



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



Elementarne ekscitacije i niskotemperaturna termodinamika kvazi-dvodimenzionih magneta na heksagonalnoj rešetki

Kandidat
Jeremija Kovačević

Mentor
Dr Slobodan Radošević

oktobar 2023.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Elementarne ekscitacije i Grinove funkcije	2
2.1	Elementarne ekscitacije	2
2.2	Linearni odziv i eksperimenti	3
2.3	Slobodna skalarna teorija polja	7
2.4	Hajzenbergov antiferomagnet	10
3	Hajzenbergov model kvazi-dvodimenzionih magneta na heksagonalnoj rešetki	15
3.1	Jednačine kretanja i energije elementarnih ekscitacija	16
4	Toplotni kapacitet	25
5	Zaključak	29
	Literatura	30

1 Uvod

Pri razmatranju sistema u kvantnoj mehanici jedan od načina za uspostavljanje veze između teorije i eksperimenta je preko određenih Grinovih funkcija same teorije. Jedna od mnogih opservabilnih veličina koje se određuju na ovaj način jeste energija elementarnih ekscitacija sistema putem polova Grinove funkcije. Međutim, ovaj način određivanja energije elementarnih ekscitacija za određene sisteme može naizgled dati negativne energije ukazujući na nestabilnost teorija za koje je poznato da su stabilne. Uzrok ovih negativnih energija je obično u nepravilnoj interpretaciji rezultata dobijenih metodom Grinovih funkcija, a ne u postojanju negativnih svojstvenih vrednosti hamiltonijana teorije. Ovaj rad je posvećen problemu interpretacije negativnih energija elementarnih ekscitacija koje se javljaju prilikom korišćenja metode Grinovih funkcija u slučaju Hajzenbergovog modela kvazi-dvodimenzionih magneta sa međuslojnom feromagnetnom interakcijom i spinskom anizotropijom. U odeljku 2 su predstavljene osnove teorije Grinovih funkcija i linernog odziva a zatim na primerima slobodne skalarne teorije polja i Hajzenbergovog antiferomagneta je demonstriran problem interpretacije negativnih frekvencija koje se javljaju kao polovi Grinove funkcije. U odeljku 3 je razmotren Hajzenbergov model kvazi-dvodimenzionih magneta na heksagonalnoj rešetki kao još jedan primer u kom se javlja problem negativnih frekvencija sa dodatkom postojanja međuslojne interakcije zbog koje u ovom slučaju postoje dve energetske grane, akustička i optička, te nepravilna interpretacija energija elementarnih ekscitacija može rezultovati nepravilnim određivanjem energetskog procepa između grana. Određene su jednačine kretanja spinskih operatora u linearnoj aproksimaciji kao i same energije elementarnih ekscitacija, a nakon toga je ustanovljen i dijagonalni hamiltonijan koji sadrži isključivo pozitivne energije sugerišući na stabilnost teorije. U odeljku 4 je razmotren toplotni kapacitet kvazi-dvodimenzionog modela kao još jedan primer opservable koju je moguće nepravilno izračunati nepravilnom interpretacijom energija elementarnih ekscitacija.

2 Elementarne ekscitacije i Grinove funkcije

2.1 Elementarne ekscitacije

Zarad razumevanja raznih formi materije vrše se eksperimentalna i teoretska istraživanja koja na kraju moraju da produkuju saglasne rezultate. U fizici kondenzovane materije eksperimentalna istraživanja se vrše dovođenjem spoljašnje perturbacije sistemu i posmatranjem reakcije sistema na tu perturbaciju. Perturbacija koja se dovodi je obično slaba zbog određivanja svojstava sistema kada ona nije prisutna, te se smatra da slaba perturbacija može da pobudi samo niskoenergetska pobuđenja sistema koja se još nazivaju i elementarna pobuđenja ili elementarne ekscitacije, videti [1].

Elementarne ekscitacije se uobičajeno razmatraju na sličan način na koji se razmatraju ekscitacije kvantnog linearnog harmonijskog oscilatora u algebarskom pristupu, videti [2]. Naime, posmatra se osnovno stanje koje ne poseduje nikakve ekscitacije te se delovanjem određenog operatora kreacije na osnovno stanje stvaraju pobuđena stanja. Dakle, govoreći o sistemu na način da poseduje osnovno stanje koje ne sadrži nikakve ekscitacije i zatim stvaranjem ekscitacija na njemu određenim operatorom, govori se o stvaranju elementarnih ekscitacija. Korisnost elementarnih ekscitacija proizilazi iz jednostavne osobine koju poseduju mnogočestični sistemi. Ukoliko sistem poseduje dva niskoenergetska stanja $|1\rangle$ i $|2\rangle$ sa energijama E_1 i E_2 , respektivno, uglavnom postoji i treće stanje $|3\rangle$ sa energijom E_3 koja je bliska energetske vrednosti $E_1 + E_2$. U ovom slučaju ukoliko ne postoje stanja čiji bi zbir energija dao energiju blisku E_1 ili E_2 može se reći da su stanja $|1\rangle$ i $|2\rangle$ stanja sa po jednom elementarnom ekscitacijom te da je stanje $|3\rangle$ stanje sa obe elementarne ekscitacije pri čemu razlika u energijama $\Delta E = E_1 + E_2 - E_3$ potiče od međusobne interakcije između njih. Ukoliko je interakcija između spomenutih elementarnih ekscitacija mala, većina pobuđenih stanja se može razmatrati kao kolekcija interagujućih elementarnih ekscitacija.

