Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za fiziku

Problem brahistohrone u neviskoznoj i viskoznoj sredini

-diplomski rad-

Mentor: prof. dr Dušan Zorica

Student: Nikola Vujadinović
FDI 532/17

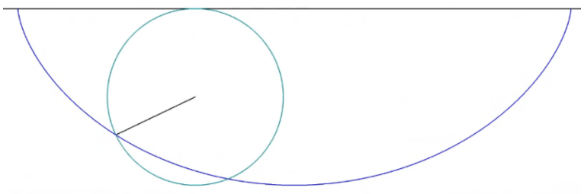
Novi Sad, 2022.

Sadržaj

1 Uvod

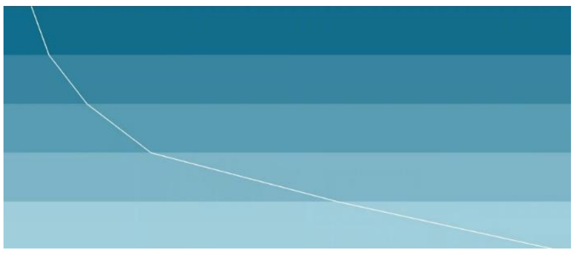
Metode varijacionog računa i analitičke mehanike imaju veliku primenu u rešavanju problema optimizacije. Osnovna ideja varijacionog računa u primeni na fizičke procese je u tome da tokom procesa neki od fizičkih parametara imaju stacionarnu, a često i ekstremnu vrednost. Taj parametar se naziva dejstvom. Zahtev varijacionog računa je i da od svih mogućih procesa koji se odvijaju u zadatom intervalu vremena samo stvarni proces dejstvu zadaje optimalnu vrednost. Principi na kojima se zasniva optimizacija ovakve vrste se nazivaju varijacioni principi. Možda najpoznatiji od varijacionih principa je Hamiltonov princip.

Jedan od problema klasične mehanike, koji se definiše preko svojstva koje izražava minimalnost fizičke veličine, u konkretnom slučaju vremena, je problem brahistohrone. Ime nosi iz grčkog jezika: *βραχιστος* što znači najkraće i *χρονος* što znači vreme. Problem brahistohrone je predstavio Johan Bernuli 1696. godine u naučnom časopisu *Acta Eruditorum* (videti [4]). On je pozvao sve matematičare sveta da reše sledeći problem: „*Ako su date tačke A i B u vertikalnoj ravni, kakvu trajektoriju opisuje materijalna tačka koja kreće iz tačke A i stiže u tačku B za najkraće vreme, ako na nju deluje samo gravitaciona sila?*“ Dobio je odgovore od Njutna, Lajbnica, Lopitala i svog brata Jakoba Bernulija. Svi su došli do istog rešenja, da je kriva segment cikloide, prikazane na slici 1.1, koja se dobija kao trajektorija fiksirane tačke na kružnici koja se kotrlja. Jakob je kasnije formulisao i teži problem brahistohrone i u njegovom rešavanju koristio nove metode, koje su kasnije Ojler i Lagranž obradili i uobličili u varijacioni račun.



sl. 1.1 Cikloida

Johanovo rešenje je bilo posebno interesantno. Zasnovao ga je na Fermaovom principu, koji kaže da svetlost između dve tačke putuje tako da stigne za najkraće vreme. Umesto da posmatra kretanje fizičkog tela, pitao se kako bi se umesto njega kretala svetlost koja prolazi kroz mnogo sredina sa različitim indeksima prelamanja (sl. 1.2), tako da pri svakom prelamanju dobije drugačiju brzinu, slično kao i telo koje ubrzava u gravitacionom polju. Korišćenjem Snelovog zakona i zakona održanja energije došao je do jednačine cikloide.



sl. 1.2 Metoda Johana Bernulija

U ovom radu biće predstavljene metode za rešavanje problema brahistohrone u neviskoznoj i viskoznoj sredini. U neviskoznoj sredini biće razmatran problem koji je formulisao Johan Bernuli, kao i kretanje tačke po površini cilindra. Tražiće se rešenje Bernulijevog problema direktnom metodom u implicitnom i parametarskom obliku, kao i korišćenjem Hamilton-Jakobijeve metode. U viskoznoj sredini će se razmatrati problem brahistohrone u vertikalnoj ravni.

2 Ojler-Lagranževe jednačine kao posledica Dalamber-Lagranževog principa

Posmatra se sistem od N čestica čije je kretanje ograničeno sa m holonomnih veza

$$f_j(x_k, y_k, z_k, t) = 0, \qquad (j = 1, 2, \dots, m), \tag{2.1}$$

gde je indeksom $k = 1, 2, \dots, N$ označena neka čestica. Usled postojanja veza, broj nezavisnih promenljivih, odnosno broj stepeni slobode sistema je $n = 3N - m$.

Umesto Dekartovih koordinata x_k, y_k, z_k, može se uvesti skup od $3N$ veličina $q_1, q_2, \dots, q_{3N}$ koje potpuno određuju položaj sistema. One su uvedene tako da su Dekartove koordinate funkcije veličina $q_1, q_2, \dots, q_{3N}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}), \\ x_2 &= x_2(q_1, q_2, \dots, q_{3N}), \\ &\vdots \\ z_N &= z_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

tako da se jednačine (2.2) mogu rešiti po veličinama $q_1, q_2, \dots, q_{3N}$. Ako se tako napisane Dekartove koordinate ubace u jednačine veza (2.1) dobiće se jednačine veza u funkciji novih veličina $q_1, q_2, \dots, q_{3N}$:

$$f_j(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0, \qquad (j = 1, 2, \dots, m). \tag{2.3}$$

Takođe, jednačine veza povezuju m veličina q_i pa je broj nezavisnih veličina isto dat sa $n = 3N - m$. Ako se zavisne promenljive označe sa $q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{n+m}$ sistem od m jednačina zavisnih promenljivih u funkciji od nezavisnih je

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_{n+1}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ q_{n+2} &= q_{n+2}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ &\vdots \\ q_{n+m} &= q_{n+m}(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \end{aligned} \tag{2.4}$$

gde je vreme t dato kao parametar. Nakon uvrštavanja funkcija datih sistemom jednačina (2.4) u sistem jednačina (2.2), dobiju se relacije u kojima Dekartove promenljive zavise samo od nezavisnih veličina $q_1, q_2, \dots, q_n$ i vremena:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\ x_2 &= x_2(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\ &\vdots \\ z_N &= z_N(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \end{aligned} \tag{2.5}$$

što se u vektorskom obliku predstavlja kao $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ gde je $k = 1, 2, \dots, N$. Položaj svake čestice sistema je u svakom trenutku potpuno određen skupom nezavisnih veličina $q_1, q_2, \dots, q_n$ i one se tako definisane nazivaju generalisanim koordinatama. Generalisane koordinate se ne odnose na pojedinačne čestice u sistemu, već određuju položaj sistema kao celine.

Kao što je već rečeno, čestice sistema kreću se u skladu sa vezama (2.1). Takva kretanja se nazivaju mogućim i ne moraju se nužno poklapati sa stvarnim kretanjima. Razlika dva moguća elementarna pomeranja čestice, koja se odvijaju za isto vreme, naziva se virtuelno pomeranje. Ako su dva elementarna moguća pomeranja čestice k data sa $d\vec{r}_k$ i $d'\vec{r}_k$ tada je virtuelno pomeranje

$$\delta\vec{r}_k = d'\vec{r}_k - d\vec{r}_k. \tag{2.6}$$

Dalamber-Lagranževog princip se izvodi polazeći od osnovne jednačine dinamike za prinudno kretanje

$$m\vec{a}_k = \vec{F}_k + \vec{R}_k, \qquad (k = 1, 2, \dots, N), \tag{2.7}$$

gde $m\vec{a}_k$ predstavlja fiktivnu silu inercije, $\vec{F}_k$ predstavlja aktivnu, a $\vec{R}_k$ reaktivnu silu. Množenjem obe strane prethodnog izraza sa $\delta\vec{r}_k$ i sumiranjem po broju čestica se dobija

$$\sum_{k=1}^{N} (\vec{F}_k - m_k\dot{\vec{v}}_k) \cdot \delta\vec{r}_k = -\sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k. \tag{2.8}$$

Ukoliko su veze holonomne, tada su reakcije idealne, a za idealne reakcije važi da je izraz sa desne strane jednačine (2.8) jednak nuli (videti izvođenje jednačine (6.16) u [1]), pa je Dalamber-Lagranžev princip okarakterisan izrazom

$$\sum_{k=1}^{N} (\vec{F}_k - m_k\dot{\vec{v}}_k) \cdot \delta\vec{r}_k = 0. \tag{2.9}$$

Jednačina (2.9) u suštini znači da se svako kretanje koje proizvodi idealne reakcije vrši tako da je ukupni rad svih, kako aktivnih sila, tako i fiktivnih sila inercije na bilo kojim virtuelnim pomeranjima čestica sistema uvek jednak nuli.

Elementarni rad na virtuelnim pomeranjima dat je jednačinom

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k. \tag{2.10}$$

Kako su vektori položaja funkcije generalisanih koordinata i vremena, odnosno kako je $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, virtuelna pomeranja definisana izrazom (2.6) se mogu zapisati u sledećem obliku:

$$\delta\vec{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} d'q_i + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} dt - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i, \tag{2.11}$$

gde je $\delta q_i = d'q_i - dq_i$ virtuelna promena generalisane koordinate. Rad u generalisanim koordinatama je, prema jednačinama (2.10) i (2.11), dat izrazom

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i, \tag{2.12}$$

gde je uvedena generalisana sila $Q_i = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$.

U cilju izvođenja Ojler-Lagranževih jednačina polazi se od Dalamber-Lagranževog principa (2.9) zapisanog u obliku

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k - \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\vec{v}}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0. \tag{2.13}$$

Prvi član u jednačini (2.13) predstavlja elementarni rad sila na virtuelnim pomeranjima sistema (2.10) dat jednačinom (2.12), odnosno

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i. \tag{2.14}$$

Drugi član u jednačini (2.13) se transformiše tako da može da se napiše preko parcijalnih izvoda kinetičke energije. Naime, uzimajući u obzir jednačinu (2.11) drugi član u (2.13) postaje

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\vec{v}}_k \cdot \delta\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\vec{v}}_k \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\vec{v}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \tag{2.15}$$

S obzirom da se $\dot{\vec{v}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$ može izraziti iz jednakosti $\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}\right) = \dot{\vec{v}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} + \vec{v}_k \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$, prethodni izraz postaje

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\vec{v}}_k \cdot \delta\vec{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \tag{2.16}$$

Koristeći osobinu nezavisnosti operacija $\frac{d}{dt}$ i $\frac{\partial}{\partial q_i}$, iz prethodnog izraza se može izraziti $\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_i}$. Takođe važi i $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i}$, pa (2.16) postaje

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\vec{v}}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \tag{2.17}$$

Parcijalni izvodi kinetičke energije $T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k$ po generalisanim koordinatama i brzinama su

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_i} \quad \text{i} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i}, \tag{2.18}$$

iz čega sledi

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\vec{v}}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i, \tag{2.19}$$

pa je na osnovu (2.14) i (2.19) izraz za Dalamber-Lagranžev princip (2.9) u generalisanim koordinatama

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i = 0. \tag{2.20}$$

Kako su sve generalisane koordinate, a samim tim i njihove varijacije međusobno nezavisne, uslov da izraz (2.20) bude jednak nuli je da za svako i izraz u zagradi mora biti jednak nula, odnosno važe jednačine

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.21}$$

koje se nazivaju Ojler-Lagranževim jednačinama.

Ukoliko postoji funkcija oblika $V = V(q_i, \dot{q}_i, t)$ i ukoliko se generalisane sile Q_i mogu napisati na sledeći način:

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.22}$$

tada se generalisane sile nazivaju potencijalnim, a $V = V(q_i, \dot{q}_i, t)$ se naziva uopštenim potencijalom. Ojler-Lagranževe jednačine (2.21) se zamenjivanjem generalisanih sila u obliku (2.22) mogu zapisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.23}$$

što, ako se uvede Lagranževa funkcija, ili Lagranžijan, $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V$, se može zapisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.24}$$

U slučaju kada uz potencijalne sile postoje i nepotencijalne, za generalisane sile se može uzeti

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} + Q_i^*, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.25}$$

gde Q_i^* predstavlja nepotencijalne sile. Ojler-Lagranževe jednačine (2.21) su tada

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^*, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.26}$$

Prvi integral Ojler-Lagranževih jednačina (2.26) može se izvesti ukoliko Lagranžijan ne zavisi eksplicitno od vremena, odnosno ukoliko je $L = L(q_i, \dot{q}_i)$. Tada, totalni diferencijal po vremenu tako definisanog Lagranžijana daje sledeću jednakost:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} \right). \tag{2.27}$$

Sa druge strane, polazeći od Ojler-Lagranževih jednačina (2.26) i njihovim množenjem sa $\dot{q}_i$ i sumiranjem po i dobija se jednakost

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + Q_i^* \dot{q}_i \right). \tag{2.28}$$

Diferenciranjem $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$ po vremenu, pa sumiranjem po i dobija se

$$\sum_{i=n}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt}, \tag{2.29}$$

što korišćenjem jednačina (2.27) i (2.28) daje

$$\sum_{i=n}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+Q_i^*\dot{q}_i\right)+\frac{dL}{dt}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i, \tag{2.30}$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right)=\sum_{i=1}^{n}Q_i^*\dot{q}_i, \tag{2.31}$$

što formuliše zakon promene Hamiltonijana, gde je $H=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-L$, odnosno, ukoliko su nepotencijalne sile jednake nuli, prvi integral kretanja, tj. zakon održanja:

$$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-L=C=const, \qquad (i=1,2,\dots,n). \tag{2.32}$$

U slučaju da su generalisane koordinate Dekartove, tada Hamiltonijan (2.32) ima smisao ukupne energije sistema te je izrazom (2.32) dat zakon održanja energije.

Sadržaj ovog poglavlja baziran je na teoriji iz [1].

3 Varijacioni problemi

Sadržaj ovog poglavlja, baziran na [3], daje teorijske osnove varijacionih problema, a za više detalja pogledati i [1] i [2].

