\nu-\alpha)}}{\Gamma(-1+(\nu-\alpha)) \Gamma^2(2-(\nu-\alpha))}, \quad \text{kada } t \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Treba primetiti da se asimptotika za napon u obliku (5.50) dobija inverzijom asimptotike napona u Laplasovom domenu, videti (5.41), što je za model I<sup>+</sup>ID.ID, dat sa (5.24), izraz

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(s) &= \varepsilon_0 s^{\beta+\nu} \frac{b_1 + b_2 s^{\alpha+\beta}}{a_1 + a_2 s^{\alpha+\beta} + a_3 s^{2(\alpha+\beta)}} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \varepsilon_0 \omega \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{2-(\nu-\alpha)}} \left( 1 + \frac{b_1}{b_2} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} \right) \left( 1 + \frac{a_2}{a_3} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} + \frac{a_1}{a_3} \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}} \right)^{-1} \left( 1 + \frac{\omega^2}{s^2} \right)^{-1} \\ &= \varepsilon_0 \omega \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{2-(\nu-\alpha)}} \left( 1 + \frac{b_1}{b_2} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} \right) \\ &\quad \times \left( 1 - \frac{a_2}{a_3} \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} + \left( \frac{a_2^2}{a_3^2} - \frac{a_1}{a_3} \right) \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}} + O(s^{-3(\alpha+\beta)}) \right) \left( 1 - \frac{\omega^2}{s^2} + O(s^{-4}) \right) \\ &= \varepsilon_0 \omega \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{2-(\nu-\alpha)}} \left( 1 + \left( \frac{b_1}{b_2} - \frac{a_2}{a_3} \right) \frac{1}{s^{\alpha+\beta}} + \left( \frac{a_2^2}{a_3^2} - \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2 b_1}{a_3 b_2} \right) \frac{1}{s^{2(\alpha+\beta)}} - \frac{\omega^2}{s^2} + O(s^{-3(\alpha+\beta)}) \right) \\ &= \varepsilon_0 \omega \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{2-(\nu-\alpha)}} + \varepsilon_0 \omega \frac{b_2}{a_3} \left( \frac{b_1}{b_2} - \frac{a_2}{a_3} \right) \frac{1}{s^{2+2\alpha+\beta-\nu}} \\ &\quad + \varepsilon_0 \omega \frac{b_2}{a_3} \left( \frac{a_2^2}{a_3^2} - \frac{a_2 b_1}{a_3 b_2} - \frac{a_1}{a_3} \right) \frac{1}{s^{2+3\alpha+2\beta-\nu}} - \varepsilon_0 \omega^3 \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{4-(\nu-\alpha)}} + O(s^{-2-4\alpha-3\beta+\nu}), \quad \text{kada } s \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Članovi  $-\varepsilon_0 \omega^3 \frac{b_2}{a_3} \frac{1}{s^{4-(\beta+\nu)}}$  i  $-\varepsilon_0 \omega^3 \frac{b_2}{a_3} \frac{t^{3-(\beta+\nu)}}{\Gamma(4-(\beta+\nu))}$ , koji se respektivno pojavljuju u (5.53) i (5.50), ne postoje ukoliko je  $3(\alpha+\beta) \leq 2$ , tj. ako je  $\alpha+\beta \leq \frac{2}{3}$ .



# 6. Prostiranje talasa u trodimenzionom frakcionom viskoelastičnom telu

Talasna jednačina za trodimenziono, homogeno, izotropno i elastično telo, zapisana preko polja pomeranja  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , koje se određuje u tački određenoj radijus vektorom  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  u vremenskom trenutku  $t > 0$ , uzima oblik

$$\frac{\mu}{\varrho} \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t) = \partial_{tt}^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad (6.1)$$

predstavljajući jednačinu koja se dobija redukcijom sistema jednačina koji sadrži jednačinu kretanja deformabilnog čvrstog tela

$$\frac{1}{\varrho} \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t) = \partial_{tt}^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad (6.2)$$

jednačinu infinitezimalne deformacije

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left( \operatorname{grad} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + (\operatorname{grad} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t))^T \right), \quad (6.3)$$

i Hukov zakon

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}, t) = \lambda \operatorname{tr} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{I}} + 2\mu \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}, t) \quad (6.4)$$

kao konstitutivnu jednačinu, pri čemu su  $\lambda$  i  $\mu$  Lameovi koeficijenti koji odgovaraju homogenom, izotropnom i elastičnom telu,  $\varrho$  je gustina materijala, dok su  $\mathbf{f}_b$  zapreminske sile po jedinici mase,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  je Košijev tenzor napona,  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  je infinitezimalni tenzor deformacije, a  $\hat{\mathbf{I}}$  je jedinična matrica. Talasna jednačina (6.1), prepisana u obliku

$$c_c^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - c_s^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t) = \partial_{tt}^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad (6.5)$$

preko brzina kompresionog i vrtložnog talasa  $c_c = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}}$  i  $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$  respektivno, primenom operatora divergencije i rotora razdvaja se na dve trodimenzione talasne jednačine

$$c_c^2 \Delta \varphi(\mathbf{r}, t) - \partial_{tt}^2 \varphi(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{div} \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t), \quad \text{sa } \varphi(\mathbf{r}, t) = \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad (6.6)$$

$$c_s^2 \Delta \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) - \partial_{tt}^2 \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{rot} \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t), \quad \text{sa } \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad (6.7)$$

koje odgovaraju propagaciji kompresionih i vrtložnih talasa respektivno, videti [73].

Refleksija trodimenzionih elastičnih talasa je razmatrana u [74] analizom talasne jednačine za skalarno i vektorsko polje u slučaju kada nema zapreminske sila, dok je propagacija trodimenzionog elastičnog talasa analizirana u [75, 76, 77] koristeći cilindrične koordinate. Dalje razmatranje talasne propagacije u periodičnim sredinama je sadržano u [78, 79, 80].

Spregnuti mehanički i toplotni efekti, razmatranjem talasne propagacije u trodimenzionoj termoelastičnoj sredini, ispitani su u [81] razmatranjem propagacije ravnih talasa i talasnih jednačina za skalarno i vektorsko polje, dok je u [82] ispitana talasna propagacija u termoelastičnoj cilindričnoj sredini, a refleksija trodimenzionih ravnih talasa u visoko anizotropnom termoelastičnom materijalu je analizirana u [83]. Numerički metodi su korišćeni u [84] i [85] za opis udarnih talasa, kao i za opis propagacije trodimenzionog elastičnog talasa na neograničenom domenu.

U cilju uopštavanja klasične trodimenzione talasne jednačine za homogeno, izotropno i elastično telo, date sa (6.1) ili ekvivalentno sa (6.5), u trodimenzionu talasnu jednačinu za homogeno, izotropno i viskoelastično telo, usvojen je pristup koji proističe iz razmatranja jednodimenzionog viskoelastičnog tela, u kome se napon, umesto Hukovim zakonom  $\sigma = E \varepsilon$ , videti takođe (2.1)<sub>1</sub>, može izraziti preko deformacije kroz moduo reklassacije  $\sigma_{sr}$  kao

$$\sigma(t) = \frac{d}{dt} (\sigma_{sr}(t) *_t \varepsilon(t)) = \frac{d}{dt} \int_0^t \sigma_{sr}(t-t') \varepsilon(t') dt', \quad (6.8)$$

videti takođe (2.14)<sub>1</sub>, tako da uzima u obzir različite osobine materijala viskoelastičnog tela uračunate izborom različitih modula relaksacije. Naime, klasični Hukov zakon (6.4), dat sa

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}, \quad \text{tj. } \frac{1}{\varrho}\sigma_{11} = c_c^2\varepsilon_{11} + (c_c^2 - 2c_s^2)\varepsilon_{22} + (c_c^2 - 2c_s^2)\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{22} &= \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}, \quad \text{tj. } \frac{1}{\varrho}\sigma_{22} = (c_c^2 - 2c_s^2)\varepsilon_{11} + c_c^2\varepsilon_{22} + (c_c^2 - 2c_s^2)\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= \lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33}, \quad \text{tj. } \frac{1}{\varrho}\sigma_{33} = (c_c^2 - 2c_s^2)\varepsilon_{11} + (c_c^2 - 2c_s^2)\varepsilon_{22} + c_c^2\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}, \quad \text{tj. } \frac{1}{\varrho}\sigma_{12} = 2c_s^2\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{13} &= 2\mu\varepsilon_{13}, \quad \text{tj. } \frac{1}{\varrho}\sigma_{13} = 2c_s^2\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23}, \quad \text{tj. } \frac{1}{\varrho}\sigma_{23} = 2c_s^2\varepsilon_{23},\end{aligned}$$

se uopštava uvođenjem dva različita modula relaksacije  $\sigma_{sr}^{(c)}$  i  $\sigma_{sr}^{(s)}$  umesto brzina kompresionih i vrtložnih talasa,  $c_c$  i  $c_s$ , dajući

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \partial_t \left( \sigma_{sr}^{(c)} *_t \varepsilon_{11} \right) + \partial_t \left( \sigma_{sr}^{(c,s)} *_t \varepsilon_{22} \right) + \partial_t \left( \sigma_{sr}^{(c,s)} *_t \varepsilon_{33} \right), \quad \sigma_{12} = 2\partial_t \left( \sigma_{sr}^{(s)} *_t \varepsilon_{12} \right), \\ \sigma_{22} &= \partial_t \left( \sigma_{sr}^{(c,s)} *_t \varepsilon_{11} \right) + \partial_t \left( \sigma_{sr}^{(c)} *_t \varepsilon_{22} \right) + \partial_t \left( \sigma_{sr}^{(c,s)} *_t \varepsilon_{33} \right), \quad \sigma_{13} = 2\partial_t \left( \sigma_{sr}^{(s)} *_t \varepsilon_{13} \right), \\ \sigma_{33} &= \partial_t \left( \sigma_{sr}^{(c,s)} *_t \varepsilon_{11} \right) + \partial_t \left( \sigma_{sr}^{(c,s)} *_t \varepsilon_{22} \right) + \partial_t \left( \sigma_{sr}^{(c)} *_t \varepsilon_{33} \right), \quad \sigma_{23} = 2\partial_t \left( \sigma_{sr}^{(s)} *_t \varepsilon_{23} \right),\end{aligned}$$

sa  $\sigma_{sr}^{(c,s)} = \sigma_{sr}^{(c)} - 2\sigma_{sr}^{(s)}$ , i svodeći se na

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}, t) = \partial_t \left( \sigma_{sr}^{(c,s)}(t) *_t \text{tr} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}, t) \right) \hat{\mathbf{I}} + 2\partial_t \left( \sigma_{sr}^{(s)}(t) *_t \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}, t) \right), \quad (6.9)$$

čime se uopštavaju karakteristike prostiranja kompresionih i vrtložnih talasa, uzimajući u obzir i viskozna svojstva homogenog izotropnog tela pored elastičnih, što podrazumeva da je propagacija kompresionih i vrtložnih talasa opisana različitim memorijskim jezgrima umesto različitim brzinama. Konstitutivna jednačina trodimenzionog viskoelastičnog tela (6.9) se dalje koristi zajedno sa jednačinom kretanja deformabilnog čvrstog tela (6.2) i tenzorom deformacije (6.3) kako bi se formulisala i rešila odgovarajuća talasna jednačina.

Frakcionalo uopštenje talasne jednačine za talase u disperzionim sredinama je sprovedeno u [86], dok se frakcionala Cenerova talasna jednačina razmatra u [71] za slučaj trodimenzionog deformabilnog tela, a u [48] se dokazuje postojanje i jedinstvenost rešenja trodimenzione frakcione Cenerove talasne jednačine. Numerički metodi, uključujući i metod konačnih elemenata, su korišćeni u [87, 88] da bi se analizirali tranzijentni talasni procesi u linearnim viskoelastičnim čvrstim telima, dok su u [89, 90, 91, 92] primenjeni različiti numerički metodi da bi se dobila rešenja razmatranih modela. Takođe, različiti metodi za diskretizaciju stohastičke frakcione talasne jednačine se koriste u [93].

Postoje brojne primene viskoelastičnih talasnih jednačina, uključujući modeliranje ultrazvučnih talasa koji se koriste u proceni oštećenja materijala, videti [94], trodimenzione čvrste termo-viskoelastične materijale, videti [95], talasnu propagaciju nakon cunamija, videti [96], seizmičke talase, videti [97], modeliranje slojevitih poroznih medija, kao što je korišćeno u [98], i mnoge druge. Ispitivanja različitih talasa koji se koriste za analize koje uključuju ljudska ili druga biološka tkiva se mogu pronaći na primer u [99, 100, 101].

## 6.1 Polje pomeranja

Metod integralnih transformacija, Furijeva transformacija po prostornim koordinatama, definisana sa

$$\bar{f}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[f(\mathbf{r})](\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} V, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3,$$

i Laplasova transformacija po vremenu, definisana sa (2.7), su korišćene da bi se rešio Košijev početni problem za trodimenzionu talasnu jednačinu viskoelastičnog tela, razmatranu kao sistem jednačina koji se sastoji od jednačine kretanja deformabilnog čvrstog tela (6.2), tenzora deformacije (6.3) i konstitutivne jednačine (6.9), pri čemu je modulima relaksacije  $\sigma_{sr}^{(c)}$  i  $\sigma_{sr}^{(s)}$  opisan odziv materijala viskoelastičnog tela, tj. da bi se rešio sistem jednačina

$$\frac{1}{\varrho} \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t) = \partial_{tt}^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad (6.10)$$

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left( \text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + (\text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t))^T \right), \quad (6.11)$$

$$\hat{\sigma}(\mathbf{r}, t) = \partial_t \left( \sigma_{sr}^{(c,s)}(t) *_t \text{tr} \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) \right) \hat{\mathbf{I}} + 2\partial_t \left( \sigma_{sr}^{(s)}(t) *_t \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) \right), \quad (6.12)$$

na  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ , za  $t > 0$ , koji podleže početnim uslovima

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \quad \text{i} \quad \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}), \quad (6.13)$$

a pretpostavljajući da sve komponente polja pomeranja, kao i Košijevog tenzora napona, iščezavaju kako bilo koja od koordinata teži u pozitivnu ili negativnu beskonačnu vrednost. Naime, Furijeva i Laplasova transformacija primenjena na prethodno spomenut sistem jednačina, daje

$$\frac{1}{\varrho} \mathbf{i}\mathbf{k} \tilde{\hat{\sigma}}(\mathbf{k}, s) + \tilde{\mathbf{f}}_b(\mathbf{k}, s) = s^2 \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s) - s\bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) - \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{k}), \quad (6.14)$$

$$\tilde{\hat{\varepsilon}}(\mathbf{k}, s) = \frac{1}{2} (\mathbf{i}\mathbf{k} \otimes \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s) + \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s) \otimes (\mathbf{i}\mathbf{k})), \quad (6.15)$$

$$\tilde{\hat{\sigma}}(\mathbf{k}, s) = s\tilde{\sigma}_{sr}^{(c,s)}(s) (\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s)) \hat{\mathbf{I}} + 2s\tilde{\sigma}_{sr}^{(s)}(s) \tilde{\hat{\varepsilon}}(\mathbf{k}, s), \quad (6.16)$$

jer je  $\mathcal{F}[\nabla](\mathbf{k}) = \mathbf{i}\mathbf{k}$  implicirajući  $\mathcal{F}[\text{div } \hat{\sigma}(\mathbf{r}, t)](\mathbf{k}) = \mathcal{F}[\nabla \hat{\sigma}(\mathbf{r}, t)](\mathbf{k}) = \mathbf{i}\mathbf{k} \tilde{\hat{\sigma}}(\mathbf{k}, t)$ ,  $\mathcal{F}[\text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)](\mathbf{k}) = \mathcal{F}[\nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)](\mathbf{k}) = \mathbf{i}\mathbf{k} \otimes \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$  i  $\mathcal{F}[\text{tr} \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t)](\mathbf{k}) = \mathcal{F}[\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)](\mathbf{k}) = \mathcal{F}[\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)](\mathbf{k}) = \mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ , pri čemu se oznaka  $\otimes$  koristi kao dijadski proizvod, dok se sistem jednačina (6.14) - (6.16) redukuje na jednu jednačinu oblika

$$\begin{aligned} & \frac{s\tilde{\sigma}_{sr}^{(c,s)}(s)}{\varrho} \mathbf{i}\mathbf{k} (\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s)) + \frac{s\tilde{\sigma}_{sr}^{(s)}(s)}{\varrho} \mathbf{i}\mathbf{k} (\mathbf{i}\mathbf{k} \otimes \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s)) \\ & + \frac{s\tilde{\sigma}_{sr}^{(s)}(s)}{\varrho} \mathbf{i}\mathbf{k} (\tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s) \otimes (\mathbf{i}\mathbf{k})) - s^2 \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s) = -s\bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) - \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{k}) - \tilde{\mathbf{f}}_b(\mathbf{k}, s), \quad \text{tj.} \\ & \left( \left( \frac{s\tilde{\sigma}_{sr}^{(s)}(s)}{\varrho} k^2 + s^2 \right) \hat{\mathbf{I}} + \frac{s(\sigma_{sr}^{(c)}(s) - \sigma_{sr}^{(s)}(s))}{\varrho} (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \right) \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s) = s\bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) + \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{k}) + \tilde{\mathbf{f}}_b(\mathbf{k}, s), \end{aligned} \quad (6.17)$$

izraženu preko polja pomeranja u Furijeovom i Laplasovom domenu, budući da je  $\mathbf{i}\mathbf{k} (\mathbf{i}\mathbf{k} \otimes \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s)) = (\mathbf{i}\mathbf{k})^2 \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s)$ ,  $\mathbf{i}\mathbf{k} (\tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s) \otimes (\mathbf{i}\mathbf{k})) = (\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s)) \mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{i}\mathbf{k} (\tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s) \cdot (\mathbf{i}\mathbf{k})) = ((\mathbf{i}\mathbf{k}) \otimes (\mathbf{i}\mathbf{k})) \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s)$ , koja se može posmatrati kao talasna jednačina viskoelastičnog tela u Furijeovom i Laplasovom domenu.

### 6.1.1 Polje pomeranja izraženo preko funkcija $\varphi$ i $\Omega$

Klasične trodimenzione talasne jednačine (6.6) i (6.7), koje opisuju prostiranje kompresionih i vrtložnih talasa i koje su izražene su preko  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  i  $\Omega(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  kao nepoznatih funkcija, uopštene su za viskoelastično telo, pri čemu se rešenje talasne jednačine viskoelastičnog tela, tj. sistema jednačina (6.10) - (6.12), dobija korišćenjem funkcija  $\varphi$  i  $\Omega$ , slično kao u slučaju klasične talasne jednačine.

Uopštenje talasne jednačine (6.6) postiže se na sledeći način: primenom skalarnog i vektorskog proizvoda talasnog vektora  $\mathbf{i}\mathbf{k}$  sa talasnom jednačinom viskoelastičnog tela u Furijeovom i Laplasovom domenu (6.17), dobija se

$$\left( \frac{s\tilde{\sigma}_{sr}^{(c)}(s)}{\varrho} k^2 + s^2 \right) (\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s)) = \mathbf{i}\mathbf{k} \cdot (s\bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) + \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{k}) + \tilde{\mathbf{f}}_b(\mathbf{k}, s)), \quad \text{tj.} \quad (6.18)$$

$$-\tilde{c}_c^2(s) k^2 (\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s)) - \mathbf{i}\mathbf{k} \cdot (s^2 \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s) - s\bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) - \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{k})) = -\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_b(\mathbf{k}, s),$$

jer je  $\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot ((\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s)) = \mathbf{i}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s))) = k^2 (\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, s))$ , pri čemu je

$$\tilde{c}_c(s) = \sqrt{\frac{s\tilde{\sigma}_{sr}^{(c)}(s)}{\varrho}} \quad (6.19)$$

memorijska funkcija koja odgovara kompresionim talasima, te nakon primene inverzne Furijeove i Laplasove transformacije, sa  $\mathcal{F}[\Delta](\mathbf{k}) = \mathcal{F}[\nabla \cdot \nabla](\mathbf{k}) = (\mathbf{i}\mathbf{k})^2 = -k^2$ , prethodni izraz postaje

$$\begin{aligned} & \tilde{c}_c^2(s) \Delta \text{div} \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{r}, s) - \text{div}(s^2 \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{r}, s) - s\bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{r}) - \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{r})) = -\text{div} \tilde{\mathbf{f}}_b(\mathbf{r}, s), \quad \text{tj.} \\ & \Delta (\mathcal{L}^{-1} [\tilde{c}_c^2(s) \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, s)](\mathbf{r}, t)) - \partial_{tt}^2 \varphi(\mathbf{r}, t) = -\text{div} \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t), \quad \text{sa } \varphi(\mathbf{r}, t) = \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (6.20)$$

rudukujući se ili na

$$\frac{\dot{\sigma}_{sr}^{(c)}(t)}{\varrho} *_t \Delta \varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{\sigma_{sr/g}^{(c)}}{\varrho} \Delta \varphi(\mathbf{r}, t) - \partial_{tt}^2 \varphi(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{div} \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t), \quad (6.21)$$

ako je vrednost modula relaksacije u početnom trenutku  $\sigma_{sr/g}^{(c)} = \sigma_{sr}^{(c)}(0)$  konačna, te je i brzina prostiranja kompresionih talasa  $c_c = \sqrt{\frac{\sigma_{sr/g}^{(c)}}{\varrho}}$  konačna, zbog

$$\mathcal{L}^{-1} [\tilde{c}_c^2(s) \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, s)](\mathbf{r}, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s \tilde{\sigma}_{sr}^{(c)}(s)}{\varrho} \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, s) \right](\mathbf{r}, t) = \left( \frac{1}{\varrho} \dot{\sigma}_{sr}^{(c)}(t) + \frac{1}{\varrho} \sigma_{sr/g}^{(c)} \delta(t) \right) *_t \varphi(\mathbf{r}, t), \quad (6.22)$$

ili redukujući se na

$$\frac{\sigma_{sr}^{(c)}(t)}{\varrho} *_t \Delta \partial_t \varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{\sigma_{sr}^{(c)}(t)}{\varrho} \Delta \varphi_0(\mathbf{r}) - \partial_{tt}^2 \varphi(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{div} \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t), \quad (6.23)$$

sa  $\varphi_0(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}, 0)$ , ako je vrednost modula relaksacije u početnom trenutku beskonačna, pa i brzina prostiranja kompresionih talasa, zbog

$$\mathcal{L}^{-1} [\tilde{c}_c^2(s) \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, s)](\mathbf{r}, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\tilde{\sigma}_{sr}^{(c)}(s)}{\varrho} s \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, s) \right](\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varrho} \sigma_{sr}^{(c)}(t) *_t (\partial_t \varphi(\mathbf{r}, t) + \varphi_0(\mathbf{r}) \delta(t)), \quad (6.24)$$

dodatno videti poglavlje 2.1. Stoga je opšti oblik talasne jednačine izražen preko funkcije  $\varphi$  date sa (6.20), dok je njen specifični oblik kada je brzina prostiranja kompresionih talasa konačna dat sa (6.21), a talasna jednačina (6.23) odgovara slučaju kada je brzina prostiranja kompresionih talasa beskonačna. Svaka od prethodno spomenutih talasnih jednačina zahteva početne uslove

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}, 0) = \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \operatorname{div} \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \quad \text{i} \quad \dot{\varphi}_0(\mathbf{r}) = \partial_t \varphi(\mathbf{r}, 0) = \operatorname{div} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \operatorname{div} \mathbf{v}_0(\mathbf{r}), \quad (6.25)$$

koji proističu iz početnih uslova polja pomeranja (6.13).

Sa druge strane, uopštenje talasne jednačine (6.7) se postiže na sledeći način: vektorski proizvod talasnog vektora  $i\mathbf{k}$  sa talasnom jednačinom viskoelastičnog tela u Furijeovom i Laplasovom domenu (6.17) implicira

$$\begin{aligned} & \left( \frac{s \tilde{\sigma}_{sr}^{(s)}(s)}{\varrho} k^2 + s^2 \right) (i\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s)) = i\mathbf{k} \times (s \bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) + \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{k}) + \bar{\mathbf{f}}_b(\mathbf{k}, s)), \quad \text{tj.} \\ & -\tilde{c}_s^2(s) k^2 (i\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s)) - i\mathbf{k} \times (s^2 \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s) - s \bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) - \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{k})) = -i\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{f}}_b(\mathbf{k}, s), \end{aligned} \quad (6.26)$$

jer je  $i\mathbf{k} \times ((\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s)) = i\mathbf{k} \times (\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s))) = \mathbf{0}$ , pri čemu je

$$\tilde{c}_s(s) = \sqrt{\frac{s \tilde{\sigma}_{sr}^{(s)}(s)}{\varrho}} \quad (6.27)$$

memorijska funkcija koja odgovara vrtložnim talasima, te se izraz (6.26) transformiše u

$$\begin{aligned} & \tilde{c}_s^2(s) \Delta (\operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, s)) - \operatorname{rot} (s^2 \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, s) - s \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{v}_0(\mathbf{r})) = -\operatorname{rot} \bar{\mathbf{f}}_b(\mathbf{r}, s), \quad \text{tj.} \\ & \Delta \left( \mathcal{L}^{-1} [\tilde{c}_s^2(s) \tilde{\Omega}(\mathbf{r}, s)](\mathbf{r}, t) \right) - \partial_{tt}^2 \Omega(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{rot} \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t), \quad \text{sa} \quad \Omega(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (6.28)$$

nakon primene inverzne Furijeove i Laplasove transformacije, redukujući se na

$$\frac{\dot{\sigma}_{sr}^{(s)}(t)}{\varrho} *_t \Delta \Omega(\mathbf{r}, t) + \frac{\sigma_{sr/g}^{(s)}}{\varrho} \Delta \Omega(\mathbf{r}, t) - \partial_{tt}^2 \Omega(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{rot} \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t), \quad (6.29)$$

ako  $\sigma_{sr/g}^{(s)} = \sigma_{sr}^{(s)}(0)$  ima konačnu vrednost, a stoga i konačnu brzinu prostiranja vrtložnih talasa  $c_s = \sqrt{\frac{\sigma_{sr/g}^{(s)}}{\varrho}}$ , videti (6.22), ili se redukuje na

$$\frac{\sigma_{sr}^{(s)}(t)}{\varrho} *_t \Delta \partial_t \Omega(\mathbf{r}, t) + \frac{\sigma_{sr}^{(s)}(t)}{\varrho} \Delta \Omega_0(\mathbf{r}) - \partial_{tt}^2 \Omega(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{rot} \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t), \quad (6.30)$$

sa  $\Omega_0(\mathbf{r}) = \Omega(\mathbf{r}, 0)$ , ako  $\sigma_{sr/g}^{(s)} = \sigma_{sr}^{(s)}(0)$  ima beskonačnu vrednost, a stoga i beskonačnu brzinu prostiranja vrtložnih talasa. Dakle, opšti oblik talasne jednačine izražen preko funkcije  $\Omega$  je dat sa (6.28), dok je njegov specifični oblik kada je brzina prostiranja vrtložnih talasa konačna dat sa (6.29), a talasna jednačina (6.30) odgovara slučaju kada je brzina prostiranja vrtložnih talasa beskonačna. Svaka od prethodno spomenutih talasnih jednačina zahteva početne uslove

$$\Omega_0(\mathbf{r}) = \Omega(\mathbf{r}, 0) = \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \text{rot } \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \quad \text{i} \quad \dot{\Omega}_0(\mathbf{r}) = \partial_t \Omega(\mathbf{r}, 0) = \text{rot } \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \text{rot } \mathbf{v}_0(\mathbf{r}), \quad (6.31)$$

koji proističu iz početnih uslova polje pomeranja (6.13).

Talasne jednačine za kompresione talase (6.21) i (6.23), kao i talasne jednačine za vrtložne talase (6.29) i (6.30), predstavljaju uopštenja klasičnih talasnih jednačina (6.6) i (6.7). Konkretno, brzine prostiranja kompresionih i vrtložnih talasa, koje figurišu u klasičnim talasnim jednačinama (6.6) i (6.7), su zamenjene različitim memorijskim funkcijama (6.19) i (6.27) koje zavise od izabranog modela viskoelastičnog tela kroz moduo relaksacije. Prepisivanjem kompresione i vrtložne talasne jednačine u Furijeovom i Laplasovom domenu (6.18) i (6.26) u oblicima

$$\begin{aligned} (\tilde{c}_c^2(s) k^2 + s^2) \bar{\varphi}(\mathbf{k}, s) &= s\bar{\varphi}_0(\mathbf{k}) + \bar{\varphi}_0(\mathbf{k}) + ik \cdot \bar{\mathbf{f}}_b(\mathbf{k}, s), \\ (\tilde{c}_s^2(s) k^2 + s^2) \bar{\Omega}(\mathbf{k}, s) &= s\bar{\Omega}_0(\mathbf{k}) + \bar{\Omega}_0(\mathbf{k}) + ik \times \bar{\mathbf{f}}_b(\mathbf{k}, s), \end{aligned}$$

sa početnim podacima

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_0(\mathbf{k}) &= ik \cdot \bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) \quad \text{i} \quad \bar{\varphi}_0(\mathbf{k}) = ik \cdot \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{k}), \quad \text{kao i} \\ \bar{\Omega}_0(\mathbf{k}) &= ik \times \bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) \quad \text{i} \quad \bar{\Omega}_0(\mathbf{k}) = ik \times \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{k}), \end{aligned}$$

videti (6.25) i (6.31), za rešenje ovih talasnih jednačina sledi

$$\bar{\varphi}(\mathbf{k}, s) = \bar{G}^{(c)}(k, s) \left( s\bar{\varphi}_0(\mathbf{k}) + \bar{\varphi}_0(\mathbf{k}) + ik \cdot \bar{\mathbf{f}}_b(\mathbf{k}, s) \right), \quad \text{sa} \quad \bar{G}^{(c)}(k, s) = \frac{1}{\tilde{c}_c^2(s) k^2 + s^2}, \quad (6.32)$$

$$\bar{\Omega}(\mathbf{k}, s) = \bar{G}^{(s)}(k, s) \left( s\bar{\Omega}_0(\mathbf{k}) + \bar{\Omega}_0(\mathbf{k}) + ik \times \bar{\mathbf{f}}_b(\mathbf{k}, s) \right), \quad \text{sa} \quad \bar{G}^{(s)}(k, s) = \frac{1}{\tilde{c}_s^2(s) k^2 + s^2}, \quad (6.33)$$

pri čemu su sa  $\bar{G}^{(c)}$  i  $\bar{G}^{(s)}$  označene Grinove funkcije u Furijeovom i Laplasovom domenu koje odgovaraju kompresionim i vrtložnim talasima, respektivno, implicirajući rešenja za kompresionu i vrtložnu talasnu jednačinu (6.20) i (6.28) u obliku

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \partial_t G^{(c)}(r, t) *_{\mathbf{r}} \varphi_0(\mathbf{r}) + G^{(c)}(r, t) *_{\mathbf{r}} \dot{\varphi}_0(\mathbf{r}) + G^{(c)}(r, t) *_{\mathbf{r}, t} \text{div } \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t), \quad (6.34)$$

$$\Omega(\mathbf{r}, t) = \partial_t G^{(s)}(r, t) *_{\mathbf{r}} \Omega_0(\mathbf{r}) + G^{(s)}(r, t) *_{\mathbf{r}} \dot{\Omega}_0(\mathbf{r}) + G^{(s)}(r, t) *_{\mathbf{r}, t} \text{rot } \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t), \quad (6.35)$$

ako je  $G^{(c)}(r, 0) = G^{(s)}(r, 0) = 0$ .