Elementarne ekscitacije koje se pojavljuju u sistemima kondenzovane materije moguće je kategorizovati u dve klase poznate kao kvazičestične ekscitacije i kolektivne ekscitacije, pri čemu se glavne razlike mogu najlakše uočiti posmatranjem primera.

U slučaju gasa neinteragujućih čestica moguće je dovesti energiju jednoj čestici, bez uticaja na druge. Ukoliko je gas prvobitno u svom osnovnom stanju, ovakav proces, dovođenja energije jednoj čestici nezavisno od ostalih, može se posmatrati kao proces stvaranja elementarne ekscitacije. Ukoliko se energija dovede i nekoj drugoj čestici nezavisno od ostalih dobijeno stanje će imati energiju jednaku zbiru dovedenih energija prvoj i drugoj čestici te se ovo stanje može smatrati stanjem sa dve elementarne ekscitacije. Elementarne ekscitacije ovakvog karaktera se uobičajeno nazivaju čestičnim ekscitacijama.

Pri razmatranju i interakcije između čestica gasa, opisane čestične ekscitacije imaju konačno vreme života jer tada pobuđena čestica može da se raseje na nepobuđenim i raspodeli energiju. Međutim, ako bi čestice podlegale Paulijevom principu isključenja i energija ekscitacija bila veoma niska, bilo bi veoma malo praznih stanja koje bi rasejana čestica mogla da popuni. Ovakva ekscitacija bi imala dovoljno dugo vreme života da se posmatra kao čestica. Energije ovakvih ekscitacija će se razlikovati od čestičnih ekscitacija neineragujućeg gasa baš zbog interakcija. Ekscitacije ovakvog karaktera, sa konačnim vremenom života, nazivaju se kvazičesticama, videti [3].

Jednostavan primer druge klase ekscitacija je zvučni talas u čvrstim telima. Zbog toga što su međuatomske sile u čvrstim telima izuzetno jake, postoji malo razloga za razmatranje kretanja atoma u kristalu u vidu čestičnog kretanja. Ukoliko se atomu doda proizvoljan impuls taj impuls se brzo raspodeli po čitavom kristalu na način da je teško reći koji atom je inicijalno pomeren. S druge strane, poznato je da će zvučni talas ostati mnogo duže, pre nego što je atenuiran pa je kao takav, mnogo korisnija slika pobuđenja kristala. Kako je zvučni talas specifičan koordinatama svih atoma u kristalu ovakvo kretanje se naziva kolektivnim kretanjem. Amplituda ovakvog kretanja je kvantovana, pri čemu je kvantna jedinica putujućeg zvučnog talasa poznata kao fonon. Fonon je prema tome primer kolektivne ekscitacije, videti [3].

2.2 Linearni odziv i eksperimenti

Teorija kondenzovane materije je u suštini kvantna interagujuća mnogočestična teorija, pa se prema tome najčešće u formalizmu druge kvantizacije ili kvantne teorije polja definiše hamiltonijan H sistema kao integral gustine hamiltonijana \mathcal{H} po čitavom prostoru

$$H = \int d^d x \mathcal{H}(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

i zadatak se svodi na određivanje njegovih svojstvenih vrednosti kao operatora koji deluje na odgovarajućem Hilbertovom prostoru teorije. Spoljašnja perturbacija na sistem se u teoriju potom uvrštava kao

$$H_F = \int d^d x F'_i(\mathbf{x}, t) X'_i(\mathbf{x}, t), \quad (2.2)$$

gde je F'_i generalisana sila, a X'_i operator u teoriji kroz koji ona deluje, videti [1]. Na primer sila bi mogla biti električni potencijal, a operator kroz koji ona deluje gustina naelektrisanja.

Efekat koji uvođenje perturbacije ima na sistem je promena očekivanih vrednosti opservabli teorije. U prethodnom primeru očekivana vrednost gustine struje bi

se promenila. U opštem slučaju, kada perturbacija nije mala, očekivane vrednosti mogu da se menjaju na proizvoljan način, međutim ako je perturbacija dovoljno slaba može se pretpostaviti da je promena očekivane vrednosti linearna sa promenom generalisane sile, u sledećem smislu

$$X_i(\mathbf{x}, t) = \int d^d x' \int d^d t' \chi_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') F_j'(\mathbf{x}', t') + \mathcal{O}[F'^2], \quad (2.3)$$

što sledi iz posmatranja očekivane vrednosti X_i kao funkcionala generalisane sile F_i' i razvoja u funkcionalni Tejlorov red, te zadržavanja na linearnom članu. Iz izraza (2.3) se uočava da integralno jezgro χ_{ij} određuje o kakvom sistemu govorimo, odnosno ono određuje na koji način su povezane očekivana vrednost opservable X_i i generalisana sila F_i' koja deluje na sistem. Prema tome, cilj teorijskog razmatranja jeste da odredi ova integralna jezgra χ_{ij} koja nose u sebi informaciju o intrinzičnim osobinama sistema, kao što su elementarna pobuđenja. Ova integralna jezgra se drugačije nazivaju i generalisane susceptibilnosti ili funkcije odziva.