3.1 Varijacioni problem bez ograničenja

Skalarna veličina I, data integralom oblika

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y(x), y'(x)\big) dx = \int_{x_0}^{x_1} \tilde{F}(x) dx, \tag{3.1.1}$$

naziva se funkcionalom. Izborom funkcije y, funkcional kao rezultat daje različite brojeve za poznati oblik zavisnosti funkcije F od nezavisne promenljive x, zavisne promenljive $y = y(x)$ i njenog izvoda $y' = \frac{dy}{dx}$. Varijacioni problem podrazumeva određivanje funkcije $y = y(x)$, zadate na poznatom intervalu $[x_0, x_1]$, tako da funkcional I dostiže ekstremnu vrednost.

Uvodi se pojam sinhrone varijacije funkcije

$$\delta y(x) = \bar{y}(x) - y(x), \tag{3.1.2}$$

s obzirom da se funkcije y i $\bar{y}$ posmatraju u istoj tački, gde se pretpostavlja da je varijacija mala, tj. da važi $|\delta y(x)| \ll |y(x)|$. Funkcija y je optimalna u smislu da pri njenom izboru funkcional I ima ekstremnu vrednost, a funkcija $\bar{y}$ je varirana funkcija, odnosno funkcija koja se od optimalne razlikuje za malu vrednost. Može se reći da funkcional I ima ekstremnu vrednost kada je varirana funkcija jednaka optimalnoj, $\bar{y} = y$, tj. kada su vrednosti funkcionala I koji odgovara funkciji y i vrednost funkcionala $\bar{I}$ koji odgovara funkciji $\bar{y}$ jednake. Varijacija funkcionala I se definiše analogno varijaciji funkcije izrazom

$$\delta I = \bar{I} - I. \tag{3.1.3}$$

Kada je varijacija funkcionala jednaka nuli, tada funkcional ima ekstremnu vrednost, tj. kriterijum optimalnosti glasi $\delta I = 0$. Korišćenjem funkcionala u obliku (3.1.1), za varijaciju funkcionala (3.1.3) se dobije

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{x_0}^{x_1} \bar{\tilde{F}}(x) dx - \int_{x_0}^{x_1} \tilde{F}(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, \bar{y}, \overline{y'}\big) dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \Big(F\big(x, \bar{y}, \overline{y'}\big) - F(x, y, y')\Big) dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta F dx.\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Korišćenjem definicije varijacije funkcije (3.1.2), varijacija funkcionala (3.1.4) se može zapisati na sledeći način:

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \big(F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')\big) dx. \tag{3.1.5}$$

Razvijanjem prethodnog izraza u Tejlorov red u okolini tačke (x, y, y') se dobija

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_0}^{x_1} \left(F(x, y, y') + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' - F(x, y, y') \right) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx. \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Ukoliko se pretpostavi da važi $\overline{y'} = \bar{y}'$, odnosno da se varijacije izvoda funkcije ne određuju nezavisno od varijacije same funkcije, nego kao izvodi varirane funkcije, tada je izvod varijacije jednak varijaciji izvoda, tj. važi $\frac{d}{dx} \delta y = \frac{d}{dx}(\bar{y} - y) = \bar{y}' - y' = \overline{y'} - y' = \delta \frac{dy}{dx}$, što je u konciznijem zapisu

$$(\delta y)' = \delta y'. \tag{3.1.7}$$

Korišćenjem jednačine (3.1.7), izraz $\delta y' dx$ se može izraziti na sledeći način: $\delta y' = \frac{d}{dx} \delta y$ odakle je $\delta y' dx = d(\delta y)$, te izraz (3.1.6) postaje

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'} d(\delta y). \tag{3.1.8}$$

Drugi integral iz prethodnog izraza se može rešiti primenom parcijalne integracije, uzimanjem smena $u = \frac{\partial F}{\partial y'}$ i $dv = d(\delta y)$, pa se za izraz (3.1.8) dobije

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \ \delta y \right) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx, \\ \delta I &= \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \ \delta y \right) \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx. \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Ukoliko su položaji (x_0, y_0) i (x_1, y_1) fiksirani, važi da je varijacija funkcije u graničnim tačkama x_0 i x_1 jednaka nuli, tj. važi da je $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$, pa je samim tim i $\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \ \delta y \right) \Big|_{x_0}^{x_1} = 0$. Tada, ukoliko je kriterijum optimalnosti $\delta I = 0$ ispunjen, mora važiti

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \delta y dx = 0, \tag{3.1.10}$$

a kako varijacija $\delta y(x)$ za proizvoljno x nije jednaka nuli, zaključuje se da je

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \tag{3.1.11}$$

čime se dobija Ojler-Lagranževa jednačina, koja određuje ekstremnu funkciju $y = y(x)$.

Ukoliko bar jedan od položaja (x_0, y_0) i (x_1, y_1) nije fiksiran, tada varijacija funkcije u nefiksiranoj graničnoj tački nije jednaka nuli. Neka je početna tačka fiksirana, a krajnja nije. Da bi bio zadovoljen kriterijum optimalnosti $\delta I = 0$ mora biti ispunjen uslov $\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\, \delta y\right)\Big|_{x_0}^{x_1} = 0$. Kako je početna tačka fiksirana, za nju važi $\delta y(x_0) = 0$, ali za krajnju tačku to nije slučaj, odnosno $\delta y(x_1) \neq 0$, pa u njoj mora biti ispunjen uslov

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_1} = 0, \tag{3.1.12}$$

koji se naziva prirodnim graničnim uslovom.

3.2 Varijacioni problem sa ograničenjima u vidu diferencijalnih jednačina

Posmatra se funkcional I zadat u obliku

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}')dx, \tag{3.2.1}$$

gde $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{y}'$ predstavljaju funkcije $y_1, y_2, \dots, y_n$ i $(y_1', y_2', \dots, y_n') = \left(\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}\right)$, respektivno, koje zavise od nezavisne promenljive x. Varijacioni problem sa ograničenjima u vidu diferencijalnih jednačina podrazumeva određivanje funkcija $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x)$, zadatih na poznatom intervalu $[x_0, x_1]$, tako da funkcional I dostiže ekstremnu vrednost, uz zadovoljavanje $m < n$ diferencijalnih jednačina prvog reda

$$f_k(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}') = 0, \qquad (k = 1, 2, \dots, m). \tag{3.2.2}$$

Rešavanje ovako definisanog varijacionog problema podrazumeva korišćenje metode Lagranževih množitelja, koja će biti uvedena na primeru uslovnih ekstrema funkcije više promenljivih.

3.2.1 Uslovni ekstremi

Metoda Lagranževih množitelja se može koristiti za određivaje uslovnih ekstrema funkcije više promenljivih $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uz ograničenja u vidu $m < n$ algebarskih jednačina

$$g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \qquad (k = 1, 2, \dots, m). \tag{3.2.3}$$

Potreban uslov da funkcija y ima ekstrem je da njen totalni diferencijal dy, odnosno njena elementarna promena, bude nula za proizvoljne vrednosti dx_i, odnosno za elementarne promene promenljivih x_i, tj.

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i = 0. \tag{3.2.4}$$

Kako, zbog postojanja m algebarskih veza (3.2.3), nisu sve promenljive x_i međusobno nezavisne, iz (3.2.4) ne sledi da je $\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0$ za svako i, što bi važilo da su sve promenljive x_i međusobno nezavisne. Kako je i

$$dg_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_i} dx_i = 0, \qquad (k = 1, 2, \dots, m) \tag{3.2.5}$$

važi da je i

$$dF = dy + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k dg_k = 0, \tag{3.2.6}$$

gde su uvedeni Lagranževi množitelji u vidu konstanti λ_k, kao i nova funkcija

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = y(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{3.2.7}$$

Totalni izvod novouvedene funkcije $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ je

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \right) dx_i + \sum_{k=1}^{m} g_k d\lambda_k. \tag{3.2.8}$$

S obzirom na to da je m elementarnih promena dx_i međusobno zavisno, Lagranževi množitelji se određuju tako da u jednačini (3.2.8) izraz uz m vrednosti dx_i bude nula, odnosno tako da važi

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j} = 0, \qquad (j = 1, 2, \dots, m). \tag{3.2.9}$$

Kako je preostalih $n - m$ elementarnih promena dx_i proizvoljno, iz (3.2.8) sledi da je

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j} = 0, \qquad (j = m, m+1, \dots, n), \tag{3.2.10}$$

a kako su Lagranževi množitelji međusobno nezavisni, iz (3.2.8) se dobijaju jednačine veza (3.2.3). Dakle, uslovi za postojanje vezanih ekstrema su

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{3.2.11}$$

$$g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \qquad (k = 1, 2, \dots, m). \tag{3.2.12}$$

Jednačine (3.2.11), zajedno sa jednačinama veza (3.2.12), čine sistem od $n + m$ jednačina kojim se određuje $n + m$ nepoznatih: $x_1,\ x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

3.2.2 Uslovi ekstremalnosti funkcionala

Uslovi ekstremalnosti funkcionala I datog izrazom (3.2.1) uz diferencijalna ograničenja data jednačinama (3.2.2) se određuju metodom Lagranževih množitelja, odnosno formiranjem proširene podintegralne funkcije

$$F^*(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', \boldsymbol{\lambda}) = F(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}') + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(x) f_k(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'), \tag{3.2.13}$$

gde $\boldsymbol{\lambda}$ predstavlja Lagranževe množitelje $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, čiji je broj jednak broju veza (3.2.2). Kako je $f_k = 0$, sledi da je proširena funkcija F^*, data izrazom (3.2.13), jednaka funkciji F iz izraza (3.2.1), a isto važi i za prošireni funkcional

$$I^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}') + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(x) f_k(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}') \right) dx, \tag{3.2.14}$$

koji je jednak funkcionalu I, datom jednačinom (3.2.1). Variranjem funkcionala I^* po $y_i, {y_i}'$ i λ_k dobija se

$$\delta I^* = \int_{x_0}^{x_1} \delta F^* dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F^*}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F^*}{\partial y_i'} \delta y_i' \right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F^*}{\partial \lambda_k} \delta \lambda_k \right) dx. \qquad (3.2.15)$$

Integral $\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F^*}{\partial y_i'} \delta y_i' \, dx$ iz prethodnog izraza se može transformisati korišćenjem osobine (3.1.7), te se dobija $\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F^*}{\partial y_i'} d(\delta y_i)$, koji je, nakon primene parcijalne integracije sa smenama $u_i = \frac{\partial F^*}{\partial y_i'}$ i $dv_i = d(\delta y_i)$, jednak

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F^*}{\partial y_i'} d(\delta y_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F^*}{\partial y_i'} \delta y_i \right) \Bigg|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \delta y_i \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial y_i'} \right) dx, \qquad (3.2.16)$$

te se korišćenjem prethodnog izraza za izraz (3.2.15) dobija da je

$$\delta I^* = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F^*}{\partial y_i'} \delta y_i \right) \Bigg|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F^*}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y_i'} \right) \delta y_i \, dx$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F^*}{\partial \lambda_k} \delta \lambda_k \, dx. \qquad (3.2.17)$$

Da bi za proizvoljne varijacije bio ispunjen kriterijum optimalnosti $\delta I^* = 0$, izrazi uz varijacije u podintegralnim funkcijama moraju biti jednaki nuli, tj.

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y_i'} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \qquad (3.2.18)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_k} = 0, \qquad (k = 1, 2, \dots, m) \qquad (3.2.19)$$

i mora da važi

$$\left(\frac{\partial F^*}{\partial y_i'} \delta y_i \right) \Bigg|_{x_0}^{x_1} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \qquad (3.2.20)$$

Jednačine (3.2.18) su Ojler-Lagranževe jednačine, jednačine (3.2.19) su jednačine veza (3.2.2), a izraz (3.2.20) služi za određivanje graničnih uslova problema.

3.3 Ojler-Lagranževe jednačine kao posledica Hamiltonovog principa

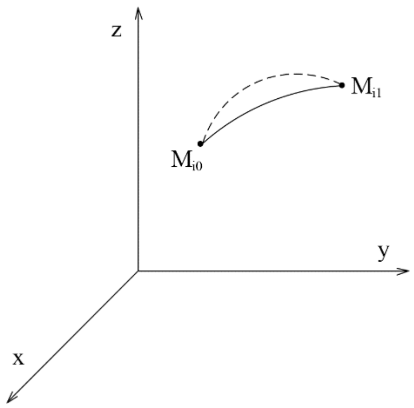
Posmatra se sistem od N čestica bez veza ili sa idealnim holonomnim vezama sa n stepeni slobode u kojem su interakcije opisane potencijalnim silama. Položaj sistema se može odrediti pomoću generalisanih koordinata $q_1, q_2, \dots, q_n$. Na slici 3.3.1 je punom linijom prikazana stvarna putanja i-te čestice, čiji su položaji u trenucima t_0 i t_1, M_{i0} i M_{i1}, respektivno. Skup stvarnih putanja $q_i = q_i(t)$, gde je $i = 1, 2, \dots, n$, svih čestica u intervalu vremena $t \in [t_0, t_1]$ se naziva pravi put sistema.

Uporedo sa stvarnim kretanjem i-te čestice zamisli se da postoji i neko drugo, zaobilazno kretanje, koje se vrši za isto vreme, od t_0 do t_1, između istih tačaka, M_{i0} i M_{i1}, u saglasnosti je sa vezama i malo odstupa od stvarnog kretanja. Zaobilaznih putanja $\overline{q_i} = \overline{q_i}(t)$ gde je $i = 1, 2, \dots, n$, koje ispunjavaju ove uslove ima beskonačno mnogo, a jedna takva putanja je na slici 3.3.1 predstavljena isprekidanom linijom. Svaki skup takvih zaobilaznih putanja svih čestica naziva se zaobilazni put sistema.