Kada su funkcije  $\varphi$  i  $\Omega$  poznate, videti izraze (6.34) i (6.35), polje pomeranja  $\mathbf{u}$  se može odrediti iz talasne jednačine viskoelastičnog tela u Furijeovom i Laplasovom domenu (6.17), koja se transformiše u

$$\begin{aligned} \tilde{c}_s^2(s) k^2 \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s) + (\tilde{c}_c^2(s) - \tilde{c}_s^2(s)) (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s) + s^2 \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s) &= s\bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) + \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{k}) + \bar{\mathbf{f}}_b(\mathbf{k}, s), \\ \tilde{c}_s^2(s) ik \times \bar{\Omega}(\mathbf{k}, s) - \tilde{c}_c^2(s) ik \bar{\varphi}(\mathbf{k}, s) + s^2 \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s) &= s\bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) + \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{k}) + \bar{\mathbf{f}}_b(\mathbf{k}, s), \end{aligned}$$

zbog memorijskih funkcija (6.19) i (6.27), kao i zbog  $k^2 \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s) = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s)) - \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s)) = -ik \bar{\varphi}(\mathbf{k}, s) + ik \times \bar{\Omega}(\mathbf{k}, s)$  i  $(\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s) = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s)) = -ik \bar{\varphi}(\mathbf{k}, s)$ , dajući

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s) = \frac{1}{s} \bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) + \frac{1}{s^2} \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{k}) + \frac{1}{s^2} \left( \bar{\mathbf{f}}_b(\mathbf{k}, s) + \tilde{c}_c^2(s) ik \bar{\varphi}(\mathbf{k}, s) - \tilde{c}_s^2(s) ik \times \bar{\Omega}(\mathbf{k}, s) \right),$$

što, nakon primene inverzne Furijeove i Laplasove transformacije, implicira polje pomeranja u prostorno-vremenskom domenu dato sa

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) t + t *_{\mathbf{t}} \left( \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t) + \mathcal{L}^{-1} [\tilde{c}_c^2(s) \text{grad } \bar{\varphi}(\mathbf{r}, s)](\mathbf{r}, t) - \mathcal{L}^{-1} [\tilde{c}_s^2(s) \text{rot } \bar{\Omega}(\mathbf{r}, s)](\mathbf{r}, t) \right)$$

koje se dalje transformiše u

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) t$$

$$+ t *_{\mathbf{t}} \left( \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t) + \begin{cases} \frac{1}{\varrho} \hat{\sigma}_{sr}^{(c)}(t) *_{\mathbf{t}} \text{grad } \varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\varrho} \sigma_{sr/g}^{(c)} \text{grad } \varphi(\mathbf{r}, t), & \text{ako je } \sigma_{sr/g}^{(c)} \text{ konačno,} \\ \frac{1}{\varrho} \sigma_{sr}^{(c)}(t) *_{\mathbf{t}} (\partial_t \text{grad } \varphi(\mathbf{r}, t)) + \frac{1}{\varrho} \sigma_{sr}^{(c)}(t) \text{grad } \varphi_0(\mathbf{r}), & \text{ako je } \sigma_{sr/g}^{(c)} \text{ beskonačno,} \end{cases} \right)$$

$$-\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{\varrho} \dot{\sigma}_{sr}^{(s)}(t) *_t \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\varrho} \sigma_{sr/g}^{(s)} \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t), & \text{ako je } \sigma_{sr/g}^{(s)} \text{ konačno,} \\ \frac{1}{\varrho} \sigma_{sr}^{(s)}(t) *_t (\partial_t \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t)) + \frac{1}{\varrho} \sigma_{sr}^{(s)}(t) \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{r}), & \text{ako je } \sigma_{sr/g}^{(s)} \text{ beskonačno,} \end{array}\right. \quad (6.36)$$

kada se karakteristike materijala uzmu u obzir, videti (6.22) i (6.24), te izraz (6.36) sadrži četiri moguća oblika polja pomeranja, zbog mogućnosti da kompresioni i vrtložni talasi imaju konačnu brzinu prostiranja, određenu sa

$$c_c = \sqrt{\frac{\sigma_{sr/g}^{(c)}}{\varrho}} \quad \text{i} \quad c_s = \sqrt{\frac{\sigma_{sr/g}^{(s)}}{\varrho}},$$

ili beskonačnu brzinu prostiranja.

Određivanje polja pomeranja preko izraza (6.36) zahteva složene proračune, dodatno otežane uključivanjem izraza za skalarno i vektorsko polje  $\varphi$  i  $\boldsymbol{\Omega}$ , data sa (6.34) i (6.35). Dodatno, oblik polja pomeranja zavisi od razmatranog modela viskoelastičnog tela, te su moguća njegova četiri oblika, zavisno od brzine prostiranja talasa. Stoga je izraz (6.36) zahtevan za analitičke i za numeričke proračune.

### 6.1.2 Polje pomeranja izraženo preko rezolventnog tenzora $\hat{\mathbf{R}}$

Budući da određivanje polja pomeranja kao rešenja sistema jednačina (6.10) - (6.12) sa početnim uslovima (6.13), odnosno Košjevog početnog problema za talasnu jednačinu viskoelastičnog tela u obliku (6.36), predstavlja zahtevan proračun, usvojen je drugi pristup određivanja polja pomeranja koji uključuje rezolventni tenzor, tako da se rezolventni tenzor primenjuje na početne uslove i zapreminske sile, dajući polje pomeranja. Naime, talasna jednačina viskoelastičnog tela u Furijeovom i Laplasovom domenu (6.17), zapisana kao

$$\bar{\tilde{\mathbf{R}}}^{-1}(\mathbf{k}, s) \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s) = s \bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) + \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{k}) + \bar{\tilde{\mathbf{f}}}_b(\mathbf{k}, s), \quad (6.37)$$

gde je  $\bar{\tilde{\mathbf{R}}}^{-1}$  inverzni tenzor rezolventnog tenzora u Furijeovom i Laplasovom domenu dat izrazom

$$\begin{aligned} \bar{\tilde{\mathbf{R}}}^{-1}(\mathbf{k}, s) &= (\tilde{c}_s^2(s) k^2 + s^2) \hat{\mathbf{I}} + (\tilde{c}_c^2(s) - \tilde{c}_c^2(s)) (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{\bar{\tilde{G}}^{(s)}(k, s)} \left( \hat{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2} \right) + \frac{1}{\bar{\tilde{G}}^{(c)}(k, s)} \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

prema memorijskim funkcijama (6.19) i (6.27), kao i prema Grinovim funkcijama (6.32)<sub>2</sub> i (6.33)<sub>2</sub>, implicira polje pomeranja u Furijeovom i Laplasovom domenu

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s) = \bar{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathbf{k}, s) \left( s \bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) + \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{k}) + \bar{\tilde{\mathbf{f}}}_b(\mathbf{k}, s) \right), \quad (6.39)$$

koje se, nakon primene inverzne Furijeove i Laplasove transformacije, transformiše u

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \partial_t \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) *_{\mathbf{r}} \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) *_{\mathbf{r}} \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) *_{\mathbf{r}, t} \mathbf{f}_b(\mathbf{r}, t), \quad (6.40)$$

uz pretpostavku da je  $\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, 0) = 0$ , te je neophodno odrediti rezolventni tenzor  $\hat{\mathbf{R}}$  i njegov prvi izvod po vremenu.

Prvi korak je određivanje rezolventnog tenzora u Furijeovom i Laplasovom domenu  $\bar{\tilde{\mathbf{R}}}$  u obliku

$$\bar{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathbf{k}, s) = \bar{\tilde{G}}^{(s)}(k, s) \left( \hat{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2} \right) + \bar{\tilde{G}}^{(c)}(k, s) \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2}, \quad (6.41)$$

preko njemu inverznog tenzora  $\bar{\tilde{\mathbf{R}}}^{-1}$ , datog sa (6.38), budući da je  $\bar{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathbf{k}, s) \bar{\tilde{\mathbf{R}}}^{-1}(\mathbf{k}, s) = \hat{\mathbf{I}}$ , zbog  $\frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2} \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2} = \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2}$ , pa se (6.41) transformiše u

$$\begin{aligned} \bar{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathbf{k}, s) &= \bar{\tilde{G}}^{(s)}(k, s) \hat{\mathbf{I}} - \frac{1}{k^2} \bar{\tilde{G}}^{(s)}(k, s) (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) + \frac{1}{k^2} \bar{\tilde{G}}^{(c)}(k, s) (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \\ &= \bar{\tilde{G}}^{(s)}(k, s) \hat{\mathbf{I}} + \frac{\tilde{c}_s^2(s)}{s^2} (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \bar{\tilde{G}}^{(s)}(k, s) - \frac{\tilde{c}_c^2(s)}{s^2} (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \bar{\tilde{G}}^{(c)}(k, s) \end{aligned}$$

korišćenjem  $\frac{1}{k^2} \bar{\tilde{G}}^{(x)}(k, s) = \frac{1}{k^2} \frac{1}{\tilde{c}_x^2(s) k^2 + s^2} = \frac{1}{s^2} \frac{1}{k^2} - \frac{\tilde{c}_x^2(s)}{s^2} \frac{1}{\tilde{c}_x^2(s) k^2 + s^2} = \frac{1}{s^2} \frac{1}{k^2} - \frac{\tilde{c}_x^2(s)}{s^2} \bar{\tilde{G}}^{(x)}(k, s)$ .

U drugom koraku, primenom inverzne Furijeove transformacije na prethodni izraz dobija se rezolventni tenzor u Laplasovom domenu  $\tilde{\mathbf{R}}$ , dat sa

$$\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, s) = \tilde{G}^{(s)}(r, s) \hat{\mathbf{I}} - \frac{\tilde{c}_s^2(s)}{s^2} (\nabla \otimes \nabla) \tilde{G}^{(s)}(r, s) + \frac{\tilde{c}_c^2(s)}{s^2} (\nabla \otimes \nabla) \tilde{G}^{(c)}(r, s) \quad (6.42)$$

budući da je  $\mathcal{F}[\nabla \otimes \nabla](\mathbf{k}) = i\mathbf{k} \otimes i\mathbf{k} = -(k \otimes k)$ , pri čemu se za Grinovu funkciju u Laplasovom domenu dobija

$$\tilde{G}^{(x)}(r, s) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{G}^{(x)}(k, s)](r, s) = \frac{1}{4\pi r \tilde{c}_x^2(s)} e^{-\frac{rs}{\tilde{c}_x(s)}}, \quad x \in \{c, s\}, \quad (6.43)$$

nakon inverzne Furijeove transformacije

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(x)}(r, s) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{G}^{(x)}(k, s) e^{ik \cdot r} d\mathbf{k} V \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{1}{\tilde{c}_x^2(s) k^2 + s^2} e^{-ikr \cos \theta} k^2 \sin \theta dk d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty \frac{k}{\tilde{c}_x^2(s) k^2 + s^2} dk \int_{-kr}^{kr} e^{-ip} dp \\ &= \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{k \sin(kr)}{\tilde{c}_x^2(s) k^2 + s^2} dk \\ &= \frac{1}{2\pi^2 r \tilde{c}_x^2(s)} \int_0^\infty \frac{q \sin q}{q^2 + \left(\frac{rs}{\tilde{c}_x(s)}\right)^2} dq \\ &= \frac{1}{4\pi r \tilde{c}_x^2(s)} e^{-\frac{rs}{\tilde{c}_x(s)}}, \end{aligned}$$

korišćenjem integrala

$$\int_0^\infty \frac{q \sin q}{q^2 + \lambda} dq = \frac{\pi}{2} e^{-\sqrt{\lambda}}, \quad \text{if } \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

dobijenog integracijom u kompleksnoj ravni, sa Grinovim funkcijama u Furijeovom i Laplasovom domenu datim sa  $(6.32)_2$  i  $(6.33)_2$ . Članovi  $(\nabla \otimes \nabla) \tilde{G}^{(x)}(r, s)$ ,  $x \in \{c, s\}$ , koji se pojavljuju u (6.42), su određeni na sledeći način

$$\begin{aligned} (\nabla \otimes \nabla) \tilde{G}^{(x)}(r, s) &= \frac{1}{r} \partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_r \tilde{G}^{(x)}(r, s) \right) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) + \frac{1}{r} \partial_r \tilde{G}^{(x)}(r, s) \hat{\mathbf{I}} \\ &= \left( \frac{3}{r^2} + \frac{3}{r} \frac{s}{\tilde{c}_x(s)} + \frac{s^2}{\tilde{c}_x^2(s)} \right) \tilde{G}^{(x)}(r, s) \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} + \frac{s}{\tilde{c}_x(s)} \right) \tilde{G}^{(x)}(r, s) \hat{\mathbf{I}}, \end{aligned}$$

korišćenjem  $(\nabla \otimes \nabla) f(r) = \nabla \otimes (\nabla f(r)) = \operatorname{grad} \operatorname{grad} f(r) = \operatorname{grad} \left( \frac{df(r)}{dr} \operatorname{grad} r \right) = \operatorname{grad} \left( \frac{df(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \right) \otimes \mathbf{r} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \hat{\mathbf{I}} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \right) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \hat{\mathbf{I}}$ , kao i korišćenjem

$$\partial_r \tilde{G}^{(x)}(r, s) = - \left( \frac{1}{r} + \frac{s}{\tilde{c}_x(s)} \right) \tilde{G}^{(x)}(r, s),$$

videti Grinovu funkciju u Laplasovom domenu datu sa (6.43), transformišući (6.42) u

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, s) &= \tilde{G}^{(c)}(r, s) \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} + \tilde{G}^{(s)}(r, s) \left( \hat{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\tilde{c}_s^2(s)}{s^2} \left( \frac{1}{r} + \frac{s}{\tilde{c}_s(s)} \right) \tilde{G}^{(s)}(r, s) - \frac{\tilde{c}_c^2(s)}{s^2} \left( \frac{1}{r} + \frac{s}{\tilde{c}_c(s)} \right) \tilde{G}^{(c)}(r, s) \right) \left( \hat{\mathbf{I}} - 3 \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right), \end{aligned}$$

odnosno

$$\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, s) = \tilde{G}^{(c)}(r, s) \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} + \tilde{G}^{(s)}(r, s) \left( \hat{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \left( \partial_r \tilde{g}^{(s)}(r, s) - \partial_r \tilde{g}^{(c)}(r, s) \right) \left( \hat{\mathbf{I}} - 3 \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right), \quad (6.44)$$

gde je funkcija  $\tilde{g}^{(x)}$ ,  $x \in \{c, s\}$ , definisana sa

$$\tilde{g}^{(x)}(r, s) = \frac{\tilde{c}_x^2(s)}{s^2} \tilde{G}^{(x)}(r, s) = \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{s^2} e^{-\frac{rs}{\tilde{c}_x(s)}}, \quad (6.45)$$

videti takođe (6.43), te je

$$\partial_r \tilde{g}^{(x)}(r, s) = -\frac{\tilde{c}_x^2(s)}{s^2} \left( \frac{1}{r} + \frac{s}{\tilde{c}_x(s)} \right) \tilde{G}^{(x)}(r, s).$$

U poslednjem koraku, da bi se odredio rezolventni tensor  $\hat{\mathbf{R}}$ , neophodno je pronaći inverznu Laplasovu transformaciju Grinove funkciju u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$ , videti (6.43), kao i funkcije  $\tilde{g}^{(x)}$ ,  $x \in \{c, s\}$ , videti (6.45), te se rezolventni tensori u Laplasovom domenu (6.44) transformiše u

$$\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) = G^{(c)}(r, t) \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} + G^{(s)}(r, t) \left( \hat{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \left( \partial_r g^{(s)}(r, t) - \partial_r g^{(c)}(r, t) \right) \left( \hat{\mathbf{I}} - 3 \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right), \quad (6.46)$$

ili ekvivalentno u

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) &= G^{(c)}(r, t) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T + G^{(s)}(r, t) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\varphi \end{bmatrix}^T - \frac{1}{r} \left( \partial_r g^{(s)}(r, t) - \partial_r g^{(c)}(r, t) \right) \begin{bmatrix} -2\mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\varphi \end{bmatrix}^T, \quad \text{tj.} \\ \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) &= \begin{bmatrix} G^{(c)}(r, t) \mathbf{e}_r \\ G^{(s)}(r, t) \mathbf{e}_\theta \\ G^{(s)}(r, t) \mathbf{e}_\varphi \end{bmatrix}^T - \frac{1}{r} \left( \partial_r g^{(s)}(r, t) - \partial_r g^{(c)}(r, t) \right) \begin{bmatrix} -2\mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\varphi \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (6.47)$$

gde su  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  i  $\mathbf{e}_\varphi$  jedinični vektori sfernog koordinatnog sistema, koji slede iz dijagonalizacije tensora koji se pojavljuju u rezolventnom tensoru (6.46), odnosno zbog

$$\frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T$$

implicirajući

$$\hat{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\varphi \end{bmatrix}^T \quad \text{i} \quad \hat{\mathbf{I}} - 3 \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\varphi \end{bmatrix}^T,$$

budući da svojstveni problem

$$\frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \mathbf{u} = \lambda \hat{\mathbf{I}} \mathbf{u}$$

daje svojstvene vrednosti  $\lambda_1 = 1$  i  $\lambda_{2,3} = 0$ , sa svojstvenim vektorima  $\mathbf{u}^{(1)} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r$  i  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}^{(2,3)} = 0$ , implicirajući da je  $r \mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2,3)} = 0$ , tj.  $r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{u}^{(2,3)} = 0$ , pa se može izabrat da svojstvenim vektorima  $\mathbf{u}^{(2,3)}$  odgovaraju jedinični vektori  $\mathbf{e}_\theta$  i  $\mathbf{e}_\varphi$ .

Jednostavan matrični oblik rezolventnog tensora (6.47) jasno pokazuje da se kompresioni talasi prostiru u pravcu radijus vektora, zaviseći od njegovog intenziteta, dok se vrtložni talasi prostiru u ravni normalnoj na pravac radijus vektora, videti prvi član u (6.47), dok su drugim članom u (6.47) uračunati dodatni doprinosi.

### 6.1.3 Grinove funkcije

Grinove funkcije  $G^{(x)}$ ,  $x \in \{c, s\}$ , koje se pojavljuju u rezolventnom tensoru (6.46) i (6.47), su sličnog ali različitog oblika zavisnog od brzine prostiranja talasa, dok funkcije  $g^{(x)}$  imaju isti oblik bez obzira na brzinu prostiranja. Naime, ispitivanjem asimptotskog ponašanja Grinove funkcije za vremena bliska nuli, dobija se da je Grinova funkcija zapravo distribucija u slučaju kada je brzina prostiranja talasa konačna, što implicira da se Grinova funkcija u Laplasovom domenu mora regularizovati, kako bi se mogla primeniti inverzna Laplasova transformacija, te dobila Grinova funkcija u proizvoljnem vremenskom trenutku, dok u slučaju kada je brzina prostiranja talasa beskonačna nije potrebna regularizacija Grinove funkcije, budući da njena asimptotika za vremena bliska nuli implicira da je reč o funkciji. Asimptotika Grinove funkcije za mala i velika vremena se dobija iz asimptotike Grinove funkcije u Laplasovom domenu i zavisi od ponašanja memorijске funkcije  $\tilde{c}_x(s)$  za  $s \rightarrow \infty$  i  $s \rightarrow 0$ , respektivno, što je pokazano u poglavljiju 6.3.

Ako je brzina prostiranja talasa konačna, tj. ako moduo relaksacije u početnom trenutku  $\sigma_{sr/g}^{(x)}$  ima konačnu vrednost, tada je Grinova funkcija zapravo distribucija, što je očigledno prema razmatranju asimptotike Grinove funkcije u Laplasovom domenu (6.43), dатој u obliku

$$\tilde{G}^{(x)}(r, s) \sim \frac{1}{4\pi r c_x^2} e^{-\frac{rs}{c_x}}, \quad \text{kada } s \rightarrow \infty,$$

stoga implicirajući za asimptotiku Grinove funkcije u vremenskom domenu

$$G^{(x)}(r, t) \sim \frac{1}{4\pi r c_x^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_x}\right), \quad \text{kada } t \rightarrow 0, \quad (6.48)$$

gde je  $\delta$  Dirakova delta distribucija, a što se dobija primenom teoreme prema kojoj ako je  $\tilde{f}(s) \sim \tilde{g}(s)$  kada  $s \rightarrow \infty$ , tada  $f(t) \sim g(t)$  kada  $t \rightarrow 0$ , budući da asimptotika memorijске funkcije  $\tilde{c}_x$ , prema (6.65), daje

$$\tilde{c}_x(s) \sim \kappa, \quad \text{kada } s \rightarrow \infty,$$

sa  $\kappa$  datim u tabelama 6.3, 6.4, 6.6 i 6.7, sa jedne strane, dok izrazi za memorijске funkcije (6.19) i (6.27) i izvođenje u poglavlju 6.4.1 daju

$$\tilde{c}_x(s) = \sqrt{\frac{s\tilde{\sigma}_{sr}^{(x)}(s)}{\varrho}} \sim \sqrt{\frac{\sigma_{sr/g}^{(x)}}{\varrho}} = c_x, \quad \text{kada } s \rightarrow \infty$$

sa druge strane, videti takođe (2.17). Treba naglasiti da određivanje Grinove funkcije, urađeno u poglavlju 6.4.1, implicira da Grinova funkcija ima nenultu vrednost ako  $r < c_x t$ , sa prethodno definisanim  $c_x$ . Stoga, materijali opisani tipom Case I i III linearnih modela frakcionog reda koji sadrže izvode sa redovima u intervalu  $(0, 1)$ , kao i frakcioni Burgersovi modeli koji pripadaju drugoj klasi, imaju konačnu brzinu prostiranja mehaničke pobude, kako je već istaknuto u poglavljima 2.2.1 i 2.2.2.

Ako je brzina prostiranja talasa konačna, tada se Grinova funkcija u vremenskom domenu dobija regularizacijom u Laplasovom domenu

$$\tilde{G}_\varepsilon^{(x)}(r, s) = \tilde{G}^{(x)}(r, s) \tilde{\delta}_\varepsilon(s) \quad (6.49)$$

implicirajući nakon inverzne Laplasove transformacije

$$G^{(x)}(r, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon^{(x)}(r, t) = G^{(x)}(r, t) *_t \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = G^{(x)}(r, t) *_t \delta(t), \quad (6.50)$$

gde je za regularizaciju Dirakove delta distribucije uzeto

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4t}}, \quad \text{sa } \tilde{\delta}_\varepsilon(s) = e^{-\varepsilon\sqrt{s}}, \quad (6.51)$$

jer je  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \delta(t)$ , zbog  $\tilde{\delta}_\varepsilon(s)|_{\varepsilon=0} = e^{-\varepsilon\sqrt{s}}|_{\varepsilon=0} = 1 = \mathcal{L}[\delta(t)]$ . Regularizovana Grinova funkcija se dobija prema

$$\begin{aligned} G_\varepsilon^{(x)}(r, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \tilde{G}^{(x)}(r, s) \tilde{\delta}_\varepsilon(s) \right] (r, t) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{4\pi r \tilde{c}_x^2(s)} e^{-\frac{rs}{\tilde{c}_x(s)}} e^{-\varepsilon\sqrt{s}} \right] (r, t) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{4\pi r} \varrho \frac{\Phi_\sigma(s)}{\Phi_\varepsilon(s)} e^{-rs\sqrt{\varrho} \sqrt{\frac{\Phi_\sigma(s)}{\Phi_\varepsilon(s)}}} e^{-\varepsilon\sqrt{s}} \right] (r, t), \end{aligned} \quad (6.52)$$

videti izraze (6.43), (6.19), (6.27) i (2.12)<sub>1</sub>, kao i poglavlje 6.4.1 za njeno izračunavanje, i uzima oblik

$$\begin{aligned} G_\varepsilon^{(x)}(r, t) &= \frac{1}{4\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{1}{|\tilde{c}_x^2(\rho e^{i\varphi_0})|} e^{\rho t \cos \varphi_0 - \frac{r\rho}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|} \cos(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})) - \varepsilon\sqrt{\rho} \cos \frac{\varphi_0}{2}} \\ &\times \sin \left( \rho t \sin \varphi_0 - \frac{r\rho}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|} \sin(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})) + \varphi_0 - \arg \tilde{c}_x^2(\rho e^{i\varphi_0}) - \varepsilon\sqrt{\rho} \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) d\rho, \end{aligned} \quad (6.53)$$

ako je  $r < c_x t$ , sa  $c_x = \sqrt{\frac{\sigma_{sr/g}^{(x)}}{\varrho}}$ , dok ako je  $r > c_x t$ , tada je

$$G_\varepsilon^{(x)}(r, t) = 0,$$

pri čemu je  $\varphi_0 = \pi$  ako funkcija  $\Phi_\sigma$  (funkcija  $\Phi_\varepsilon$ ) ili nema nula ili ima negativnu realnu nulu, dok je  $\varphi_0 = \arg s_0$  ako su  $s_0$  i njemu kompleksno konjugovano  $\bar{s}_0$  nule funkcije  $\Phi_\sigma$  (funkcije  $\Phi_\varepsilon$ ). Treba primetiti da konstanta  $c_x$  predstavlja brzinu prostiranja kompresionih/vrtložnih talasa, videti (2.17), i potiče iz asimptotike (6.65) memorijске funkcije  $\tilde{c}_x$ , pri čemu je povezana sa konstantom  $\kappa$  u slučaju kada je  $\delta = 0$ , videti tabele 6.3, 6.4, 6.6 i 6.7, tako da je  $c_x = \kappa$ .

Sa druge strane, ako je brzina prostiranja talasa beskonačna, tj. ako  $\sigma_{sr/g}^{(x)}$  ima beskonačnu vrednost, tada nije potrebna regularizacija Grinove funkcije, što je očigledno iz asimptotike Grinove funkcije u Laplasovom domenu (6.43), date u obliku

$$\tilde{G}^{(x)}(r, s) \sim \frac{1}{4\pi\kappa^2 r} \frac{1}{s^\delta} e^{-\frac{r}{\kappa}s^{1-\frac{\delta}{2}}}, \quad \text{kada } s \rightarrow \infty, \quad (6.54)$$

stoga se, prema već pomenutoj teoremi, za asimptotiku Grinove funkcije dobija

$$G^{(x)}(r, t) \sim \frac{1}{4\pi^2\kappa^2 r} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^\delta} e^{-\rho\left(t - \frac{r}{\kappa}\rho^{-\frac{\delta}{2}} \cos \frac{\delta\pi}{2}\right)} \sin\left(\frac{r}{\kappa}\rho^{1-\frac{\delta}{2}} \sin \frac{\delta\pi}{2} + \delta\pi\right) d\rho, \quad \text{kada } t \rightarrow 0, \quad (6.55)$$

čije je određivanje sprovedeno u poglavlju 6.4.3, jer je

$$\tilde{c}_x(s) = \sqrt{\frac{s\tilde{\sigma}_{sr}^{(x)}(s)}{\varrho}} \sim \kappa s^{\frac{\delta}{2}}, \quad \text{kada } s \rightarrow \infty, \quad \text{sa } \delta \in (0, 1),$$

videti takođe (6.65) kao i tabele 6.3, 6.4, 6.6 i 6.7 za vrednosti  $\kappa$  i  $\delta$ . Stoga, materijali opisani tipom Case II i IV linearnih modela frakcionog reda koji sadrže izvode sa redovima u intervalu  $(0, 1)$ , frakcioni Burgersovi modeli prve klase, kao i svi frakcioni Cenerovi i anti-Cenerovi modeli imaju beskonačnu brzinu prostiranja mehaničke pobude, kako je već istaknuto u poglavljima 2.2.1, 2.2.2 i 2.2.3.

Grinova funkcija, koja se pojavljuje u rezolventnom tenzoru (6.46) i (6.47), je data sa (6.53) na domenu  $r > 0$  i  $t > 0$ , za  $\varepsilon = 0$ , tj. sa

$$G^{(x)}(r, t) = G_\varepsilon^{(x)}(r, t) \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (6.56)$$

Treba naglasiti da određivanje Grinove funkcije, sprovedeno u poglavlju 6.4.1, implicira da Grinova funkcija ima nenegativnu vrednost za sve prostorne tačke  $r > 0$  u bilo kom vremenskom trenutku  $t > 0$ , štaviše njen asimptotika za velika vremena, kako je pokazano ispod, implicira da Grinova funkcija teži u nulu kao stepena funkcija za bilo koje  $r > 0$ .