Sada je neophodno odrediti kako su funkcije odziva predstavljene u teoriji. U te svrhe pretpostavlja se da su stanja sistema sa perturbacijama u Šredingerovoj slici data sa $|\psi_n\rangle$, tada, prema Šredingerovoj jednačini važi

$$i\partial_t |\psi_n(t)\rangle = (H + H_F) |\psi_n(t)\rangle. \quad (2.4)$$

Međutim, ispostavlja se da je pogodnije raditi u interakcionoj slici, koja je definisana sledećom transformacijom

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)} |\psi_n(t)\rangle_I. \quad (2.5)$$

Može se pokazati da u interakcionoj slici ket stanja $|\psi_n(t)\rangle_I$ zadovoljava sledeću diferencijalnu jednačinu

$$i\partial_t |\psi_n(t)\rangle_I = W(t) |\psi_n(t)\rangle_I, \quad (2.6)$$

pri čemu je

$$W(t) = e^{iH(t-t_0)} H_F e^{-iH(t-t_0)}, \quad (2.7)$$

operator perturbacije u interakcionoj slici i da je tada rešenje diferencijalne jednačine (2.6) dato sa

$$|\psi_n(t)\rangle_I = U_I(t, t_0) |\psi_n(t_0)\rangle_I = \left(T e^{-i \int_{t_0}^t dt' W(t')} \right) |\psi_n(t_0)\rangle_I, \quad (2.8)$$

gde je U_I operator evolucije u interakcionoj slici, videti [2], [4]. Prilikom razmatranja statističkih osobina sistema, kao što su očekivane vrednosti opservabli, pogodno je koristiti operator gustine koji je u Šredingerovoj slici dat sa

$$\rho(t) = \sum_k w_k |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)|, \quad (2.9)$$

videti [2], i pomoću kojeg se, pri prelasku na interakcionu sliku, može dobiti sledeća relacija za očekivanu vrednost opservable X

$$\begin{aligned}\langle X(t) \rangle &= Tr\{X(t)\rho(t)\} \\ &= \langle U_I^{-1} X_I(t) U_I \rangle_0,\end{aligned}\tag{2.10}$$

pri čemu je $X_I = e^{iHt} X e^{-iHt}$, operator opservable X u interakcionoj slici i gde indeks 0 označava očekivanu vrednost po ravnotežnom operatoru gustine $\rho_0 = \rho(t_0)$. Razvojem relacije (2.10) u red po stepenima interakcije i zadržavanjem na linearnom članu dobija se

$$\langle X(t) \rangle = \langle X_I(t) \rangle_0 + \left\langle -iT \int_{t_0}^t dt' \theta(t-t') [X_I(t), W(t')] \right\rangle_0.\tag{2.11}$$

Iz jednačine (2.11) se vidi da je linearni odziv sistema na perturbaciju moguće izraziti preko retardovane Grinove funkcije G^+ date sa

$$G^+(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \theta(t-t') \langle [X_I(\mathbf{x}, t), X'(\mathbf{x}', t')] \rangle_0,\tag{2.12}$$

kao

$$\langle X(\mathbf{x}, t) \rangle - \langle X_I(\mathbf{x}, t) \rangle_0 = -i \int_{t_0}^t dt' \int d^d x' F'(\mathbf{x}', t') G^+(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t').\tag{2.13}$$

S druge strane, u formalizmu funkcionalne integracije, videti [1], očekivana vrednost opservable $X = \sum_{aa'} c_a^\dagger X_{aa'} c_a$ je data sa

$$X(\tau) = \sum_{a,a'} \langle \bar{\psi}_a(\tau) X_{aa'} \psi_{a'}(\tau) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int D\psi e^{-S[\psi, F, F']} \sum_{a,a'} \bar{\psi}_a(\tau) X_{aa'} \psi_{a'}(\tau),\tag{2.14}$$

pri čemu je odgovarajuće dejstvo

$$\begin{aligned}S[\psi, F', F] &= S_0[\psi] + \int d\tau F'(\tau) \sum_{a,a'} \bar{\psi}_a(\tau) X'_{aa'} \psi_{a'}(\tau) \\ &+ \int d\tau F(\tau) \sum_{a,a'} \bar{\psi}_a(\tau) X_{aa'} \psi_{a'}(\tau),\end{aligned}\tag{2.15}$$

gde su ψ odgovarajuće promenljive (Grasmanove promenljive u slučaju fermiona) i F dodatna sila koja deluje na posmatranu opservablu X uvedena radi pogodnosti

$$X(\tau) = - \left. \frac{\delta}{\delta F(\tau)} \right|_{F=0} \ln \mathcal{Z}[F, F'].\tag{2.16}$$

Posmatranjem ove očekivane vrednosti kao funkcionala generalisane sile F' i razvijanjem u Tejlorov red, zadržavajući se na prvom članu, predstavljen je ponovo linearni odziv teorije na spoljašnju perturbaciju

$$X[F'] \approx X[0] - \int d\tau' \left(\frac{\delta^2}{\delta F(\tau) \delta F(\tau')} \ln \mathcal{Z}[F, F'] \right) F'(\tau'), \quad (2.17)$$

gde se identifikuje generalizovana susceptibilnost

$$\chi(\tau, \tau') = - \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\delta^2}{\delta F(\tau) \delta F(\tau')} \Big|_{F=F'=0} \mathcal{Z}[F, F'], \quad (2.18)$$

koja se nakon primenjivanja izvoda može napisati kao korelaciona funkcija

$$\chi(\tau, \tau') = - \langle X(\tau) X'(\tau') \rangle = - \left\langle \sum_{a,b} \bar{\psi}_a(\tau) X_{ab} \psi_b(\tau) \sum_{a',b'} \bar{\psi}_{a'}(\tau') X'_{a'b'} \psi_{b'}(\tau') \right\rangle. \quad (2.19)$$