Varijacija generalisane koordinate

$$\delta q_i(t) = \bar{q}_i(t) - q_i(t), \tag{3.3.1}$$

uz uslov $|\delta q_i(t)| \ll |q_i(t)|$, predstavlja priraštaj generalisane koordinate kada se u nekom trenutku pređe sa pravog na zaobilazni put. Varijaciju treba razlikovati od diferencijala generalisane koordinate dq_i, koji predstavlja priraštaj generalisane koordinate kada se duž pravog puta načini pomeraj u vremenu sa t na $t + dt$, kao i od virtuelnog pomeranja datog izrazom (2.6).



sl. 3.3.1 Pravi i zaobilazni put

Kako se položaji sistema u početnom i krajnjem trenutku pri pravom i okolnom putu poklapaju, važi da su sve varijacije generalisanih koordinata u tim trenucima jednake nuli:

$$\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0. \tag{3.3.2}$$

Neka je Lagranžijan $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ dat kao funkcija generalisanih koordinata, njihovih prvih izvoda i vremena, gde funkcije $q_i = q_i(t)$ ne moraju nužno odgovarati pravom putu. Može se formirati vremenski integral Lagranžijana

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \tag{3.3.3}$$

i on se naziva Hamiltonovim dejstvom.

Hamiltonovo dejstvo se varira na isti način kao što je to predstavljeno u poglavlju 3.1. Varijacija Hamiltonovog dejstva je u opštem slučaju

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ \delta q_i \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1}, \tag{3.3.4}$$

a ukoliko su zadovoljeni uslovi poklapanja pravog i okolnog puta u trenucima t_0 i t_1, onda je $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ \delta q_i \right) \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$, te je varijacija Hamiltonovog dejstva

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \tag{3.3.5}$$

Kako jednačine kretanja po pravom putu zadovoljavaju Ojler-Lagranževe jednačine (2.24) sledi da je izraz (3.3.5) jednak nuli za stvarno kretanje sistema čestica, tj. važi

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0, \tag{3.3.6}$$

gde sad $q_i = q_i(t)$ funkcije moraju odgovarati pravom putu. Dakle, stvarno kretanje sistema čestica bez veza ili sa idealnim holonomim vezama i potencijalnim silama se vrši tako da Hamiltonovo dejstvo duž pravog puta ima stacionarnu vrednost u odnosu na vrednosti dejstva duž svih zaobilaznih puteva, što predstavlja Hamiltonov princip - opšti integralni princip mehanike.

Problem može biti sagledan i obrnuto: od svih funkcija $q_i = q_i(t)$ koje zadovoljavaju uslove date izrazima (3.3.2) naći one za koje je Hamiltonovo dejstvo stacionarno. Da bi varijacija dejstva data izrazom (3.3.5) za bilo koje vrednosti δq_i bila jednaka nuli, zbog nezavisnosti varijacija δq_i, mora da važi

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \qquad (i = 1,2, \dots, n), \tag{3.3.7}$$

što predstavlja Ojler-Lagranževe jednačine.

Ovim je pokazana ekvivalentnost Ojler-Lagranževih jednačina i Hamiltonovog principa: Ojler-Lagranževe jednačine određuju funkcije $q_i = q_i(t)$ za koje je Hamiltonovo dejstvo stacionarno.

3.4 Asinhrona varijacija

U prethodnim razmatranjima se pretpostavljalo da se prilikom variranja nezavisna promenljiva ne menja, ali postoje neke situacije u kojima to nije slučaj, kao na primer kada jedna ili obe granice u funkcionalu nisu specificirane, a takođe i u slučaju izvođenja prvog integrala kretanja, odnosno teoreme Emi Neter.

Neka je $x = x(t)$ funkcija čija je sinhrona varijacija $\delta x(t) = \bar{x}(t) - x(t)$. Neka i vreme trpi promenu $\Delta t(t) = \bar{t} - t$. Sinhrona varijacija, zajedno sa svojim prvim izvodom, kao i varijacija vremena su male veličine. Asinhrona varijacija funkcije $x = x(t)$ je

$$\Delta x(t) = \bar{x}(\mathrm{t} + \Delta \mathrm{t}) - x(t). \tag{3.4.1}$$

Razvojem funkcije $\bar{x}(t + \Delta t)$ u Tejlorov red i zadržavanjem na veličinama prvog reda dobije se

$$\bar{x}(t + \Delta t) = \bar{x}(\mathrm{t}) + \dot{\bar{x}}\,(t)\Delta t(t). \tag{3.4.2}$$

Može se načiniti aproksimacija $\dot{\bar{x}}\,\Delta t = \big(\dot{x} + (\dot{\delta x})\big)\Delta t \approx \dot{x}\Delta t$ jer je $(\dot{\delta x})\Delta t$ mala veličina drugog reda. Izražavanjem funkcije $\bar{x}$ iz izraza za sinhronu varijaciju funkcije $\delta x = \bar{x} - x$ i njenim ubacivanjem u jednačinu (3.4.2) dobije se

$$\Delta x = \delta x + \dot{x}\,\Delta t, \tag{3.4.3}$$

što je izraz koji povezuje asinhronu i sinhronu varijaciju funkcije $x = x(t)$.

Primenom asinhrone varijacije na integral $\int_0^t F(t)dt$, prema izrazu (3.4.3), dobija se

$$\Delta \int_0^t F dt = \delta \int_0^t F dt + F\Delta t, \tag{3.4.4}$$

dok se za integral asinhrone varijacije dobija

$$\begin{aligned} \int_0^t \Delta F dt &= \int_0^t \big(\delta F + \dot{F}\Delta t\big) dt = \int_0^t \big(\delta F + (\dot{F\Delta t}) - F(\dot{\Delta t})\big) dt \\ &= \int_0^t (\delta F - F(\dot{\Delta t}))dt + (F\Delta t)|_0^t. \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Kako za sinhronu varijaciju važi $\delta \int F dt = \int \delta F dt$, što je pokazano izrazom (3.1.4), oduzimanjem izraza (3.4.4) i (3.4.5) se dobija

$$\Delta \int_0^t F dt = \int_0^t (\Delta F + F(\dot{\Delta t}))dt + (F\Delta t)|_0. \tag{3.4.6}$$

Korišćenjem identiteta $\int_{t_0}^{t_1} F dt = \int_0^{t_1} F dt - \int_0^{t_0} F dt$, izraz (3.4.6), gde se integracija umesto na intervalu $[0, t]$ vrši na intervalu $[t_0, t_1]$, postaje

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} F dt = \int_{t_0}^{t_1} \big(\Delta F + F(\dot{\Delta t})\big)dt. \tag{3.4.7}$$

Desna strana prethodne jednačine se na osnovu izraza (3.4.3) može transformisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \big(\Delta F + F(\dot{\Delta t})\big)dt &= \int_{t_0}^{t_1} \big(\delta F + \dot{F}\Delta t + F(\dot{\Delta t})\big)dt = \int_{t_0}^{t_1} \big(\delta F + (F\dot{\Delta t})\big)dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \delta F dt + (F\Delta t)|_{t_0}^{t_1}.\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Neka je zadat problem nalaženja ekstremne vrednosti funkcionala $I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, t)\, dt$, gde se prilikom njegovog variranja varira i promenljiva t. Kriterijum optimalnosti glasi

$$\Delta I = \Delta \int_{t_0}^{t_1} F dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta F dt + (F\Delta t)|_{t_0}^{t_1} = 0, \tag{3.4.9}$$

gde $\int_{t_0}^{t_1} \delta F dt$, prema izrazu (3.1.4), predstavlja sinhronu varijaciju funkcionala δI, koja je prema izrazu (3.1.8) jednaka

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta F dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) \delta x dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}. \tag{3.4.10}$$

Ubacivanjem prethodnog izraza u (3.4.9) dobije se

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) \delta x dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x + F\Delta t\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1} = 0. \tag{3.4.11}$$

Korišćenjem relacije za asinhronu varijaciju funkcije (3.4.3) jednačina (3.4.11) postaje

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Delta x \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1} + \left(\left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right) \Delta t \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1} = 0, \tag{3.4.12}$$

što predstavlja konačan izraz kako za asinhronu varijaciju integrala, tako i za kriterijum optimalnosti funkcionala.

Može se primetiti da, ukoliko su zadovoljene Ojler-Lagranževe jednačine (2.24), tada iz kriterijuma optimalnosti funkcionala (3.4.12) sledi

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Delta x \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1} + \left(\left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right) \Delta t \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1} = 0, \tag{3.4.13}$$

što znači da je veličina

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Delta x + \left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right) \Delta t = const. \tag{3.4.14}$$

Izrazom (3.4.14) je dat prvi integral kretanja, odnosno teorema Emi Neter. Veličine Δx i Δt se ne mogu izabrati proizvoljno, već moraju zadovoljavati osnovni Neter identitet (videti jednačinu (3.4.3) u [2]).

4 Hamilton-Jakobijeva metoda

Ojler-Lagranževe jednačine (2.24) se u Hamiltonovoj teoriji prevode u kanonske jednačine kretanja ili Hamiltonove diferencijalne jednačine, koje su date izrazima

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{4.1}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{4.2}$$

(videti izvođenje jednačine (13.24) iz [1]), gde je sa

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{4.3}$$

uveden generalisani impuls, a Hamiltonova funkcija, ili Hamiltonijan, je

$$H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{x}_i - L, \tag{4.4}$$

pri čemu su sa $\boldsymbol{x}$ označene generalisane koordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$, a sa $\boldsymbol{p}$ generalisani impulsi $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Hamilton-Jakobijeva metoda za rešavanje sistema kanonskih jednačina (4.1) i (4.2) se može razmatrati kao posledica varijacionog principa sa asinhronom varijacijom (videti [3]), ali kao i posledica kanonskih transformacija (videti [1] i [3]).

4.1 Hamilton-Jakobijeva metoda kao posledica varijacionog principa sa asinhronom varijacijom

Posmatra se sistem sa potencijalnim silama, čije je Hamiltonovo dejstvo sa neodređenom gornjom granicom integrala dato izrazom

$$S(t, \boldsymbol{x}) = \int_{t_0}^{t} L(t, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) dt, \tag{4.1.1}$$

gde se pretpostavlja da je u početnom trenutku sistem u potpunosti određen, dok u proizvoljnom trenutku t vrednost Hamiltonovog dejstva zavisi od izbora oblika funkcija $\boldsymbol{x}$. Za variranje dejstva definisanog integralom čija gornja granica nije određena koristi se asinhrono pravilo variranja integrala, odnosno izraz (3.4.12), prema kojem je asinhrona varijacija dejstva (4.1.1) data izrazom

$$\Delta S = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \Delta x_i \right) \Bigg|_{t_0}^{t} + \left(\left(L - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \Delta t \right) \Bigg|_{t_0}^{t}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt. \tag{4.1.2}$$

Kako su za sisteme sa potencijalnim silama Ojler-Lagranževe jednačine date izrazom (2.24), integral iz prethodnog izraza iščezava. Pritom, ako se uzmu u obzir jednačine (4.3) i (4.4), asinhrona varijacija dejstva (4.1.2) postaje

$$\Delta S = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta x_i - H \Delta t \right) \Bigg|_{t_0}^{t} = \sum_{i=1}^{n} p_i \Delta x_i - H \Delta t, \tag{4.1.3}$$

jer su asinhrone varijacije koordinata i vremena u trenutku t_0 jednake nuli. Sa druge strane, kako je dejstvo S funkcija vremena i generalisanih koordinata, odnosno $S = S(t, \boldsymbol{x})$, njegova varijacija se može izraziti i na sledeći način:

$$\Delta S = \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i} \Delta x_i, \tag{4.1.4}$$

pa se izjednačavanjem izraza (4.1.3) sa izrazom (4.1.4) dobija

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + H \right) \Delta t + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - p_i \right) \Delta x_i = 0. \tag{4.1.5}$$

Zbog toga što su varijacije $\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ i Δx_n međusobno nezavisne, izrazi uz svaku od tih varijacija u jednačini (4.1.5) moraju biti nula, odnosno

$$\frac{\partial S(t, \boldsymbol{x})}{\partial t} + H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = 0 \tag{4.1.6}$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{4.1.7}$$

Kako je Hamiltonijan funkcija generalisanih impulsa, zamenom generalisanih impulsa u jednačini (4.1.6) generalisanim impulsima datih izrazom (4.1.7), jednačina (4.1.6) postaje

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(t, x_1, x_2, \dots x_n, \frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x_n} \right) = 0, \tag{4.1.8}$$

gde je $S = S(t, x_1, x_2, \ldots x_n)$ Hamilton-Jakobijeva funkcija, čime se dobila Hamilton-Jakobijeva jednačina, koja je u opštem slučaju nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda.

Hamilton-Jakobijeva jednačina (4.1.8) sadrži $n+1$ nezavisnu promenljivu $(t, \boldsymbol{x})$ i parcijalne izvode po svakoj od njih, te njeno kompletno rešenje podrazumeva funkciju koja sadrži $n+1$ integracionu konstantu. Međutim, ako je S rešenje Hamilton-Jakobijeve jednačine, tada je i $S + C$ njeno rešenje, gde je C proizvoljna aditivna konstanta, jer se funkcija S u jednačini (4.1.8) pojavljuje samo u obliku izvoda, $\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_n}$, a dodavanje aditivne konstante C ne menja te izvode, što znači da aditivna konstanta može biti izostavljena iz kompletnog rešenja. Uzimajući to u obzir, kompletno rešenje Hamilton-Jakobijeve jednačine (4.1.8) se sastoji od n proizvoljnih neaditivnih konstanti, tj. oblika je

$$S = S(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{4.1.9}$$

Parcijalnim diferenciranjem Hamilton-Jakobijeve jednačine (4.1.8) po konstantama C_i, gde je $i = 1, 2, \ldots, n$, dobija se

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial C_i \partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial C_i \partial x_j} = 0. \tag{4.1.10}$$

Sa druge strane, primena totalnog izvoda po vremenu na parcijalni izvod funkcije $S = S(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{C})$ po konstanti C_i daje izraz

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial C_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial C_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial C_i} \dot{x}_j. \tag{4.1.11}$$

Oduzimanje izraza (4.1.11) i (4.1.10) daje izraz

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial C_i}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial C_i}\left(\dot{x}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right). \tag{4.1.12}$$

Kako bi bila zadovoljena kanonska jednačina (4.1), traži se da $\dot{x}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}$ bude jednako nuli za $j = 1, 2, \ldots, n$, pa sledi da je $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial C_i}\right) = 0$ za $i = 1, 2, \ldots, n$, što znači da je $\frac{\partial S}{\partial C_i}$ jednako nekoj konstanti, što dovodi do formulacije Jakobijeve teoreme: ako je poznato jedno kompletno rešenje Hamilton-Jakobijeve jednačine (4.1.8) u obliku datom izrazom (4.1.9), tada jednačine

$$B_i = \frac{\partial S}{\partial C_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.1.13}$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{4.1.14}$$

predstavljaju opšte rešenje kanonskog sistema datog jednačinama (4.1) i (4.2) i sadrže sva moguća rešenja tog kanonskog sistema. Naime, kako je Hamilton-Jakobijeva funkcija $S = S(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{C})$, iz izraza (4.1.13) se dobija da je $B_i = B_i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{C})$, te sledi da je $x_i = x_i(t, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$, a takođe je prema (4.1.14) $p_i = p_i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{C})$, pa se zamenom promenljivih x_i dobija $p_i = p_i(t, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$, gde je $i = 1, 2, \dots, n$. Vrednosti B_i date izrazima (4.1.13) su proizvoljne konstante. Uzimajući u obzir sve konstante, njihov ukupan broj je $2n$, što je takođe i broj početnih uslova $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{p_0})$.