Da bi se ispitala asimptotika Grinove funkcije za velika vremena, opet se polazi od Grinove funkcije u Laplasovom domenu (6.43) i asimptotike memorijске funkcije

$$\tilde{c}_x(s) \sim \begin{cases} \kappa, & \text{za } s \rightarrow 0, \\ \kappa s^{\frac{\delta}{2}}, & \delta \in (0, 1), \end{cases}$$

videti takođe (6.65), kao i tabele 6.3, 6.4, 6.6 i 6.7 za vrednosti  $\kappa$  i  $\delta$ , implicirajući, uz (6.43), za asimptotiku Grinove funkcije u Laplasovom domenu

$$\tilde{G}^{(x)}(r, s) \sim \begin{cases} \frac{1}{4\pi r \kappa^2} e^{-\frac{rs}{\kappa}} \sim \frac{1}{4\pi r \kappa^2}, \\ \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \frac{1}{s^\delta} e^{-\frac{r}{\kappa}s^{1-\frac{\delta}{2}}} \sim \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \frac{1}{s^\delta}, & \delta \in (0, 1), \end{cases} \quad \text{kada } s \rightarrow 0.$$

Prema teoremi: ako  $\tilde{f}(s) \sim \tilde{g}(s)$  kada  $s \rightarrow 0$ , tada  $f(t) \sim g(t)$  kada  $t \rightarrow \infty$ , dobija se asimptotika Grinove funkcije

$$G^{(x)}(r, t) \sim \begin{cases} \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \delta(t) = 0, \\ \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \frac{t^{-(1-\delta)}}{\Gamma(\delta)} \rightarrow 0, & \delta \in (0, 1), \end{cases} \quad \text{kada } t \rightarrow \infty. \quad (6.57)$$

Funkcija  $g^{(x)}$ , koja takođe figuriše u rezolventnom tenzoru (6.46) i (6.47), data je u obliku

$$\begin{aligned} g^{(x)}(r, t) &= \int_0^t \mathfrak{g}^{(x)}(r, t') dt', \quad \text{gde je} \\ \mathfrak{g}^{(x)}(r, t) &= \frac{1}{4\pi^2 r} \left( \varphi_0 + \int_0^\infty \frac{1}{\rho} e^{\rho t \cos \varphi_0 - \frac{r\rho}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|} \cos(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0}))} \right. \\ &\quad \times \sin\left(\rho t \sin \varphi_0 - \frac{r\rho}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|} \sin(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0}))\right) d\rho \Big), \end{aligned} \quad (6.58)$$

sa već definisanim  $\varphi_0$ , i odredena u poglavlju 6.4.2 prema

$$g^{(x)}(r, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \tilde{\mathfrak{g}}^{(x)}(r, s) \right] (r, t), \quad \text{sa } \tilde{\mathfrak{g}}^{(x)}(r, s) = \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{s} e^{-\frac{rs}{\tilde{c}_x(s)}}, \quad (6.59)$$

videti takođe izraz (6.45) za funkciju  $\tilde{g}^{(x)}$ .

U slučaju klasične talasne jednačine (6.5), razmatrane na neograničenom domenu sa početnim uslovima (6.13), koja odgovara prostiranju mehaničke pobude u homogenom, izotropnom i elastičnom trodimenzionom telu, rezolventni tenzor je dat sa

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, s) &= \frac{1}{4\pi r c_c} \delta(c_c t - r) \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{4\pi r c_s} \delta(c_s t - r) \left( \hat{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) \\ &\quad + \frac{t}{4\pi r^3} \left( H\left(t - \frac{r}{c_s}\right) - H\left(t - \frac{r}{c_c}\right) \right) \left( \hat{\mathbf{I}} - 3 \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right),\end{aligned}$$

prema (6.46), budući da se klasična Grinova funkcija  $G^{(x)}$ , kao i funkcija  $g^{(x)}$ ,  $x \in \{c, s\}$ , dobijaju kao

$$G^{(x)}(r, t) = \frac{1}{4\pi r c_x^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_x}\right) = \frac{1}{4\pi r c_x} \delta(c_x t - r), \quad (6.60)$$

zbog  $\delta(cr) = \frac{1}{|c|} \delta(r)$ , kao i

$$g^{(x)}(r, t) = \frac{1}{4\pi r} \left( t - \frac{r}{c_x} \right) H\left(t - \frac{r}{c_x}\right) \quad \text{sa} \quad \partial_r g^{(x)}(r, t) = -\frac{t}{4\pi r^2} H\left(t - \frac{r}{c_x}\right),$$

zbog  $r\delta(r) = 0$ , primenom inverzne Laplasove transformacije na klasičnu Grinovu funkciju u Laplasovom domenu

$$\tilde{G}^{(x)}(r, s) = \frac{1}{4\pi r c_x^2} e^{-\frac{rs}{c_x}},$$

kao i funkciju

$$\tilde{g}^{(x)}(r, s) = \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{s^2} e^{-\frac{rs}{c_x}},$$

jer (6.43) i (6.45) definišu klasičnu Grinovu funkciju u Laplasovom domenu i funkciju  $\tilde{g}^{(x)}$  ako se, umesto memorijске funkcije  $\tilde{c}_x$ , uvrsti konstantna brzina prostiranja talasa  $c_x$ . Ova jednostavna zamena je moguća, jer uopštene talasne jednačine (6.20) i (6.28) postaju klasične talasne jednačine (6.6) i (6.7) korišćenjem spomenute zamene.

## 6.2 Numerički primeri

Frakcioni Cenerov i anti-Cenerov model  $I^+ ID.ID$ , kao i frakcioni Burgersov model VII, naime

$$\left( a_1 {}_0 I_t^{\alpha+\beta+\nu} + a_2 {}_0 I_t^\nu + a_3 {}_0 D_t^{\alpha+\beta-\nu} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 I_t^\alpha + b_2 {}_0 D_t^\beta \right) \varepsilon(t), \quad (6.61)$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned}0 &\leq \alpha + \beta - \nu \leq 1, \quad 1 \leq \alpha + \beta + \nu \leq 2, \quad \alpha \leq \nu \leq 1 - \beta, \\ \frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} &\leq \frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2}, \\ \frac{b_1}{b_2} &\leq \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}} \leq \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}},\end{aligned}$$

videti (4.124) - (4.127), kao i dodatak A.3, i

$$\left( 1 + a_1 {}_0 D_t^\alpha + a_2 {}_0 D_t^\beta + a_3 {}_0 D_t^{2\beta} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0 D_t^\beta + b_2 {}_0 D_t^{2\beta} \right) \varepsilon(t), \quad (6.62)$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned}0 &\leq \alpha \leq \beta \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1+\alpha}{2}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_2 \frac{1}{|\cos(\beta\pi)|}, \\ \frac{a_3}{a_2} &\leq \frac{a_2}{2 \cos^2(\beta\pi)} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4a_3 \cos^2(\beta\pi)}{a_2^2}} \right) \leq \frac{b_2}{b_1} \leq \frac{a_2}{|\cos(\beta\pi)|},\end{aligned}$$

videti dodatak A.2, su respektivno izabrani kao predstavnici klase modela kojima odgovara beskonačna i konačna brzina prostiranja talasa, da bi se grafički predstavila vremenska evolucija prostornih profila Grinove funkcije  $G^{(x)}$ ,  $x \in \{c, s\}$  i njenih asimptotika.

### 6.2.1 Grinova funkcija $G^{(x)}$ - beskonačna brzina prostiranja talasa

Parametri modela koji odgovaraju frakcionom Cenerovom i anti-Cenerovom modelu  $I^+ ID.ID$ , videti (6.61), izabrani su kao u tabeli 6.1 da bi se predstavila vremenska evolucija prostornih profila Grinove funkcije  $G^{(x)}$ , ili prema analitičkom izrazu (6.53) sa  $\varepsilon = 0$  i  $\varphi_0 = \pi$ , ako funkcija

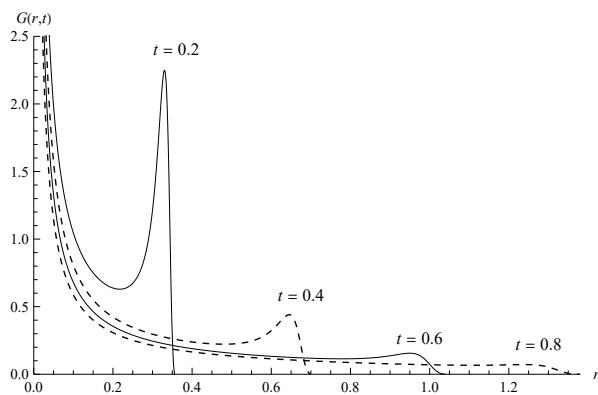
$$\phi_\sigma(s) = a_1 + a_2 s^{\alpha+\beta} + a_3 s^{2(\alpha+\beta)},$$

videti takođe tabelu 6.5, nema nula, ili prema analitičkom izrazu (6.53) sa  $\varepsilon = 0$  i  $\varphi_0 = \arg s_0$ , ako su  $s_0$  i njemu kompleksno konjugovano  $\bar{s}_0$  nule funkcije  $\phi_\sigma$ , kao i numeričkom inverznom Laplasovom transformacijom koristeći izraz (6.43) za Grinovu funkciju u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  i fiksni Talbotov metod, kao numeričku proceduru razvijenu u [102], dok su izraz (6.55) za asimptotiku Grinove funkcije za vremena bliska nuli, kao i asimptotski izraz (6.57)<sub>2</sub> za velika vremena, korišćeni za predstavljanje profila asimptotskog ponašanja Grinove funkcije. Naime, prostorni profili Grinove funkcije  $G^{(x)}$  u slučaju kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  nema drugih tačaka grananja pored  $s = 0$  su predstavljeni na slikama 6.1, 6.2 i 6.3, dok su prostorni profili Grinove funkcije  $G^{(x)}$  u slučaju kada  $\tilde{G}^{(x)}$  ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja  $s_0$  i  $\bar{s}_0$ , pored  $s = 0$ , prikazani na slikama 6.4, 6.5, 6.6 i 6.7.

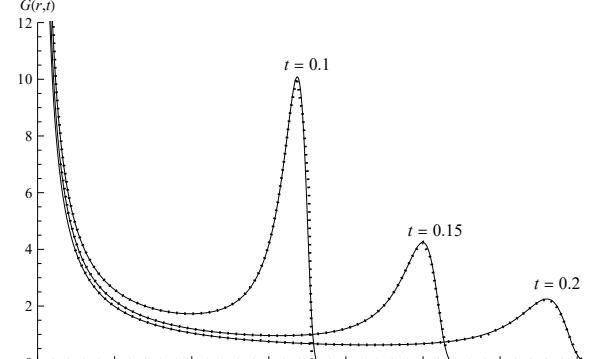
Slučaj kada $\phi_\sigma$	$\alpha$	$\beta$	$\nu$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$
nema nula	0.35	0.55	0.4	0.05	1.5	0.45	0.7	0.95
ima par kompleksno konjugovanih nula				11	15	20.27	7	9.5

Tabela 6.1: Parametri modela  $I^+ ID.ID$  korišćeni za numeričke primere.

Prostorni profili Grinove funkcije  $G^{(x)}$ , koja odgovara frakcionom Cenerovom i anti-Cenerovom modelu  $I^+ ID.ID$  u slučaju kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  nema drugih tačaka grananja osim  $s = 0$ , dati su na slici 6.1 za različite vremenske trenutke i pokazuju pozitivan i opadajući karakter za mala rastojanja  $r$ , sa izraženim pikom za srednje vrednosti rastojanja  $r$  i naposletku teže u nulu za velike vrednosti rastojanja  $r$ . Takođe, prostorni profili teže u beskonačnost kako  $r$  teži u nulu i asimptotski teže u nulu za  $r$  koje teži u beskonačnost, najverovatnije jer se Grinova funkcija pretežno ponaša kao hiperbolična funkcija  $\frac{1}{r}$  i za  $r \rightarrow 0$  i za  $r \rightarrow \infty$ , na šta ukazuje analitički izraz (6.53) za Grinovu funkciju, ali i asimptotski izrazi (6.55) i (6.57) za vremena koja teže u nulu i u beskonačnost, respektivno. Pik, koji nosi informaciju o početnoj pobudi i koji podseća na Dirakov delta pik u slučaju klasične talasne propagacije, videti (6.60), sve je niži i širi kako vreme raste, najverovatnije zbog disipativnih svojstava modela. Slika 6.1b prikazuje podudaranje profila dobijenih prema analitičkom izrazu (6.53) za Grinovu funkciju, koji su predstavljeni punom linijom, sa krivama predstavljenim linijom koju čine tačke, a dobijene su numeričkom inverznom Laplasovom transformacijom Grinove funkcije u Laplasovom domenu (6.43) koristeći fiksni Talbotov metod kao numeričku proceduru.



(a) Prostorni profili dobijeni prema analitičkom izrazu za različite vremenske trenutke.



(b) Poređenje analitički i numerički dobijenih profila, respektivno predstavljenih punom linijom i linijom predstavljenom tačkama.

Slika 6.1: Slučaj kada je brzina prostiranja talasa beskonačna - prostorni profili Grinove funkcije  $G^{(x)}$  koja odgovara modelu  $I^+ ID.ID$  kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  nema drugih tačaka grananja osim  $s = 0$ .

Na slici 6.2 je potvrđeno podudaranje prostornih profila Grinove funkcije, prikazanih punom linijom, sa profilima koji prikazuju asimptotiku za vremena bliska nuli, prikazanim isprekidanom linijom, koje postaje sve bolje za manja vremena, pri čemu se profili predstavljeni punom linijom dobijaju prema analitičkom izrazu (6.53), sa  $\varepsilon = 0$  i  $\varphi_0 = \pi$ , dok se profili predstavljeni linijom koju čine tačke dobijaju prema asimptotskom izrazu (6.55). Slično, slika 6.3 potvrđuje da preklapanje prostornih profila Grinove funkcije, predstavljenih punom linijom, sa profilima koji odgovaraju asimptotici za velika vremena, predstavljenim isprekidanom linijom, postaje bolje kako se vreme povećava, pri čemu je izraz (6.57) korišćen za dobijanje profila Grinove funkcije koji odgovaraju asimptotici za velika vremena.

Prostorni profili koji odgovaraju Grinovoj funkciji  $G^{(x)}$  u slučaju kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja  $s_0$  i  $\bar{s}_0$ , pored  $s = 0$ , dobijeni prema izrazu (6.53), sa  $\varepsilon = 0$  i  $\varphi_0 = \arg s_0$ , i prikazani na slici 6.4a, slično kao u slučaju kada  $\tilde{G}^{(x)}$  nema drugih tačaka grananja osim  $s = 0$ , teži u beskonačnost kada  $r$  teži u nulu i asimptotski se ustali u nulu za  $r$  koje teži u beskonačnost, opet kao hiperbolična funkcija  $\frac{1}{r}$  i za  $r \rightarrow 0$  i za  $r \rightarrow \infty$ , videti (6.53) i asimptotske izraze (6.55) i (6.57)<sub>2</sub>. Sa jedne strane, slika 6.4a za svaki prostorni profil prikazuje jedan pik koji nosi informaciju o početnoj pobudi, koji podseća na Dirakov delta pik u slučaju klasične talasne propagacije, a koji su sve niži i širi, što je vreme duže, dok sa druge strane, slika 6.4a prikazuje dobro slaganje između krivih predstavljenih punom linijom, dobijenih prema analitičkom izrazu i krivih predstavljenih linijom koju čine tačke, dobijenih numeričkom inverznom Laplasovom transformacijom Grinove funkcije u Laplasovom domenu (6.43), slično kao slika 6.1b.

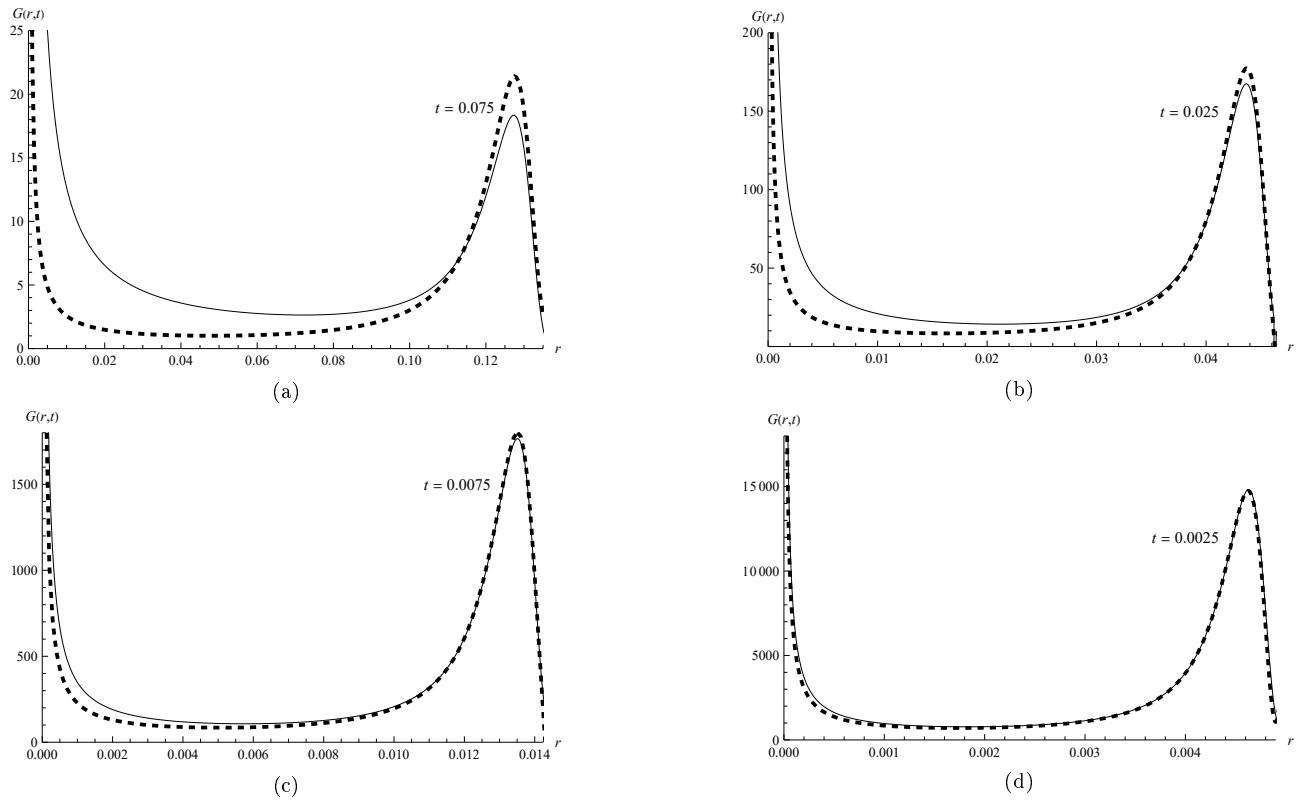
Za razliku od slučaja kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  nema drugih tačaka grananja osim  $s = 0$ , u kom prostorni profili ne iskazuju oscilatorna svojstva, u slučaju kada  $\tilde{G}^{(x)}$  ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja  $s_0$  i  $\bar{s}_0$  pored  $s = 0$ , za dovoljno veliko vreme, slika 6.4b jasno prikazuje prigušena oscilatorna svojstva repova prostornih profila, što nije tipično za manje vrednosti vremena. Oscilatorna svojstva prostornih profila postaju izraženija kako vreme uzima veće vrednosti, kao što je evidentno sa slike 6.5, jer se broj oscilacija povećava, pa umesto barem jedne oscilacije za vremenski trenutak  $t \leq 15$ , videti slike 6.4b i 6.5a, za vremenske trenutke  $t \in \{30, 45, 60, 75\}$  ima više od jedne oscilacije, odnosno broj oscilacija pomnožen faktorom iz skupa  $\{3/2, 2, 5/2, 3\}$ , videti slike 6.5b - 6.5e. Takođe, kako se vreme povećava, amplitudu repova prostornih profila postaju manje, ukazujući na prigušenje i u prostoru i u vremenu. Stoga, prigušeni oscilatori karakter Grinove funkcije  $G^{(x)}$  u prostoru i vremenu potiče od kompleksne vrednosti tačaka grananja Grinove funkcije u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$ , tako da, najverovatnije, realni deo tačke grananja  $s_0$  odgovara stepenu prigušenja, dok njegov imaginarni deo odgovara frekvenciji oscilatornog karaktera.

Sa jedne strane, izraz za Grinovu funkciju (6.53) odgovara asimptotskom izrazu (6.55) za vremena bliska nuli, što se može uočiti na slici 6.6, jer, kako se posmatra sve manji vremenski trenutak, poklapanje krivih koje odgovaraju navedenim izrazima postaje sve bolje, dok, sa druge strane, sve je bolje poklapanje krivih sa slike 6.7 kako vreme uzima veće vrednosti, ukazujući da za dovoljno veliko vreme izraz za Grinovu funkciju (6.53) kvalitativno prelazi u asimptotski izraz (6.57) za vremena koja teže u beskonačnost. Iako se prostorni profili dominantno ponašaju kao asimptotske krive za male i srednje vrednosti za rastojanja  $r$ , rep prostornog profila je oscilatoran, dok asimptotske krive nisu, međutim, kao što se zapaža na slici 6.5, amplitudu oscilacija opadaju kako se vreme povećava.

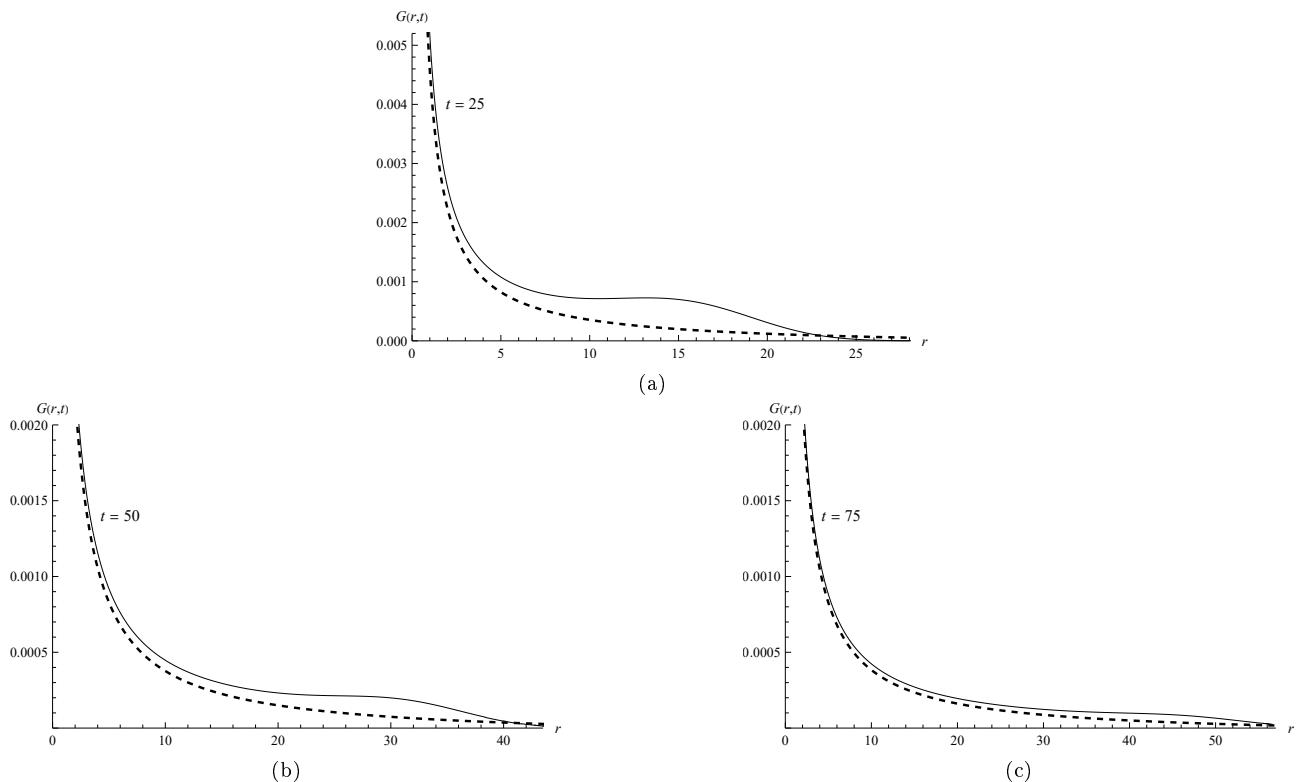
### 6.2.2 Grinova funkcija $G^{(x)}$ - konačna brzina prostiranja talasa

Parametri modela koji odgovaraju frakcionom Burgersovom modelu VII, videti (6.62), izabrani su kao u tabeli 6.2 da bi se predstavila vremenska evolucija prostornih profila Grinove funkcije  $G^{(x)}$ , ili prema analitičkom izrazu (6.53) sa  $\varphi_0 = \pi$ , ako funkcija  $\Phi_\sigma$ , videti (6.80)<sub>1</sub>, nema nula, ili prema analitičkom izrazu (6.53) sa  $\varphi_0 = \arg s_0$ , ako su  $s_0$  i njemu kompleksno konjugovano  $\bar{s}_0$  nule funkcije  $\Phi_\sigma$ , kao i numeričkom inverznom Laplasovom transformacijom koristeći izraz (6.43) za Grinovu funkciju u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$ , dok se izraz (6.91) koristi za dobijanje profila koji odgovaraju asimptotskom ponašanju Grinove funkcije za vremena bliska nuli. Naime, prostorni profili Grinove funkcije  $G^{(x)}$  u slučaju kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  nema drugih tačaka grananja pored  $s = 0$ , predstavljeni su na slikama 6.8 i 6.9, dok su prostorni profili Grinove funkcije  $G^{(x)}$  u slučaju kada  $\tilde{G}^{(x)}$  ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja  $s_0$  i  $\bar{s}_0$  pored  $s = 0$ , prikazani na slici 6.10.

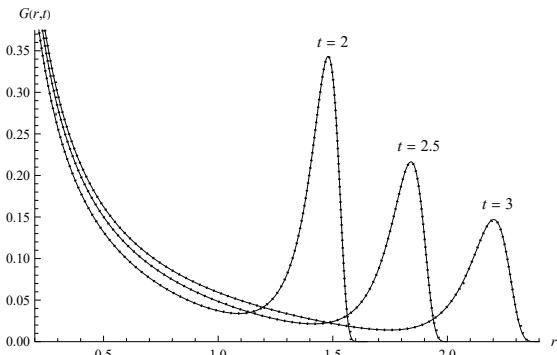
Prostorni profili Grinove funkcije  $G^{(x)}$ , koja odgovara frakcionom Burgersovom modelu VII u slučaju kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  nema drugih tačaka grananja pored  $s = 0$ , su predstavljeni za različite vremenske trenutke na slici 6.8a krivama predstavljenim punom linijom, dobijenim prema analitičkom izrazu (6.53) sa parametrom regularizacije  $\varepsilon = 0$ , a štaviše upoređeni su sa krivama prostornih profila predstavljenim linijom koju čine tačke, dobijenih numeričkom inverznom Laplasovom transformacijom Grinove funkcije u Laplasovom domenu (6.43) korišćenjem fiksnog Talbotovog metoda kao numeričke procedure. Profili su pozitivni i opadaju iz beskonačnosti kako  $r$  raste od nule do srednjih vrednosti, najverovatnije jer se Grinova funkcija pretežno ponaša kao hiperbolična funkcija  $\frac{1}{r}$  za  $r \rightarrow 0$ . Naprotiv slučaju prostornih profila koji odgovaraju Grinovoj funkciji kada je brzina prostiranja talasa beskonačna, kada postoji pik koji translira prema



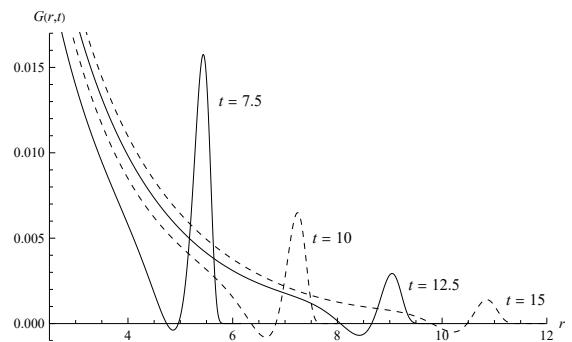
Slika 6.2: Poređenje prostornih profila Grinove funkcije, označenih punom linijom, sa profilima koji odgovaraju asimptotici za vremena bliska nuli, označenim isprekidanom linijom - slučaj kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  nema drugih tačaka grananja osim  $s = 0$ .



Slika 6.3: Poređenje prostornih profila Grinove funkcije, označenih punom linijom, sa profilima koji odgovaraju asimptotici za velika vremena, označenim isprekidanom linijom - slučaj kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  nema drugih tačaka grananja osim  $s = 0$ .

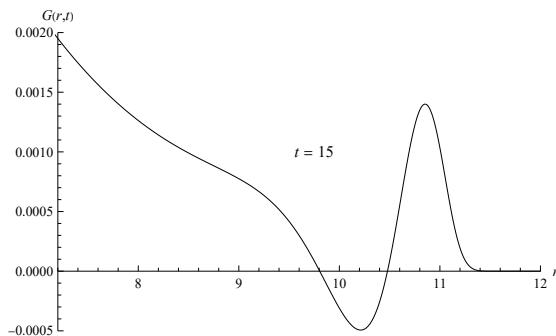


(a) Poredjivanje analitički i numerički dobijenih profila, respektivno označenih punom linijom i linijom predstavljenom tačkama.

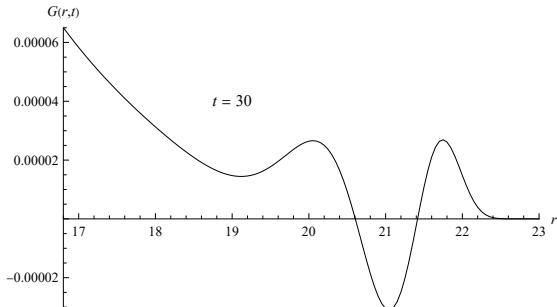


(b) Prostorni profili dobijeni prema analitičkom izrazu za različite vremenske trenutke.