S obzirom da bi izrazi (2.13) i (2.17) trebalo da opisuju linearni odziv jednako dobro, postavlja se pitanje njihove povezanosti. Sa tim ciljem, definiše se vremenski-uređena korelaciona funkcija u imaginarnom vremenu

$$C^\tau(\tau_1 - \tau_2) = - \langle T_\tau \hat{X}_1(\tau_1) \hat{X}_2(\tau_2) \rangle = - \begin{cases} \langle \hat{X}_1(\tau_1) \hat{X}_2(\tau_2) \rangle, & \tau_1 \geq \tau_2 \\ \zeta_X \langle \hat{X}_2(\tau_2) \hat{X}_1(\tau_1) \rangle, & \tau_2 > \tau_1 \end{cases}, \quad (2.20)$$

gde je $\hat{X}(\tau) = e^{\tau(\hat{H} - \mu\hat{N})} \hat{X} e^{-\tau(\hat{H} - \mu\hat{N})}$ operator \hat{X} u Hajzenbergovoj slici za slučaj imaginarnog vremena, $\zeta_X = 1$ za bozonske i $\zeta_X = -1$ za fermionske operatore. C^τ predstavlja funkcionalnu reprezentaciju relacije (2.19) zbog toga što je operator T_τ suvišan u slučaju kada deluje na par funkcija X_1 i X_2 koje komutiraju kao i u slučaju kada antikomutiraju zbog parnog broj antikomutirajućih promenljivih ψ i $\bar{\psi}$ ili a i a^\dagger . Ukoliko je bazis teorije dat skupom $\{|\Psi_\alpha\rangle\}$ funkciju C^τ je moguće predstaviti na sledeći način

$$C^\tau(t) = - \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\alpha\beta} X_{1\alpha\beta} X_{2\alpha\beta} e^{\tau\Xi_{\alpha\beta}} (\Theta(\tau) e^{-\beta\Xi_\alpha} + \zeta_X \Theta(-\tau) e^{-\beta\Xi_\beta}), \quad (2.21)$$

pri čemu je $\Xi_\alpha = E_\alpha - \mu N_\alpha$, $\Xi_{\alpha\beta} = \Xi_\alpha - \Xi_\beta$. Tada se nakon Furije transformacije dobija

$$\begin{aligned} C^\tau(i\omega_n) &= \int_0^\beta d\tau C^\tau(\tau) e^{i\omega_n \tau} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\alpha\beta} \frac{X_{1\alpha\beta} X_{2\alpha\beta}}{i\omega_n + \Xi_{\alpha\beta}} [e^{-\beta\Xi_\alpha} - \zeta_X e^{-\beta\Xi_\beta}], \end{aligned} \quad (2.22)$$

gde su ω_n Macubara frekvencije koje dolaze iz predstavljanja promenljivih ψ preko Furijeovog reda

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_n \psi_n e^{-i\omega_n \tau}, \quad (2.23)$$

videti [1], i koje uzimaju vrednosti

$$\omega_n = \begin{cases} 2n\pi T, & \text{bozoni} \\ (2n+1)\pi T & \text{fermioni} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.24)$$

Identična procedura za retradovanu Grinovu funkciju G^+ daje

$$\begin{aligned} G^+(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt G^+(t) e^{i\omega t - \eta|t|} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\alpha\beta} \frac{X_{1\alpha\beta} X_{2\alpha\beta}}{\omega + i\eta + \Xi_{\alpha\beta}} [e^{-\beta\Xi_\alpha} - \zeta_X e^{-\beta\Xi_\beta}], \end{aligned} \quad (2.25)$$

odakle se vidi da se dobija sličan izraz, što navodi na definiciju *master* funkcije C kompleksne promenljive z

$$C(z) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\alpha\beta} \frac{X_{1\alpha\beta} X_{2\alpha\beta}}{z + \Xi_{\alpha\beta}} [e^{-\beta\Xi_\alpha} - \zeta_X e^{-\beta\Xi_\beta}], \quad (2.26)$$

koja pri evaluaciji u tačkama $i\omega_n$, ω^+ predstavlja funkcije C^τ i G^+ respektivno. Ukoliko je C^τ izračunato za sve pozitivne Macubara frekvencije ω_n i pronađeno analitičko produženje ove funkcije na čitavu gornju polovinu kompleksne ravni, evaluacija ovog produženja u tačkama ω^+ daje funkciju G^+ .

Poznavanje Grinove funkcije G^+ u suštini rešava čitav problem, jer njenim poznavanjem moguće je pronaći očekivane vrednosti opservabli u slučaju linearnog odziva pomoću jednačine (2.13), a isto tako polovi ove funkcije u Furije slici predstavljaju energije elementarnih ekscitacija teorije, što se jasno vidi iz (2.25). Međutim u određenim situacijama postoji mogućnost zabune oko određivanja energija elementarnih ekscitacija posmatranjem samo polova Grinove funkcije $G^+(\omega)$.

2.3 Slobodna skalarna teorija polja

Slobodna skalarna teorija polja je relativistička teorija čija je promenljiva polje ϕ koje uzima vrednosti u prostoru Minkovskog i čija je gustina lagranžijana data sa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (2.27)$$

U slučaju slobodne skalarne teorije polja particiona funkcija \mathcal{Z} se u realnom vremenu može predstaviti kao

$$Z[F, F'] = \int D\phi e^{iS[\phi, F, F']}, \quad (2.28)$$

gde je

$$S[\phi, F, F'] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + FX + F'X' \right]. \quad (2.29)$$