Da bi se dokazala Jakobijeva teorema, potrebno je doći i do druge kanonske jednačine (4.2). Parcijalno diferenciranje Hamilton-Jakobijeve jednačine (4.1.8) po generalisanoj koordinati x_i daje

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \tag{4.1.15}$$

dok je vremenski izvod impulsa datog jednačinom (4.1.14) jednak

$$\dot{p}_i = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_i} \dot{x}_i. \tag{4.1.16}$$

Oduzimanjem izraza (4.1.16) i (4.1.15) i korišćenjem kanonske jednačine (4.1) dolazi se do kanonske jednačine (4.2), čime je dokaz završen.

4.2 Hamilton-Jakobijeva metoda kao posledica kanonskih transformacija

Oblik Ojler-Lagranževih jednačina (2.24) ne zavisi od samog izbora generalisanih koordinata, odnosno ako je Lagranžijan dat kao funkcija $L = L(t, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})$, gde je sa $\boldsymbol{x}$ označeno $x_1, x_2, \dots, x_n$, a sa $\dot{\boldsymbol{x}}$ označeno $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$, tada su Ojler-Lagranževe jednačine invarijantne u odnosu na transformaciju koja prevodi generalisane koordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$ u neke druge međusobno nezavisne generalisane koordinate $X_1, X_2, \dots, X_n$, date kao funkcije starih koordinata i u opštem slučaju vremena:

$$X_i = X_i(t, \boldsymbol{x}), \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{4.2.1}$$

Kako se u Hamiltonovoj teoriji pored generalisanih koordinata koriste i generalisani impulsi kao ravnopravne promenljive, zakoni transformacije koordinata i impulsa, dati relacijama

$$X_i = X_i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{4.2.2}$$

$$P_i = P_i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{4.2.3}$$

transformišu kanonske jednačine, date izrazima (4.1) i (4.2), koje nisu u opštem slučaju invarijantne u odnosu na transformacije koordinata i impulsa date izrazima (4.2.2) i (4.2.3). Cilj je naći takve transformacije (4.2.2) i (4.2.3) za koje će se kanonske jednačine (4.1) i (4.2) transformisati u kanonske jednačine

$$\dot{X}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{4.2.4}$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial X_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{4.2.5}$$

gde je sa K označena transformisana Hamiltonova funkcija

$$K = K(t, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}), \tag{4.2.6}$$

koja je funkcija transformisanih koordinata $\boldsymbol{X} = X_1, X_2, \dots, X_n$ i impulsa $\boldsymbol{P} = P_1, P_2, \dots, P_n$. Transformacije prilikom kojih se promenljive $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ transformišu u promenljive $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P})$, a vreme se ne transformiše, $(t = T)$, se nazivaju kanonskim transformacijama, ukoliko se kanonske jednačine (4.1) i (4.2) transformišu u (4.2.4) i (4.2.5), pri čemu se Hamiltonijan dat izrazom (4.4) transformiše u Hamiltonijan dat izrazom (4.2.6). Kanonske transformacije se uglavnom koriste kako bi se uprostio sistem kanonskih jednačina (4.1) i (4.2).

Kako je Hamiltonovo dejstvo, dato izrazom (3.3.3),

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{x}_i - H \right) dt, \tag{4.2.7}$$

gde je Lagranžijan zamenjen Hamiltonijanom korišćenjem relacije (4.4), Hamiltonov princip dat izrazom (3.3.6), u promenljivama $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$, ima oblik

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{x}_i - H \right) dt = 0, \tag{4.2.8}$$

a u transformisanim kanonskim promenljivama je dat jednačinom

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \dot{X}_i - K \right) dt = 0. \tag{4.2.9}$$

Izrazi (4.2.8) i (4.2.9) su ekvivalentni i ukoliko im se podintegralne funkcije razlikuju za totalni izvod po vremenu proizvoljne funkcije F, koja može zavisiti i od originalnih i od transformisanih kanonskih promenljivih i od vremena, jer važi $\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF}{dt} dt = 0$ zbog poklapanja položaja sistema pri pravom i zaobilaznom putu u trenucima t_0 i t_1, tj. $\delta F(t_0) = \delta F(t_1) = 0$. Dakle, izjednačavanjem izraza (4.2.8) i izraza (4.2.9), kome je dodat član $\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF}{dt} dt$, dobija se

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{x}_i - H = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{X}_i - K + \frac{dF}{dt}, \tag{4.2.10}$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i - Hdt = \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i - Kdt + dF, \tag{4.2.11}$$

što predstavlja uslov da transformacije definisane jednačinama (4.2.2) i (4.2.3) budu kanonske. Funkcija F se naziva generatrisom kanonske transformacije, ili generativnom funkcijom, i može biti data u jednom od sledećih oblika: $F_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{X})$, $F_2(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{P})$, $F_3(t, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{X})$, $F_4(t, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{P})$.

Hamilton-Jakobijeva metoda se može izvesti korišćenjem kanonskih transformacija i generatrise F_2, koja je u sledećoj relaciji sa generatrisom F:

$$F = F_2(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{P}) - \sum_{i=1}^{n} X_i P_i. \tag{4.2.12}$$

Polazeći od uslova (4.2.11) da transformacije definisane jednačinama (4.2.2) i (4.2.3) budu kanonske i totalnog diferencijala generatrise F, date izrazom (4.2.12), dobija se

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i - Hdt = -\sum_{i=1}^{n} X_i dP_i - Kdt + dF_2. \tag{4.2.13}$$

Kako je generatrisa F_2 data kao funkcija $F_2 = F_2(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{P})$, njen totalni diferencijal je

$$dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial P_i} dP_i, \tag{4.2.14}$$

pa se za jednačinu (4.2.13), korišćenjem prethodnog izraza, dobije

$$\sum_{i=1}^{n} \left(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\right) dx_i + \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\right) dP_i + \left(-H + K - \frac{\partial F_2}{\partial t}\right) dt = 0. \tag{4.2.15}$$

Promenljive $t, \boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{P}$ su međusobno nezavisne, a samim tim su nezavisni i dt, dx_i i dP_i, gde je $i = 1, 2, \dots, n$, te kako bi bila zadovoljena jednakost u jednačini (4.2.15), moraju važiti sledeće relacije:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{4.2.16}$$

$$X_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{4.2.17}$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{4.2.18}$$

Relacijama (4.2.16) i (4.2.17) su date transformacije impulsa i koordinate, a relacijom (4.2.18) transformacija Hamiltonijana. Međutim, ostaje pitanje određivanja generatrise F_2.

Ako se za transformisani Hamiltonijan odabere da je $K(t, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}) = 0$, tada prema (4.2.18) važi

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = 0, \tag{4.2.19}$$

a kako su generalisani impulsi dati izrazom (4.2.16), izraz (4.2.19) se može zapisati u obliku

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + H\left(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{4.2.20}$$

čime je data jednačina iz koje se određuje generatrisa F_2. S obzirom da je $K(t, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}) = 0$, tada su transformisane kanonske jednačine (4.2.4) i (4.2.5) oblika $\dot{X}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0$ i $\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial X_i} = 0$, odnosno važi

$$X_i = B_i = const, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{4.2.21}$$

$$P_i = C_i = const, \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{4.2.22}$$

Generatrisa F_2 se na osnovu izraza (4.2.22) može zapisati kao funkcija $F_2 = F_2(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{C})$ i ona je ekvivalentna Hamiltonovom dejstvu datom izrazom (4.1.9), pa je jednačina (4.2.20) u stvari Hamilton-Jakobijeva jednačina

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{4.2.23}$$

Ubacivanje izraza (4.2.21) i (4.2.22) u izraze (4.2.16) i (4.2.17) daje

$$B_i = \frac{\partial S}{\partial C_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{4.2.24}$$

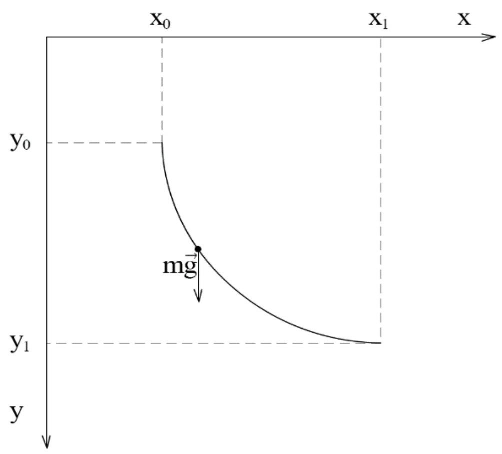
$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{4.2.25}$$

čime su dobijene jednačine (4.1.13) i (4.1.14), koje predstavljaju opšte rešenje sistema kanonskih jednačina datih izrazima (4.1) i (4.2) i sadrže sva moguća rešenja tog sistema.

5 Problem brahistohrone u neviskoznoj sredini

5.1 Brahistohrona u ravni

Posmatra se vezano kretanje materijalne tačke mase m kroz neviskoznu sredinu pod uticajem gravitacione sile u vertikalnoj xOy ravni, kao što je prikazano na slici 5.1.1. Materijalna tačka kreće iz početne tačke (x_0, y_0) bez početne brzine i stiže u krajnju tačku (x_1, y_1). Traži se jednačina veze u obliku zavisnosti promenljive y od nezavisne promenljive x, odnosno traži se $y = y(x)$, tako da materijalna tačka iz početne u krajnju tačku stiže za najkraće vreme.



sl. 5.1.1 Brahistohrona u ravni

Kinetička energija materijalne tačke je

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \tag{5.1.1}$$

gde se $\dot{y}$ može izraziti diferenciranjem $y = y(x)$ po vremenu:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx}\dot{x}, \tag{5.1.2}$$

te se dobija da je njena kinetička energija

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right). \tag{5.1.3}$$

Potencijalna energija materijalne tačke, ako gravitaciona sila deluje duž pravca y ose, je

$$U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -\int mg\vec{e}_y \cdot d\vec{r} = -\int mg\, dy = -mgy. \tag{5.1.4}$$

Korišćenjem izraza (5.1.3) i (5.1.4) se za Lagranžijan sistema, $L = T - U$, dobija

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left(1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2\right) + mgy(x). \tag{5.1.5}$$

Diferenciranje Lagranževe funkcije, date prethodnom jednačinom, po $\dot{x}$ daje

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right), \tag{5.1.6}$$

a kako Lagranžijan ne zavisi eksplicitno od vremena, izraz za zakon održanja energije, dat jednačinom (2.32), nakon ubacivanja izraza (5.1.5) i (5.1.6), jednak je

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) - mgy = C. \tag{5.1.7}$$

Kako je $v^2 = \dot{x}^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$, prethodni izraz je

$$\frac{mv^2}{2} - mgy = C. \tag{5.1.8}$$

Korišćenjem početnih uslova $v(x_0) = 0$ i $y(x_0) = y_0$ se dobija da je vrednost konstante $C = -mgy_0$, pa jednačina (5.1.8) postaje

$$\frac{mv^2}{2} - mg(y - y_0) = 0, \tag{5.1.9}$$

odakle se za intenzitet brzine materijalne tačke dobija

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)}. \tag{5.1.10}$$

Po definiciji, brzina je $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, a njen intenzitet $|\vec{v}| = v = \frac{ds}{dt} = \frac{|d\vec{r}|}{dt}$, gde je ds elementarni deo luka krive. Kako je vektor položaja $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, to je $d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y$, pa je elementarni deo luka krive

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{5.1.11}$$

Vreme kretanja materijalne tačke po trajektoriji, odnosno po nekoj krivoj L, je linijski integral

$$t = \int_L \frac{ds}{v}, \tag{5.1.12}$$

koji je, ako se zameni brzina, data izrazom (5.1.10), i elementarni deo luka krive, dat izrazom (5.1.11), jednak

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{2g(y(x) - y_0)}} dx \tag{5.1.13}$$

gde je $y' = \frac{dy}{dx}$.