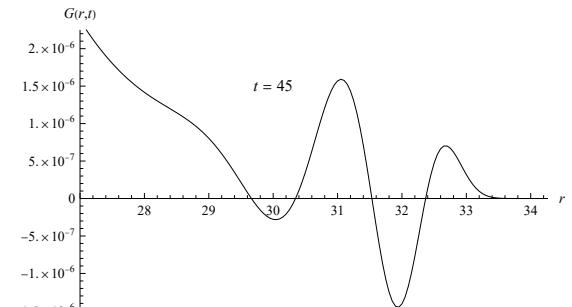
Slika 6.4: Slučaj kada je brzina prostiranja talasa beskonačna - prostorni profili Grinove funkcije  $G^{(x)}$  koja odgovara modelu  $I^+ ID.ID$  kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja  $s_0$  i  $\bar{s}_0$  pored  $s = 0$ .



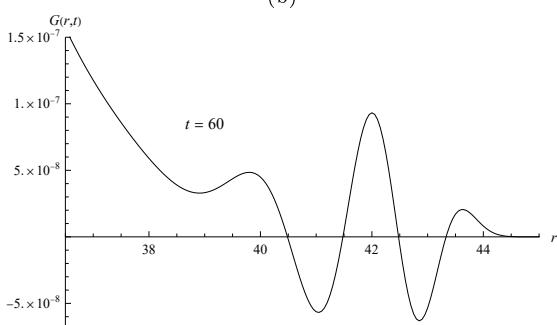
(a)



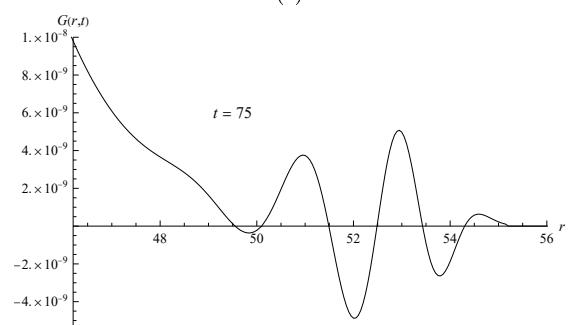
(b)



(c)

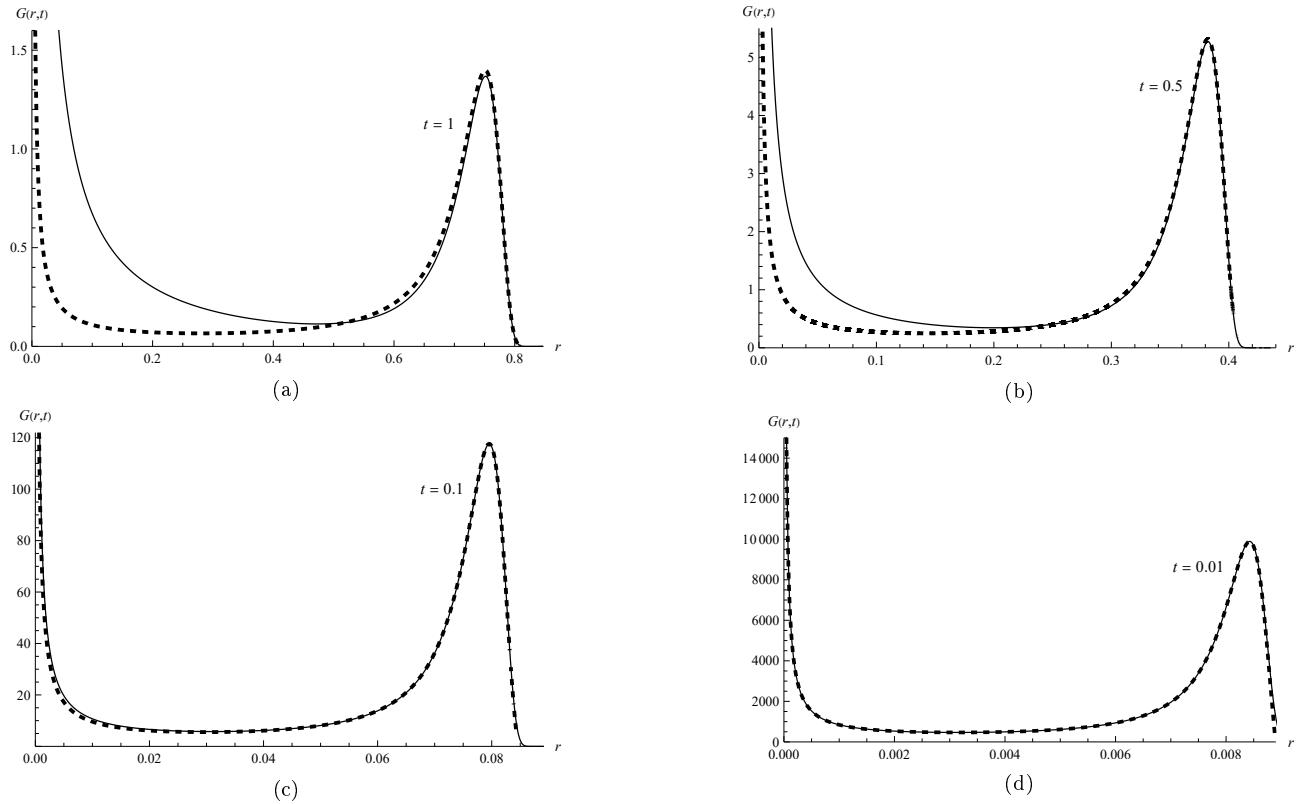


(d)

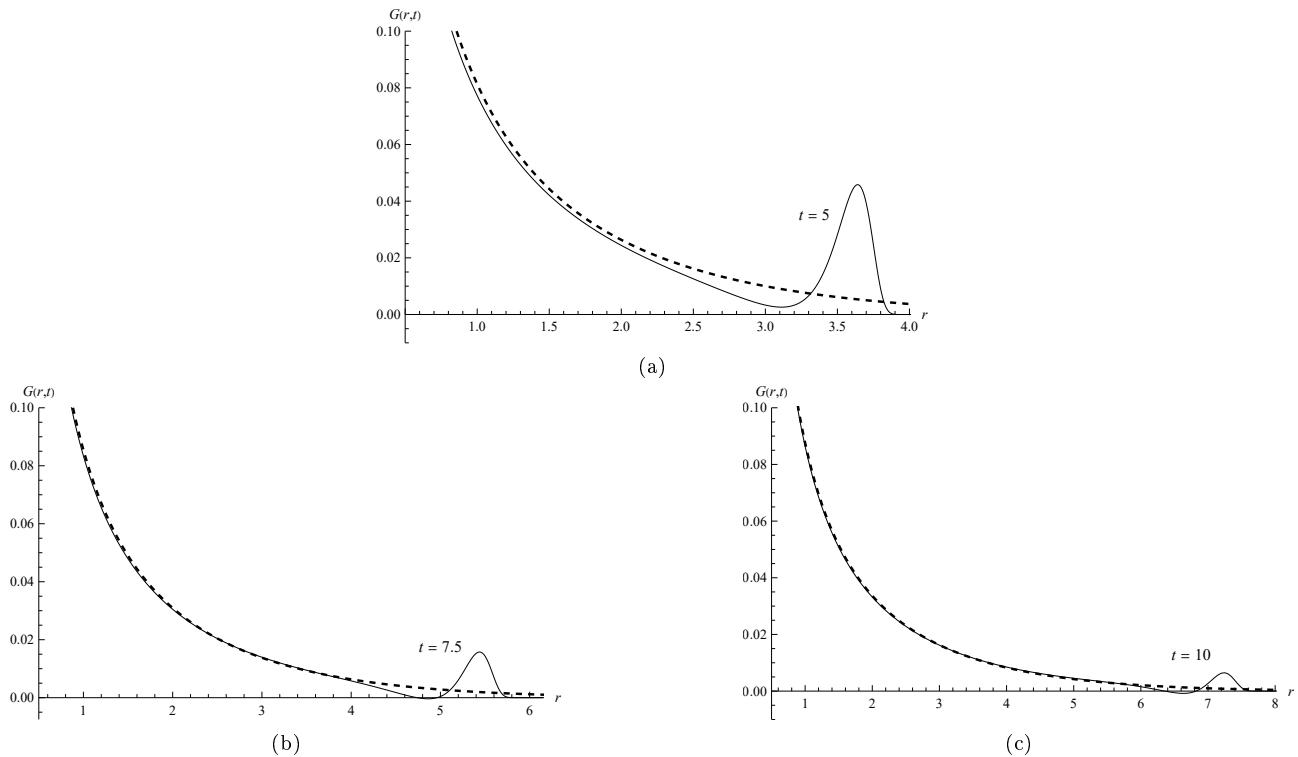


(e)

Slika 6.5: Slučaj kada je brzina prostiranja talasa beskonačna - repovi prostornih profila Grinove funkcije  $G^{(x)}$  koji odgovaraju modelu  $I^+ ID.ID$  kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja  $s_0$  i  $\bar{s}_0$  pored  $s = 0$ .



Slika 6.6: Poređenje prostornih profila Grinove funkcije, označenih punom linijom, sa profilima koji odgovaraju asimptoticima za vremena bliska nuli, označenim isprekidanom linijom - slučaj kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja  $s_0$  i  $\bar{s}_0$  pored  $s = 0$ .



Slika 6.7: Poređenje prostornih profila Grinove funkcije, označenih punom linijom, sa profilima koji odgovaraju asimptoticima za velika vremena, označenim isprekidanom linijom - slučaj kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja  $s_0$  i  $\bar{s}_0$  pored  $s = 0$ .

Slučaj kada $\Phi_\sigma$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$	$\alpha$	$\beta$
nema nula	0.01	4.5	4	1	3	0.7	0.845
ima par kompleksno konjugovanih nula		2.5	5.5		2.21		

Tabela 6.2: Parametri frakcionog Burgersovog modela VII korišćeni za numeričke primere.

višim vrednostima za  $r$  kako vreme raste, pri čemu je sve niži i širi, videti slike 6.1 i 6.4, u slučaju frakcionog Burgersovog modela VII, koji podrazumeva konačnu vrednost brzine prostiranja talasa  $c_x = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \sqrt{\frac{b_2}{a_3}}$ , pik se ne primećuje u intervalu od srednjih vrednosti za rastojanja  $r$  do  $r = c_x t$ , gde profili pokazuju rastući karakter prema beskonačnosti. Zapravo, kao što je očigledno iz asimptotike Grinove funkcije (6.48) za vremena bliska nuli, predstavljene Dirakovom delta distribucijom centrirnom u  $r = c_x t$ , pik bi trebalo da bude centriran u tački  $r = c_x t$ , koja je naznačena vertikalnom linijom na slici 6.8a. Međutim, pik se ne može uočiti na grafiku, budući da analitički izraz (6.53) važi isključivo za  $r < c_x t$ , pa porast prostornog profila prema beskonačnosti predstavlja formiranje pika za  $r < c_x t$ , koji ne može biti formiran za  $r \geq c_x t$ , stoga ne može biti kompletно predstavljen. Sa druge strane, izraz za regularizovanu Grinovu funkciju  $G_\varepsilon^{(x)}$  dozvoljava formiranje pika na repu prostornog profila, kao što se može zapaziti na slici 6.8b, na kojoj je očigledno da, kako parametar regularizacije  $\varepsilon$  opada, položaj pika se pomera prema  $r = c_x t$ , dok širina pika opada, a njegova visina raste.

Slika 6.9 predstavlja poređenje prostornih profila koji odgovaraju regularizovanoj Grinovoj funkciji  $G_\varepsilon^{(x)}$  sa profilima koji odgovaraju regularizaciji Dirakove delta distribucije, koja predstavlja asimptotiku Grinove funkcije za vremena bliska nuli, pri čemu se izraz (6.53) koristi za računanje regularizovane Grinove funkcije, dok se izraz (6.91) koristi za računanje regularizovane Dirakove delta distribucije. Može se zapaziti da preklapanje između krivih koje odgovaraju profilima i asimptotici postaje bolje kako se posmatraju manji vremenski trenuci. Takođe, treba naglasiti da parametar regularizacije  $\varepsilon$  ima dovoljno malu vrednost, tako da pik na repu profila nije vidljiv.

Nasuprot slučaju kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  nema drugih tačaka grananja pored  $s = 0$ , u kom, kako se  $r$  povećava, profili opadaju od beskonačnosti do tačke u kojoj pik, pozicioniran u  $r = c_x t$ , počinje da se formira, videti sliku 6.8, u slučaju kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja  $s_0$  i  $\bar{s}_0$  pored  $s = 0$ , pojavljuje se dodatni negativan pik i prethodi piku koji se formira u  $r = c_x t$ . Najverovatnije je karakter prostornog profila prigušen i oscilatoran, slično kao u slučaju kada je brzina prostiranja talasa beskonačna, videti sliku 6.4b, što se ne vidi jer vreme nije dovoljno veliko. Izraženiji oscilatoran karakter repova prostornih profila može se očekivati za veća vremena, opet slično kao na slici 6.5.

### 6.2.3 Funkcija $g^{(x)}$

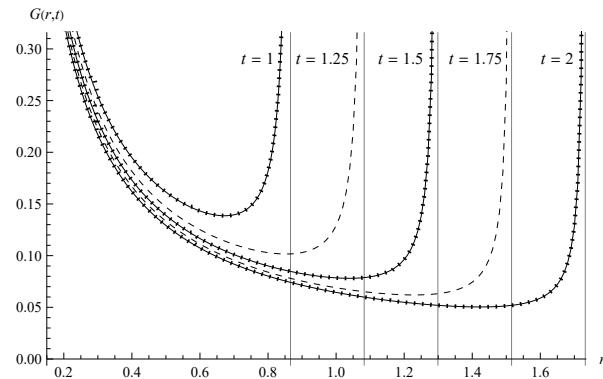
Nasuprot slučaju za Grinovu funkciju, u kom se mora uzeti u obzir da li je brzina prostiranja talasa beskonačna ili konačna, u slučaju funkcije  $g^{(x)}$ , date izrazom (6.58), brzina prostiranja talasa ne igra važnu ulogu. Prostorni profil funkcije  $g^{(x)}$  se dobija korišćenjem numeričke inverzne Laplasove transformacije izraza (6.59) i prikazan je punom linijom na slici 6.11, pokazujući sasvim klasično ponašanje, budući da je profil pozitivan, opadajući i konveksan. Štaviše, prostorni profil, predstavljen punom linijom, pored se sa prostornim profilom, predstavljenim tačkama, koji potiče od analitičkog izraza (6.58). Slično kao Grinova funkcija  $G_\varepsilon^{(x)}$ , funkcija  $g^{(x)}$  je takođe proporcionalna sa  $\frac{1}{r}$ , stoga prostorni profil teži u beskonačnost za  $r \rightarrow 0$  i asimptotski teži u nulu kako  $r \rightarrow \infty$ .

## 6.3 Asimptotika memorijske funkcije $\tilde{c}_x$

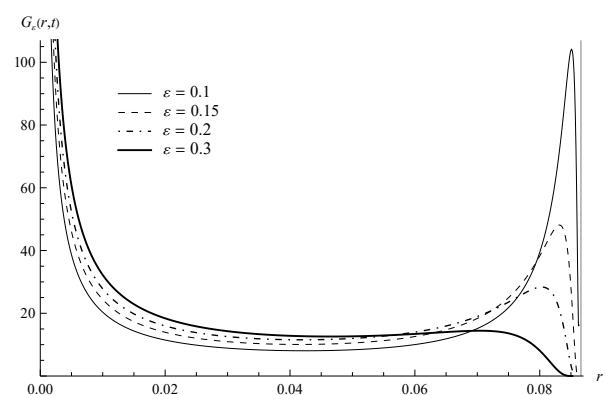
Da bi se ispitala asimptotika Grinove funkcije i za vremena bliska nuli i za velika vremena, kako je urađeno u poglavlju 6.1.3, neophodno je odrediti asimptotiku memorijske funkcije  $\tilde{c}_x$ ,  $x \in \{c, s\}$ , koja odgovara komprezisionim i vrtložnim talasima. Polazeći od izraza (6.19) i (6.27) kojima su definisane memorijske funkcije  $\tilde{c}_x$  i uzimajući u obzir izraz (2.12)<sub>1</sub> za moduo relaksacije u Laplasovom domenu, sledi izraz za memorijsku funkciju

$$\tilde{c}_x(s) = \sqrt{\frac{s\tilde{\sigma}_{sr}^{(x)}(s)}{\varrho}} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \sqrt{\frac{\Phi_\varepsilon(s)}{\Phi_\sigma(s)}}, \quad (6.63)$$

pri čemu su funkcije  $\Phi_\varepsilon$  i  $\Phi_\sigma$  date sa (2.11). Memorijska funkcija  $\tilde{c}_x$ , data u obliku (6.63), odgovara linearnim modelima frakcionog reda koji imaju izvode sa redovima u intervalu  $(0, 1)$ , i dati su sa (2.18), ako su funkcije  $\Phi_\varepsilon$  i  $\Phi_\sigma$  date sa (6.66) ispod, kao i frakcionim Burgersovim modelima (2.29), ako su funkcije  $\Phi_\varepsilon$  i  $\Phi_\sigma$  date sa

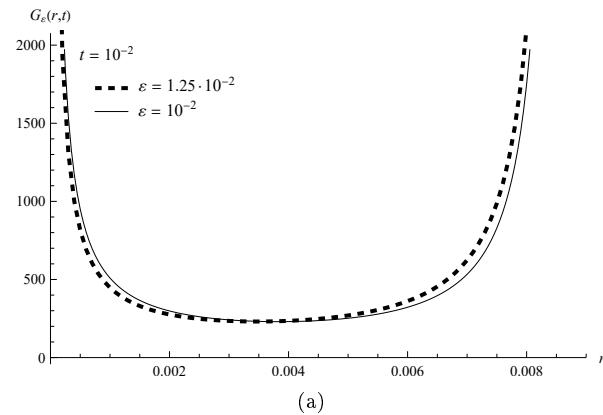


(a) Poređenje analitički i numerički dobijenih profila, respektivno označenih punom/isprekidanom linjom i linjom predstavljenom tačkama.

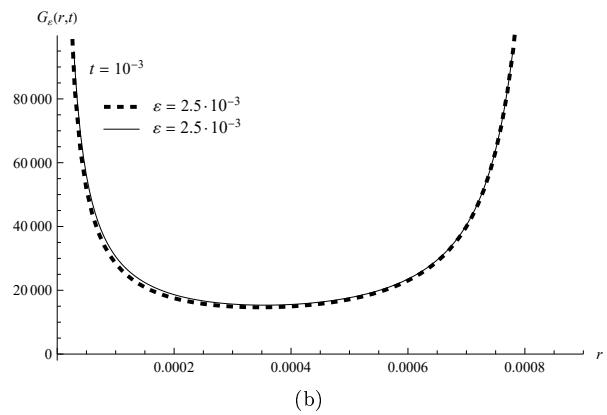


(b) Prostorni profili dobijeni prema analitičkom izrazu za različite vrednosti parametra regularizacije  $\varepsilon$  u  $t = 0.1$ .

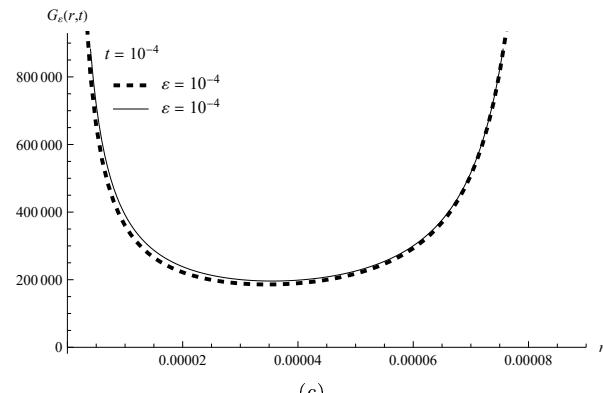
Slika 6.8: Slučaj kada je brzina prostiranja talasa konačna - prostorni profili Grinove funkcije  $G^{(x)}$  koja odgovara frakcionom Burgersovom modelu VII kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  nema drugih tačaka grananja osim  $s = 0$ .



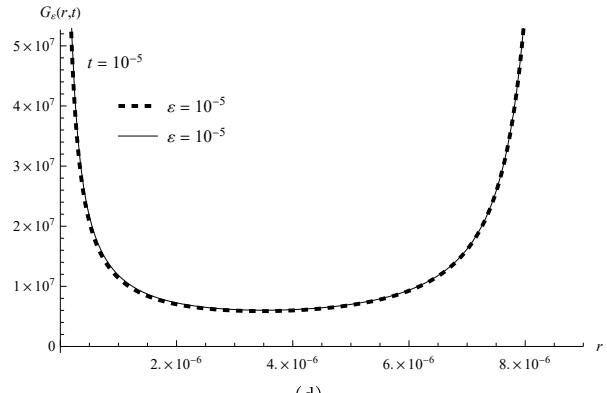
(a)



(b)

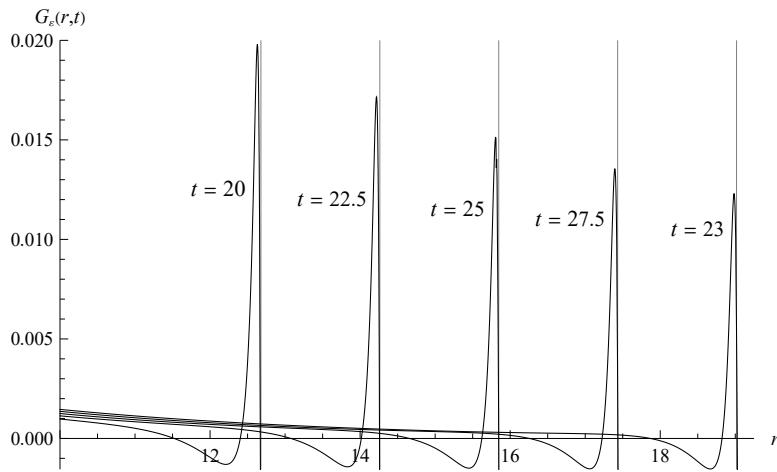


(c)

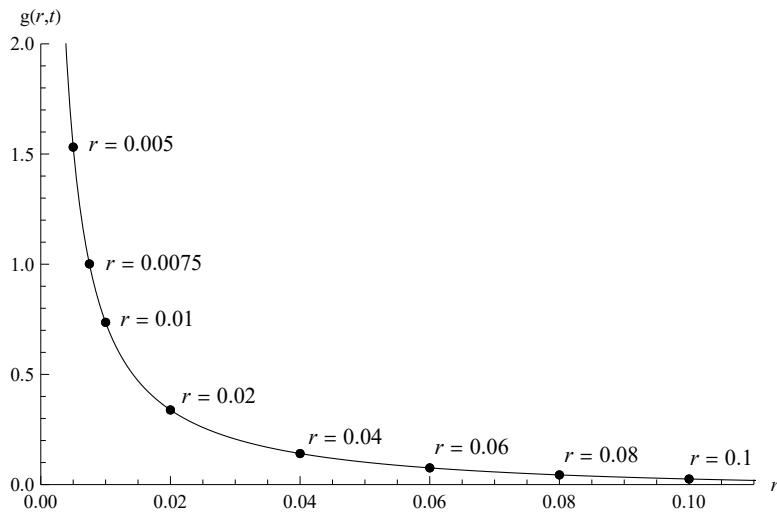


(d)

Slika 6.9: Poređenje prostornih profila regularizovane Grinove funkcije, označenih punom linijom, sa profilima koji odgovaraju asimptotici za vremena bliska nuli, označenim isprekidanom linijom - slučaj kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  nema drugih tačaka grananja osim  $s = 0$ .



Slika 6.10: Slučaj kada je brzina prostiranja talasa konačna - prostorni profili regularizovane Grinove funkcije  $G_\varepsilon^{(x)}$ ,  $\varepsilon = 0.5$ , koji odgovaraju frakpcionom Burgersovom modelu VII kada Grinova funkcija u Laplasovom domenu  $\tilde{G}^{(x)}$  ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja  $s_0$  i  $\bar{s}_0$  pored  $s = 0$ .



Slika 6.11: Poređenje prostornih profila funkcije  $g$ , koji odgovaraju modelu  $I^+ ID.ID$ , dobijeni prema numeričkoj inverznoj Laplasovoj transformaciji (puna linija) i prema analitičkom izrazu (tačke) u vremenskom trenutku  $t = 0.1$ .

(6.72) i (6.78) ispod, dok u slučaju frakcionih Cenerovih i anti-Cenerovih modela, datih u tabeli 2.1, memorijkska funkcija uzima oblik

$$\tilde{c}_x(s) = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \sqrt{s^\xi \frac{\phi_\varepsilon(s)}{\phi_\sigma(s)}}, \quad x \in \{c, s\}, \quad (6.64)$$

sa funkcijama  $\phi_\varepsilon$  i  $\phi_\sigma$ , kao i eksponentom  $\xi$  datim u tabeli 6.5, zbog forme kompleksnog modula

$$\tilde{E}(s) = \frac{\Phi_\varepsilon(s)}{\Phi_\sigma(s)} = s^\xi \frac{\phi_\varepsilon(s)}{\phi_\sigma(s)},$$

videti takođe (2.10)<sub>2</sub> i 4.12, specifične za frakcione Cenerove i anti-Cenerove modele.

Dalja analiza asimptotike memorijskе funkcije  $\tilde{c}_x$ , videti (6.63) i (6.64), svodi se na pronalaženje asimptotskog izraza funkcija  $\Phi_\sigma$  i  $\Phi_\varepsilon$ , odnosno  $\phi_\sigma$  i  $\phi_\varepsilon$ , čiji su eksplicitni oblici dati u nastavku, a dobijaju se kao posledica operatora koji deluju na napon i deformaciju u konstitutivnoj jednačini u vremenskom domenu (2.6) korišćenjem Laplasove transformacije konstitutivne jednačine, uopšteno date sa (2.10)<sub>1</sub>, prema Laplasovoj transformaciji frakcionog integrala i Riman-Liuilovog frakcionog izvoda (2.8) i (2.9). U nastavku je pokazano da je asimptotika

memorijske funkcije  $\tilde{c}_x$ , date sa (6.63) ili (6.64), data izrazima

$$\tilde{c}_x(s) \sim \begin{cases} \kappa, & \text{i za } s \rightarrow \infty \\ \kappa s^{\frac{\delta}{2}}, & \delta \in (0, 1), \end{cases} \quad \text{i za } s \rightarrow 0, \quad (6.65)$$

za sve razmatrane linearne frakcione modele viskoelastičnog tela, pri čemu su konstante  $\kappa$  i  $\delta$  date u tabelama 6.3 i 6.4 za linearne modele frakcionog reda koji sadrže samo Riman-Liuvilove frakcione izvode reda u intervalu  $(0, 1)$ , videti (2.18), kao i za termodinamički konzistentne frakcione Burgersove modele, videti (2.29), dok su u tabelama 6.6 i 6.7 date vrednosti konstanti  $\kappa$  i  $\delta$  za simetrične i asimetrične frakcione Cenerove i anti-Cenerove modele, videti tabelu 2.1.

Funkcije  $\Phi_\sigma$  i  $\Phi_\varepsilon$ , koje odgovaraju linearnim modelima frakcionog reda dobijaju se primenom Laplasove transformacije na uopštenu konstitutivnu jednačinu (2.18) u obliku

$$\Phi_\sigma(s) = \sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha_i} \quad \text{i} \quad \Phi_\varepsilon(s) = \sum_{j=1}^m b_j s^{\beta_j}, \quad \text{sa} \quad (6.66)$$

$$0 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \beta_1 < \dots < \beta_m < 1, \quad (6.67)$$

proizilazeći iz termodinamičkih razmatranja, svodeći se respektivno na

$$\Phi_\sigma(s) = \sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha_i} \quad \text{i} \quad \Phi_\varepsilon(s) = \sum_{i=1}^n b_i s^{\alpha_i}, \quad (6.68)$$

$$\Phi_\sigma(s) = \sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha_i} \quad \text{i} \quad \Phi_\varepsilon(s) = \sum_{i=1}^n b_i s^{\alpha_i} + \sum_{i=n+1}^m b_i s^{\beta_i}, \quad (6.69)$$

$$\Phi_\sigma(s) = \sum_{i=1}^{n-m} a_i s^{\alpha_i} + \sum_{i=n-m+1}^n a_i s^{\alpha_i} \quad \text{i} \quad \Phi_\varepsilon(s) = \sum_{j=1}^m b_j s^{\alpha_{n-m+j}}, \quad (6.70)$$

$$\Phi_\sigma(s) = \sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha_i} \quad \text{i} \quad \Phi_\varepsilon(s) = \sum_{j=1}^m b_j s^{\beta_j} \quad (6.71)$$

za modele koji pripadaju Case I, II, III i IV klasama modela, videti (2.19) - (2.22) kao i dodatak A.1. Asimptotici memorijske funkcije  $\tilde{c}_x$  odgovara izraz (6.65), sa konstantama  $\kappa$  i  $\delta$  predstavljenim u tabeli 6.3 i dobijenim prema (6.63), korišćenjem funkcija  $\Phi_\sigma$  i  $\Phi_\varepsilon$ , videti (6.68) - (6.71), i uređenja (6.67) redova frakcionalih izvoda.

Frakcioni linearni modeli	Modeli	Asimptotika za mala vremena		Asimptotika za velika vremena	
		$\kappa$	$\delta$	$\kappa$	$\delta$
Case I	Case I	$\sqrt{\frac{1}{\varrho} \frac{b_n}{a_n}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{\varrho} \frac{b_1}{a_1}}$	0
	Case II	$\sqrt{\frac{1}{\varrho} \frac{b_m}{a_n}}$	$\beta_m - \alpha_n$		0
	Case III	$\sqrt{\frac{1}{\varrho} \frac{b_m}{a_n}}$	0		$\alpha_{n-m}$
	Case IV	$\sqrt{\frac{1}{\varrho} \frac{b_m}{a_n}}$	$\beta_m - \alpha_n$		$\beta_1 - \alpha_1$

Tabela 6.3: Asimptotika linearnih modela frakcionog reda.