Pri odabiru $X = X' = \phi$, sila F postaje suvišna pa se odbacuje. Sa pogodnom smenom promenljivih, videti [5], particiona funkcija se može dovesti u sledeći oblik

$$\mathcal{Z}[F'] = \mathcal{Z}[0] e^{-\frac{i}{2} \int d^D x' \int d^D x F'(x) G(x-x') F(x)}, \quad (2.30)$$

gde je $x = (t, \mathbf{x})^T$ vektor položaja u prostoru Minkovskog i G Grinova funkcija koja zadovoljava sledeću jednačinu

$$(\partial^2 + m^2)G(x - x') = \delta(x - x'). \quad (2.31)$$

Da je $G(x - x')$ tražena Grinova funkcija proverava se primenom funkcionalnog izvoda dva puta na particionu funkciju dobijajući

$$G(x_1 - x_2) = -\frac{i}{Z[0]} \frac{\delta^2}{\delta F(x_1) \delta F(x_2)} \Big|_{F=0} Z[F]. \quad (2.32)$$

Primenom Furijeove transformacije na jednačinu (2.31) dobija se oblik Grinove funkcije u impulsnom prostoru

$$G(p) = -\frac{1}{p^2 - m^2} = -\frac{1}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2}, \quad (2.33)$$

gde je $p = (p_0, \mathbf{p})^T$ relativistički impuls. Iz jednačine (2.33) se jasno vidi da $G(p)$ poseduje polove u tačkama

$$p_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (2.34)$$

Ukoliko se sada energije elementarnih ekscitacija direktno određuju iz polova Grinove funkcije može se zaključiti postojanje i ekscitacija sa negativnom energijom, što bi zbog oblika funkcije značilo da teorija nema osnovno stanje, odnosno da je nestabilna. Međutim, dobro je poznato da su energije ekscitacija ove teorije date sa relacijom za energiju relativističke čestice, koja je pozitivna, čineći ovu teoriju stabilnom. Za pravilnu interpretaciju negativnih frekvencija kreće se od jednačine kretanja polja ϕ

$$(\partial^2 + m^2) \phi(x) = F(x), \quad (2.35)$$

koja se dobija preko Hajzenbergovih jednačina kretanja za polje ϕ i njemu kanonski konjugovano polje π . U impulsnom prostoru ova jednačina je data sa

$$\phi(p) = G(p)F(p), \quad (2.36)$$

gde je $F(p)$ Furije transformacija generalisane sile. S obzirom da se radi o slobodnoj teoriji, od interesa je slučaj $F(p) \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \lim_{F \rightarrow 0} G(p)F(p) \\ &= \lim_{F \rightarrow 0} \frac{F(p)}{p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2} \\ &= A(\mathbf{p})\delta(p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Poslednja relacija sledi iz činjenice da je funkcija $G(p)F(p)$ jednaka nuli pri $F \rightarrow 0$ samo u slučaju kada $p^2 \neq m^2$, a pri $p^2 = m^2$, odnosno u polovima Grinove funkcije, $G(p)F(p) \rightarrow \infty$, pa se može opisati delta funkcijom. Do istog zaključka se takođe može doći polazeći od jednačine

$$(p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2) \phi(p) = 0, \quad (2.38)$$

čije je rešenje

$$\phi(p) = A(\mathbf{p})\delta(p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2), \quad (2.39)$$

zbog identiteta koji zadovoljava delta funkcija

$$x\delta(x) = 0. \quad (2.40)$$

Međutim, iz prvog pristupa se jasno vidi da delta funkcija nosi informaciju o polovima Grinove funkcije. Sada je moguće izraziti polje $\phi(x)$ na poznat način kao

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \phi(p) e^{-ip \cdot x} \\ &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} A(\mathbf{p})\delta(p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2) \phi(p) e^{-ip \cdot x} \\ &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D 2\omega_{\mathbf{p}}} A(\mathbf{p}) (\delta(p_0 - \omega_{\mathbf{p}}) + \delta(p_0 + \omega_{\mathbf{p}})) \phi(p) e^{-ip \cdot x} \\ &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d 2\omega_{\mathbf{p}}} (A(\mathbf{p})e^{-i\omega t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + A(-\mathbf{p})e^{i\omega t - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}), \end{aligned} \quad (2.41)$$

odakle je jasno šta predstavljaju negativne frekvencije: one predstavljaju drugi deo opšteg rešenja jednačina kretanja. Zarad potvrde da su energije elementarnih ekscitacija slobodne skalarne teorije polja pozitivne potrebno je pokazati da su svojstvene vrednosti hamiltonijana kvante teorije upravo frekvencije ω sa pozitivnim

predznakom. U tom cilju je neophodno prvo kvantnovati klasični hamiltonijan dat sa

$$H = \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} [\pi^2(\mathbf{x}) + (\nabla \phi(\mathbf{x}))^2 + m^2 \phi^2(\mathbf{x})], \quad (2.42)$$

gde je

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x), \quad (2.43)$$

konjugovani impuls polja ϕ .

U kvantnoj teoriji, polje ϕ i konjugovani impuls π postaju operatori zadovoljavaju sledeće komutacione relacije

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t_0), \hat{\pi}(\mathbf{y}, t_0)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.44)$$

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = 0 \quad (2.45)$$

$$[\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y)] = 0, \quad (2.46)$$

pa jednačina (2.41) postaje

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d 2\omega_{\mathbf{p}}} (\hat{a}(\mathbf{p}) e^{-i\omega t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}), \quad (2.47)$$

gde su amplitude $A(\mathbf{k})$ zamenjene odgovarajućim operatorima $\hat{a}(\mathbf{k})$ koji zadovoljavaju

$$[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')] = 2\omega(\mathbf{k})\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.48)$$

Raspisivanjem kvantnog hamiltonijana koji se dobija zamenom $\phi \rightarrow \hat{\phi}$ i $\pi \rightarrow \hat{\pi}$, uzimanjem u obzir (2.43), videti [5], [6], dobija se dijagonalni hamiltonijan iz kog se jasno uviđa da su energije pobuđenja isključivo pozitivne

$$H = \int_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}, \quad (2.49)$$

gde je

$$\omega_{\mathbf{p}} = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (2.50)$$

Situacija je sasvim drugačija ukoliko se posmatra Klajn-Gordonova jednačina u smislu relativističke kvantne mehanike jedne čestice, tada se dobijaju negativne svojstvene vrednosti hamiltonijana što ukazuje na nestabilnost teorije, videti [2].