Prema teoriji varijacionog računa, vreme t je jednako funkcionalu I, a izraz $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y-y_0)}}$ je jednak podintegralnoj funkciji F (videti deo 3.1). Traži se da vreme t ima ekstremnu vrednost:

$$t = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y(x), y'(x)\big) dx \to min. \tag{5.1.14}$$

Koordinate u početnom i krajnjem trenutku su fiksirane: $y(x_0) = y_0$ i $y(x_1) = y_1$, te se problem svodi na rešavanje Ojler-Lagranževe jednačine (3.1.11)

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{5.1.15}$$

Za Ojler-Lagranževe jednačine (5.1.5) važi zakon održanja (2.32) jer funkcija F ne zavisi eksplicitno od promenljive x, te se zakon održanja zapisuje u obliku

$$\frac{\partial F}{\partial y'} y' - F = C = const. \tag{5.1.16}$$

Diferenciranjem funkcije F po izvodu funkcije y se dobije $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2g(y-y_0)(1+y'^2)}}$, te zakon održanja (5.1.6) postaje

$$-\frac{1}{\sqrt{2g(y(x) - y_0)\big(1 + y'^2(x)\big)}} = C. \tag{5.1.17}$$

Kako je gravitaciono ubrzanje g konstanta, može se doneti zaključak da je izraz $(y - y_0)(1 + y'^2)$ takođe konstanta i ako se ona označi sa K, tada je

$$y'(x) = \sqrt{\frac{K}{y(x) - y_0} - 1}. \qquad (5.1.18)$$

5.1.1 Rešenje problema u implicitnom obliku

Jednačina brahistohrone, određena do na konstantu K, se može dobiti razdvajanjem promenljivih u izrazu (5.1.18) i rešavanjem integrala

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\frac{K}{y(x) - y_0} - 1}} = \int_{x_0}^{x} dx = x - x_0, \qquad (5.1.19)$$

gde x i y pripadaju intervalima $[x_0, x_1]$ i $[y_0, y_1]$ respektivno. Za rešavanje integrala iz prethodnog izraza korišćen je softver *Wolfram Mathematica* i dobijena je jednačina trajektorije materijalne tačke u implicitnom obliku:

$$-(y(x) - y_0)\sqrt{\frac{K}{y(x) - y_0} - 1} + K\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{K}{y(x) - y_0} - 1}} = x - x_0. \qquad (5.1.20)$$

Ukoliko se za x i y uzmu vrednosti $x = x_1$ i $y = y_1$, dobije se transcedentna jednačina

$$-(y_1 - y_0)\sqrt{\frac{K}{y_1 - y_0} - 1} + K\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{K}{y_1 - y_0} - 1}} = x_1 - x_0, \qquad (5.1.21)$$

u kojoj je jedina nepoznata K, koja se može odrediti rešavanjem jednačine (5.1.21) i zameniti u izraz (5.1.20), kako bi se dobila potpuno određena jednačina trajektorije u implicitnom obliku.

Može se izračunati i koliko je vreme optimalnog kretanja po dobijenoj putanji. Jednačina (5.1.13) je, nakon zamenjivanja $y(x) - y_0$ iz izraza (5.1.18), oblika

$$t = \frac{1}{\sqrt{2gK}}\int_{x_0}^{x_1}\left(1 + y'^2(x)\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2gK}}\left(x_1 - x_0 + \int_{x_0}^{x_1} y'^2\,(x)dx\right). \qquad (5.1.22)$$

Za rešavanje integrala $\int_{x_0}^{x_1} y'^2(x)\,dx$ treba preći na integraciju po promenljivoj y. Kako je $y' = \frac{dy}{dx}$ može se izraziti $dx = \frac{dy}{y'}$ i nakon promene granica: $x_0 \to y_0$ i $x_1 \to y_1$ za integral $\int_{x_0}^{x_1} y'^2(x)\,dx$ se dobije da je

$$\int_{x_0}^{x_1} y'^2(x)\,dx = \int_{y_0}^{y_1} y'(y)\,dy = \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{\frac{K}{y-y_0}-1}\,dy, \tag{5.1.23}$$

gde je iskorišćena i jednačina (5.1.18). Korišćenjem softvera *Wolfram Mathematica* dobijeno je rešenje prethodnog izraza u obliku

$$\int_{y_0}^{y_1} \sqrt{\frac{K}{y-y_0}-1}\,dy = (y_1-y_0)\sqrt{\frac{K}{y_1-y_0}-1} + K\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{K}{y_1-y_0}-1}}. \tag{5.1.24}$$

Vraćanjem vrednosti integrala $\int_{x_0}^{x_1} y'^2\,(x)dx$, date izrazom (5.1.24), u jednačinu (5.1.22) se dobija

$$t = \frac{1}{\sqrt{2gK}}\left[x_1 - x_0 + (y_1-y_0)\sqrt{\frac{K}{y_1-y_0}-1} + K\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{K}{y_1-y_0}-1}}\right]. \tag{5.1.25}$$

Zamenom vrednosti $x_1 - x_0$ iz izraza (5.1.21) u (5.1.25) konačno se dobije traženo najkraće vreme kretanja

$$t = \sqrt{\frac{2K}{g}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{K}{y_1-y_0}-1}}. \tag{5.1.26}$$

Jednačina brahistohrone (5.1.20) u implicitnom obliku je zapravo jednačina cikloide, što se može pokazati njenom transformacijom. Jednačina (5.1.20) se najpre napiše u obliku

$$\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{K}{y(x)-y_0}-1}} = \frac{1}{K}\left(x - x_0 + (y(x)-y_0)\sqrt{\frac{K}{y(x)-y_0}-1}\right), \tag{5.1.27}$$

pa nakon primene tangensa na obe strane i kvadriranja, izraz (5.1.27) postaje

$$\frac{1}{\frac{K}{y(x)-y_0}-1} = \mathrm{tg}^2\left[\frac{1}{K}\left(x - x_0 + (y(x)-y_0)\sqrt{\frac{K}{y(x)-y_0}-1}\right)\right]. \tag{5.1.28}$$

Iz identiteta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ se deobom obe strane sa $\cos^2 x$ dobije identitet $\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, koji transformiše izraz (5.1.28) u

$$\frac{K}{K - y(x) + y_0} = \frac{1}{\cos^2\left[\frac{1}{K}\left(x - x_0 + (y(x) - y_0)\sqrt{\frac{K}{y(x) - y_0} - 1}\right)\right]}. \tag{5.1.29}$$

Podizanjem obe strane prethodne jednačine na stepen -1 i primenom identiteta $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$ se dobije

$$1 - \frac{y(x) - y_0}{\frac{K}{2}} = \cos\left(\frac{x - x_0}{\frac{K}{2}} + \sqrt{2\frac{y(x) - y_0}{\frac{K}{2}} - \frac{(y(x) - y_0)^2}{\left(\frac{K}{2}\right)^2}}\right). \tag{5.1.30}$$

Primena funkcije arccos na obe strane jednačine (5.1.30) daje

$$\arccos\left(1 - \frac{y(x) - y_0}{\frac{K}{2}}\right) - \frac{x - x_0}{\frac{K}{2}} = \sqrt{2\frac{y(x) - y_0}{\frac{K}{2}} - \frac{(y(x) - y_0)^2}{\left(\frac{K}{2}\right)^2}}, \tag{5.1.31}$$

što je nakon kvadriranja obe strane

$$\left[\arccos\left(1 - \frac{y(x) - y_0}{\frac{K}{2}}\right) - \frac{x - x_0}{\frac{K}{2}}\right]^2 = 2\frac{y(x) - y_0}{\frac{K}{2}} - \frac{(y(x) - y_0)^2}{\left(\frac{K}{2}\right)^2}. \tag{5.1.32}$$

Izraz sa desne strane jednakosti (5.1.32) se može transformisati na sledeći način:

$$2\frac{y(x) - y_0}{\frac{K}{2}} - \frac{(y(x) - y_0)^2}{\left(\frac{K}{2}\right)^2} = 1 - \left(1 - \frac{y(x) - y_0}{\frac{K}{2}}\right)^2. \tag{5.1.33}$$

Ubacivanje izraza (5.1.33) u (5.1.32) daje

$$\left[\arccos\left(1 - \frac{y(x) - y_0}{\frac{K}{2}}\right) - \frac{x - x_0}{\frac{K}{2}}\right]^2 + \left(1 - \frac{y(x) - y_0}{\frac{K}{2}}\right)^2 = 1. \tag{5.1.34}$$

Sa druge strane, jednačina cikloide je data parametarskim jednačinama

$$x(t) = a(t - \sin t), \tag{5.1.35}$$

$$y(t) = a(1 - \cos t). \tag{5.1.36}$$

Izražavanjem $\sin t = t - \frac{x}{a}$ i $\cos t = 1 - \frac{y}{a}$ iz jednačina (5.1.35) i (5.1.36) pa kvadriranjem oba izraza i njihovim sabiranjem se dobije

$$\left(t - \frac{x}{a}\right)^2 + \left(1 - \frac{y}{a}\right)^2 = 1. \tag{5.1.37}$$

Kako bi se dobio implicitni oblik jednačine cikloide neophodno je potpuno eliminisati parametar t, što se može uraditi njegovim izražavanjem iz $\cos t = 1 - \frac{y}{a}$, tj. $t = \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right)$. Ubacivanje ovako izraženog parametra t u izraz (5.1.37) daje

$$\left(\arccos\left(1 - \frac{y}{\mathrm{a}}\right) - \frac{x}{a}\right)^2 + \left(1 - \frac{y}{a}\right)^2 = 1, \tag{5.1.38}$$

čime je dobijen implicitni oblik jednačine cikloide uvedene parametarskim jednačinama (5.1.35) i (5.1.36). Upoređivanjem jednačine brahistohrone (5.1.34) sa jednačinom cikloide (5.1.38) zaključuje se da su korespondirajuće relacije

$$a = \frac{K}{2}, \qquad t = \arccos\left(1 - \frac{y(x) - y_0}{\frac{K}{2}}\right), \qquad x = x - x_0, \qquad y = y(x) - y_0, \tag{5.1.39}$$

čime se pokazalo da je jednačina brahistohrone (5.1.34) jednačina cikloide u implicitnom obliku.

5.1.2 Rešenje problema u parametarskom obliku

Izraz (5.1.18) se transformiše tako da daje

$$1 + {y'_x}^2(x) = \frac{K}{y(x) - y_0}, \tag{5.1.40}$$

gde y'_x označava $\frac{dy}{dx}$. Potrebno je iz eksplicitnog oblika jednačine kretanja $y = y(x)$ preći na parametarski dat jednačinama

$$x = x(s), \tag{5.1.41}$$

$$y = y(s), \tag{5.1.42}$$

gde je parametar s dužina luka krive. Diferenciranje izraza (5.1.41) i (5.1.42) daje

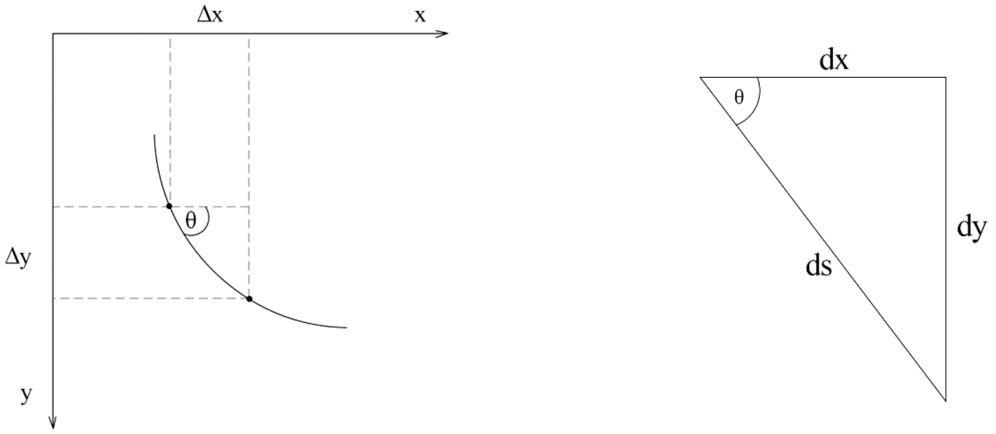
$$dx = \frac{dx}{ds} ds = x_s' ds, \tag{5.1.43}$$

$$dy = \frac{dy}{ds} ds = y_s' ds. \tag{5.1.44}$$

Ugao koji kriva trajektorije materijalne tačke zaklapa sa x osom u nekoj tački je na slici 5.1.2 a) označen sa θ, a njegov tangens je

$$\mathrm{tg}\theta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y_x' = \frac{y_s'}{x_s'}, \tag{5.1.45}$$

gde su primenjeni izrazi (5.1.43) i (5.1.44).



a) b)

sl. 5.1.2 Luk krive

Primenom Pitagorine teoreme na trougao sa slike 5.1.2 b) dobije se $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, što korišćenjem izraza (5.1.43) i (5.1.44) daje

$${x_s'}^2 = 1 - y_s'^2. \tag{5.1.46}$$

Kvadriranjem izraza (5.1.45) i korišćenjem relacije (5.1.46) se dobije izraz

$$\mathrm{tg}^2\theta = {y_x'}^2 = \frac{{y_s'}^2}{1 - y_s'^2}, \tag{5.1.47}$$

koji transformiše jednačinu (5.1.40) u

$$\frac{1}{1 - y_s'^2(s)} = \frac{K}{y(s) - y_0}. \tag{5.1.48}$$

Nakon razdvajanja promenljivih u izrazu (5.1.48) i integraljenja tako dobijenog izraza se dobije

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{1-\frac{y-y_0}{K}}} = \int_0^s ds = s. \tag{5.1.49}$$

Uvođenjem smene $t = 1 - \frac{y-y_0}{K}$, rešenje integrala iz izraza (5.1.49) je $-2K\left(\sqrt{1-\frac{y-y_0}{K}} - 1\right)$, te izraz (5.1.49) postaje

$$y(s) = y_0 + K\left(1 - \left(1 - \frac{s}{2K}\right)^2\right), \tag{5.1.50}$$

čime je dobijena parametarska jednačina (5.1.42).