U slučaju frakcionalih Burgersovih modela, datih u dodatku A.2, grupisanih u dve termodinamički konzistentne klase i predstavljenih uopštenim konstitutivnim jednačinama (2.29), funkcije  $\Phi_\sigma$  i  $\Phi_\varepsilon$ , za modele prve klase su date sa

$$\Phi_\sigma(s) = 1 + a_1 s^\alpha + a_2 s^\beta + a_3 s^\gamma \quad \text{i} \quad \Phi_\varepsilon(s) = b_1 s^\mu + b_2 s^{\mu+\eta}, \quad (6.72)$$

svodeći se na

$$\Phi_\sigma(s) = 1 + a_1 s^\alpha + a_2 s^\beta + a_3 s^\gamma \quad \text{i} \quad \Phi_\varepsilon(s) = b_1 s^\mu + b_2 s^{\mu+\eta}, \quad (6.73)$$

$$\Phi_\sigma(s) = 1 + a_1 s^\alpha + a_2 s^\beta + a_3 s^{2\alpha} \quad \text{i} \quad \Phi_\varepsilon(s) = b_1 s^\mu + b_2 s^{\mu+\alpha}, \quad (6.74)$$

$$\Phi_\sigma(s) = 1 + a_1 s^\alpha + a_2 s^\beta + a_3 s^{\alpha+\beta} \quad \text{i} \quad \Phi_\varepsilon(s) = b_1 s^\mu + b_2 s^{\mu+\alpha}, \quad (6.75)$$

$$\Phi_\sigma(s) = 1 + a_1 s^\alpha + a_2 s^\beta + a_3 s^{\alpha+\beta} \quad i \quad \Phi_\varepsilon(s) = b_1 s^\mu + b_2 s^{\mu+\beta}, \quad (6.76)$$

$$\Phi_\sigma(s) = 1 + a_1 s^\alpha + a_2 s^\beta + a_3 s^{2\beta} \quad i \quad \Phi_\varepsilon(s) = b_1 s^\mu + b_2 s^{\mu+\beta}, \quad (6.77)$$

za modele I, II, III, IV i V, respektivno, dok su za modele druge klase, funkcije  $\Phi_\sigma$  i  $\Phi_\varepsilon$  date sa

$$\Phi_\sigma(s) = 1 + a_1 s^\alpha + a_2 s^\beta + a_3 s^{\beta+\eta} \quad i \quad \Phi_\varepsilon(s) = b_1 s^\beta + b_2 s^{\beta+\eta}, \quad (6.78)$$

svodeći se na

$$\Phi_\sigma(s) = 1 + a_1 s^\alpha + a_2 s^\beta + a_3 s^{\alpha+\beta} \quad i \quad \Phi_\varepsilon(s) = b_1 s^\beta + b_2 s^{\alpha+\beta}, \quad (6.79)$$

$$\Phi_\sigma(s) = 1 + a_1 s^\alpha + a_2 s^\beta + a_3 s^{2\beta} \quad i \quad \Phi_\varepsilon(s) = b_1 s^\beta + b_2 s^{2\beta}, \quad (6.80)$$

$$\Phi_\sigma(s) = 1 + \bar{a}_1 s^\alpha + \bar{a}_2 s^{2\alpha} \quad i \quad \Phi_\varepsilon(s) = b_1 s^\alpha + b_2 s^{2\alpha}, \quad (6.81)$$

za modele VI, VII i VIII, respektivno. Asimptotika memorijske funkcije  $\tilde{c}_x$  je data sa (6.65), uz vrednosti konstanti  $\kappa$  i  $\delta$  predstavljenih u tabeli 6.4 i dobijenih prema (6.63) korišćenjem funkcija  $\Phi_\sigma$  i  $\Phi_\varepsilon$ , videti (6.73) - (6.77), u slučaju modela koji pripadaju prvoj klasi, kao i korišćenjem funkcija  $\Phi_\sigma$  i  $\Phi_\varepsilon$ , videti (6.79) - (6.81), u slučaju modela koji pripadaju drugoj klasi.

	Burgersovi modeli	Asimptotika za mala vremena		Asimptotika za velika vremena	
		$\kappa$	$\delta$	$\kappa$	$\delta$
prva klasa	model I	$\sqrt{\frac{1}{\varrho} \frac{b_2}{a_3}}$	$\mu + \beta - \gamma$	$\sqrt{\frac{1}{\varrho} b_1}$	$\mu$
	model II		$\mu - \alpha$		
	model III		$\mu - \beta$		
	model IV		$\mu - \alpha$		
	model V		$\mu - \beta$		
druga klasa	model VI	0		$\beta$	
	model VII				
	model VIII				$\alpha$

Tabela 6.4: Asimptotika frakcionih Burgersovih modela.

Funkcije  $\phi_\sigma$  i  $\phi_\varepsilon$ , kao i eksponent  $\xi$ , koji se pojavljuju u izrazu (6.64) za memorijsku funkciju  $\tilde{c}_x$ , u slučaju simetričnih i asimetričnih frakcionih Cenerovih i anti-Cenerovih modela, datih u tabeli 2.1 i u dodatku A.3, su date u tabeli 6.5, i stoga je asimptotika memorijske funkcije  $\tilde{c}_x$  data sa (6.65), sa konstantama  $\kappa$  i  $\delta$  predstavljenim u tabeli 6.6 za simetrične i u tabeli 6.7 za asimetrične frakcione Cenerove i anti-Cenerove modele.

	Funkcija $\phi_\sigma$	Funkcija $\phi_\varepsilon$	Model	Red $\xi$	Red $\lambda$	Red $\kappa$
Simetrični modeli	$a_1 + a_2 s^{\alpha+\beta}$	$b_1 + b_2 s^{\alpha+\beta}$	ID.ID	*	$\alpha - \mu$	—
			ID.DD+	$\alpha + \mu < 1$	—	—
	$a_1 + a_2 s^\lambda + a_3 s^{\alpha+\gamma}$	$b_1 + b_2 s^\lambda + b_3 s^{\alpha+\gamma}$	ID.IDD	*	$\eta - \gamma$	$\alpha - \beta$
			IDD.IDD	*	$\alpha - \mu$	—
	$a_1 + a_2 s^{1+\frac{\alpha+\gamma}{2}} + a_3 s^{1+\alpha+\gamma}$	$b_1 + b_2 s^{\kappa} + b_3 s^{\alpha+\gamma}$	ID.IDD	$\alpha - \mu$	$\mu + \nu < 1$	$\alpha - \beta$
			I+ID.I+ID	$\alpha - \mu$	—	—
	$a_1 + a_2 s^{\frac{1+\alpha+\gamma}{2}} + a_3 s^{1+\alpha+\gamma}$	$b_1 + b_2 s^{\frac{1+\alpha+\gamma}{2}} + b_3 s^{1+\alpha+\gamma}$	IDD+.IDD+	$\eta - \gamma$	—	—
			I+ID.IDD+	$1 - (\gamma - \eta)$	—	—
Asimetrični modeli	$a_1 + a_2 s^\lambda + a_3 s^\kappa$		ID.ID	$\beta - \gamma$	$(\alpha + \beta) - (\nu + \gamma)$	$\alpha + \beta < 1$
			IDD.DD+	$\alpha + \mu < 1$	$\alpha + \beta < 1$	$\alpha + \mu < 1$
	$a_1 + a_2 s^{\alpha+\beta} + a_3 s^{2(\alpha+\beta)}$	$b_1 + b_2 s^{\alpha+\beta}$	I+ID.ID	$\beta + \nu < 1$	—	—
			IDD+.DD+	$\alpha + \mu < 1$	—	—
	$a_1 + a_2 s^{\alpha+\beta}$	$b_1 + b_2 s^\lambda + b_3 s^\kappa$	ID.IDD	$\alpha - \mu$	$\mu + \nu < 1$	$\alpha + \beta < 1$
			ID.DDD+	$\alpha + \mu < 1$	$\nu - \mu$	$\alpha + \nu - (\mu - \beta)$
	$a_1 + a_2 s^{\alpha+\beta} + b_3 s^{2(\alpha+\beta)}$		ID.IDD+	$\nu - \beta$	—	—

Tabela 6.5: Konstitutivne funkcije  $\phi_\sigma$  i  $\phi_\varepsilon$ , zajedno sa eksponentom  $\xi$ , koje odgovaraju termodinamicki konzistentnim frakcionim anti-Cenerovim i Cenerovim modelima. Oznaka \* da redovi  $\alpha + \beta$  i  $\alpha + \gamma$  pripadaju intervalu  $(0, 1)$  ili intervalu  $(1, 2)$ .

Simetrični Cenerovi/anti-Cenerovi modeli	Modeli	Asimptotika za mala vremena		Asimptotika za velika vremena	
		$\kappa$	$\delta = \xi$	$\kappa$	$\delta = \xi$
ID.ID	ID.ID	$\sqrt{\frac{1}{\varrho} \frac{b_2}{a_2}}$	$\alpha - \mu$	$\sqrt{\frac{1}{\varrho} \frac{b_1}{a_1}}$	$\alpha - \mu$
	ID.DD <sup>+</sup>		$\alpha + \mu < 1$		$\alpha + \mu < 1$
	IID.IID		$\eta - \gamma$		$\eta - \gamma$
	IDD.IDD		$\alpha - \mu$		$\alpha - \mu$
	IID.IDD		$\alpha - \mu$		$\alpha - \mu$
	I <sup>+</sup> ID.I <sup>+</sup> ID		$\alpha - \mu$		$\alpha - \mu$
	IDD <sup>+</sup> .IDD <sup>+</sup>		$\eta - \gamma$		$\eta - \gamma$
	I <sup>+</sup> ID.IDD <sup>+</sup>		$1 - (\gamma - \eta)$		$1 - (\gamma - \eta)$

Tabela 6.6: Asimptotika frakcionih Cenerovih i anti-Cenerovih modela simetričnog tipa.

Asimetrični Cenerovi/anti-Cenerovi modeli	Modeli	Asimptotika za mala vremena		Asimptotika za velika vremena	
		$\kappa$	$\delta$	$\kappa$	$\delta = \xi$
Asimetrični Cenerovi/anti-Cenerovi modeli	IID.ID	$\frac{1}{\sqrt{\varrho}} \sqrt{\frac{b_2}{a_3}}$	$\beta - \gamma = \xi$	$\frac{1}{\sqrt{\varrho}} \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}$	$\beta - \gamma$
	IDD.DD <sup>+</sup>		$\alpha + \beta < 1$		$\alpha + \mu < 1$
	I <sup>+</sup> ID.ID		$\nu - \alpha$		$\beta + \nu < 1$
	IDD <sup>+</sup> .DD		$\mu - \beta$		$\alpha + \mu < 1$
	ID.IDD		$\alpha - \mu = \xi$		$\alpha - \mu$
	ID.DDD <sup>+</sup>		$\alpha + \nu < 1$		$\alpha + \mu < 1$
	ID.IDD <sup>+</sup>				$\nu - \beta$

Tabela 6.7: Asimptotika frakcionih Cenerovih i anti-Cenerovih modela asimetričnog tipa.

## 6.4 Određivanje Grinove funkcije, njene asimptotike i funkcije $g^{(x)}$

Grinove funkcije  $G^{(x)}$ , zajedno sa svojim asimptotikama, kao i funkcije  $g^{(x)}$ , sa  $x \in \{c, s\}$ , koje figurišu u rezolventnom tenzoru (6.46) i (6.47) i o kojima je reč u poglavljju 6.1.3, dobijaju se primenom inverzne Laplasove transformacije, koristeći integracionu konturu i Košijevu integralnu teoremu.

### 6.4.1 Određivanje Grinove funkcije

Grinova funkcija u Laplasovom domenu, data sa (6.43), može se predstaviti izrazom

$$\tilde{G}^{(x)}(r, s) = \frac{1}{4\pi r \tilde{c}_x^2(s)} e^{-\frac{rs}{\tilde{c}_x(s)}} = \frac{\varrho}{4\pi r} \frac{\Phi_\sigma(s)}{\Phi_\varepsilon(s)} e^{-\sqrt{\varrho}rs\sqrt{\frac{\Phi_\sigma(s)}{\Phi_\varepsilon(s)}}}, \quad (6.82)$$

koristeći memorijsku funkciju  $\tilde{c}_x$  izraženu u obliku (6.63), te Grinova funkcija u Laplasovom domenu (6.82) i stoga (6.43) takođe, ima tačku grananja  $s = 0$ , zbog članova u funkcijama  $\Phi_\sigma$  i  $\Phi_\varepsilon$  koji sadrže  $s^\xi$ ,  $\xi \in (0, 2)$ , kao

i par kompleksno konjugovanih tačaka grananja  $s_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$  i  $\bar{s}_0$ , sa  $\varphi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , u slučaju kada su  $s_0$  i  $\bar{s}_0$  nule funkcije  $\Phi_\sigma$ , dok, ako su  $s_0$  i  $\bar{s}_0$  nule funkcije  $\Phi_\varepsilon$ , tada su ove tačke takođe polovi Grinove funkcije u Laplasovom domenu. Treba naglasiti, umesto kompleksno konjugovanih nula  $s_0$  i  $\bar{s}_0$ , bilo koja od funkcija  $\Phi_\sigma$  i  $\Phi_\varepsilon$  može imati negativnu realnu nulu takođe, a može i da nema nula.

U slučaju linearnih modela frakcionog reda koji sadrže samo Riman–Liuvilove frakcione izvode reda u intervalu  $(0, 1)$ , datih konstitutivnom jednačinom (2.18), funkcije  $\Phi_\sigma$  i  $\Phi_\varepsilon$  nemaju nula, prema lemi 4.2. u [21], budući da su svi redovi izvoda u intervalu  $(0, 1)$ , videti (6.66). Sa druge strane, u slučaju termodinamički konzistentnih frakcionalih Burgersovih modela, datih sa (2.29), funkcija  $\Phi_\sigma$  može imati par kompleksno konjugovanih nula, ili negativnu realnu nulu, ili da nema nula, kao što je pokazano u dodatku A u [30], budući da je funkcija  $\Phi_\sigma$  polinomska funkcija sa najvišim redom izvoda u intervalu  $(1, 2)$ , videti (6.72) i (6.78) za modele prve i druge klase, respektivno. Kada su u pitanju Cenerovi i anti-Cenerovi modeli, dati u tabeli 2.1, pokazano je u poglavlju 4.2.4, kao i u poglavlju 6. u [2] da i funkcija  $\phi_\sigma$  i funkcija  $\phi_\varepsilon$  mogu imati par kompleksno konjugovanih nula, ili negativnu realnu nulu, ili mogu da nemaju nula, budući da su obe funkcije polinomske funkcije sa najvišim redom u intervalu  $(1, 2)$ , videti tabelu 6.5.

U Košijevoj integralnoj teoremi

$$\oint_{\Gamma} \tilde{G}_\varepsilon^{(x)}(r, s) e^{st} ds = 0,$$

integracija je primenjena duž konture  $\Gamma$ , prikazane na slici 6.12 i uzete tako da se singularne tačke  $s = 0$ ,  $s_0$  i  $\bar{s}_0$  nalaze izvan konture  $\Gamma$ , da bi se dobila regularizovana Grinova funkcija u vremenskom domenu, primenom inverzne Laplasove transformacije na Grinovu funkciju u Laplasovom domenu regularizovanu glatkom aproksimacijom Dirakove delta distribucije, dajući

$$G_\varepsilon^{(x)}(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \tilde{G}_\varepsilon^{(x)}(r, s) e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1} \left[ \tilde{G}^{(x)}(r, s) \tilde{\delta}_\varepsilon(s) \right](r, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{4\pi r \tilde{c}_x^2(s)} e^{-\frac{rs}{\tilde{c}_x(s)}} e^{-\varepsilon\sqrt{s}} \right](r, t),$$

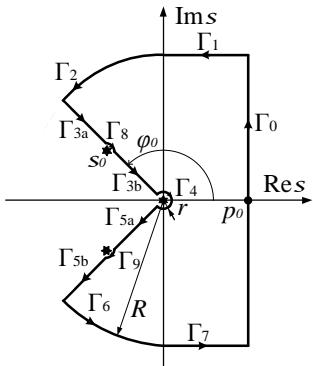
videti takođe (6.50), pri čemu je integracija primenjena duž Bromvičeve konture  $Br$ , tj. duž konture  $\Gamma_0$  u limesu kada  $R \rightarrow \infty$ , gde je  $\Gamma_0$  deo zatvorene konture  $\Gamma$  sa slike 6.12, tako da se Košijeva integralna teorema svodi na

$$2\pi i G_\varepsilon^{(x)}(r, t) = - \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \tilde{r} \rightarrow 0}} (I_{\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}} + I_{\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}}), \quad (6.83)$$

gde su  $I_{\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}}$  i  $I_{\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}}$  integrali duž kontura  $\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}$  i  $\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}$  koji imaju nenulti doprinos, budući da za levu stranu Košijeve integralne teoreme sledi

$$\oint_{\Gamma} \tilde{G}_\varepsilon^{(x)}(r, s) e^{st} ds = \sum_{i=0}^9 I_{\Gamma_i}, \quad \text{sa} \quad I_{\Gamma_i} = \int_{\Gamma_i} \frac{1}{4\pi r \tilde{c}_x^2(s)} e^{-\frac{rs}{\tilde{c}_x(s)}} e^{-\varepsilon\sqrt{s}} e^{st} ds, \quad (6.84)$$

pri čemu integrali  $I_{\Gamma_1}$ ,  $I_{\Gamma_2}$ ,  $I_{\Gamma_4}$ ,  $I_{\Gamma_6}$ ,  $I_{\Gamma_7}$ ,  $I_{\Gamma_8}$  i  $I_{\Gamma_9}$  imaju nulti doprinos u limesu kada  $R \rightarrow \infty$  i  $\tilde{r} \rightarrow 0$ .



$\Gamma_0$	Bromvičeva kontura,
$\Gamma_1$	$s = p + iR$ , $p \in [0, p_0]$ , $p_0 \geq 0$ ,
$\Gamma_2$	$s = Re^{i\varphi}$ , $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \varphi_0]$ ,
$\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}$	$s = \rho e^{i\varphi_0}$ , $\rho \in [\tilde{r}, R]$ ,
$\Gamma_4$	$s = \tilde{r} e^{i\varphi}$ , $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$ ,
$\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}$	$s = \rho e^{-i\varphi_0}$ , $\rho \in [\tilde{r}, R]$ ,
$\Gamma_6$	$s = Re^{i\varphi}$ , $\varphi \in [-\varphi_0, -\frac{\pi}{2}]$ ,
$\Gamma_7$	$s = p - iR$ , $p \in [0, p_0]$ , $p_0 \geq 0$ ,
$\Gamma_8$	$s = s_0 + \tilde{r} e^{i\varphi}$ , $\varphi \in [-\pi + \varphi_0, \varphi_0]$ ,
$\Gamma_9$	$s = \bar{s}_0 + \tilde{r} e^{i\varphi}$ , $\varphi \in [-\varphi_0, \pi - \varphi_0]$ .

Tabela 6.8: Parametrizacija integracione konture  $\Gamma$ .

Slika 6.12: Integraciona kontura  $\Gamma$ .

Korišćenjem parametrizacije date u tabeli 6.8, integrali u (6.83) se računaju kao

$$2\pi i G_\varepsilon^{(x)}(r, t) = -\frac{1}{4\pi r} \left( \int_{\infty}^0 \frac{1}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})| e^{i\arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})}} e^{-\frac{r\rho e^{i\varphi_0}}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})| e^{i\arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})}}} e^{-\varepsilon\sqrt{\rho e^{i\varphi_0}}} e^{\rho t e^{i\varphi_0}} e^{i\varphi_0} d\rho \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{1}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})| e^{-i\arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})}} e^{-\frac{r\rho e^{-i\varphi_0}}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})| e^{-i\arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})}}} e^{-\varepsilon\sqrt{\rho e^{-i\varphi_0}}} e^{\rho t e^{-i\varphi_0}} e^{-i\varphi_0} d\rho \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4\pi r} \int_0^\infty \frac{1}{|\tilde{c}_x^2(\rho e^{i\varphi_0})|} \left( e^{-\frac{r\rho}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|}} e^{i(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0}))} e^{-\varepsilon \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi_0}{2}}} e^{\rho t e^{i\varphi_0}} e^{i(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x^2(\rho e^{i\varphi_0}))} \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\frac{r\rho}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|}} e^{-i(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0}))} e^{-\varepsilon \sqrt{\rho e^{-i\varphi_0}}} e^{\rho t e^{-i\varphi_0}} e^{-i(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x^2(\rho e^{i\varphi_0}))} \right) d\rho \\
 &= \frac{1}{4\pi r} \int_0^\infty \frac{1}{|\tilde{c}_x^2(\rho e^{i\varphi_0})|} e^{-\frac{r\rho}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|}} \cos(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})) e^{-\varepsilon \sqrt{\rho} \cos \frac{\varphi_0}{2}} e^{\rho t \cos \varphi_0} \\
 &\quad \times \left( e^{-\frac{i r \rho}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|}} \sin(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})) e^{-i\varepsilon \sqrt{\rho} \sin \frac{\varphi_0}{2}} e^{i\rho t \sin \varphi_0} e^{i(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x^2(\rho e^{i\varphi_0}))} \right. \\
 &\quad \left. - e^{i\frac{r\rho}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|}} \sin(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})) e^{i\varepsilon \sqrt{\rho} \sin \frac{\varphi_0}{2}} e^{-i\rho t \sin \varphi_0} e^{-i(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x^2(\rho e^{i\varphi_0}))} \right) d\rho \\
 &= 2i \frac{1}{4\pi r} \int_0^\infty \frac{1}{|\tilde{c}_x^2(\rho e^{i\varphi_0})|} e^{\rho t \cos \varphi_0 - \frac{r\rho}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|}} \cos(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})) - \varepsilon \sqrt{\rho} \cos \frac{\varphi_0}{2} \\
 &\quad \times \sin \left( \rho t \sin \varphi_0 - \frac{r\rho}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|} \sin(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})) + \varphi_0 - \arg \tilde{c}_x^2(\rho e^{i\varphi_0}) - \varepsilon \sqrt{\rho} \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) d\rho,
 \end{aligned}$$

predstavljajući izraz (6.53) za regularizovanu Grinovu funkciju  $G_\varepsilon^{(x)}$ . Ostaje da se pokaže da preostali integrali u (6.84)<sub>1</sub> imaju nulti doprinos.

Integral duž konture  $\Gamma_1$ , sa parametrizacijom datom u tabeli 6.8, postaje

$$\begin{aligned}
 I_{\Gamma_1} &= \frac{1}{4\pi r} \int_{p_0}^0 \frac{1}{\tilde{c}_x^2(p+iR)} e^{-\frac{r(p+iR)}{|\tilde{c}_x(p+iR)|}} e^{-\varepsilon \sqrt{p+iR}} e^{(p+iR)t} dp, \text{ tj.} \\
 &= \frac{1}{4\pi r} \int_{p_0}^0 \frac{1}{\tilde{c}_x^2(p+iR)} e^{-\frac{iR(1+\frac{p}{iR})}{|\tilde{c}_x(p+iR)|}} e^{-\varepsilon \sqrt{iR(1+\frac{p}{iR})}} e^{pt} e^{iRt} dp \\
 &\sim \frac{1}{4\pi r} \int_{p_0}^0 \frac{1}{\kappa^2 R^\delta e^{i\frac{\delta\pi}{2}}} e^{-\frac{irR}{\kappa R^{\frac{\delta}{2}} e^{i\frac{\delta\pi}{4}}}} e^{-\varepsilon \sqrt{R} e^{i\frac{\pi}{4}}} e^{pt} e^{iRt} dp, \quad \text{kada } R \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

jer je  $\tilde{c}_x(p+iR) \sim \kappa R^{\frac{\delta}{2}} e^{i\frac{\delta\pi}{4}}$  kada  $R \rightarrow \infty$  sa  $\delta \in [0, 1)$ , videti (6.65) sa  $\kappa$  i  $\delta$  datim u tabelama 6.3, 6.4, 6.6 i 6.7, tako da je

$$\begin{aligned}
 |I_{\Gamma_1}| &\leqslant \frac{1}{4\pi r} \int_0^{p_0} \frac{1}{\kappa^2 R^\delta} e^{-\frac{r}{\kappa} R^{1-\frac{\delta}{2}} \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta\pi}{4})} e^{-\varepsilon \sqrt{R} \cos \frac{\pi}{4}} e^{pt} dp \\
 &\leqslant \frac{1}{4\pi r} \int_0^{p_0} \frac{1}{\kappa^2 R^\delta} e^{-R \left( \frac{r}{\kappa R^{\frac{\delta}{2}}} \sin \frac{\delta\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\varepsilon}{\sqrt{R}} \right)} e^{pt} dp \rightarrow 0, \quad \text{kada } R \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Treba naglasiti da kada je  $\delta = 0$ , prethodni izraz postaje

$$|I_{\Gamma_1}| \leqslant \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \int_0^{p_0} e^{-\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2} \sqrt{R}} e^{pt} dp \rightarrow 0, \quad \text{kada } R \rightarrow \infty,$$

zbog regularizacije Grinove funkcije u Laplasovom domenu uvedene sa (6.52). Slična argumentacija daje da integral  $I_{\Gamma_7}$  takođe teži u nulu kada  $R \rightarrow \infty$ .

Integral duž konture  $\Gamma_2$ , sa parametrizacijom datom u tabeli 6.8, postaje

$$\begin{aligned}
 I_{\Gamma_2} &= \frac{1}{4\pi r} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \frac{1}{\tilde{c}_x^2(Re^{i\varphi})} e^{-\frac{rRe^{i\varphi}}{|\tilde{c}_x(Re^{i\varphi})|}} e^{-\varepsilon \sqrt{R} e^{i\varphi}} e^{Rte^{i\varphi}} Re^{i\varphi} i d\varphi \\
 &\sim \frac{1}{4\pi r} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \frac{1}{\kappa^2 R^\delta e^{i\frac{\delta\varphi}{2}}} e^{-\frac{rRe^{i\varphi}}{\kappa R^{\frac{\delta}{2}} e^{i\frac{\delta\varphi}{2}}}} e^{-\varepsilon \sqrt{R} e^{i\frac{\varphi}{2}}} e^{Rte^{i\varphi}} Re^{i\varphi} i d\varphi, \quad \text{kada } R \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

budući da je  $\tilde{c}_x(Re^{i\varphi}) \sim \kappa R^{\frac{\delta}{2}} e^{i\frac{\delta\varphi}{4}}$  kada  $R \rightarrow \infty$  sa  $\delta \in [0, 1)$ , videti (6.65) sa  $\kappa$  i  $\delta$  datim u tabelama 6.3, 6.4, 6.6 i 6.7, tako da je

$$\begin{aligned}
 |I_{\Gamma_2}| &\leqslant \frac{1}{4\pi r} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \frac{1}{\kappa^2} R^{1-\delta} e^{-\frac{r}{\kappa} R^{1-\frac{\delta}{2}} \cos((1-\frac{\delta}{2})\varphi)} e^{-\varepsilon \sqrt{R} \cos \frac{\varphi}{2}} e^{-Rt |\cos \varphi|} d\varphi \\
 &\leqslant \frac{1}{4\pi r} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \frac{1}{\kappa^2} R^{1-\delta} e^{-R \left( t |\cos \varphi| + \frac{\varepsilon}{\sqrt{R}} \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{r}{\kappa R^{\frac{\delta}{2}}} \cos((1-\frac{\delta}{2})\varphi) \right)} d\varphi \rightarrow 0, \quad \text{kada } R \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Treba naglasiti da kada  $\delta = 0$ , prethodni izraz postaje

$$|I_{\Gamma_2}| \leq \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} R e^{-R(t-\frac{r}{\kappa})|\cos\varphi|} e^{-\varepsilon\sqrt{R}\cos\frac{\varphi}{2}} d\varphi \rightarrow 0, \quad \text{kada } R \rightarrow \infty, \quad \text{za } r < \kappa t.$$

Uslov  $r < \kappa t$  implicira konačnu brzinu prostiranja talasa  $c_x = \kappa$ . Slična argumentacija daje da integral  $I_{\Gamma_6}$  takođe teži u nulu kada  $R \rightarrow \infty$ .

Integral duž konture  $\Gamma_4$ , sa parametrizacijom datom u tabeli 6.8, postaje

$$\begin{aligned} I_{\Gamma_4} &= \frac{1}{4\pi r} \int_{\varphi_0}^{-\varphi_0} \frac{1}{\tilde{c}_x^2(\check{r}e^{i\varphi})} e^{-\frac{r\check{r}e^{i\varphi}}{\tilde{c}_x(\check{r}e^{i\varphi})}} e^{-\varepsilon\sqrt{\check{r}e^{i\varphi}}} e^{\check{r}te^{i\varphi}} \check{r}e^{i\varphi} i d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi r} \int_{\varphi_0}^{-\varphi_0} \frac{1}{\kappa^2 \check{r}^\delta e^{i\delta\varphi}} e^{-\frac{r\check{r}e^{i\varphi}}{\kappa r^{\frac{\delta}{2}} e^{i\frac{\delta\varphi}{2}}}} e^{-\varepsilon\sqrt{\check{r}e^{i\varphi}}} e^{\check{r}te^{i\varphi}} \check{r}e^{i\varphi} i d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi r} \int_{\varphi_0}^{-\varphi_0} \frac{1}{\kappa^2} \check{r}^{1-\delta} e^{i(1-\delta)\varphi} e^{-\frac{\check{r}}{\kappa} \check{r}^{1-\frac{\delta}{2}} e^{i(1-\frac{\delta}{2})\varphi}} e^{-\varepsilon\sqrt{\check{r}e^{i\varphi}}} e^{\check{r}te^{i\varphi}} i d\varphi, \\ &= \frac{1}{4\pi r} \int_{\varphi_0}^{-\varphi_0} \frac{1}{\kappa^2} \check{r}^{1-\delta} e^{i(1-\delta)\varphi} i d\varphi \rightarrow 0, \quad \text{kada } \check{r} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

budući da je  $\tilde{c}_x(\check{r}e^{i\varphi}) \sim \kappa \check{r}^{\frac{\delta}{2}} e^{i\frac{\delta\varphi}{4}}$  kada  $\check{r} \rightarrow 0$  sa  $\delta \in (0, 1)$ , videti (6.65) sa  $\kappa$  i  $\delta$  datim u tabelama 6.3, 6.4, 6.6 i 6.7.