2.4 Hajzenbergov antiferomagnet

Identičan problem negativnih frekvencija se javlja i u slučaju nekih nerelativističkih sistema, kao što je Hajzenbergov antiferomagnet. Hajzenbergov antiferomagnet sa spinskom anizotropijom je opisan hamiltonijanom

$$H = J \sum_{\mathbf{n}, \lambda} \mathbf{S}_{\mathbf{n}}^{(a)} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{n}+\lambda}^{(b)} + Jg \sum_{\mathbf{n}, \lambda} S_{\mathbf{n}}^{z(a)} S_{\mathbf{n}+\lambda}^{z(b)}, \quad (2.51)$$

gde $\mathbf{S}^{(\alpha)}$ predstavljaju vektore spinskih operatora na podrešetki $\alpha \in \{a, b\}$, $J > 0$ je konstanta kuplovanja najbližih suseda rešetke i g je konstanta kuplovanja spinske anizotropije, pri čemu za $\mathbf{S}^{(\alpha)}$ važe sledeće komutacione relacije

$$[S_{\mathbf{n}}^{\alpha(i)}, S_{\mathbf{m}}^{\beta(j)}] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{\mathbf{n}}^{\gamma(i)} \Delta(\mathbf{n} - \mathbf{m}) \delta_{i,j}. \quad (2.52)$$

Zarad pogodnosti prelazi se na operatore $S_{\mathbf{n}}^{\pm(\alpha)}$ koji su definisani izrazima

$$S_{\mathbf{n}}^{\pm(\alpha)} = S_{\mathbf{n}}^{x(\alpha)} \pm iS_{\mathbf{n}}^{y(\alpha)}, \quad (2.53)$$

i sa kojima hamiltonijan postaje

$$H = \frac{J}{2} \sum_{\mathbf{n}, \lambda} \left(S_{\mathbf{n}}^{+(a)} S_{\mathbf{n}+\lambda}^{-(b)} + S_{\mathbf{n}}^{-(a)} S_{\mathbf{n}+\lambda}^{+(b)} \right) + J\eta \sum_{\mathbf{n}, \lambda} S_{\mathbf{n}}^{z(a)} S_{\mathbf{n}+\lambda}^{z(b)}, \quad \eta = (1 + g). \quad (2.54)$$

Takođe, zarad pogodnosti, primenjuje se sledeća unitarna transformacija

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{\mathbf{n}}^x \\ \tilde{S}_{\mathbf{n}}^y \\ \tilde{S}_{\mathbf{n}}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(\boldsymbol{\theta}) S_{\mathbf{n}}^x U^\dagger(\boldsymbol{\theta}) \\ U(\boldsymbol{\theta}) S_{\mathbf{n}}^y U^\dagger(\boldsymbol{\theta}) \\ U(\boldsymbol{\theta}) S_{\mathbf{n}}^z U^\dagger(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{\mathbf{n}}^x \\ S_{\mathbf{n}}^y \\ S_{\mathbf{n}}^z \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

pri kojoj

$$\tilde{S}_{\mathbf{n}}^{\pm(b)} = S_{\mathbf{n}}^{\mp(b)}, \quad \tilde{S}_{\mathbf{n}}^{z(b)} = -S_{\mathbf{n}}^{z(b)}, \quad (2.56)$$

i nakon koje je transformisani hamiltonijan

$$\tilde{H} = \frac{J}{2} \sum_{\mathbf{n}, \lambda} \left(S_{\mathbf{n}}^{+(a)} S_{\mathbf{n}+\lambda}^{+(b)} + S_{\mathbf{n}}^{-(a)} S_{\mathbf{n}+\lambda}^{-(b)} \right) - \eta \sum_{\mathbf{n}, \lambda} S_{\mathbf{n}}^{z(a)} S_{\mathbf{n}+\lambda}^{z(b)}. \quad (2.57)$$

Zarad određivanja energije elementarnih ekscitacija kao i predstavljanja problema negativnih frekvencija posmatra se Grinova funkcija

$$G_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \theta(t - t') \langle [S_{\mathbf{x}}^{+(a)}(t), S_{\mathbf{y}}^{-(a)}(t')] \rangle, \quad (2.58)$$

čija je jednačina kretanja

$$i \frac{d}{dt} G_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = i\delta(t - t') \langle [S_{\mathbf{x}}^{+(a)}(t), S_{\mathbf{y}}^{-(a)}(t)] \rangle + i\theta(t - t') \langle [\dot{S}_{\mathbf{x}}^{+(a)}(t), S_{\mathbf{y}}^{-(a)}(t')] \rangle. \quad (2.59)$$