Kombinovanjem izraza (5.1.46) i (5.1.48), na osnovu (5.1.50), dobija se izraz

$$x_s'^2(s) = \frac{y(s)-y_0}{K} = 1 - \left(1 - \frac{s}{2K}\right)^2, \tag{5.1.51}$$

koji nakon razdvajanja promenljivih i integraljenja daje

$$x - x_0 = \int_0^s \sqrt{1 - \left(1 - \frac{s}{2K}\right)^2}\, ds. \tag{5.1.52}$$

Rešenje integrala $\int_0^s \sqrt{1 - \left(1 - \frac{s}{2K}\right)^2}\, ds$ je, nakon uvođenja smene $1 - \frac{s}{2K} = \cos t$,

$$\int_0^s \sqrt{1 - \left(1 - \frac{s}{2K}\right)^2}\, ds = K\left(t\Big|_{t_1}^{t_2} - \frac{\sin 2t}{2}\Big|_{t_1}^{t_2}\right). \tag{5.1.53}$$

Iz smene $1 - \frac{s}{2K} = \cos t$ sledi da je $t = \arccos\left(1 - \frac{s}{2K}\right)$, te se za granice integrala dobije $t_1 = \arccos(1) = 0$ i $t_2 = \arccos\left(1 - \frac{s}{2K}\right)$. Za integral $\int_0^s \sqrt{1 - \left(1 - \frac{s}{2K}\right)^2}\, ds$ se ubacivanjem vrednosti za granice integraljena dobije

$$\int_0^s \sqrt{1 - \left(1 - \frac{s}{2K}\right)^2}\, ds = K\left(\arccos\left(1 - \frac{s}{2K}\right) - \frac{\sin\left(2\arccos\left(1 - \frac{s}{2K}\right)\right)}{2}\right), \tag{5.1.54}$$

te sledi da je izraz (5.1.52)

$$x - x_0 = K\left(\arccos\left(1 - \frac{s}{2K}\right) - \frac{\sin\left(2\arccos\left(1 - \frac{s}{2K}\right)\right)}{2}\right). \tag{5.1.55}$$

Drugi član u zagradi u prethodnom izrazu se može transformisati primenom trigonometrijskih identiteta. U cilju pojednostavljenja zapisa uvodi se smena $p = 1 - \frac{s}{2K}$, pa je član koji se transformiše $\frac{\sin(2\arccos p)}{2}$. Najpre se primeni identitet $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ i dobije se

$$\frac{\sin(2\arccos p)}{2} = p\sin(\arccos p). \tag{5.1.56}$$

Prema osnovnom trigonometrijskom identitetu važi da je $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, te se izraz (5.1.56) transformiše u

$$\frac{\sin(2\arccos p)}{2} = p\sqrt{1 - p^2}. \tag{5.1.57}$$

Vraćanje smene $p = 1 - \frac{s}{2K}$ u prethodni izraz daje

$$\frac{\sin\left(2\arccos\left(1 - \frac{s}{2K}\right)\right)}{2} = \left(1 - \frac{s}{2K}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{s}{2K}\right)^2}, \tag{5.1.58}$$

te je jednačina (5.1.55), nakon ubacivanja izraza (5.1.58),

$$x(s) = x_0 + K\left(\arccos\left(1 - \frac{s}{2K}\right) - \left(1 - \frac{s}{2K}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{s}{2K}\right)^2}\right), \tag{5.1.59}$$

što predstavlja traženu parametarsku jednačinu (5.1.41).

S obzirom da je gornja granica integrala datih jednačinama (5.1.49) i (5.1.52), s, neka proizvoljna vrednost iz intervala $[0, s_1]$, ukoliko se odabere da je $s = s_1$ iz izraza (5.1.50) i (5.1.59) će se dobiti jednačine iz kojih se mogu odrediti s_1 i K. Za $s = s_1$ važi $x(s_1) = x_1$ i $y(s_1) = y_1$, pa je traženi sistem jednačina za određivanje s_1 i K

$$x_1 = x_0 + K\left(\arccos\left(1 - \frac{s_1}{2K}\right) - \left(1 - \frac{s_1}{2K}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{s_1}{2K}\right)^2}\right), \tag{5.1.60}$$

$$y_1 = y_0 + K\left(1 - \left(1 - \frac{s_1}{2K}\right)^2\right). \tag{5.1.61}$$

Parametarske jednačine brahistohrone (5.1.50) i (5.1.59) predstavljaju parametarske jednačine cikloide date jednačinama (5.1.35) i (5.1.36). Kako bi se to pokazalo izrazi (5.1.50) i (5.1.59) se moraju transformisati. Najpre se jednačine napišu u sledećem obliku:

$$\frac{x(s)-x_0}{K} = \arccos\left(1-\frac{s}{2K}\right) - \left(1-\frac{s}{2K}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{s}{2K}\right)^2}, \tag{5.1.62}$$

$$\frac{y(s)-y_0}{K} = 1-\left(1-\frac{s}{2K}\right)^2. \tag{5.1.63}$$

Korišćenjem jednačine (5.1.58), izraz (5.1.62) može da se napiše u obliku

$$\frac{x(s)-x_0}{\frac{K}{2}} = 2\arccos\left(1-\frac{s}{2K}\right) - \sin\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{2K}\right)\right). \tag{5.1.64}$$

Poređenjem jednačine (5.1.64) sa jednačinom cikloide (5.1.35), napisane u obliku $\frac{x}{a} = t - \sin t$, može se primetiti da konstanti a odgovara konstanta $\frac{K}{2}$ i da parametru t odgovara izraz $2\arccos\left(1-\frac{s}{2K}\right)$, koji je u potpunosti funkcija promenljive s pa se može reći da je (5.1.64), a samim tim i (5.1.59), parametarska jednačina cikloide čiji je parametar s. Množenjem obe strane jednačine (5.1.63) sa 2 dobije se izraz

$$\frac{y(s)-y_0}{\frac{K}{2}} = 2\left(1-\left(1-\frac{s}{2K}\right)^2\right), \tag{5.1.65}$$

za koji se može zaključiti da odgovara jednačini cikloide (5.1.36), napisane u obliku $\frac{y}{a} = 1 - \cos t$, čime je pokazano da izraz (5.1.50) predstavlja parametarsku jednačinu cikloide (5.1.36) sa parametrom s.

5.1.3 Rešenje problema korišćenjem Hamilton-Jakobijeve metode

Polazi se od izraza za vreme kretanja materijalne tačke (5.1.13), od kojeg se zahteva da bude minimalno:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2(x)}{y(x)-y_0}}\,dx \to min. \tag{5.1.66}$$

Kako konstanta $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ neće uticati na rešenje, biće izostavljena iz daljeg razmatranja. Dakle, posmatra se integral

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{y(x) - y_0}} dx, \tag{5.1.67}$$

gde je, prema izrazu za Hamiltonovo dejstvo (4.2.7), Lagranžijan materijalne tačke dat izrazom

$$L(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{y(x) - y_0}}. \tag{5.1.68}$$

Korišćenjem izraza (4.3) se za generalisani impuls dobija

$$p = \frac{y'}{\sqrt{(y - y_0)(1 + y'^2)}}, \tag{5.1.69}$$

te se za Hamiltonijan, pomoću izraza (4.4), dobije

$$H(x, y, p) = -\frac{1}{\sqrt{(y - y_0)(1 + y'^2)}}, \tag{5.1.70}$$

Iz jednačine (5.1.69) se izrazi $y'^2 = \frac{p^2(y-y_0)}{1-p^2(y-y_0)}$, pa Hamiltonijan, dat izrazom (5.1.70), postaje

$$H(x, y, p) = -\sqrt{\frac{1}{y - y_0} - p^2}. \tag{5.1.71}$$

Za Hamilton-Jakobijevu jednačinu (4.1.8) se, zamenjivanjem izraza za Hamiltonijan (5.1.71), dobija

$$\frac{\partial S}{\partial x} - \sqrt{\frac{1}{y - y_0} - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2} = 0, \tag{5.1.72}$$

gde je iskorištena i relacija (4.1.14). Rešenje Hamilton-Jakobijeve jednačine se traži u obliku

$$S(x, y, C) = Cx + f(y), \tag{5.1.73}$$

koji je pogodan zbog linearnosti po promenljivoj x. Parcijalnim izvodom $\frac{\partial S}{\partial x} = C$, promenljiva x nestaje iz Hamilton-Jakobijeve jednačine i ona postaje obična diferencijalna jednačina po promenljivoj y. Hamilton-Jakobijeva jednačina (5.1.72) dobija oblik

$$C - \sqrt{\frac{1}{y - y_0} - f'^2(y)} = 0, \tag{5.1.74}$$

gde je $f'(y) \equiv \frac{df}{dy} = \frac{\partial S}{\partial y}$. Razdvajanjem promenljivih u izrazu (5.1.74) pa integraljenjem se dobije

$$f(y) = \int \sqrt{\frac{1}{y - y_0} - C^2}\, dy + C_1, \tag{5.1.75}$$

gde je C_1 neka aditivna konstanta. Kako se S u Hamilton-Jakobijevoj jednačini pojavljuje samo u obliku izvoda, dodavanje konstante na vrednost S ne pravi nikakvu razliku, stoga se konstanta C_1 zanemaruje. Integral $\int \sqrt{\frac{1}{y-y_0} - C^2}\, dy$ liči na integral iz izraza (5.1.23) $\int_{y_0}^{y_1} \sqrt{\frac{K}{y-y_0} - 1}\, dy$, pa kako bi imao isti oblik, integral $\int \sqrt{\frac{1}{y-y_0} - C^2}\, dy$ se transformiše na sledeći način:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{K}} \int \sqrt{\frac{K}{y - y_0} - 1}\, dy, \tag{5.1.76}$$

gde je nova konstanta $K = \frac{1}{C^2}$. Analogno rešenju integrala datog izrazom (5.1.23), rešenje integrala $\int \sqrt{\frac{K}{y-y_0} - 1}\, dy$ je

$$\int \sqrt{\frac{K}{y - y_0} - 1}\, dy = (y - y_0)\sqrt{\frac{K}{y - y_0} - 1} + K \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\frac{K}{y - y_0} - 1}}, \tag{5.1.77}$$

te izraz (5.1.76) postaje

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{K}} \left((y - y_0)\sqrt{\frac{K}{y - y_0} - 1} + K \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\frac{K}{y - y_0} - 1}} \right), \tag{5.1.78}$$

što je nakon vraćanja smene $K = \frac{1}{C^2}$

$$f(y) = C(y - y_0)\sqrt{\frac{1}{C^2(y - y_0)} - 1} + \frac{1}{C} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{C^2(y - y_0)} - 1}}. \tag{5.1.79}$$

Hamilton-Jakobijeva funkcija (5.1.73) je nakon ubacivanja izraza (5.1.79) jednaka

$$S(x,y,C) = Cx + C(y-y_0)\sqrt{\frac{1}{C^2(y-y_0)}-1} + \frac{1}{C}\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{C^2(y-y_0)}-1}}. \tag{5.1.80}$$

Prema izrazu (4.1.13), parcijalni izvod $\frac{\partial S}{\partial C}$ jednak je konstanti. Ako se ta konstanta označi sa B, tada je

$$\frac{\partial S}{\partial C} = B = x + (y-y_0)\sqrt{\frac{1}{C^2(y-y_0)}-1} - \frac{1}{C^2}\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{C^2(y-y_0)}-1}}. \tag{5.1.81}$$

Kako bi se mogla napraviti bolja paralela između rešenja dobijenog Hamilton-Jakobijevom metodom sa rešenjem dobijenim u delu 5.1.1, korisno je opet uvesti smenu $K = \frac{1}{C^2}$. Izraz (5.1.81) je

$$B = x + (y-y_0)\sqrt{\frac{K}{y-y_0}-1} - K\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{K}{y-y_0}-1}}. \tag{5.1.82}$$

Kako bi se u potpunosti odredila jednačina trajektorije $y = y(x)$, potrebno je odrediti konstante B i K, a za to su neophodne dve nove jednačine. Kako izraz (5.1.82) važi za bilo koje x ili y iz intervala $[x_0, x_1]$ i $[y_0, y_1]$, jedna jednačina će se dobiti kad x i y uzmu vrednosti x_0 i y_0, a druga kada uzmu vrednosti x_1 i y_1. Za vrednosti $x = x_0$ i $y = y_0$ jednačina (5.1.82) daje

$$B = x_0. \tag{5.1.83}$$

Za vrednosti $x = x_1$ i $y = y_1$, uz zamenu konstante B iz prethodnog izraza, jednačina (5.1.82) postaje

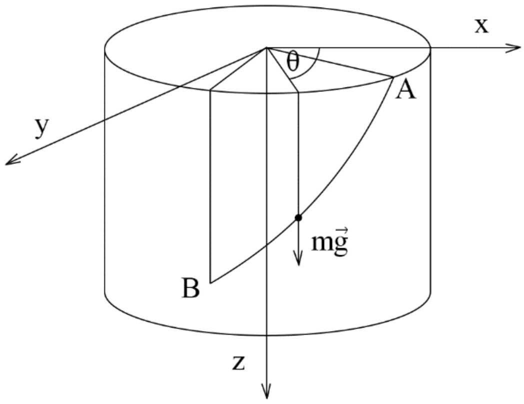
$$x_1 - x_0 = -(y_1-y_0)\sqrt{\frac{K}{y_1-y_0}-1} + K\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{K}{y_1-y_0}-1}}, \tag{5.1.84}$$

što je identičan izraz kao izraz (5.1.21). Ova jednačina je transcedentna i vrednost konstante K neće biti računata. Zamenom vrednosti konstante B u izrazu (5.1.82) dobije se jednačina brahistohrone, koja je identična jednačini (5.1.20), tj. dobije se

$$x - x_0 = (y(x)-y_0)\sqrt{\frac{K}{y(x)-y_0}-1} + K\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{K}{y(x)-y_0}-1}}. \tag{5.1.85}$$

5.2 Brahistohrona na cilindru

Posmatra se vezano kretanje materijalne tačke mase m kroz neviskoznu sredinu pod uticajem gravitacione sile po glatkoj užlebljenoj površini vertikalnog kružnog cilindra poluprečnika r, prikazanog na slici 5.2.1. Materijalna tačka kreće iz početne tačke A, u potpunosti određene cilindričnim koordinatama (r, θ_0, z_0), bez početne brzine i stiže u krajnju tačku B, datu cilindričnim koordinatama (r, θ_1, z_1), gde je ugao θ_1 fiksiran, ali koordinata z_1 nije. Traži se jednačina veze u obliku zavisnosti promenljive z od nezavisne promenljive θ, odnosno traži se $z = z(\theta)$, tako da materijalna tačka iz početne u krajnju tačku stiže za najkraće vreme.



sl. 5.2.1 Brahistohrona na cilindru

Kinetička energija materijalne tačke je

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{5.2.1}$$

Pri prelasku na cilindrični koordinatni sistem, veza između Dekartovih i cilindričnih koordinata je data relacijama

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta\,, \qquad z = z(\theta), \tag{5.2.2}$$

čiji su prvi vremenski izvodi

$$\dot{x} = -r\sin(\theta)\,\dot{\theta}, \qquad \dot{y} = r\cos(\theta)\,\dot{\theta}, \qquad \dot{z} = \frac{dz}{d\theta}\dot{\theta}. \tag{5.2.3}$$

Korišćenjem relacija (5.2.3), kinetička energija (5.2.1) je

$$T = \frac{m}{2}\dot{\theta}^2\left(r^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2\right). \tag{5.2.4}$$