Integral duž konture  $\Gamma_8$ , prema parametrizaciji datojoj u tabeli 6.8 i memorijskoj funkciji (6.63), postaje

$$I_{\Gamma_8} = \frac{\varrho}{4\pi r} \int_{\varphi_0}^{-\pi+\varphi_0} \frac{\Phi_\sigma(s_0 + \check{r}e^{i\varphi})}{\Phi_\varepsilon(s_0 + \check{r}e^{i\varphi})} e^{-\sqrt{\varrho r}(s_0 + \check{r}e^{i\varphi})\sqrt{\frac{\Phi_\sigma(s_0 + \check{r}e^{i\varphi})}{\Phi_\varepsilon(s_0 + \check{r}e^{i\varphi})}}} e^{-\varepsilon\sqrt{s_0 + \check{r}e^{i\varphi}}} e^{(s_0 + \check{r}e^{i\varphi})t} \check{r}e^{i\varphi} i d\varphi,$$

pa ako je  $\Phi_\sigma(s_0) = 0$ , tada, u limesu kada je  $\check{r} \rightarrow 0$ , integral  $I_{\Gamma_8}$  teži u nulu prema prethodnom izrazu, dok ako je  $\Phi_\varepsilon(s_0) = 0$ , tada se, u limesu kada  $\check{r} \rightarrow 0$ , integral  $I_{\Gamma_8}$  ponaša kao

$$\begin{aligned} I_{\Gamma_8} &\sim \frac{\varrho}{4\pi r} \int_{\varphi_0}^{-\pi+\varphi_0} \frac{\Phi_\sigma(s_0)}{\Phi'_\varepsilon(s_0) \check{r}e^{i\varphi} + O(\check{r}^2)} e^{-\sqrt{\varrho r}s_0 \frac{\sqrt{\Phi_\sigma(s_0)}}{\sqrt{\Phi'_\varepsilon(s_0) \check{r}e^{i\varphi} + O(\check{r}^2)}}} e^{-\varepsilon\sqrt{s_0}} e^{s_0 t} \check{r}e^{i\varphi} i d\varphi \\ &\sim i \frac{\varrho}{4\pi r} \Phi_\sigma(s_0) e^{-\varepsilon\sqrt{s_0}} e^{s_0 t} \int_{\varphi_0}^{-\pi+\varphi_0} \frac{1}{\Phi'_\varepsilon(s_0) + O(\check{r})} e^{-\sqrt{\varrho r}s_0 \frac{\sqrt{\Phi_\sigma(s_0)}}{\sqrt{\Phi'_\varepsilon(s_0)}} \frac{1}{\sqrt{\check{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}}} + O(\sqrt{\check{r}})} d\varphi \rightarrow 0, \quad \text{kada } \check{r} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

zbog

$$\Phi_\varepsilon(s_0 + \check{r}e^{i\varphi}) = \Phi_\varepsilon(s_0) + \Phi'_\varepsilon(s_0) \check{r}e^{i\varphi} + O(\check{r}^2) = \Phi'_\varepsilon(s_0) \check{r}e^{i\varphi} + O(\check{r}^2), \quad \text{kada } \check{r} \rightarrow 0,$$

i

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\Phi_\varepsilon(s_0 + \check{r}e^{i\varphi})}} &= \frac{1}{\sqrt{\Phi'_\varepsilon(s_0) \check{r}e^{i\varphi} + O(\check{r}^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\Phi'_\varepsilon(s_0)} \sqrt{\check{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}}} \frac{1}{\sqrt{1 + O(\check{r})}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Phi'_\varepsilon(s_0)} \sqrt{\check{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}}} + O(\sqrt{\check{r}}), \quad \text{kada } \check{r} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ako je

$$\operatorname{Re} \left( s_0 \sqrt{\frac{\Phi_\sigma(s_0)}{\Phi'_\varepsilon(s_0)}} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right) > 0 \quad \text{za } \varphi \in (-\pi + \varphi_0, \varphi_0),$$

transformišući se u

$$\begin{aligned} \varphi_0 + \frac{1}{2} \arg \Phi_\sigma(s_0) - \frac{1}{2} \arg \Phi'_\varepsilon(s_0) - \frac{\varphi}{2} &\in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad \text{tj.} \\ \varphi_0 + \arg \Phi_\sigma(s_0) - \arg \Phi'_\varepsilon(s_0) &\in (-2\pi, \pi). \end{aligned}$$

#### 6.4.2 Određivanje funkcije $\mathbf{g}^{(x)}$

Funkcija  $\tilde{\mathbf{g}}^{(x)}$ , data sa (6.59)<sub>2</sub>, uzima oblik

$$\tilde{\mathbf{g}}^{(x)}(r, s) = \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{s} e^{-\frac{rs}{\tilde{c}_x(s)}} = \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{s} e^{-\sqrt{\varrho r}s \sqrt{\frac{\Phi_\sigma(s)}{\Phi_\varepsilon(s)}}},$$

zbog memoriske funkcije  $\tilde{c}_x$ , date sa (6.63), videti takođe (6.19) i (6.27), tako da funkcija  $\tilde{g}^{(x)}$  ima  $s = 0$  kao pol, kao i tačku grananja, zbog članova u funkcijama  $\Phi_\sigma$  i  $\Phi_\varepsilon$  koje sadrže  $s^\xi$ ,  $\xi \in (0, 2)$ . Štaviše, funkcija  $\tilde{g}^{(x)}$  ima par kompleksno konjugovanih tačaka grananja  $s_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$  i  $\bar{s}_0$ , sa  $\varphi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , u slučaju kada su  $s_0$  i  $\bar{s}_0$  nule funkcije  $\Phi_\sigma$  (funkcije  $\Phi_\varepsilon$ ), uz mogućnost da umesto kompleksno konjugovanih nula  $s_0$  i  $\bar{s}_0$ , funkcija  $\Phi_\sigma$  (funkcija  $\Phi_\varepsilon$ ) može imati negativnu realnu nulu ili može da nema nula.

Stoga je u Košijevoj integralnoj teoremi

$$\oint_{\Gamma} \tilde{g}^{(x)}(r, s) e^{st} ds = 0,$$

integracija primenjena duž konture  $\Gamma$ , prikazane na slici 6.12 i uzeta tako da su singularne tačke  $s = 0$ ,  $s_0$  i  $\bar{s}_0$  izvan konture  $\Gamma$ , da bi se dobila funkcija  $g^{(x)}$  u vremenskom domenu inverznom Laplasovom transformacijom funkcije  $\tilde{g}^{(x)}$  u Laplasovom domenu, dajući

$$g^{(x)}(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \tilde{g}^{(x)}(r, s) e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{s} e^{-\frac{rs}{\tilde{c}_x(s)}} \right] (r, t),$$

gde je integracija primenjena duž Bromvičeve konture  $Br$ , tj. duž konture  $\Gamma_0$  u limesu kada  $R \rightarrow \infty$ , gde je  $\Gamma_0$  deo zatvorene konture  $\Gamma$  sa slike 6.12, tako da se Košijeva integralna teorema svodi na

$$2\pi i g^{(x)}(r, t) = - \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \tilde{r} \rightarrow 0}} (I_{\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}} + I_{\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}}) - \lim_{\tilde{r} \rightarrow 0} I_{\Gamma_4}, \quad (6.85)$$

gde su  $I_{\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}}$ ,  $I_{\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}}$  i  $I_{\Gamma_4}$  integrali duž kontura  $\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}$ ,  $\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}$  i  $\Gamma_4$  koji imaju nenulti doprinos, jer za levu stranu Košijeve integralne teoreme važi

$$\oint_{\Gamma} \tilde{g}^{(x)}(r, s) e^{st} ds = \sum_{i=0}^9 I_{\Gamma_i}, \quad \text{sa} \quad I_{\Gamma_i} = \int_{\Gamma_i} \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{s} e^{-\frac{rs}{\tilde{c}_x(s)}} e^{st} ds, \quad (6.86)$$

pri čemu integrali  $I_{\Gamma_1}$ ,  $I_{\Gamma_2}$ ,  $I_{\Gamma_6}$ ,  $I_{\Gamma_7}$ ,  $I_{\Gamma_8}$  i  $I_{\Gamma_9}$  imaju nulti doprinos u limesu kada  $R \rightarrow \infty$  i  $\tilde{r} \rightarrow 0$ .

Korišćenjem parametrizacije date u tabeli 6.8, integrali u (6.85) se računaju kao

$$\begin{aligned} 2\pi i g^{(x)}(r, t) &= -\frac{1}{4\pi r} \left( \int_{\infty}^0 \frac{1}{\rho e^{i\varphi_0}} e^{-\frac{r\rho e^{i\varphi_0}}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})| e^{i\arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})}}} e^{\rho t e^{i\varphi_0}} e^{i\varphi_0} d\rho \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho e^{-i\varphi_0}} e^{-\frac{r\rho e^{-i\varphi_0}}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})| e^{-i\arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})}}} e^{\rho t e^{-i\varphi_0}} e^{-i\varphi_0} d\rho + \lim_{\tilde{r} \rightarrow 0} \int_{\varphi_0}^{-\varphi_0} \frac{1}{\tilde{r} e^{i\varphi}} e^{-\frac{r\tilde{r} e^{i\varphi}}{\tilde{c}_x(\tilde{r} e^{i\varphi})}} e^{\tilde{r} t e^{i\varphi}} \tilde{r} e^{i\varphi} i d\varphi \right) \\ &= \frac{1}{4\pi r} \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} \left( e^{-\frac{r\rho}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|} e^{i(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0}))}} e^{\rho t e^{i\varphi_0}} \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{r\rho}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|} e^{-i(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0}))}} e^{\rho t e^{-i\varphi_0}} \right) d\rho - \frac{1}{4\pi r} \lim_{\tilde{r} \rightarrow 0} \int_{\varphi_0}^{-\varphi_0} e^{-\frac{r\tilde{r} e^{i\varphi}}{\tilde{c}_x(\tilde{r} e^{i\varphi})}} e^{\tilde{r} t e^{i\varphi}} i d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi r} \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} e^{-\frac{r\rho}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|} \cos(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0}))} e^{-\rho t |\cos \varphi_0|} \\ &\quad \times \left( e^{-\frac{i}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|} \sin(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0}))} e^{i\rho t \sin \varphi_0} \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{i}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|} \sin(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0}))} e^{-i\rho t \sin \varphi_0} \right) d\rho - \frac{1}{4\pi r} \int_{\varphi_0}^{-\varphi_0} i d\varphi \\ &= 2i \frac{1}{4\pi r} \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} e^{-\left( \rho t |\cos \varphi_0| + \frac{r\rho}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|} \cos(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})) \right)} \\ &\quad \times \sin \left( \rho t \sin \varphi_0 - \frac{r\rho}{|\tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})|} \sin(\varphi_0 - \arg \tilde{c}_x(\rho e^{i\varphi_0})) \right) d\rho + \frac{1}{4\pi r} 2i\varphi_0, \end{aligned}$$

predstavljajući izraz (6.58), gde je iskorišćeno ponašanje  $\tilde{c}_x(\tilde{r} e^{i\varphi}) \sim \kappa \tilde{r}^{\frac{\delta}{2}} e^{i\frac{\delta\varphi}{4}}$  kada  $\tilde{r} \rightarrow 0$  sa  $\delta \in (0, 1)$ , videti (6.65) sa  $\kappa$  i  $\delta$  datim u tabelama 6.3, 6.4, 6.6 i 6.7. Može se pokazati da preostali integrali u (6.86)<sub>1</sub> imaju nulti doprinos kao u slučaju računanja Grinove funkcije u poglavlju 6.4.1.

### 6.4.3 Određivanje asimptotike Grinove funkcije za kratka vremena

Izraz za asimptotiku Grinove funkcije za mala vremena uzima oblik (6.48), ako je brzina prostiranja talasa konačna, tj. ako  $\sigma_{sr/g}^{(x)}$  ima konačnu vrednost, što se dalje može opravdati uzimanjem u obzir asimptotike regularizovane Grinove funkcije u Laplasovom domenu

$$\tilde{G}_\varepsilon^{(x)}(r, s) \sim \tilde{G}_{\varepsilon, \text{asy}}^{(x)}(r, s) = \frac{1}{4\pi r \kappa^2} e^{-\frac{rs}{\kappa}} e^{-\varepsilon \sqrt{s}}, \quad \text{za } s \rightarrow \infty, \quad (6.87)$$

koja sledi iz regularizovane Grinove funkcije u Laplasovom domenu (6.49), sa (6.43) i (6.51), a zbog asimptotike (6.65) memorijske funkcije  $\tilde{c}_x$  i parametara  $\kappa$  i  $\delta$  datih u tabelama 6.3 i 6.4, tako da asimptotika (6.87) implicira

$$\begin{aligned} G_\varepsilon^{(x)}(r, s) &\sim G_{\varepsilon, \text{asy}}^{(x)}(r, t) = \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \mathcal{L}^{-1} \left[ e^{-\varepsilon \sqrt{s}} \right] \left( t - \frac{r}{\kappa} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \frac{\varepsilon}{2t' \sqrt{\pi t'}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4t'}} \Big|_{t'=t-\frac{r}{\kappa}} \\ &= \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \delta_\varepsilon \left( t - \frac{r}{\kappa} \right), \quad \text{za } t \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (6.88)$$

prema (6.51), dajući

$$G^{(x)}(r, s) \sim G_{\text{asy}}^{(x)}(r, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_{\varepsilon, \text{asy}}^{(x)}(r, t) = \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \delta \left( t - \frac{r}{\kappa} \right), \quad \text{za } t \rightarrow 0,$$

što potvrđuje asimptotski izraz (6.48) za Grinovu funkciju.

Integralna reprezentacija asimptotike regularizovane Grinove funkcije (6.88) se dobija primenom inverzne Laplasove transformacije na (6.87), odnosno

$$G_{\varepsilon, \text{asy}}^{(x)}(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \tilde{G}_{\varepsilon, \text{asy}}^{(x)}(r, s) e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{4\pi r \kappa^2} e^{-\frac{rs}{\kappa}} e^{-\varepsilon \sqrt{s}} \right](r, t),$$

pri čemu je integracija primenjena duž Bromvičeve konture  $Br$ , tj. duž konture  $\Gamma_0$  u limesu kada  $R \rightarrow \infty$ , tako da je  $\Gamma_0$  deo zatvorene konture  $\Gamma$  sa slike 4.1, što sledi iz Košijeve integralne teoreme

$$\oint_{\Gamma} \tilde{G}_{\varepsilon, \text{asy}}^{(x)}(r, s) e^{st} ds = 0,$$

sa integracijom primenjenom duž konture  $\Gamma$ , date na slici 4.1, dajući

$$2\pi i G_{\varepsilon, \text{asy}}^{(x)}(r, t) = - \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} (I_{\Gamma_3} + I_{\Gamma_5}), \quad (6.89)$$

gde su  $I_{\Gamma_3}$  i  $I_{\Gamma_5}$  integrali duž kontura  $\Gamma_3$  i  $\Gamma_5$  koji imaju nenulti doprinos, jer za levu stranu Košijeve integralne teoreme važi

$$\oint_{\Gamma} \tilde{G}_{\varepsilon, \text{asy}}^{(x)}(r, s) e^{st} ds = \sum_{i=0}^7 I_{\Gamma_i}, \quad \text{sa } I_{\Gamma_i} = \int_{\Gamma_i} \frac{1}{4\pi r \kappa^2} e^{-\frac{rs}{\kappa}} e^{-\varepsilon \sqrt{s}} e^{st} ds, \quad (6.90)$$

gde integrali  $I_{\Gamma_1}, I_{\Gamma_2}, I_{\Gamma_4}, I_{\Gamma_6}$  i  $I_{\Gamma_7}$  imaju nulti doprinos u limesu kada  $R \rightarrow \infty$  i  $r \rightarrow 0$ .

Korišćenjem parametrizacije date u tabeli 4.1, integrali u (6.89) se računaju kao

$$\begin{aligned} 2\pi i G_{\varepsilon, \text{asy}}^{(x)}(r, t) &= - \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \left( \int_{\infty}^0 e^{-\frac{r\rho e^{i\pi}}{\kappa}} e^{-\varepsilon \sqrt{\rho e^{i\pi}}} e^{\rho t e^{i\pi}} e^{i\pi} d\rho + \int_0^{\infty} e^{-\frac{r\rho e^{-i\pi}}{\kappa}} e^{-\varepsilon \sqrt{\rho e^{-i\pi}}} e^{\rho t e^{-i\pi}} e^{-i\pi} d\rho \right) \\ &= \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \int_0^{\infty} e^{-\rho(t - \frac{r}{\kappa})} \left( e^{i\varepsilon \sqrt{\rho}} - e^{-i\varepsilon \sqrt{\rho}} \right) d\rho \\ &= 2i \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \int_0^{\infty} e^{-\rho(t - \frac{r}{\kappa})} \sin(\varepsilon \sqrt{\rho}) d\rho, \end{aligned}$$

dajući integralnu reprezentaciju asimptotike regularizovane Grinove funkcije (6.88) u obliku

$$G_{\varepsilon, \text{asy}}^{(x)}(r, t) = \frac{1}{4\pi^2 r \kappa^2} \int_0^{\infty} e^{-\rho(t - \frac{r}{\kappa})} \sin(\varepsilon \sqrt{\rho}) d\rho. \quad (6.91)$$

Može se pokazati da preostali integrali u (6.90)<sub>1</sub> imaju nulti doprinos kao u slučaju računanja Grinove funkcije u poglavlju 6.4.1.

Ako je brzina prostiranja talasa beskonačna, tj. ako  $\sigma_{sr/g}^{(x)}$  ima beskonačnu vrednost, tada izraz za asimptotiku uzima oblik (6.55), koji se dobija korišćenjem Košijeve integralne teoreme

$$\oint_{\Gamma} \tilde{G}_{\text{asy}}^{(x)}(r, s) e^{st} ds = 0,$$

u kojoj je integracija primenjena duž konture  $\Gamma$ , date na slici 4.1, jer je

$$\tilde{G}^{(x)}(r, s) \sim \tilde{G}_{\text{asy}}^{(x)}(r, s) = \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \frac{1}{s^\delta} e^{-\frac{r}{\kappa} s^{1-\frac{\delta}{2}}}, \quad \text{za } s \rightarrow \infty, \quad (6.92)$$

asimptotika Grinove funkcije u Laplasovom domenu, videti takođe (6.54), a potiče od izraza za Grinovu funkciju u Laplasovom domenu (6.43) sa asimptotikom (6.65) memoriske funkcije  $\tilde{c}_x$  i parametrima  $\kappa$  i  $\delta$  datim u tabelama 6.3, 6.4, 6.6 i 6.7, i ima tačku grananja  $s = 0$ , zbog člana  $s^\delta$ ,  $\delta \in (0, 1)$ .

Stoga, da bi se dobio asimptotski izraz Grinove funkcije u vremenskom domenu, primenjuje se inverzna Laplasova transformacija na izraz (6.92) za asimptotiku Grinove funkcije u Laplasovom domenu, dajući

$$G_{\varepsilon}^{(x)}(r, s) \sim G_{\text{asy}}^{(x)}(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \tilde{G}_{\text{asy}}^{(x)}(r, s) e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \frac{1}{s^\delta} e^{-\frac{r}{\kappa} s^{1-\frac{\delta}{2}}} \right](r, t), \quad (6.93)$$

pri čemu se integracija primenjuje duž Bronvičeve konture  $Br$ , tj. duž konture  $\Gamma_0$  u limesu kada  $R \rightarrow \infty$ , sa  $\Gamma_0$  kao delom zatvorene konture  $\Gamma$  sa slike 4.1, tako da se Košijeva integralna teorema svodi na

$$2\pi i G_{\text{asy}}^{(x)}(r, t) = - \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} (I_{\Gamma_3} + I_{\Gamma_5}), \quad (6.94)$$

gde su  $I_{\Gamma_3}$  i  $I_{\Gamma_5}$  integrali duž kontura  $\Gamma_3$  i  $\Gamma_5$  koji imaju nenulti doprinos, jer za levu stranu Košijeve integralne teoreme važi

$$\oint_{\Gamma} \tilde{G}_{\text{asy}}^{(x)}(r, s) e^{st} ds = \sum_{i=0}^7 I_{\Gamma_i}, \quad \text{sa } I_{\Gamma_i} = \int_{\Gamma_i} \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \frac{1}{s^\delta} e^{-\frac{r}{\kappa} s^{1-\frac{\delta}{2}}} e^{st} ds, \quad (6.95)$$

pri čemu integrali  $I_{\Gamma_1}, I_{\Gamma_2}, I_{\Gamma_4}, I_{\Gamma_6}$  i  $I_{\Gamma_7}$  imaju nulti doprinos u limesu kada  $R \rightarrow \infty$  i  $r \rightarrow 0$ .

Korišćenjem parametrizacije date u tabeli 4.1, integrali u (6.94) se računaju kao

$$\begin{aligned} 2\pi i G_{\text{asy}}^{(x)}(r, t) &= -\frac{1}{4\pi r \kappa^2} \left( \int_{\infty}^0 \frac{1}{\rho^\delta e^{i\delta\pi}} e^{-\frac{r}{\kappa} \rho^{1-\frac{\delta}{2}} e^{i(1-\frac{\delta}{2})\pi}} e^{\rho t e^{i\pi}} e^{i\pi} d\rho + \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^\delta e^{-i\delta\pi}} e^{-\frac{r}{\kappa} \rho^{1-\frac{\delta}{2}} e^{-i(1-\frac{\delta}{2})\pi}} e^{\rho t e^{-i\pi}} e^{-i\pi} d\rho \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi r \kappa^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^\delta} \left( e^{\frac{r}{\kappa} \rho^{1-\frac{\delta}{2}} e^{-i\frac{\delta\pi}{2}}} e^{-i\delta\pi} - e^{\frac{r}{\kappa} \rho^{1-\frac{\delta}{2}} e^{i\frac{\delta\pi}{2}}} e^{i\delta\pi} \right) e^{-\rho t} d\rho \\ &= \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^\delta} e^{\frac{r}{\kappa} \rho^{1-\frac{\delta}{2}} \cos \frac{\delta\pi}{2}} e^{-\rho t} \left( e^{i\left(\frac{r}{\kappa} \rho^{1-\frac{\delta}{2}} \sin \frac{\delta\pi}{2} + \delta\pi\right)} - e^{-i\left(\frac{r}{\kappa} \rho^{1-\frac{\delta}{2}} \sin \frac{\delta\pi}{2} + \delta\pi\right)} \right) d\rho \\ &= 2i \frac{1}{4\pi r \kappa^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^\delta} e^{-\rho \left(t - \frac{r}{\kappa} \rho^{1-\frac{\delta}{2}} \cos \frac{\delta\pi}{2}\right)} \sin \left(\frac{r}{\kappa} \rho^{1-\frac{\delta}{2}} \sin \frac{\delta\pi}{2} + \delta\pi\right) d\rho, \end{aligned}$$

dajući izraz (6.55) za asimptotsko ponašanje Grinove funkcije  $G_{\text{asy}}^{(x)}$  za vremena bliska početnom u slučaju kada je brzina prostiranja talasa beskonačna. Može se pokazati da preostali integrali u (6.95)<sub>1</sub> imaju nulti doprinos kao u slučaju računanja Grinove funkcije u poglavlju 6.4.1.



## 7. Zaključak

Klasični Cenerov i anti-Cenerov model (3.1) i (3.2) su frakciono uopšteni razmatranjem njima odgovarajućih klasičnih reoloških šema, predstavljenih na slikama 3.1 i 3.2, a koje sadrže opruge opisane Hukovim zakonom (2.1)<sub>1</sub> i prigušnice opisane Njutnovim zakonom (2.1)<sub>2</sub>, pri čemu su klasične opruge i prigušnice zamenjene frakcionim, modeliranim frakcionim uopštenjem Hukovog i Njutnovog zakona (2.2), dajući četiri modela: dva koja odgovaraju slikama 3.1a i 3.1b dajući frakcione Cenerove modele (3.4) i (3.6) i dva koja odgovaraju slikama 3.2a i 3.2b dajući frakcione anti-Cenerove modele (3.8) i (3.10). Daljom analizom izvedenih modela usvojeno je da se oni granaju na asimetrične i simetrične modele, intuitivno označene u tabelama 3.2 i 3.3, prema operatorima koji u njima figurišu, korišćenjem simbola I i D, ukoliko redovi operatora frakcionog integrala i Riman-Liuvilovog frakcionog izvoda pripadaju intervalu (0, 1), odnosno I<sup>+</sup> i D<sup>+</sup> ukoliko redovi pripadaju intervalu (1, 2). Termodinamičkom analizom, sprovedenom u poglavlju 3.2, pokazano je da nisu svi modeli termodinamički konzistentni, te su zasenčeni u tabelama 3.2 i 3.3, dok su termodinamički konzistentni modeli, predstavljeni u tabeli 2.1.

Analiza energetskog bilansa jednodimenzionog viskoelastičnog tela, modeliranog, sasvim uopšteno, linearnim frakcionim modelom, sprovedena je u poglavlju 4.1 dajući da se snaga po jedinici zapremine viskoelastičnog tela može izraziti preko deformacije (4.2) i preko napona (4.3), a u oba slučaja sadrži informaciju o elastičnim osobinama materijala, predstavljenim energijom po jedinici zapremine (4.4) i (4.5), kao i viskoznim svojstvima materijala, predstavljenim snagom disipacije po jedinici zapremine (4.6) i (4.7). Pozitivnost energije i snage disipacije po jedinici zapremine, koje se sastoje od članova sa trenutnim doprinosom i članova memoriskog tipa i zavise ili od modula relaksacije i njegovih izvoda, ili od funkcije puzanja i njenih izvoda, se obezbeđuje ako je moduo relaksacije, odnosno funkcija puzanja, kompletno monotona, odnosno Bernštajnova funkcija, stoga je u poglavlju 4.2 korišćen metod Laplasove transformacije kako bi se dobili eksplisitni oblici modula relaksacije  $\sigma_{sr}$ , izraženog sa (4.15) preko funkcija  $\sigma_{sr}^{(NP)}$ ,  $\sigma_{sr}^{(RP)}$  i  $\sigma_{sr}^{(CCP)}$ , datih sa (4.16), (4.17) i (4.18), kao i funkcije puzanja  $\varepsilon_{cr}$ , izražene sa (4.27) preko funkcija  $\varepsilon_{cr}^{(NP)}$ ,  $\varepsilon_{cr}^{(RP)}$  i  $\varepsilon_{cr}^{(CCP)}$ , datih sa (4.28), (4.29) i (4.30), koje dozvoljavaju da moduo relaksacije i funkcija puzanja budu nemonotene, pa čak i oscilatorne funkcije eksponencijalno opadajuće amplitude, a što je posledica postojanja polova ovih funkcija u Laplasovom domenu (4.13) i (4.14), ispitanih u poglavlju 4.2.4. Zatim su u poglavlju 4.3, za formulisane frakcione Cenerove i anti-Cenerove modele, izvedena dodatna termodinamička ograničenja koja sužavaju nametnute termodinamičke restrikcije izvedene u poglavlju 3.2 i obezbeđuju pozitivnost energije i snage disipacije, a što proističe iz uslova da su moduo relaksacije i funkcija puzanja redom kompletno monotona i Bernštajnova funkcija. U poglavlju 4.4 je dodatno sprovedena numerička analiza u slučaju modela I<sup>+</sup>ID.ID, videti izraze (4.124) - (4.127), koja potvrđuje kvalitativne osobine modula relaksacije i funkcije puzanja. Frakcioni Cenerovi i anti-Cenerovi modeli, zajedno sa suženim termodinamičkim restrikcijama, su navedeni u dodatku A.3.

Pretpostavljajući deformaciju kao sinusnu funkciju (5.40) i napon u obliku (5.42) kao odziv na sinusnu deformaciju, u poglavlju 5 je ispitana ekvivalencija između dva oblika energije, data sa (4.4) i (4.5), kao i između dva oblika snage disipacije, data sa (4.6) i (4.7), poređenjem vremenske evolucije profila na slikama 5.4 i 5.5 u slučaju kada  $\phi_\sigma$  nema nula, kao i na slikama 5.7 i 5.9 u slučaju kada  $\phi_\sigma$  ima negativnu realnu nulu i kada  $\phi_\sigma$  ima par kompleksno konjugovanih nula, pri čemu se pokazuje da postoji razlika između profila. Zakon promene ukupne mehaničke energije (5.34) je iskorišćen da bi se utvrdilo koji od izraza (4.4) i (4.5) predstavlja energiju po jedinici zapremine skladištenu u viskoelastičnom telu, a koji samo ima takav oblik, kao i koji od izraza (4.6) i (4.7) predstavlja snagu disipacije po jedinici zapremine, a koji samo ima takav oblik. Međutim, budući da se krive na slikama 5.6, 5.8 i 5.10 potpuno poklapaju, izraz za snagu po jedinici zapremine viskoelastičnog tela (4.9) sa energijom i snagom disipacije (4.4) i (4.6) izraženim preko modula relaksacije i izraz za snagu po jedinici zapremine (4.9) sa energijom i snagom disipacije (4.5) i (4.7) izraženim preko funkcije puzanja su ekivalentni.

U poglavlju 6 je sprovedena analiza propagacije talasa u trodimenzionom, homogenom, izotropnom i viskoelastičnom telu, stoga je analiziran Košijev početni problem na neograničenom domenu, predstavljen sistemom frakcionih parcijalnih diferencijalnih jednačina, koji čine: jednačina kretanja trodimenzionog čvrstog tela, jed-

načina za deformaciju i konstitutivna jednačina, koja predstavlja frakcionalno uopštenje Hukovog zakona (6.9) i opisuje trodimenziono, homogeno, izotropno i viskoelastično telo. Uopštenje Hukovog zakona je dobijeno razmatranjem konstitutivne relacije za jednodimenziono viskoelastično telo (6.8), izražene preko modula relaksacije  $\sigma_{sr}^{(c)}$  i  $\sigma_{sr}^{(s)}$ , korišćenih da bi se uzela u obzir različita memorijska jezgra, koja odgovaraju prostiranju kompresionih ( $c$ ) i vrtložnih ( $s$ ) talasa. Korišćenjem Furijeove i Laplasove transformacije, pomenuti sistem jednačina, dat sa (6.10) - (6.12), koji podleže početnim uslovima (6.13), rešavan je na neograničenom domenu sa ciljem da se dobije oblik polja pomeranja, kao njegovog rešenja, te je primenom Furijeove i Laplasove transformacije na sistem (6.10) - (6.12), sa (6.13), dobijena talasna jednačina viskoelastičnog tela u Furijeovom i Laplasovom domenu (6.17), rešavana za polje pomeranja korišćenjem dva različita pristupa.