Jednačina kretanja operatora $S_{\mathbf{x}}^{+(a)}$ je data Hajzenbergovom jednačinom

$$\begin{aligned} i\dot{S}_{\mathbf{x}}^{+(a)} &= [S_{\mathbf{x}}^{+(a)}, H] \\ &= J \sum_{\lambda} \left(S_{\mathbf{x}}^{z(a)} S_{\mathbf{x}+\lambda}^{-(b)} + \eta S_{\mathbf{x}}^{+(a)} S_{\mathbf{x}+\lambda}^{z(b)} \right). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Vraćajući (2.60) u (2.59) dobija se

$$\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}G_{\mathbf{x},\mathbf{y}} &= 2i\delta(t-t')\langle\delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}S_{\mathbf{x}}^{z(a)}\rangle \\
&+ J\theta(t-t')\sum_{\lambda}\langle[S_{\mathbf{x}}^{z(a)}S_{\mathbf{x}+\lambda}^{-z(b)}(t), S_{\mathbf{y}}^{-z(a)}(t')]\rangle \\
&+ J\eta\theta(t-t')\sum_{\lambda}\langle[S_{\mathbf{x}}^{+z(a)}S_{\mathbf{x}+\lambda}^{z(b)}(t), S_{\mathbf{y}}^{-z(a)}(t')]\rangle.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Uvođenjem aproksimacije haotičnih faza¹ kao

$$\langle[S_{\mathbf{x}}^{z(a)}S_{\mathbf{x}+\lambda}^{-z(b)}(t), S_{\mathbf{y}}^{-z(a)}(t')]\rangle \approx \langle S_{\mathbf{x}}^{z(a)}\rangle\langle[S_{\mathbf{x}+\lambda}^{-z(b)}(t), S_{\mathbf{y}}^{-z(a)}(t')]\rangle \tag{2.62}$$

$$\langle[S_{\mathbf{x}}^{+z(a)}S_{\mathbf{x}+\lambda}^{z(b)}(t), S_{\mathbf{y}}^{-z(a)}(t')]\rangle \approx \langle S_{\mathbf{x}+\lambda}^{z(b)}\rangle\langle[S_{\mathbf{x}}^{+z(a)}(t), S_{\mathbf{y}}^{-z(a)}(t')]\rangle, \tag{2.63}$$

zajedno sa aproksimacijom da srednja vrednost z operatora spina ne zavisi od podrešetke kao ni od položaja na rešetki

$$\langle S_{\mathbf{x}}^{z(a)}\rangle = \langle S_{\mathbf{x}+\lambda}^{z(b)}\rangle = S, \tag{2.64}$$

jednačina kretanja Grinove funkcije postaje

$$\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}G_{\mathbf{x},\mathbf{y}} &= 2iS\delta(t-t')\delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \\
&+ JS\sum_{\lambda}C_{\mathbf{x}+\lambda,\mathbf{y}} + JSZ_1G_{\mathbf{x},\mathbf{y}},
\end{aligned} \tag{2.65}$$

gde je $C_{\mathbf{x}+\lambda,\mathbf{y}} = \theta(t-t')\langle[S_{\mathbf{x}+\lambda}^{-z(b)}(t), S_{\mathbf{y}}^{-z(a)}(t')]\rangle$ takođe Grinova funkcija različita od $G_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$. Prelaskom u Furije prostor po vremenu

$$G_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t}G_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\omega), \tag{2.66}$$

i po prostoru

$$G_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{p}}G_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}, \tag{2.67}$$

dobija se sledeća jednačina

$$(\omega - J\eta Z_1 S)G_{\mathbf{p}} = \frac{iS}{\pi} + JZ_1 S C_{\mathbf{p}}\gamma_{\mathbf{p}}, \tag{2.68}$$

gde je $\gamma_{\mathbf{p}} = \frac{1}{Z_1}\sum_{\lambda}e^{i\mathbf{p}\cdot\lambda}$ geometrijski faktor posmatrane rešetke. Za određivanje oblika Grinove funkcije $C_{\mathbf{p}}$, kreće se od njene jednačine kretanja u direktnom prostoru

$$i\frac{d}{dt}C_{\mathbf{l},\mathbf{y}} = i\theta(t-t')\langle[\dot{S}_{\mathbf{x}+\lambda}^{-z(b)}(t), S_{\mathbf{y}}^{-z(a)}(t')]\rangle, \tag{2.69}$$

¹eng. random phase approximation

i na sličan način se određuje veza između G i C . Prvo se određuje jednačina kretanja operatora $S_l^{-(b)}$ kao Hajzenbergova jednačina kretanja

$$\begin{aligned} i\dot{S}_l^{-(b)} &= [S_l^{-(b)}, H] \\ &= -J \sum_{\lambda} S_{l-\lambda}^{+(a)} S_l^{z(b)} - J\eta \sum_{\lambda} S_{l-\lambda}^{z(a)} S_l^{-(b)}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

zatim, vraćajući ovaj rezultat u (2.69) i prelaskom u Furije prostor dobija se

$$(\omega + J\eta Z_1 S) C_{\mathbf{p}} = -J Z_1 S G_{\mathbf{p}} \gamma_{\mathbf{p}}^*. \quad (2.71)$$

Kombinujući (2.68) i (2.71) određuje se oblik Grinove funkcije $G_{\mathbf{p}}$ u impulsnom prostoru

$$G_{\mathbf{p}} = \frac{iS}{\pi} \frac{\omega + J\eta Z_1 S}{\omega^2 - J^2 S^2 Z_1^2 \eta^2 + J^2 S^2 Z_1^2 |\gamma_{\mathbf{p}}|^2}, \quad (2.72)$$

čiji su polovi

$$\omega_{1,2}(\mathbf{p}) = \pm JS Z_1 \sqrt{\eta^2 - |\gamma_{\mathbf{p}}|^2}. \quad (2.73)$$