Potencijalna energija, ukoliko gravitaciona sila deluje duž pravca z ose, je

$$U = -mgz, \tag{5.2.5}$$

te se za Lagranžijan materijalne tačke $L = T - U$ dobija

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}\dot{\theta}^2\left(r^2 + \left(\frac{dz(\theta)}{d\theta}\right)^2\right) + mgz(\theta). \tag{5.2.6}$$

Kako Lagranžijan ne zavisi eksplicitno od vremena, zakon održanja dat jednačinom (2.32) ima oblik

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L = C = const, \tag{5.2.7}$$

koji nakon diferenciranja Lagranžijana, datog izrazom (5.2.6), po prvom izvodu promenljive θ postaje

$$\frac{m}{2}\dot{\theta}\left(r^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2\right) - mgz = C. \tag{5.2.8}$$

Iz izraza za kinetičku energiju tačke (5.2.1) i (5.2.4) se vidi da je $v^2 = \dot{\theta}^2\left(r^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2\right)$, te se jednačina (5.2.8) može napisati u obliku

$$\frac{v^2}{2} - gz = C_1, \tag{5.2.9}$$

gde je sa C_1 označena neka nova konstanta. Iz prethodnog izraza se može izraziti intenzitet brzine:

$$v = \sqrt{C_1 + 2gz}, \tag{5.2.10}$$

a kako je u početnom trenutku brzina jednaka nuli, a vrednost koordinate z je jednaka z_0, za konstantu se dobije $C_1 = -2gz_0$, te je brzina materijalne tačke

$$v = \sqrt{2g(z - z_0)}. \tag{5.2.11}$$

Brzina, definisana kao $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, ima intenzitet $|\vec{v}| = v = \frac{ds}{dt} = \frac{|d\vec{r}|}{dt}$, gde je ds elementarni deo luka krive. Vektor položaja $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ se preko cilindričnih koordinata izražava kao $\vec{r} = r\cos\theta\,\vec{e}_x + r\sin\theta\,\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, te je, uz pretpostavku kretanja materijalne tačke po cilindru poluprečnika r, njegova elementarna promena $d\vec{r} = -r\sin\theta\,d\theta\vec{e}_x + r\cos\theta\,d\theta\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$, odakle se za intenzitet $|d\vec{r}|$ dobija da je

$$|d\vec{r}| \equiv ds = \sqrt{r^2(d\theta)^2 + (dz)^2}. \tag{5.2.12}$$

Kako je promenljiva z funkcija ugla θ, odnosno $z = z(\theta)$, tako je $dz = \frac{dz}{d\theta}d\theta$, pa se izraz (5.2.12) može napisati u obliku

$$ds = \sqrt{r^2 + z'^2}d\theta, \tag{5.2.13}$$

gde je uvedena oznaka $z' = \frac{dz}{d\theta}$.

Vreme kretanja materijalne tačke po putanji je linijski integral

$$t = \int_L \frac{ds}{v}, \tag{5.2.14}$$

koji, nakon zamenjivanja elementarnog luka krive izrazom (5.2.13) i brzine izrazom (5.2.11), postaje

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\frac{r^2 + z'^2(\theta)}{2g(z(\theta) - z_0)}}d\theta. \tag{5.2.15}$$

Prema teoriji varijacionog računa, vreme t je jednako funkcionalu I, a izraz $\sqrt{\frac{r^2+z\prime^2}{2g(z-z_0)}}$ je jednak podintegralnoj funkciji F (videti deo 3.1). Traži se da vreme t ima ekstremnu vrednost:

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta_1} F\big(\theta, z(\theta), z'(\theta)\big)d\theta \rightarrow min, \tag{5.2.16}$$

što uz početne i krajnje uslove $z(\theta_0) = z_0$ i $z(\theta_1) = z_1$, pri čemu je z_1 nefiksirano, formuliše problem brahistohrone na cilindru. Da bi vreme imalo ekstremnu vrednost, mora važiti Ojler-Lagranževa jednačina (3.1.11), oblika

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{d\theta}\frac{\partial F}{\partial z'} = 0. \tag{5.2.17}$$

Kako funkcija F ne zavisi eksplicitno od ugla θ, zakon održanja (2.32), koji se zapisuje u obliku

$$\frac{\partial F}{\partial z'}z' - F = C = const \tag{5.2.18}$$

i koji nakon diferenciranja funkcije F po prvom izvodu promenljive z postaje

$$-\frac{r^2}{\sqrt{2g(z - z_0)(r^2 + z'^2)}} = C. \tag{5.2.19}$$

Kako poluprečnik cilindra r ima konstantnu vrednost, može se zaključiti da je konstantan i izraz

$$(z - z_0)\left(r^2 + z'^2(\theta)\right) = K_1, \tag{5.2.20}$$

gde je sa K_1 obeležena neka nova konstanta. Za prethodni izraz se nakon razdvajanja promenljivih i integraljenja dobije

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{\frac{K_1}{z - z_o} - r^2}} = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \theta - \theta_0. \tag{5.2.21}$$

Integral u prethodnom izrazu podseća na integral iz izraza (5.1.19), a kako bi se sveo na isti oblik u kojem je integral iz (5.1.19), transformiše se na sledeći način:

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{\frac{K_1}{z - z_o} - r^2}} = \frac{1}{r}\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{\frac{K_1}{r^2(z - z_o)} - 1}} = \frac{1}{r}\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{\frac{K}{z - z_o} - 1}}, \tag{5.2.22}$$

pri čemu je uvedena konstanta $K = \frac{K_1}{r^2}$. Ubacivanjem izraza (5.2.22) u jednačinu (5.2.21), ona postaje

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{\frac{K}{z - z_o} - 1}} = r(\theta - \theta_0). \tag{5.2.23}$$

Na osnovu rešenja integrala iz izraza (5.1.19), datom u izrazu (5.1.20), jednačina (5.2.23) postaje

$$-(z(\theta) - z_0)\sqrt{\frac{K}{z(\theta) - z_0} - 1} + K\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{K}{z(\theta) - z_0} - 1}} = r(\theta - \theta_0), \tag{5.2.24}$$

što predstavlja jednačinu trajektorije materijalne tačke $z = z(\theta)$, određenu do na konstantu K.

Kako bi se odredila vrednost konstante K, potrebno je rešiti jednačinu (5.2.21) u granicama integrala od z_0 do z_1, odnosno od θ_0 do θ_1. Kako vrednost koordinate z_1 nije fiksirana, potrebno ju je prvo odrediti, a za to se koristi prirodni granični uslov dat izrazom (3.1.12)

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z'}\right|_{\theta_1} = 0, \tag{5.2.25}$$

odnosno

$$\left.\frac{z'(\theta)}{\sqrt{2g(z(\theta)-z_0)\left(r^2+z'^2(\theta)\right)}}\right|_{\theta_1}=0, \tag{5.2.26}$$

a kako imenilac ne sme biti nula, zaključuje se da je

$$z'(\theta_1)=0. \tag{5.2.27}$$

Iz jednačine (5.2.20) se može izraziti $z'^2(\theta)=\frac{K_1}{z(\theta)-z_0}-r^2$. Kako je, prema izrazu (5.2.27), vrednost z' za krajnji ugao θ_1 jednaka nuli, tako i vrednost z'^2 u krajnjoj tački mora biti nula, odnosno važi

$$\frac{K_1}{z_1-z_0}-r^2=0, \tag{5.2.28}$$

pa se vrednost promenljive z u krajnjoj tački može izraziti kao

$$z_1=\frac{K_1}{r^2}+z_0=K+z_0. \tag{5.2.29}$$

Kako promenljiva z u izrazu (5.2.24) može imati bilo koju vrednost iz intervala $[z_0,z_1]$, uzimanjem vrednosti $z=z_1$ dobija se jednačina u kojoj je jedina nepoznata konstanta K, te se njenim rešavanjem ona može odrediti. Dolazi se do izraza $K\mathrm{arctg}(\infty)=r(\theta_1-\theta_0)$, te sledi da konstanta K ima vrednost

$$K=\frac{2r(\theta_1-\theta_0)}{\pi}. \tag{5.2.30}$$

Zamenom vrednosti konstante K iz prethodnog izraza u izraz (5.2.24) dolazi se do potpuno određene jednačine brahistohrone na površini cilindra u implicitnom obliku

$$\begin{aligned}-(z(\theta)-z_0)\sqrt{\frac{2(\theta_1-\theta_0)}{r\pi(z(\theta)-z_0)}-1}+\frac{2(\theta_1-\theta_0)}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{2r(\theta_1-\theta_0)}{\pi(z(\theta)-z_0)}-1}}\\=\theta-\theta_0.\end{aligned} \tag{5.2.31}$$

Može se odrediti i najkraće vreme potrebno da tačka dođe iz početne u krajnju tačku. Postupak je analogan postpupku opisanom kod kretanja tačke u ravni u delu 5.1. U jednačinu (5.2.15) se ubacuje izraz $z-z_0$ iz jednačine (5.2.20), što daje

$$t=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{\frac{r^2+z'^2(\theta)}{\frac{2gK_1}{r^2+z'^2(\theta)}}}d\theta=\frac{r}{\sqrt{2gK}}\left[\int_{\theta_0}^{\theta_1}d\theta+\frac{1}{r^2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}z'^2(\theta)d\theta\right]. \tag{5.2.32}$$

Kod integrala $\int_{\theta_0}^{\theta_1}z'^2(\theta)d\theta$ iz prethodnog izraza je potrebno preći sa integracije po promenljivoj θ na integraciju po promenljivoj z. Kako je $z'=\frac{dz}{d\theta}$, sledi da je $d\theta=\frac{dz}{z'}$. Granice integrala se menjaju na sledeći način: $\theta_0\to z_0$ i $\theta_1\to z_1$, te se za posmatrani integral dobije

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1}z'^2(\theta)d\theta=\int_{z_0}^{z_1}z'(z)dz. \tag{5.2.33}$$

Zamenom z' iz jednačine (5.2.20) za integral iz prethodnog izraza se dobija

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1}z'^2(\theta)d\theta=\int_{z_0}^{z_1}\sqrt{\frac{K_1}{z-z_0}-r^2}\,dz=r\int_{z_0}^{z_1}\sqrt{\frac{K}{z-z_0}-1}\,dz, \tag{5.2.34}$$

gde je primenjena relacija $K=\frac{K_1}{r^2}$. Integral $\int_{z_0}^{z_1}\sqrt{\frac{K}{z-z_0}-1}\,dz$ je potpuno istog oblika kao i integral iz jednačine (5.1.24), te je i njegovo rešenje istog oblika, odnosno

$$\int_{z_0}^{z_1}\sqrt{\frac{K}{z-z_0}-1}\,dz=(z_1-z_0)\sqrt{\frac{K}{z_1-z_0}-1}+K\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{K}{z_1-z_0}-1}}. \tag{5.2.35}$$

Ubacivanjem rešenja integrala $\int_{z_0}^{z_1}\sqrt{\frac{K}{z-z_0}-1}\,dz$, datog u prethodnoj jednačini, u izraz (5.2.34), pa potom ubacivanjem novodobijenog rešenja integrala $\int_{\theta_0}^{\theta_1}z'^2(\theta)d\theta$ u izraz (5.2.32), za vreme kretanja materijalne tačke se dobije

$$t=\frac{1}{\sqrt{2gK}}\left[r(\theta_1-\theta_0)+(z_1-z_0)\sqrt{\frac{K}{z_1-z_0}-1}+K\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{\frac{K}{z_1-z_0}-1}}\right]. \tag{5.2.36}$$

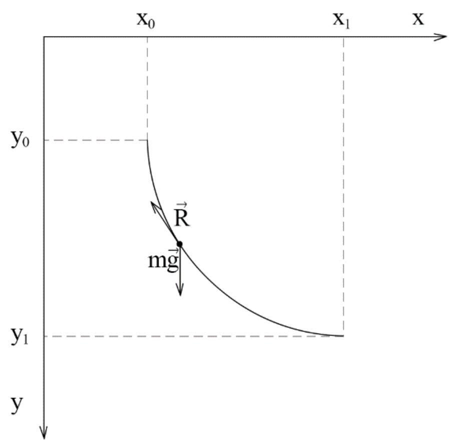
Korišćenjem izraza (5.2.29) i (5.2.30) se iz prethodne jednačine dobije

$$t = \sqrt{\frac{r\pi}{g}(\theta_1 - \theta_0)}, \tag{5.2.37}$$

što predstavlja konačni izraz za najkraće vreme kretanja materijalne tačke od početne do krajnje tačke po površini cilindra.

6 Problem brahistohrone u viskoznoj sredini

Posmatra se vezano kretanje materijalne tačke mase m kroz viskoznu sredinu pod uticajem gravitacione sile u vertikalnoj xOy ravni, kao što je prikazano na slici 6.1. Tom kretanju se suprotstavlja sila otpora $\vec{R} = -mkf(v)\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, gde je k konstanta povezana sa viskoznošću sredine, a $f(v)$ neka zadata funkcija brzine v, gde su najčešći oblici $f(v) = v$ i $f(v) = v^2$. Smatra se da je početna brzina v_0 dovoljno velika, tako da materijalna tačka stiže iz početne tačke (x_0, y_0) u krajnju tačku (x_1, y_1). Traži se jednačina veze u obliku zavisnosti promenljive y od nezavisne promenljive x, odnosno traži se $y = y(x)$, tako da materijalna tačka iz početne u krajnju tačku stiže za najkraće vreme.



sl. 6.1 Brahistohrona u viskoznoj sredini

Kako je sila otpora $\vec{R}$ nepotencijalna sila, ne može se formulisati zakon održanja energije, kao što je to rađeno u prethodnim primerima, (videti poglavlje 5), već se koristi izraz za promenu Hamiltonijana (2.31), pa je zakon promene ukupne energije materijalne tačke dat izrazom

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L\right) = Q^*\dot{x}, \tag{6.1}$$

gde je Q^* generalisana nepotencijalna sila. Na osnovu izraza (2.12) se za generalisanu silu dobija da je

$$Q^* = \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = -mkf(v)\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}. \tag{6.2}$$

Kako je vektor položaja $\vec{r} = x\vec{e}_x + y(x)\vec{e}_y$, sledi da je $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{e}_x + \frac{dy}{dx}\vec{e}_y$, a kako je brzina $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$, sledi da je

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \dot{x} + \dot{y}\frac{dy}{dx} = \dot{x} + \dot{y}y', \tag{6.3}$$

gde je uveden izraz $y' = \frac{dy}{dx}$. Promenljiva y je funkcija promenljive x, koja je funkcija vremena, odnosno $y(t) = y\big(x(t)\big)$, te je njen prvi izvod po vremenu $\dot{y} = y'\dot{x}$, pa se jednačina (6.3) zapisuje u obliku

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \dot{x}\big(1 + y'^2\big). \tag{6.4}$$

Intenzitet brzine je po definiciji dat izrazom $|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, pa se zamenjujući $\dot{y}$ sa $y'\dot{x}$ dobije

$$|\vec{v}| = v = \dot{x}\sqrt{1 + y'^2}. \tag{6.5}$$

Generalisana sila, data izrazom (6.2), se može napisati u obliku

$$Q^* = -mkf(v)\sqrt{1 + y'^2} = -mkf(v)\frac{v}{\dot{x}}, \tag{6.6}$$

gde su iskorišćene jednačine (6.4) i (6.5).