U prvom pristupu, nakon skalarnog i vektorskog proizvoda talasnog vektora sa talasnom jednačinom viskoelastičnog tela u Furijeovom i Laplasovom domenu (6.17) i nakon primene inverzne Laplasove i Furijeove transformacije, dobijaju se talasne jednačine (6.20) i (6.28), koje predstavljaju uopštenje talasne jednačine (6.6) i (6.7), gde su brzine kompresionih i vrtložnih talasa,  $c_c$  i  $c_s$ , zamenjene memorijskim jezgrima  $\tilde{c}_c$  i  $\tilde{c}_s$ , datim sa (6.19) i (6.27), koji su izraženi preko odgovarajućih modula relaksacije  $\sigma_{sr}^{(c)}$  i  $\sigma_{sr}^{(s)}$ , tako da njihove početne vrednosti mogu biti konačne ili beskonačne, implicirajući dva različita slučaja (6.21) i (6.23) za kompresione talasne jednačine (6.20), kao i (6.29) i (6.30) za vrtložne talasne jednačine (6.28). Stoga, ovim pristupom se dobijaju dve talasne jednačine (6.20) i (6.28), izražene preko skalarnog i vektorskog polja  $\varphi$  i  $\Omega$ , definisanih sa (6.20)<sub>2</sub> i (6.28)<sub>2</sub>, kao uopštenja klasičnih talasnih jednačina (6.6) i (6.7), umesto jedne jednačine izražene preko polja pomeranja, koja bi uopštavala klasičnu talasnu jednačinu (6.1), odnosno ekvivalentno (6.5). Nakon što se izradi (6.34) i (6.35) za skalarno i vektorsko polje  $\varphi$  i  $\Omega$  odrede zavisno od Grinove funkcije  $G^{(c)}$  i  $G^{(s)}$ , polje pomeranja je dato sa (6.36), dajući četiri mogućnosti za rešenje, budući da Grinova funkcija  $G^{(c)}$  i  $G^{(s)}$  uzima dva različita oblika: (6.53), koji važi za  $r < c_{xt}$ , u protivnom ima nultu vrednost, i (6.56), pri čemu prvi oblik važi ako je vrednost modula relaksacije u početnom trenutku konačna, a stoga brzina prostiranja talasa  $c_x$ ,  $x \in \{c, s\}$ , takođe, dok drugi oblik važi u slučaju kada je vrednost modula relaksacije u početnom trenutku beskonačna, a stoga i brzina prostiranja talasa.

U drugom pristupu je korišćen rezolventni tenzor  $\hat{\mathbf{R}}$  kako bi se odredilo polje pomeranja, tako da je talasna jednačina viskoelastičnog tela u Furijeovom i Laplasovom domenu (6.17) predstavljena u matričnom obliku (6.37), dajući polje pomeranja u Laplasovom i Furijeovom domenu (6.39), te nakon primene inverzne Laplasove i Furijeove transformacije na rezolventni tenzor (6.41), dobija se izraz (6.40) za polje pomeranja kao rešenje sistema jednačina (6.10) - (6.12), koji zadovoljava početne uslove (6.13), implicirajući da se polje pomeranja jednostavno dobija primenom rezolventnog tenzora (6.46) na već poznate početne uslove (6.13). Pored izraza (6.46) za rezolventni tenzor, a koji sadrži Grinove funkcije  $G^{(c)}$  i  $G^{(s)}$ , date sa (6.53) i (6.56), i funkcije  $g^{(c)}$  i  $g^{(s)}$ , dobijene kao (6.58), takođe se dobija izraz (6.47) za rezolventni tenzor, koji jasno pokazuje da se kompresioni talasi prostiru u pravcu radijus vektora, dok se vrtložni talasi prostiru u ravni normalnoj na pravac radijus vektora.

Naposletku su ispitana kvalitativna svojstva prostornih profila koji odgovaraju Grinovim funkcijama  $G^{(x)}$ ,  $x \in \{c, s\}$ , kroz grafičke prikaze numeričkih proračuna, pri čemu su korišćeni frakcionalni Cenerov i anti-Cenerov model I<sup>+</sup>ID.ID, dat sa (6.61), i frakcionalni Burgersov model VII, dat sa (6.62), kao predstavnici modela koji opisuju viskoelastična tela sa beskonačnom brzinom prostiranja talasa i konačnom brzinom prostiranja talasa  $c_x = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sqrt{\frac{b_2}{a_3}}$ , da bi se prikazale vremenske evolucije prostornih profila Grinove funkcije  $G^{(x)}$ , kao i njena asimptotika.

# A. Dodatak

## A.1 Termodinamički konzistentni linearni modeli frakcionog reda

Linearni modeli frakcionog reda koji sadrže isključivo Riman-Liuvinove frakcione izvode reda do jedan, dati su uopštenom konstitutivnom jednačinom

$$\sum_{i=1}^n a_i {}_0D_t^{\alpha_i} \sigma(x, t) = \sum_{j=1}^m b_j {}_0D_t^{\beta_j} \varepsilon(x, t),$$

sa parametrima modela  $a_i, b_j > 0$  i  $\alpha_i, \beta_j \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ , a koja se, kako je pokazano u [28], redukuje na sledeća četiri termodinamički konzistentna slučaja, navedena u nastavku sa odgovarajućim termodinamičkim restrikcijama.

**Case I:** Modeli koji imaju isti broj frakcionih izvoda koji deluju na napon i deformaciju i imaju iste redove:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i {}_0D_t^{\alpha_i} \sigma(t) &= \sum_{i=1}^n b_i {}_0D_t^{\alpha_i} \varepsilon(t), \\ 0 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_n < 1 \text{ i } \frac{a_1}{b_1} &\geq \frac{a_2}{b_2} \geq \dots \geq \frac{a_n}{b_n} \geq 0. \end{aligned}$$

**Case II:** Modeli koji imaju nekoliko dodatnih izvoda koji deluju na deformaciju pored frakcionih izvoda koji deluju na napon i deformaciju i imaju iste redove:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i {}_0D_t^{\alpha_i} \sigma(t) &= \sum_{i=1}^n b_i {}_0D_t^{\alpha_i} \varepsilon(t) + \sum_{i=n+1}^m b_i {}_0D_t^{\beta_i} \varepsilon(t), \\ 0 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \beta_{n+1} < \dots < \beta_m < 1 \text{ i } \frac{a_1}{b_1} &\geq \frac{a_2}{b_2} \geq \dots \geq \frac{a_n}{b_n} \geq 0. \end{aligned}$$

**Case III:** Modeli koji imaju nekoliko dodatnih izvoda koji deluju na napon pored frakcionih izvoda koji deluju na napon i deformaciju i imaju iste redove:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-m} a_i {}_0D_t^{\alpha_i} \sigma(t) + \sum_{i=n-m+1}^n a_i {}_0D_t^{\alpha_i} \sigma(t) &= \sum_{j=1}^m b_j {}_0D_t^{\alpha_{n-m+j}} \varepsilon(t), \\ 0 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_m < \alpha_{m+1} < \dots < \alpha_n < 1 \text{ i } \frac{a_{n-m+1}}{b_1} &\geq \frac{a_{n-m+2}}{b_2} \geq \dots \geq \frac{a_n}{b_m} \geq 0. \end{aligned}$$

**Case IV:** Modeli koji imaju sve redove frakcionih izvoda koji deluju na napon i deformaciju različite:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i {}_0D_t^{\alpha_i} \sigma(t) &= \sum_{j=1}^m b_j {}_0D_t^{\beta_j} \varepsilon(t), \\ 0 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \beta_1 < \dots < \beta_m < 1, \text{ sa } \alpha_i &\neq \beta_j, \text{ za } i \neq j. \end{aligned}$$

## A.2 Termodinamički konzistentni frakcioni Burgersovi modeli

Osam termodinamički konzistentnih frakcionih Burgersovih modela, grupisanih u dve klase: prva klasa predstavljena uopštenom konstitutivnom jednačinom

$$(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(x, t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\eta}) \varepsilon(x, t),$$

i druga klasa predstavljena uopštenom konstitutivnom jednačinom

$$(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{\beta+\eta}) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\beta + b_2 {}_0D_t^{\beta+\eta}) \varepsilon(t),$$

pri čemu su  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 > 0$ ,  $\alpha, \beta, \mu \in [0, 1]$ , sa  $\alpha \leq \beta$ ,  $\gamma \in [0, 2]$ , i  $\eta \in \{\alpha, \beta\}$ , je formulisano u [9] zajedno sa restrikcijama na parametre modela koje obezbeđuju termodinamičku konzistentnost modela. Zatim su u [30] nametnuta ograničenja, koja obezbeđuju da je moduo relaksacije kompletne monotone funkcije, a funkcija puzanja Bernštajnova funkcija, sužavajući prethodno nametnute termodinamičke restrikcije modela.

Termodinamički konzistentni frakcioni Burgersovi modeli zajedno sa termodinamičkim restrikcijama i suženim termodinamičkim restrikcijama su navedeni u nastavku.

**Model I:**

$$\begin{aligned} (1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(t) &= (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\eta}) \varepsilon(t), \\ 0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \mu \leq 1, \quad 1 \leq \mu + \eta \leq 1 + \alpha, \quad \frac{b_2}{b_1} &\leq a_i \frac{\cos \frac{(\mu-\eta)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(\mu+\eta)\pi}{2} \right|}, \\ \frac{b_2}{b_1} &\leq a_i \frac{\sin \frac{(\mu-\eta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu+\eta)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\mu-\eta)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(\mu+\eta)\pi}{2} \right|}, \end{aligned}$$

sa  $(\eta, i) \in \{(\alpha, 1), (\beta, 2), (\gamma, 3)\}$ ;

**Model II:**

$$\begin{aligned} (1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{2\alpha}) \sigma(t) &= (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\alpha}) \varepsilon(t), \\ \frac{1}{2} \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1, \quad \frac{a_3}{a_1} \frac{\left| \sin \frac{(\mu-2\alpha)\pi}{2} \right|}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} &\leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1 \frac{\cos \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(\mu+\alpha)\pi}{2} \right|}, \\ \frac{a_3}{a_1} \frac{\left| \sin \frac{(\mu-2\alpha)\pi}{2} \right|}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\mu-2\alpha)\pi}{2}}{\cos \frac{\mu\pi}{2}} &\leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1 \frac{\sin \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu+\alpha)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(\mu+\alpha)\pi}{2} \right|}; \end{aligned}$$

**Model III:**

$$\begin{aligned} (1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta}) \sigma(t) &= (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\alpha}) \varepsilon(t), \\ 0 \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1, \quad \alpha + \beta \geq 1, \quad \frac{a_3}{a_2} \frac{\left| \sin \frac{(\mu-\beta-\alpha)\pi}{2} \right|}{\sin \frac{(\mu-\beta+\alpha)\pi}{2}} &\leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1 \frac{\cos \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(\mu+\alpha)\pi}{2} \right|}, \\ \frac{a_3}{a_2} \frac{\left| \sin \frac{(\mu-\beta-\alpha)\pi}{2} \right|}{\sin \frac{(\mu-\beta+\alpha)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\mu-\beta-\alpha)\pi}{2}}{\cos \frac{(\mu-\beta+\alpha)\pi}{2}} &\leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1 \frac{\sin \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu+\alpha)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(\mu+\alpha)\pi}{2} \right|}; \end{aligned}$$

**Model IV:**

$$\begin{aligned} (1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta}) \sigma(t) &= (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\beta}) \varepsilon(t), \\ 0 \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1, \quad 1 - \alpha \leq \beta \leq 1 - (\mu - \alpha), \quad \frac{a_3}{a_1} \frac{\left| \sin \frac{(\mu-\alpha-\beta)\pi}{2} \right|}{\sin \frac{(\mu-\alpha+\beta)\pi}{2}} &\leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_2 \frac{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(\mu+\beta)\pi}{2} \right|}, \\ \frac{a_3}{a_1} \frac{\left| \sin \frac{(\mu-\alpha-\beta)\pi}{2} \right|}{\sin \frac{(\mu-\alpha+\beta)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\mu-\alpha-\beta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\mu-\alpha+\beta)\pi}{2}} &\leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_2 \frac{\sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu+\beta)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(\mu+\beta)\pi}{2} \right|}; \end{aligned}$$

**Model V:**

$$\begin{aligned} (1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{2\beta}) \sigma(t) &= (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\beta}) \varepsilon(t), \\ 0 \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1 - (\mu - \alpha), \quad \frac{a_3}{a_2} \frac{\left| \sin \frac{(\mu-2\beta)\pi}{2} \right|}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} &\leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_2 \frac{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(\mu+\beta)\pi}{2} \right|}, \end{aligned}$$

$$\frac{a_3}{a_2} \frac{\left| \sin \frac{(\mu-2\beta)\pi}{2} \right| \cos \frac{(\mu-2\beta)\pi}{2}}{\sin \frac{\mu\pi}{2} \cos \frac{\mu\pi}{2}} \leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_2 \frac{\sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} \cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu+\beta)\pi}{2} \left| \cos \frac{(\mu+\beta)\pi}{2} \right|};$$

**Model VI:**

$$\begin{aligned} \left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \sigma(t) &= \left(b_1 {}_0D_t^\beta + b_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \varepsilon(t), \\ 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1, \quad \alpha + \beta \geq 1, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1 \frac{\cos \frac{(\beta-\alpha)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(\beta+\alpha)\pi}{2} \right|}, \\ \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1 \frac{\sin \frac{(\beta-\alpha)\pi}{2} \cos \frac{(\beta-\alpha)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\alpha)\pi}{2} \left| \cos \frac{(\beta+\alpha)\pi}{2} \right|} &\leq a_1 \frac{\cos \frac{(\beta-\alpha)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(\beta+\alpha)\pi}{2} \right|}; \end{aligned}$$

**Model VII:**

$$\begin{aligned} \left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{2\beta}\right) \sigma(t) &= \left(b_1 {}_0D_t^\beta + b_2 {}_0D_t^{2\beta}\right) \varepsilon(t), \\ 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1+\alpha}{2}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_2 \frac{1}{|\cos(\beta\pi)|}, \\ \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{a_2}{2 \cos^2(\beta\pi)} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4a_3 \cos^2(\beta\pi)}{a_2^2}}\right) \leq \frac{b_2}{b_1} \leq \frac{a_2}{|\cos(\beta\pi)|}; \end{aligned}$$

**Model VIII:**

$$\begin{aligned} \left(1 + \bar{a}_1 {}_0D_t^\alpha + \bar{a}_2 {}_0D_t^{2\alpha}\right) \sigma(t) &= \left(b_1 {}_0D_t^\alpha + b_2 {}_0D_t^{2\alpha}\right) \varepsilon(t), \\ \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \quad \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \leq \bar{a}_1 \frac{1}{|\cos(\alpha\pi)|}, \\ \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1} \leq \frac{\bar{a}_1}{2 \cos^2(\alpha\pi)} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\bar{a}_2 \cos^2(\alpha\pi)}{\bar{a}_1^2}}\right) \leq \frac{b_2}{b_1} \leq \frac{\bar{a}_1}{|\cos(\alpha\pi)|}. \end{aligned}$$

### A.3 Termodinamički konzistentni frakcioni Cenerovi i anti-Cenerovi modeli

Termodinamički konzistentni frakcioni Cenerovi i anti-Cenerovi modeli, predstavljeni u opštem obliku izrazom

$$\sum_{k=1}^{N_1} a_k {}_0I_t^{\alpha_k} \sigma(t) + \sum_{k=1}^{N_2} b_k {}_0D_t^{\beta_k} \sigma(t) = \sum_{k=1}^{M_1} c_k {}_0I_t^{\mu_k} \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^{M_2} d_k {}_0D_t^{\nu_k} \varepsilon(t),$$

sa parametrima modela  $a_k, b_k, c_k, d_k > 0$ ,  $\alpha_k, \beta_k, \mu_k, \nu_k \in [0, 1]$  i navedeni u nastavku, su izvedeni i provereni na termodinamičku konzistentnost u [1], dok su sužene termodinamičke restrikcije na parametre modela izvedene u [2], obezbeđujući da je moduo relaksacije kompletno monotona funkcija, a funkcija puzanja Bernštajnova funkcija.

#### A.3.1 Simetrični modeli

**Model ID.ID** je predstavljen konstitutivnom jednačinom

$$\left(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta\right) \sigma(t) = \left(b_1 {}_0I_t^\mu + a_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta-\mu}\right) \varepsilon(t),$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha + \beta - \mu \leq 1, \quad \mu \leq \alpha, \quad \beta + \mu \leq 1, \\ -\frac{a_1 \cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{a_2 \cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_1}{a_2} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2} \cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2} \cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{a_1 \sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{a_2 \sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}}. \end{aligned}$$

**Model ID.DD<sup>+</sup>** je predstavljen konstitutivnom jednačinom

$$\left(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta\right) \sigma(t) = \left(b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta+\mu}\right) \varepsilon(t),$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$1 \leq \alpha + \beta + \mu \leq 2, \quad \beta \leq \mu \leq 1 - \alpha,$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leq \frac{b_1}{b_2}.$$

**Model IID.IID** je predstavljen konstitutivnom jednačinom

$$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0I_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^{\alpha+\gamma-\eta} + b_2 {}_0I_t^{\beta+\gamma-\eta} + b_3 {}_0D_t^\eta) \varepsilon(t),$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$\beta < \alpha, \quad \gamma \leq \eta, \quad 0 \leq \beta + \gamma - \eta \leq \alpha + 2\gamma - \eta \leq 1, \quad \alpha + \gamma \leq \beta + \eta,$$

$$\frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}},$$

$$\frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\sin \frac{(\beta+\eta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\beta+\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\sin \frac{(\beta+\eta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+2\gamma-\eta)\pi}{2}},$$

koje važe ako je  $\beta + \eta < \alpha + \eta < 1$ , u protivnom se sužene termodinamičke restrikcije ne mogu garantovati, te su ograničenja na parametre modela data termodinamičkim restrikcijama

$$\beta < \alpha, \quad \gamma \leq \eta, \quad 0 \leq \beta + \gamma - \eta \leq \alpha + 2\gamma - \eta \leq 1, \quad \alpha + \gamma \leq \beta + \eta,$$

$$\frac{b_3}{b_1} \frac{\left| \cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \leq \frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}},$$

$$\frac{b_3}{b_2} \frac{\left| \cos \frac{(\beta+\eta)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\beta+2\gamma-\eta)\pi}{2}} \leq \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\sin \frac{(\beta+\eta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+2\gamma-\eta)\pi}{2}}.$$

**Model IDD.IDD** je predstavljen konstitutivnom jednačinom

$$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta-\mu} + b_3 {}_0D_t^{\alpha+\gamma-\mu}) \varepsilon(t),$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leq \alpha + \gamma - \mu \leq 1, \quad \beta < \gamma, \quad \mu \leq \alpha, \quad \gamma + \mu \leq \alpha + \beta, \quad \gamma + \mu \leq 1,$$

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}},$$

$$\frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}},$$

koje važe ako je  $2\alpha + \beta - \mu < 2\alpha + \gamma - \mu < 1$ , u protivnom se sužene termodinamičke restrikcije ne mogu garantovati, te su ograničenja na parametre modela data termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leq \alpha + \gamma - \mu \leq 1, \quad \beta < \gamma, \quad \mu \leq \alpha, \quad \gamma + \mu \leq \alpha + \beta, \quad \gamma + \mu \leq 1,$$

$$\frac{b_2}{b_1} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}},$$

$$\frac{b_3}{b_1} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}}.$$

**Model IID.IDD** je predstavljen konstitutivnom jednačinom

$$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0I_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\mu + b_2 {}_0D_t^\nu + b_3 {}_0D_t^{\alpha+\gamma-\mu}) \varepsilon(t),$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$\mu \leq \beta < \alpha, \quad \gamma \leq \nu, \quad \alpha + \beta + \gamma \leq 1 + \mu, \quad \mu + \nu - \gamma < \alpha \leq 1 - \nu,$$

$$0 \leq \begin{Bmatrix} \alpha - \beta - \gamma - \mu \\ \alpha - 2\mu - \nu \end{Bmatrix} \leq 2\alpha - \beta - 2\mu - \nu \leq \begin{Bmatrix} 2\alpha - \beta - \mu \\ 2\alpha + \gamma - 2\mu - \nu \end{Bmatrix} \leq 2\alpha + \gamma - \mu < 1,$$

$$-\frac{b_3}{b_1} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}} \leq \frac{b_3}{b_1} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}}.$$

**Model I<sup>+</sup>ID.ID<sup>+</sup>** je predstavljen konstitutivnom jednačinom

$$\left( a_1 {}_0I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0I_t^{\frac{1+\alpha-\gamma}{2}} + a_3 {}_0D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^{1+\mu} + b_2 {}_0I_t^{\frac{1+\mu-(\alpha+\gamma-\mu)}{2}} + b_3 {}_0D_t^{\alpha+\gamma-\mu} \right) \varepsilon(t),$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} \mu &\leq \alpha, \quad \alpha + \gamma + 2(\alpha - \mu) = 3\alpha + \gamma - 2\mu \leq 1, \\ \frac{a_2}{a_1} &\leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\cos \frac{(1-3\alpha-\gamma+2\mu)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma-2\mu)\pi}{4}} \frac{\sin \frac{(1-3\alpha-\gamma+2\mu)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma-2\mu)\pi}{4}} \leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\cos \frac{(1-3\alpha-\gamma+2\mu)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma-2\mu)\pi}{4}}, \\ \frac{a_3}{a_2} &\leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\sin \frac{(1+3\alpha+\gamma-2\mu)\pi}{4}}{\sin \frac{(1-\alpha+\gamma+2\mu)\pi}{4}} \frac{\cos \frac{(1+3\alpha+\gamma-2\mu)\pi}{4}}{\cos \frac{(1-\alpha+\gamma+2\mu)\pi}{4}} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\sin \frac{(1+3\alpha+\gamma-2\mu)\pi}{4}}{\sin \frac{(1-\alpha+\gamma+2\mu)\pi}{4}}, \\ a_3 b_1 \cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} &\leq a_2 b_2 \sin \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} + a_1 b_3 \cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}, \\ a_1 b_3 \sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2} &\leq a_2 b_2 \cos \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} - a_3 b_1 \sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}, \\ a_1 b_3 \sin \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2} &\leq a_2 b_2 \cos \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2} \frac{\sin \frac{(\alpha-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}} + a_3 b_1 \sin \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2} \frac{\cos \frac{(\gamma+\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(2\alpha+\gamma-\mu)\pi}{2}}. \end{aligned}$$

**Model IDD<sup>+</sup>.IDD<sup>+</sup>** je predstavljen konstitutivnom jednačinom

$$\left( a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^{\frac{1+\gamma-\alpha}{2}} + a_3 {}_0D_t^{1+\gamma} \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^{\alpha+\gamma-\eta} + b_2 {}_0D_t^{\frac{1+\eta-(\alpha+\gamma-\eta)}{2}} + b_3 {}_0D_t^{1+\eta} \right) \varepsilon(t),$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha + \gamma - \eta \leq 1, \quad \gamma \leq \eta, \quad \alpha + \eta + (\eta - \gamma) = \alpha - \gamma + 2\eta \leq 1, \\ \frac{a_2}{a_1} &\leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+\alpha+3\gamma-2\eta)\pi}{4}} \frac{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+\alpha+3\gamma-2\eta)\pi}{4}} \leq \frac{b_2}{b_1} \frac{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+\alpha+3\gamma-2\eta)\pi}{4}}, \\ \frac{a_3}{a_2} &\leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\cos \frac{(1-\alpha+\gamma-2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}} \frac{\sin \frac{(1-\alpha+\gamma-2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}} \leq \frac{b_3}{b_2} \frac{\cos \frac{(1-\alpha+\gamma-2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}}, \\ a_3 b_1 \cos \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2} - a_2 b_2 \sin \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2} &\leq a_1 b_3 \cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}, \\ a_1 b_3 \sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} &\leq a_2 b_2 \cos \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2} - a_3 b_1 \sin \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}, \\ a_1 b_3 \sin \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2} &\leq a_2 b_2 \cos \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2} \frac{\sin \frac{(\eta-\gamma)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}} + a_3 b_1 \sin \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2} \frac{\cos \frac{(\alpha+2\gamma-\eta)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+\eta)\pi}{2}}. \end{aligned}$$

**Model I<sup>+</sup>ID.IDD<sup>+</sup>** je predstavljen konstitutivnom jednačinom

$$\left( a_1 {}_0I_t^{1+\alpha} + a_2 {}_0I_t^{\frac{1+\alpha-\gamma}{2}} + a_3 {}_0D_t^\gamma \right) \sigma(t) = \left( b_1 {}_0I_t^{\alpha+\gamma-\eta} + b_2 {}_0D_t^{\frac{1+\eta-(\alpha+\gamma-\eta)}{2}} + b_3 {}_0D_t^{1+\eta} \right) \varepsilon(t),$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} \eta &\leq \gamma, \quad \alpha + \gamma + 2(\gamma - \eta) = \alpha + 3\gamma - 2\eta \leq 1, \\ \frac{a_1}{b_1} \frac{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}} &\leq \frac{a_1}{b_1} \frac{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}} \frac{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}} \leq \frac{a_2}{b_2}, \\ \frac{a_2}{b_2} \frac{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}} &\leq \frac{a_3}{b_3} \frac{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}} \frac{\sin \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\cos \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}} \leq \frac{a_3}{b_3} \frac{\cos \frac{(1-\alpha-3\gamma+2\eta)\pi}{4}}{\sin \frac{(1+\alpha-\gamma+2\eta)\pi}{4}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 b_3 \cos \frac{(\alpha + \eta) \pi}{2} - a_2 b_2 \sin \frac{(\gamma - \eta) \pi}{2} &\leqslant a_3 b_1 \cos \frac{(\alpha + 2\gamma - \eta) \pi}{2}, \\ a_3 b_1 \sin \frac{(\alpha + 2\gamma - \eta) \pi}{2} &\leqslant a_2 b_2 \cos \frac{(\gamma - \eta) \pi}{2} - a_1 b_3 \sin \frac{(\alpha + \eta) \pi}{2}, \\ a_3 b_1 \sin \frac{(\alpha + 2\gamma - \eta) \pi}{2} &\leqslant a_2 b_2 \cos \frac{(\gamma - \eta) \pi}{2} \frac{\sin \frac{(\gamma - \eta) \pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha + 2\gamma - \eta) \pi}{2}} + a_1 b_3 \sin \frac{(\alpha + \eta) \pi}{2} \frac{\cos \frac{(\alpha + \eta) \pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha + 2\gamma - \eta) \pi}{2}}. \end{aligned}$$

### A.3.2 Asimetrični modeli

**Model IID.ID** je predstavljen konstitutivnom jednačinom

$$(a_1 {}_0I_t^{\alpha+\beta-\gamma} + a_2 {}_0I_t^\nu + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\alpha + b_2 {}_0D_t^\beta) \varepsilon(t),$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \alpha \leqslant \nu < \alpha + \beta - \gamma \leqslant 1, \quad \beta + \nu \leqslant 1, \\ \frac{b_1}{b_2} \leqslant \frac{a_1}{a_3} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\gamma)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\alpha+2\beta-\gamma)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2}} \leqslant \frac{a_1}{a_3} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\gamma)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2}}, \end{aligned}$$

koje važe ako je  $\alpha + 2\beta - \gamma < 1$ , dok ako je  $\alpha + 2\beta - \gamma \geqslant 1$ , tada se sužene termodinamičke restrikcije ne mogu garantovati, te su ograničenja na parametre modela data termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \alpha \leqslant \nu < \alpha + \beta - \gamma \leqslant 1, \quad \beta + \nu \leqslant 1, \\ \frac{a_1}{a_3} \frac{\left| \cos \frac{(\alpha+2\beta-\gamma)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2}} \leqslant \frac{b_1}{b_2} \leqslant \frac{a_1}{a_3} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\gamma)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2}}. \end{aligned}$$

**Model IDD.DD<sup>+</sup>** je predstavljen konstitutivnom jednačinom

$$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta+\mu}) \varepsilon(t),$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} 1 \leqslant \alpha + \beta + \mu \leqslant 2, \quad \beta < \gamma \leqslant \mu \leqslant 1 - \alpha, \\ \frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leqslant \frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leqslant \frac{b_1}{b_2}. \end{aligned}$$

**Model I<sup>+</sup>ID.ID** je predstavljen konstitutivnom jednačinom

$$(a_1 {}_0I_t^{\alpha+\beta+\nu} + a_2 {}_0I_t^\nu + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta-\nu}) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\alpha + b_2 {}_0D_t^\beta) \varepsilon(t),$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \alpha + \beta - \nu \leqslant 1, \quad 1 \leqslant \alpha + \beta + \nu \leqslant 2, \quad \alpha \leqslant \nu \leqslant 1 - \beta, \\ \frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \leqslant \frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2}} \leqslant \frac{b_1}{b_2}, \\ \frac{b_1}{b_2} \leqslant \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}} \leqslant \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\nu)\pi}{2}}. \end{aligned}$$

**Model IDD<sup>+</sup>.DD<sup>+</sup>** je predstavljen konstitutivnom jednačinom

$$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{\alpha+2\beta}) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta+\mu}) \varepsilon(t),$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$\begin{aligned} 1 \leqslant \alpha + 2\beta \leqslant 2, \quad 1 \leqslant \alpha + \beta + \mu \leqslant 2, \quad \beta \leqslant \mu \leqslant 1 - \alpha, \\ \frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leqslant \frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leqslant \frac{b_1}{b_2}, \end{aligned}$$

$$\frac{b_1}{b_2} \leqslant \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\mu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+2\beta-\mu)\pi}{2}} \leqslant \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\mu)\pi}{2}},$$

koje važe ako je  $2\alpha + \beta - \mu < 1$ , dok ako je  $2\alpha + \beta - \mu \geqslant 1$ , tada se sužene termodinamičke restrikcije ne mogu garantovati, te su ograničenja na parametre modela data termodinamičkim restrikcijama

$$1 \leqslant \alpha + 2\beta \leqslant 2, \quad 1 \leqslant \alpha + \beta + \mu \leqslant 2, \quad \beta \leqslant \mu \leqslant 1 - \alpha,$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2}} \leqslant \frac{b_1}{b_2} \leqslant \frac{a_2}{a_3} \frac{\sin \frac{(\alpha+\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\mu)\pi}{2}}.$$