Što se tiče oblika Lagranžijana, nema nikakve razlike u ovom slučaju i u slučaju bez otpora sredine prikazanom u delu 5.1, te na osnovu jednačine (5.1.5) važi

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + y'^2) + mgy = \frac{mv^2}{2} + mgy. \tag{6.7}$$

Zakon promene energije (6.1), korišćenjem izraza (6.6) i (6.7), postaje

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} - mgy\right) = -mkf(v)v. \tag{6.8}$$

Vreme kretanja materijalne tačke, čiji se minimum traži, je istog oblika kao i u problemu bez otpora sredine, tj. dobija se zamenom izraza (5.1.11) u jednačinu (5.1.12), odnosno dat je izrazom

$$t = \int_L \frac{ds}{v} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(x)} dx, \tag{6.9}$$

te, prema teoriji varijacionog računa, vreme t iz izraza (6.9) odgovara funkcionalu I, a podintegralna funkcija $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}$ odgovara funkciji $F\big(x, y(x), y'(x), v(x), v'(x)\big)$, pa izraz (6.9) odgovara izrazu $I = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y(x), y'(x), v(x), v'(x)\big)\, dx$.

Kako je u izrazu (6.9) koordinata x nezavisna promenljiva, potrebno je naći brzinu kao funkciju koordinate, te je sa izvoda po vremenu u jednačini (6.8) potrebno preći na izvod po koordinati. Kako bi se pronašla relacija između izvoda po vremenu t i izvoda po promenljivoj x, posmatra se neka funkcija vremena koja je funkcija koordinate koja je funkcija vremena, odnosno $f(t) = f\big(x(t)\big)$. Nalaženjem izvoda po vremenu, $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\dot{x}$, dobija se tražena veza između izvoda po vremenu t i izvoda po koordinati x u obliku

$$\frac{d}{dt} = \dot{x}\frac{d}{dx}. \tag{6.10}$$

Iz jednačine (6.5) se može izraziti $\dot{x} = \frac{v}{\sqrt{1+y'^2}}$, što ubacivanjem u izraz (6.10) daje

$$\frac{d}{dt} = \frac{v(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}\frac{d}{dx}, \tag{6.11}$$

što dalje zamenjivanjem u izraz (6.8) daje diferencijalnu jednačinu po promenljivoj x oblika

$$\frac{v(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}\frac{d}{dx}\left(\frac{mv^2(x)}{2} - mgy(x)\right) = -mkf(v)v(x). \tag{6.12}$$

Prethodna jednačina se transformiše u

$$\frac{dv}{dx} + \frac{kf(v)\sqrt{1+y'^2}}{v} - \frac{gy'}{v} = 0. \tag{6.13}$$

Kako se traži minimalno vreme kretanja dato izrazom (6.9), pri čemu mora biti zadovoljena diferencijalna jednačina (6.13), sledi da je varijacioni problem minimizacija funkcionala (6.9) uz ograničenje u vidu diferencijalne jednačine (6.13), koja predstavljena u obliku $f(x,y,y',v,v') = 0$, glasi

$$v' - \varphi = 0, \tag{6.14}$$

gde je $v' = \frac{dv}{dx}$ i $\varphi = -\frac{kf(v)\sqrt{1+y'^2}}{v} + \frac{gy'}{v}$.

Koristeći teorijske osnove priložene u delu 3.2, može se formirati proširena podintegralna funkcija F^* na sledeći način:

$$F^*(x,y,y',v,v',\lambda) = F(x,y,y',v,v') + \lambda\big(v' - \varphi(x,y,y',v)\big), \tag{6.15}$$

gde je sa $\lambda = \lambda(x)$ uveden Lagranžev množitelj, pa se na osnovu izraza (6.15) formira prošireni funkcional I^*, dat u obliku

$$I^* = \int_{x_0}^{x_1} \big(F + \lambda(v' - \varphi)\big)dx = \int_{x_0}^{x_1} F^*(x, y, y', v, v', \lambda)dx. \tag{6.16}$$

Kako bi prošireni funkcional I^* imao ekstremnu vrednost, mora biti ispunjen kriterijum optimalnosti $\delta I^* = 0$, odnosno

$$\delta I^* = \int_{x_0}^{x_1} \delta F^* dx = 0, \tag{6.17}$$

pa se variranjem proširene podintegralne funkcije F^* po svim zavisnim promenljivama dobija

$$\delta I^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F^*}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F^*}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial F^*}{\partial v}\delta v + \frac{\partial F^*}{\partial v'}\delta v' + \frac{\partial F^*}{\partial \lambda}\delta \lambda\right) dx = 0. \tag{6.18}$$

Korišćenjem svojstva da je $\delta y' = (\delta y)'$ i $\delta v' = (\delta v)'$ i parcijalnom integracijom izraza (6.18) (za detalje videti deo 3.2.2), za kriterijum optimalnosti se konačno dobija

$$\begin{aligned} \delta I^* = \left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\delta y\right)\Bigg|_{x_0}^{x_1} + \left(\frac{\partial F^*}{\partial v'}\delta v\right)\Bigg|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right)\delta y dx \\ + \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F^*}{\partial v} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial v'}\right)\delta v dx + \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F^*}{\partial \lambda}\delta \lambda dx = 0. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Da bi uslov $\delta I^* = 0$, dat jednačinom (6.19), bio ispunjen za proizvoljne varijacije $\delta y, \delta v$ i $\delta \lambda$, izrazi uz navedene varijacije u podintegralnim funkcijama moraju biti jednaki nuli, te se dobija sistem jednačina

$$\begin{aligned} &1^\circ \quad \frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial y'} = 0, \qquad 2^\circ \quad \frac{\partial F^*}{\partial v} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial v'} = 0, \qquad 3^\circ \quad \frac{\partial F^*}{\partial \lambda} = 0, \\ &4^\circ \quad \left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\delta y\right)\Bigg|_{x_0}^{x_1} = 0, \qquad 5^\circ \quad \left(\frac{\partial F^*}{\partial v'}\delta v\right)\Bigg|_{x_0}^{x_1} = 0, \end{aligned} \tag{6.20}$$

u kojem prve tri jednačine opisuju kretanje, a preostale dve definišu granične uslove. Kako je, na osnovu izraza (6.9), podintegralna funkcija F jednaka izrazu $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}$, za proširenu podintegralnu funkciju F^* se, na osnovu jednačine (6.15), dobija

$$F^* = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v}\big(1 + \lambda k f(v)\big) + \lambda\left(v' - \frac{g y'}{v}\right). \tag{6.21}$$

Korišćenjem prethodnog izraza, jednačina 1° iz sistema jednačina (6.20) postaje

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'\big(1+\lambda k f(v)\big)}{v\sqrt{1+y'^2}}-\frac{\lambda g}{v}\right)=0, \tag{6.22}$$

te sledi da je

$$\frac{y'\big(1+\lambda k f(v)\big)}{v\sqrt{1+y'^2}}-\frac{\lambda g}{v}=C=const. \tag{6.23}$$

Za jednačinu 2° iz sistema jednačina (6.20) se, ubacivanjem F^* iz jednačine (6.21), dobije

$$-\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v^2}\big(1+\lambda k f(v)\big)+\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\lambda k\frac{df(v)}{dv}+\lambda\frac{gy'}{v^2}-\frac{d\lambda}{dx}=0, \tag{6.24}$$

a za jednačinu 3°

$$v'+\frac{kf(v)\sqrt{1+y'^2}}{v}-\frac{gy'}{v}=0. \tag{6.25}$$

Granični uslovi problema se traže iz jednačina 4° i 5° iz sistema jednačina (6.20). Kako su početna i krajnja tačka fiksirane, odnosno kako je $y(x_0)=y_0$ i $y(x_1)=y_1$, što zapravo predstavlja granične uslove, izraz 4° je zadovoljen, jer je

$$\delta y(x_0)=0, \qquad \delta y(x_1)=0. \tag{6.26}$$

S obzirom da je početna brzina fiksirana i da važi $v(x_0)=v_0$, izraz 5° je zadovoljen u tački x_0, jer je

$$\delta v(x_0)=0, \tag{6.27}$$

a kako je brzina u krajnjoj tački x_1 nepoznata, njena varijacija je različita od nule, odnosno $\delta v(x_1)\neq 0$, pa kako bi uslov dat jednačinom 5° bio zadovoljen, mora važiti prirodni granični uslov

$$\left.\frac{\partial F^*}{\partial v'}\right|_{x_1}=0, \tag{6.28}$$

odakle se dobija da je četvrti granični uslov

$$\lambda(x_1)=0. \tag{6.29}$$

Iz sistema jednačina (6.23), (6.24) i (6.25) se mogu dobiti funkcije $y=y(x), v=v(x)$ i $\lambda=\lambda(x)$. S obzirom da su one diferencijalne jednačine prvog reda, prilikom njihovog rešavanja će se pojaviti i tri nove integracione konstante, koje se, zajedno sa konstantom C, određuju iz graničnih uslova $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1, v(x_0)=v_0$ i $\lambda(x_1)=0$.

Literatura

[1] Đ. Mušicki, *Uvod u teorijsku fiziku; Teorijska mehanika; III izdanje*, Odsek za fizičke i meteorološke nauke Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1980.

[2] B. D. Vujanović, T. M. Atanacković, *An Introduction to Modern Variational Techniques in Mechanics and Engineering*, Birkhäuser, Boston, 2004.

[3] B. D. Vujanović, D. T. Spasić, *Metodi optimizacije; treće, prerađeno i dopunjeno izdanje*, FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2009.

[4] C. B. Boyer, U. C. Merzbach, *A History of Mathematics; 2nd Edition*, Wiley, New York, 1991.

Biografija

Nikola Vujadinović, rođen 19. avgusta 1996. godine u Zrenjaninu, gde je pohađao Osnovnu školu ,,Petar Petrović Njegoš“, a potom i Zrenjaninsku gimnaziju. Godine 2015. upisuje se na Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, na smer Animacija u inženjerstvu, gde, igrom slučaja, stiče zainteresovanost za fiziku, koju i upisuje 2017. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu na modulu istraživačka fizika.

Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Ključna dokumentacijska informacija

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	Diplomski rad
Autor: **AU**	Nikola Vujadinović
Mentor: **MN**	prof. dr Dušan Zorica
Naslov rada: **NR**	Problem brahistohrone u neviskoznoj i viskoznoj sredini
Jezik publikacije: **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda: **JI**	srpski
Zemlja publikovanja: **ZP**	Srbija
Uže geografsko područje: **UGP**	Vojvodina
Godina: **GO**	2022.
Izdavač: **IZ**	Autorski reprint
Mesto i adresa: **MA**	Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Fizički opis rada: **FO**	6 poglavlja/60 strana
Naučna oblast: **NO**	Fizika
Naučna disciplina: **ND**	Teorijska fizika
Predmetna odrednica/ključne reči: **PO** **UDK**	Brahistohrona, Ojler-Lagranževe jednačines, varijacioni račun, Hamilton-Jakobijeva metoda
Čuva se: **ČU**	Biblioteka departmana za fiziku PMF-a u Novom Sadu
Važna napomena: **VN**	
Izvod: **IZ**	U ovom radu je rešavan problem brahistohrone u neviskoznoj sredini: u vertikalnoj ravni i na vertikalnom cilindru; i u viskoznoj sredini u vertikalnoj ravni.
Datum prihvatanja teme od NN veća: **DP**	29.09.2022.
Datum odbrane: **DO**	17.10.2022.
Članovi komisije: **KO**	
Predsednik:	dr Milica Pavkov Hrvojević, redovni profesor
Član:	dr Srboljub Simić, redovni profesor
Član:	dr Dušan Zorica, redovni profesor

University of Novi Sad
Faculty of Science and Mathematics
Key Words Documentation

Accession number: **ANO**	
Identification number: **INO**	
Document type: **DT**	Monograph publication
Type of record: **TR**	Textual printed material
Content code: **CC**	Final paper
Author: **AU**	Nikola Vujadinović
Mentor: **MN**	prof. dr Dušan Zorica
Title: **TI**	Brachistochrone Problem in Inviscid and Viscous Medium
Language of text: **LT**	Serbian (Latin)
Language of abstract: **LA**	English
Country of publication: **CP**	Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2022.
Publisher: **PU**	Author's reprint
Publication place: **PP**	Faculty of Natural Sciences, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Physical description: **PD**	6 chapters/60 pages
Scientific field: **SD**	Physics
Scientific discipline: **SD**	Theoretical Physics
Subject/Key words: **SKW** **UC**	Brachistochrone, Euler-Lagrange equations, calculus of variations, Hamilton-Jacobi method
Holding data: **HD**	Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4
Note: **N**	
Abstract: **AB**	In this paper we solved the brachistochrone problem in non-viscous medium: brachistochrone in a vertical plane, brachistochrone on a vertical cylinder; and in viscous medium: brachistochrone in a vertical plane.
Accepted by the Scientific Board: **ASB**	September 29, 2022.
Defended on: **DE**	October 17, 2022.
Thesis defend board: **KO**	
President:	dr Milica Pavkov Hrvojević, full professor
Member:	dr Srboljub Simić, full professor
Member:	dr Dušan Zorica, full professor