**Model ID.IDD** je predstavljen konstitutivnom jednačinom

$$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^\mu + b_2 {}_0D_t^\nu + b_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta-\mu}) \varepsilon(t),$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leqslant \beta \leqslant \nu < \alpha + \beta - \mu \leqslant 1, \quad \mu \leqslant \alpha \leqslant 1 - \nu,$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leqslant \frac{b_1}{b_3} \leqslant \frac{a_1}{a_2} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leqslant \frac{a_1}{a_2} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}},$$

koje važe ako je  $2\alpha + \beta - \mu < 1$ , dok ako je  $2\alpha + \beta - \mu \geqslant 1$ , tada se sužene termodinamičke restrikcije ne mogu garantovati, te su ograničenja na parametre modela data termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leqslant \beta \leqslant \nu < \alpha + \beta - \mu \leqslant 1, \quad \mu \leqslant \alpha \leqslant 1 - \nu,$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}} \leqslant \frac{b_1}{b_3} \leqslant \frac{a_1}{a_2} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta-\mu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\beta+\mu)\pi}{2}}.$$

**Model ID.DDD<sup>+</sup>** je predstavljen konstitutivnom jednačinom

$$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^\nu + b_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta+\nu}) \varepsilon(t),$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$1 \leqslant \alpha + \beta + \nu \leqslant 2, \quad \beta \leqslant \mu < \nu \leqslant 1 - \alpha,$$

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}} \leqslant \frac{a_1}{a_2} \frac{\left| \cos \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2} \right|}{\cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}} \frac{\sin \frac{(2\alpha+\beta+\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}} \leqslant \frac{b_2}{b_3}.$$

**Model ID.IDD<sup>+</sup>** je predstavljen konstitutivnom jednačinom

$$(a_1 {}_0I_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta) \sigma(t) = (b_1 {}_0I_t^{\alpha+\beta-\nu} + b_2 {}_0D_t^\nu + b_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta+\nu}) \varepsilon(t),$$

sa suženim termodinamičkim restrikcijama

$$0 \leqslant \alpha + \beta - \nu \leqslant 1, \quad 1 \leqslant \alpha + \beta + \nu \leqslant 2, \quad \beta \leqslant \nu \leqslant 1 - \alpha,$$

$$\frac{b_1}{b_2} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2}} \leqslant \frac{b_1}{b_2} \frac{\sin \frac{(\alpha+2\beta-\nu)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2}} \frac{\cos \frac{(\alpha+2\beta-\nu)\pi}{2}}{\cos \frac{(\alpha+\nu)\pi}{2}} \leqslant \frac{a_1}{a_2},$$

$$\frac{a_1}{a_2} \leqslant \frac{b_2}{b_3} \frac{\cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2} \right|} \frac{\sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}}{\sin \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2}} \leqslant \frac{b_2}{b_3} \frac{\cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(\alpha+2\beta+\nu)\pi}{2} \right|}.$$



# Literatura

- [1] S. Jelić and D. Zorica. Fractionalization of anti-Zener and Zener models via rheological analogy. *Acta Mechanica*, 234:313–354, 2023.
- [2] S. Jelić and D. Zorica. Energy balance for fractional anti-Zener and Zener models in terms of relaxation modulus and creep compliance. *Applied Mathematical Modelling*, 123:688–728, 2023.
- [3] S. Jelić and D. Zorica. Stress and power as a response to harmonic excitation of a fractional anti-Zener and Zener type viscoelastic body. *arXiv:2311.09798*, pages 1–29, 2023.
- [4] S. Jelić and D. Zorica. Wave propagation in three-dimensional fractional viscoelastic infinite solid body. *arXiv:2401.14774*, pages 1–38, 2024.
- [5] H. Schiessel, R. Metzler, A. Blumen, and T. Nonnemacher. Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 28:6567–6584, 1995.
- [6] N. Heymans and J-C. Bauwens. Fractal rheological models and fractional differential equations for viscoelastic behavior. *Rheologica Acta*, 33:210–219, 1994.
- [7] F. Mainardi. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. Imperial College Press, London, 2010.
- [8] H. Schiessel, Chr. Friedrich, and A. Blumen. *Applications to Problems in Polymer Physics and Rheology*. In: *Applications of Fractional Calculus in Physics* (ed. R. Hilfer). World Scientific, Singapore, 2000.
- [9] A. S. Okuka and D. Zorica. Formulation of thermodynamically consistent fractional Burgers models. *Acta Mechanica*, 229:3557–3570, 2018.
- [10] I. Colombaro, A. Giusti, and F. Mainardi. A class of linear viscoelastic models based on Bessel functions. *Meccanica*, 52:825–832, 2017.
- [11] A. Giusti. On infinite order differential operators in fractional viscoelasticity. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 20:854–867, 2017.
- [12] A. Giusti and F. Mainardi. A dynamic viscoelastic analogy for fluid-filled elastic tubes. *Meccanica*, 51:2321–2330, 2016.
- [13] B. Cuahutenango-Barro, M. A. Taneco-Hernández, and J. F. Gómez-Aguilar. On the solutions of fractional-time wave equation with memory effect involving operators with regular kernel. *Chaos, Solitons & Fractals*, 115:283–299, 2018.
- [14] M. A. Taneco-Hernández, J. F. Gómez-Aguilar, and B. Cuahutenango-Barro. Wave process in viscoelastic media using fractional derivatives with nonsingular kernels. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46:4413–4436, 2023.
- [15] M. A. Taneco-Hernández, V. F. Morales-Delgado, and J. F. Gómez-Aguilar. Fundamental solutions of the fractional Fresnel equation in the real half-line. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 521:807–827, 2019.
- [16] N. Bhangale, K. B. Kachhia, and J. F. Gómez-Aguilar. Fractional viscoelastic models with Caputo generalized fractional derivative. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46:7835–7846, 2023.
- [17] N. Sene and J. F. Gómez-Aguilar. Fractional mass-spring-damper system described by generalized fractional order derivatives. *Fractal and fractional*, 3:39–1–15, 2019.

- [18] K. M. Owolabi, J. F. Gómez-Aguilar, Y. Karaca, Y-M. Li, B. Saleh, and A. A. Aly. Chaotic behavior in fractional Helmholtz and Kelvin-Helmholtz instability problems with Riesz operator. *Fractals*, 30:2240182–1–19, 2022.
- [19] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier B.V., Amsterdam, 2006.
- [20] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego, 1999.
- [21] S. Konjik, Lj. Oparnica, and D. Zorica. Distributed-order fractional constitutive stress-strain relation in wave propagation modeling. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 70:51–1–21, 2019.
- [22] Lj. Oparnica, D. Zorica, and A. S. Okuka. Fractional Burgers wave equation. *Acta Mechanica*, 230:4321–4340, 2019.
- [23] S. Jelić and D. Zorica. Fractional Burgers wave equation on a finite domain. *Chaos, Solitons, and Fractals*, 154:111632–1–26, 2022.
- [24] F. Broucke and Lj. Oparnica. Micro-local and qualitative analysis of the fractional Zener wave equation. *Journal of Differential Equations*, 321:217–257, 2022.
- [25] F. Broucke and Lj. Oparnica. Distributed-order time-fractional wave equations. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 74:19–1–25, 2023.
- [26] T. M. Atanackovic, S. Pilipovic, and D. Zorica. Distributed-order fractional wave equation on a finite domain: creep and forced oscillations of a rod. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 23:305–318, 2011.
- [27] T. M. Atanackovic, S. Pilipovic, and D. Zorica. Distributed-order fractional wave equation on a finite domain. Stress relaxation in a rod. *International Journal of Engineering Science*, 49:175–190, 2011.
- [28] T. M. Atanackovic, S. Konjik, Lj. Oparnica, and D. Zorica. Thermodynamical restrictions and wave propagation for a class of fractional order viscoelastic rods. *Abstract and Applied Analysis*, 2011:ID975694–1–32, 2011.
- [29] D. Zorica and Lj. Oparnica. Energy dissipation for hereditary and energy conservation for non-local fractional wave equations. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 378:20190295–1–24, 2020.
- [30] A. S. Okuka and D. Zorica. Fractional Burgers models in creep and stress relaxation tests. *Applied Mathematical Modelling*, 77:1894–1935, 2020.
- [31] E. Bazhlekova and I. Bazhlekov. Complete monotonicity of the relaxation moduli of distributed-order fractional Zener model. In *Proceedings of the 44<sup>th</sup> International Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics, AIP Conference Proceedings 2048*, pages 050008–1–8, 2018.
- [32] F. Mainardi and G. Spada. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. *European Physical Journal Special Topics*, 193:133–160, 2011.
- [33] W. Glöckle and T. Nonnenmacher. Fractional integral operators and Fox functions in the theory of viscoelasticity. *Macromolecules*, 24:6426–6434, 1991.
- [34] W. Glöckle and T. Nonnenmacher. Fox function representation of non-Debye relaxation processes. *Journal of Statistical Physics*, 71:741–757, 1993.
- [35] N. Makris. The frequency response function of the creep compliance. *Meccanica*, 54:19–31, 2019.
- [36] N. Demirci and E. Tönük. Non-integer viscoelastic constitutive law to model soft biological tissues to in-vivo indentation. *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, 16:14–21, 2014.
- [37] N. M. Graovac and M. M. Žigić. Modelling of the hamstring muscle group by use of fractional derivatives. *Computers and Mathematics with Applications*, 59:1695–1700, 2010.
- [38] M. Caputo and F. Mainardi. Linear models of dissipation in anelastic solids. *La Rivista del Nuovo Cimento*, 1:161–198, 1971.
- [39] M. Caputo and F. Mainardi. A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure and Applied Geophysics*, 91:134–147, 1971.

- [40] Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova. Analysis of dynamic behavior of viscoelastic rods whose rheological models contain fractional derivatives of two different orders. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 81:363–376, 2001.
- [41] Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova. Analysis of rheological equations involving more than one fractional parameters by the use of the simplest mechanical systems based on these equations. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 5:131–175, 2001.
- [42] Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova. A new method for solving dynamic problems of fractional derivative viscoelasticity. *International Journal of Engineering Science*, 39:149–176, 2001.
- [43] Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova. Analysis of the viscoelastic rod dynamics via models involving fractional derivatives or operators of two different orders. *Shock and Vibration Digest*, 36:3–26, 2004.
- [44] Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova. Free damped vibrations of a viscoelastic oscillator based on Rabotnov's model. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 12:129–149, 2008.
- [45] S. Konjik, Lj. Oparnica, and D. Zorica. Waves in fractional Zener type viscoelastic media. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 365:259–268, 2010.
- [46] M. Ait Ichou, H. El Amri, and A. Ezziani. Mathematical modeling of wave propagation in viscoelastic media with the fractional Zener model. *Mathematical Modeling and Computing*, 8:601–615, 2021.
- [47] A. G. Cunha-Filho, Y. Briend, A. M. G. de Lima, and M. V. Donadon. A new and efficient constitutive model based on fractional time derivatives for transient analyses of viscoelastic systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 146:107042–1–12, 2021.
- [48] Lj. Oparnica and E. Süli. Well-posedness of the fractional Zener wave equation for heterogenous viscoelastic materials. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 23:126–166, 2020.
- [49] T. M. Atanackovic, S. Pilipovic, B. Stankovic, and D. Zorica. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Vibrations and Diffusion Processes*. Wiley-ISTE, London, 2014.
- [50] T. M. Atanackovic, S. Pilipovic, B. Stankovic, and D. Zorica. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Wave Propagation, Impact and Variational Principles*. Wiley-ISTE, London, 2014.
- [51] S. Holm. *Waves with Power-Law Attenuation*. Springer Nature Switzerland AG, Cham, 2019.
- [52] Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results. *Applied Mechanics Reviews*, 63:010801–1–52, 2010.
- [53] W. Cai, W. Chen, J. Fang, and S. Holm. A survey on fractional derivative modeling of power-law frequency-dependent viscous dissipative and scattering attenuation in acoustic wave propagation. *Applied Mechanics Reviews*, 70:1–12, 2018.
- [54] P. W. Buchen and F. Mainardi. Asymptotic expansions for transient viscoelastic waves. *Journal de mécanique*, 14:597–608, 1975.
- [55] I. Colombaro, A. Giusti, and F. Mainardi. On transient waves in linear viscoelasticity. *Wave Motion*, 74:191–212, 2017.
- [56] A. Hanyga. Asymptotic estimates of viscoelastic Green's functions near the wavefront. *Quarterly of Applied Mathematics*, 73:679–692, 2015.
- [57] N. Heymans. Hierarchical models for viscoelasticity dynamic behaviour in the linear range. *Rheologica Acta*, 35:508–519, 1996.
- [58] Y. R. Kim. *Modeling of Asphalt Concrete*. McGraw-Hill, New York, 2009.
- [59] T. Zhou, J. Yan, J. Masuda, and T. Kuriyagawa. Investigation on the viscoelasticity of optical glass in ultraprecision lens molding process. *Journal of Materials Processing Technology*, 209:4484–4489, 2009.
- [60] A. Abbas, E. Masad, T. Papagiannakis, and T. Harman. Micromechanical modeling of the viscoelastic behavior of asphalt mixtures using the discrete-element method. *International Journal of Geomechanics*, 7:131–139, 2007.
- [61] Y. Liu, Q. Dai, and Z. You. Viscoelastic model for discrete element simulation of asphalt mixtures. *Journal of Engineering Mechanics*, 135:324–333, 2009.

- [62] R. Garrappa, E. Kaslik, and M. Popolizio. Evaluation of fractional integrals and derivatives of elementary functions: Overview and tutorial. *Mathematics*, 7:407–1–21, 2019.
- [63] R. L. Bagley and P. J. Torvik. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, 30:133–155, 1986.
- [64] G. Amendola, M. Fabrizio, and J. M. Golden. *Thermodynamics of Materials with Memory: Theory and Applications*. Springer Science+Business Media LLC, New York, 2012.
- [65] E. Bazhlekova and K. Tsocheva. Fractional Burgers' model: thermodynamic constraints and completely monotonic relaxation function. *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, 69:825–834, 2016.
- [66] T. M. Atanackovic. A modified Zener model of a viscoelastic body. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 14:137–148, 2002.
- [67] T. M. Atanackovic, M. Janev, and S. Pilipovic. On the thermodynamical restrictions in isothermal deformations of fractional Burgers model. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 378:20190278–1–13, 2020.
- [68] R. Gorenflo and F. Mainardi. *Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order*. In: *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* (eds A. Carpinteri, F. Mainardi), volume 378 of *CISM Courses and Lecture Notes*. Springer Verlag, Wien and New York, 1997.
- [69] S. von Ende, A. Lion, and R. Lammering. On the thermodynamically consistent fractional wave equation for viscoelastic solids. *Acta Mechanica*, 221:1–10, 2011.
- [70] S. Holm and M. B. Holm. Restrictions on wave equations for passive media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 142:1888–1896, 2017.
- [71] S. P. Näsholm and S. Holm. On a fractional Zener elastic wave equation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 16:26–50, 2013.
- [72] I. Colombaro, A. Giusti, and A. Mentrelli. Energy dissipation in viscoelastic Bessel media. *Acta Mechanica*, pages 1–10, 2023.
- [73] J. Archenbach. *Wave Propagation in Elastic Solids*. North Holland, Amsterdam, 1973.
- [74] C. Wang, X. Chena, P. Wei, and Y. Li. Reflection of elastic waves at the elastically supported boundary of a couple stress elastic half-space. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 30:154–164, 2017.
- [75] J. Meng, Z. Deng, X. Xu, K. Zhang, and X. Hou. A precise method for solving wave propagation in hollow sandwich cylinders with prismatic cores. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 28:360–374, 2015.
- [76] P. Ponnusamy and M. Rajagopal. Wave propagation in a transversely isotropic thermoelastic solid cylinder of arbitrary cross-section. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 24:527–538, 2011.
- [77] L. Xu, H. Fan, and Y. Zhou. Torsional wave in a circular micro-tube with clogging attached to the inner surface. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 30:299–305, 2017.
- [78] A. Chen, Y. Wang, G. Yu, Y. Guo, and Z. Wang. Elastic wave localization in two-dimensional phononic crystals with one-dimensional quasi-periodicity and random disorder. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 21:517–528, 2008.
- [79] C. Dorn and D. M. Kochmann. Ray theory for elastic wave propagation in graded metamaterials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 168:105049–1–21, 2022.
- [80] W. J. Drugan. Wave propagation effects possible in solid composite materials by use of stabilized negative-stiffness components. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 136:103700–1–13, 2020.
- [81] J. Singh and S. K. Tomar. Plane waves in thermo-elastic material with voids. *Mechanics of Materials*, 39:932–940, 2007.
- [82] Y. Hayati and M. E. Ghadi. Three-dimensional coupled thermoelastodynamic stress and flux induced wave propagation for isotropic half-space with scalar potential functions. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 69:1–32, 2018.
- [83] P. Singh, A. K. Singh, and A. Chattopadhyay. Reflection of three-dimensional plane waves at the free surface of a rotating triclinic half-space under the context of generalized thermoelasticity. *Applied Mathematics and Mechanics*, 42:1363–1378, 2021.

- [84] M. V. Ayzenberg-Stepanenko, E. N. Sherb, G. G. Osharovich, and Z. Sh. Yanovitskaya. Numerical simulation of shock wave processes in elastic media and structures. Part II: Application results. *Journal of Mining Science*, 48:84–103, 2012.
- [85] F. Pled and C. Descliers. Review and recent developments on the perfectly matched layer (PML) method for the numerical modeling and simulation of elastic wave propagation in unbounded domains. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 29:471–518, 2022.
- [86] Y. Luchko. Fractional wave equation and damped waves. *Journal of Mathematical Physics*, 54:031505–1–16, 2013.
- [87] S. G. Pshenichnov. Nonstationary dynamic problems of nonlinear viscoelasticity. *Mechanics of Solids*, 48:83–95, 2013.
- [88] W. J. Sim and S. H. Lee. Finite element analysis of transient dynamic viscoelastic problems in time domain. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 19:61–71, 2005.
- [89] K. Shukla, J. M. Carcione, R. C. Pestana, P. Jaiswal, and T. Özdenvar. Modeling the wave propagation in viscoacoustic media: An efficient spectral approach in time and space domain. *Computers and Geosciences*, 126:31–40, 2019.
- [90] N. H. Sweilam, M. M. Abou Hasan, and S. A. Alkhatib. Time fractional of nonlinear heat-wave propagation in a rigid thermal conductor: Numerical treatment. *Alexandria Engineering Journal*, 61:10153–10159, 2022.
- [91] B. Tripathi, D. Espíndola, and G. F. Pinton. Modeling and simulations of two dimensional propagation of shear shock waves in relaxing soft solids. *Journal of Computational Physics*, 395:205–222, 2019.
- [92] Y. Zhou, Q. Wang, and Z. Zhang. Physical properties preserving numerical simulation of stochastic fractional nonlinear wave equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 99:105832–1–20, 2021.
- [93] X. Liu. Difference methods for time discretization of spectral fractional stochastic wave equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 116:106863–1–17, 2023.
- [94] K. Ryuzono, S. Yashiro, S. Onodera, and N. Toyama. Performance evaluation of crack identification using density-based topology optimization for experimentally visualized ultrasonic wave propagation. *Mechanics of Materials*, 172:104406–1–16, 2022.
- [95] I. Sarkar, S. Banerjee, and S. Shaw. Memory-dependent generalized thermoelasticity with finite wave speeds. *Mechanics of Materials*, 153:103655–1–10, 2021.
- [96] P. Tandel, H. Patel, and T. Patel. Tsunami wave propagation model: A fractional approach. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 7:509–520, 2022.
- [97] N. Wang, G. Xing, T. Zhu, H. Zhou, and Y. Shi. Propagating seismic waves in VTI attenuating media using fractional viscoelastic wave equation. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 127:e2021JB023280–1–31, 2022.
- [98] W. Zhang. A numerical method for wave propagation in viscoelastic stratified porous media. *Transport in Porous Media*, 61:15–24, 2005.
- [99] A. Callejas, J. Melchor, I. H. Faris, and G. Rus. Viscoelastic model characterization of human cervical tissue by torsional waves. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*, 115:104261–1–15, 2021.
- [100] L. Cardoso and S. C. Cowin. Role of structural anisotropy of biological tissues in poroelastic wave propagation. *Mechanics of Materials*, 44:174–188, 2012.
- [101] Y. Wang and M. F. Insana. Wave propagation in viscoelastic materials. In I. Nenadic, M. Urban, J. Greenleaf, J-L. Gennisson, M. Bernal, and M. Tanter, editors, *Ultrasound Elastography for Biomedical Applications and Medicine*, chapter 9. John Wiley & Sons, Hoboken, 2019.
- [102] J. Abate and P. P. Valkó. Multi-precision Laplace transform inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:979–993, 2004.



## Biografija



Sladan Jelić, rođen je 16.04.1997. godine. Diplomirao je 07.09.2020. godine na Departmanu za fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smer diplomirani profesor fizike, a zatim završio master studije iz oblasti Primjenjene fizike – nanonauke, 10.09.2021. godine. Doktorske akademske studije Fizike je upisao 08.10.2021. godine. Osnovnu školu je završio 2012. godine kao vukovac i đak generacije, zatim je 2016. godine završio gimnaziju kao vukovac, đak generacije, dobitnik Svetosavske povelje i jedan od tri đaka generacije Srema.

Studije fizike na Prirodno-matematičkom fakultetu upisao je 2016. godine i u toku studija je nagrađen za postignut uspeh u studiranju *Izuzetnom nagradom za uspeh u toku sudjela za školsku 2016/2017, 2017/2018. i 2018/2019. godinu*. Nagrađen je za Izradu naučnih i stručnih radova studenata (Tematici) u 2019/2020. godini za naučni rad *Frakciona Burgersova talasna jednačina na konačnom domenu*. Objavio je tri naučna rada u časopisima sa SCI liste u koautorstvu sa dr Dušanom Zoricom. U periodu od 01. jula do 15. septembra 2020. godine pohađao je istraživaču obuku organizovanu od strane Matematičkog instituta Srpske akademije nauka i umetnosti u oblasti *Wave propagation and heat conduction problems in hereditary and non-local media*. Dobitnik je Godišnje nagrade Matematičkog instituta SANU u oblasti matematike i mehanike za studente redovnih studija (2021. godine) kao i Pupinove nagrade Matice srpske (druga nagrada) za master rad *Prostiranje talasa u viskoelastičnom materijalu frakcionog Burgersovog tipa* (2023. godine).

Godinu dana je bio student prodekan na Prirodno-matematičkom fakultetu. Tokom 2020. godine je volontirao u Novosadskom humanitarnom centru. Bio je stipendista Srpskog privrednog društva *Privrednik*. Od maja 2023. godine je redovni član Matice srpske. Na Fakultetu tehničkih nauka je bio zaposlen od 01. marta 2021. godine do 30. aprila 2022. godine, prvo kao saradnik u nastavi, a potom i kao asistent, na Katedri za fiziku Departmana za opšte discipline u tehnici. Od 01. maja 2022. godine zaposlen je na Departmanu za fiziku na Prirodno-matematičkom fakultetu, prvo u zvanju istraživača-pripravnika, a potom od 01. jula 2023. u zvanju istraživača-saradnika.



*Овај Образац чини саставни део докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта који се брани на Универзитету у Новом Саду. Попуњен Образац укоричити иза текста докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта.*

## План третмана података

<b>Назив пројекта/истраживања</b>
Конститутивно моделирање и простирање таласа у меморијским материјалима Ценеровог и анти-Ценеровог типа
<b>Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање</b>
Природно-математички факултет у Новом Саду
<b>Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање</b>
Конститутивно моделирање и простирање таласа у меморијским материјалима Ценеровог и анти-Ценеровог типа
<b>1. Опис података</b>
<b>1.1 Врста студије</b>  <i>Докторска дисертација је резултат теоријских истраживања у оквиру којих није предвиђено прикупљање података.</i>
<b>1.2 Врсте података</b> а) квантитативни б) квалитативни
<b>1.3. Начин прикупљања података</b> а) анкете, упитници, тестови б) клиничке процене, медицински записи, електронски здравствени записи в) генотипови: навести врсту _____ г) административни подаци: навести врсту _____ д) узорци ткива: навести врсту _____ ђ) снимци, фотографије: навести врсту _____ е) текст, навести врсту _____

ж) мапа, навести врсту \_\_\_\_\_

з) остало: описати \_\_\_\_\_

### 1.3 Формат података, употребљене скале, количина података

#### 1.3.1 Употребљени софтвер и формат датотеке:

а) Excel фајл, датотека \_\_\_\_\_

б) SPSS фајл, датотека \_\_\_\_\_

с) PDF фајл, датотека \_\_\_\_\_

д) Текст фајл, датотека \_\_\_\_\_

е) JPG фајл, датотека \_\_\_\_\_

ф) Остало, датотека \_\_\_\_\_

#### 1.3.2. Број записа (код квантитативних података)

а) број варијабли \_\_\_\_\_

б) број мерења (испитаника, процена, снимака и сл.) \_\_\_\_\_

#### 1.3.3. Поновљена мерења

а) да

б) не

Уколико је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) временски размак између поновљених мера је \_\_\_\_\_

б) варијабле које се више пута мере односе се на \_\_\_\_\_

в) нове верзије фајлова који садрже поновљена мерења су именоване као \_\_\_\_\_

Напомене: \_\_\_\_\_

*Да ли формати и софтвер омогућавају дељење и дугорочну валидност података?*

а) Да

б) Не

*Ако је одговор не, образложити*

\_\_\_\_\_

## 2. Прикупљање података

### 2.1 Методологија за прикупљање/генерисање података

2.1.1. У оквиру ког истраживачког нацрта су подаци прикупљени?

- а) експеримент, навести тип \_\_\_\_\_
- б) корелационо истраживање, навести тип \_\_\_\_\_
- ц) анализа текста, навести тип \_\_\_\_\_
- д) остало, навести шта \_\_\_\_\_

2.1.2 Навести врсте мерних инструмената или стандарде података специфичних за одређену научну дисциплину (ако постоје).

---

---

### 2.2 Квалитет података и стандарди

2.2.1. Третман недостајућих података

- а) Да ли матрица садржи недостајуће податке? Да Не

Ако је одговор да, одговорити на следећа питања:

- а) Колики је број недостајућих података? \_\_\_\_\_
  - б) Да ли се кориснику матрице препоручује замена недостајућих података? Да Не
  - в) Ако је одговор да, навести сугестије за третман замене недостајућих података
- 

2.2.2. На који начин је контролисан квалитет података? Описати

---

---

2.2.3. На који начин је извршена контрола уноса података у матрицу?

---

---

### 3. Третман података и пратећа документација

#### 3.1. Третман и чување података

3.1.1. Подаци ће бити депоновани у \_\_\_\_\_ репозиторијум.

3.1.2. URL адреса \_\_\_\_\_

3.1.3. DOI \_\_\_\_\_

3.1.4. Да ли ће подаци бити у отвореном приступу?

a) Да

б) Да, али после ембарга који ће трајати до \_\_\_\_\_

в) Не

Ако је одговор не, навести разлог \_\_\_\_\_

3.1.5. Подаци неће бити депоновани у репозиторијум, али ће бити чувани.

Образложење

---

---

#### 3.2 Метаподаци и документација података

3.2.1. Који стандард за метаподатке ће бити примењен? \_\_\_\_\_

3.2.1. Навести метаподатке на основу којих су подаци депоновани у репозиторијум.

---

---

*Ако је потребно, навести методе које се користе за преузимање података, аналитичке и процедуралне информације, њихово кодирање, детаљне описе варијабли, записа итд.*

---

---

---

---

### 3.3 Стратегија и стандарди за чување података

3.3.1. До ког периода ће подаци бити чувани у репозиторијуму? \_\_\_\_\_

3.3.2. Да ли ће подаци бити депоновани под шифром? Да Не

3.3.3. Да ли ће шифра бити доступна одређеном кругу истраживача? Да Не

3.3.4. Да ли се подаци морају уклонити из отвореног приступа после извесног времена?

Да Не

Образложити

---

---

## 4. Безбедност података и заштита поверљивих информација

Овај одељак МОРА бити попуњен ако ваши подаци укључују личне податке који се односе на учеснике у истраживању. За друга истраживања треба такође размотрити заштиту и сигурност података.

### 4.1 Формални стандарди за сигурност информација/података

Истраживачи који спроводе испитивања с људима морају да се придржавају Закона о заштити података о личности ([https://www.paragraf.rs/propisi/zakon\\_o\\_zastiti\\_podataka\\_o\\_licnosti.html](https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html)) и одговарајућег институционалног кодекса о академском интегритету.

4.1.2. Да ли је истраживање одобрено од стране етичке комисије? Да Не

Ако је одговор Да, навести датум и назив етичке комисије која је одобрила истраживање

4.1.2. Да ли подаци укључују личне податке учесника у истраживању? Да Не

Ако је одговор да, наведите на који начин сте осигурали поверљивост и сигурност информација везаних за испитанике:

- a) Подаци нису у отвореном приступу
- б) Подаци су анонимизирани
- ц) Остало, навести шта

## 5. Доступност података

5.1. Подаци ће бити

- а) јавно доступни
- б) доступни само уском кругу истраживача у одређеној научној области
- ц) затворени

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести под којим условима могу да их користе:

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести на који начин могу приступити подацима:

5.4. Навести лиценцу под којом ће прикупљени подаци бити архивирани.

## 6. Улоге и одговорност

6.1. Навести име и презиме и мејл адресу власника (аутора) података

*6.2. Навести име и презиме и мејл адресу особе која одржава матрицу с подацима*

---

---

*6.3. Навести име и презиме и мејл адресу особе која омогућује приступ подацима другим истраживачима*

---

---