Polovi Grinove funkcije $G_{\mathbf{p}}$, dati jednačinom (2.73), sugerišu postojanje i negativnih energija, međutim, kao i u slučaju slobodnog skalarnog polja negativne frekvencije samo daju drugi deo opšteg rešenja jednačina kretanja. U cilju pravilne interpretacije negativnih frekvencija, te dokazivanja da su energije elementarnih pobuđenja u antiferomagnetu pozitivne, posmatraju se jednačine (2.60) i (2.70) pri aproksimaciji

$$S^{z(a)} = S^{z(b)} = S, \quad (2.74)$$

u impulsnom prostoru

$$i\dot{S}_{\mathbf{p}}^{+(a)} = JS\gamma_{\mathbf{p}} S_{-\mathbf{p}}^{-(b)} + J\eta SZ_1 S_{\mathbf{p}}^{+(a)} \quad (2.75)$$

$$i\dot{S}_{-\mathbf{p}}^{-(b)} = -JS\gamma_{\mathbf{p}}^* S_{\mathbf{p}}^{+(a)} - J\eta SZ_1 S_{-\mathbf{p}}^{-(b)}. \quad (2.76)$$

Uzimanjem drugih izvoda ovih jednačina i rešavanjem dobijenog sistema jednačina određuje se jednačina kretanja operatora $S_{\mathbf{p}}^{+(a)}$

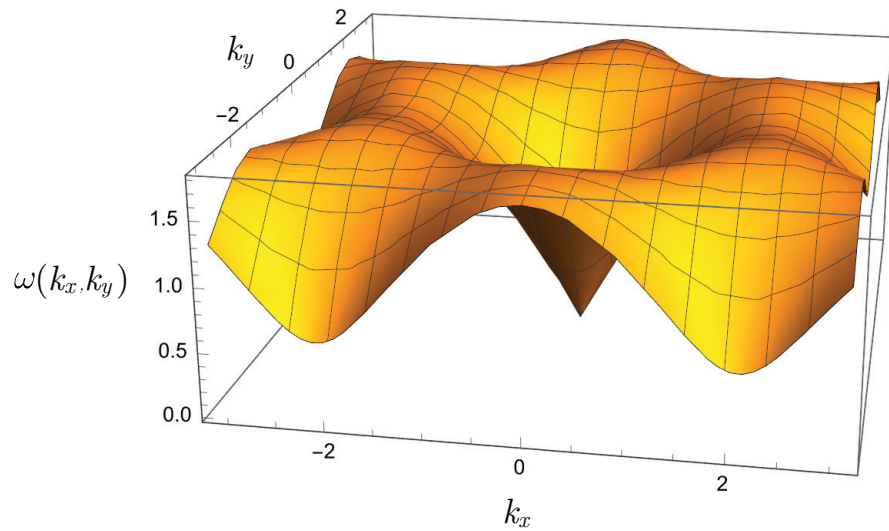
$$\ddot{S}_{\mathbf{p}}^{+(a)}(t) = -\omega^2(\mathbf{p}) S_{\mathbf{p}}^{+(a)}(t), \quad (2.77)$$

koja je analogna jednačini (2.38) i čije je rešenje

$$S_{\mathbf{p}}^{+(a)}(t) = A(\mathbf{p}) e^{i\omega(\mathbf{p})t} + B(\mathbf{p}) e^{-i\omega(\mathbf{p})t}. \quad (2.78)$$

Daljom dijagonalizacijom koristeći transformaciju Bogoljubova, videti [7], dobija se dijagonalni hamiltonijan

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \omega(\mathbf{p}) [a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}], \quad (2.79)$$



Slika 1: Zavisnost frekvencije ω od talasnog vektora \mathbf{k} pri parametrima $J = 1.2$ i $g = 0$.

gde su energije elementarnih pobuđenja očigledno pozitivne. Na Slici 1 je predstavljena zavisnost frekvencije ω od talasnog vektora \mathbf{k} za slučaj heksagonalne rešetke gde se jasno uočava da pri $\mathbf{k} \rightarrow 0$, $\omega(\mathbf{k}) \rightarrow 0$ ukazujući na postojanje Goldstonovog moda u spektru elementarnih ekscitacija, videti [1].

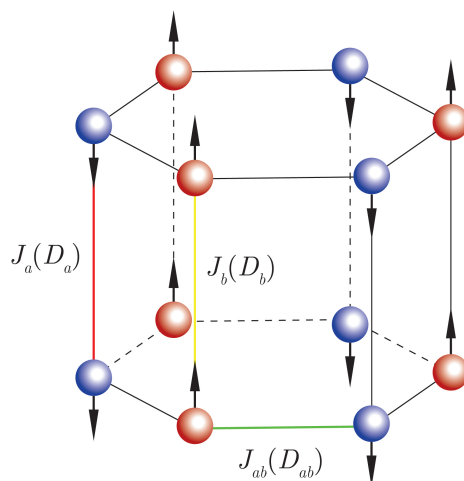
3 Hajzenbergov model kvazi-dvodimenzionih magneta na heksagonalnoj rešetki

Ukoliko se zanemari problem nestabilnosti teorije koji daje problematična interpretacija negativnih frekvencija, postoji i drugi problem sa takvom interpretacijom. Naime, ukoliko sistem poseduje dve energetske grane, recimo ω_1 i ω_2 od eksperimentalnog značaja je energetska procepa između njih $\Delta\omega$, te nepravilna interpretacija negativnih frekvencija može dovesti do nepravilnog određivanja energetske procepa. Zbog opisivanja ovog problema posmatraće se slučaj Hajzenbergovog modela kvazi-dvodimenzionih magneta na heksagonalnoj rešetki, Slika 2.

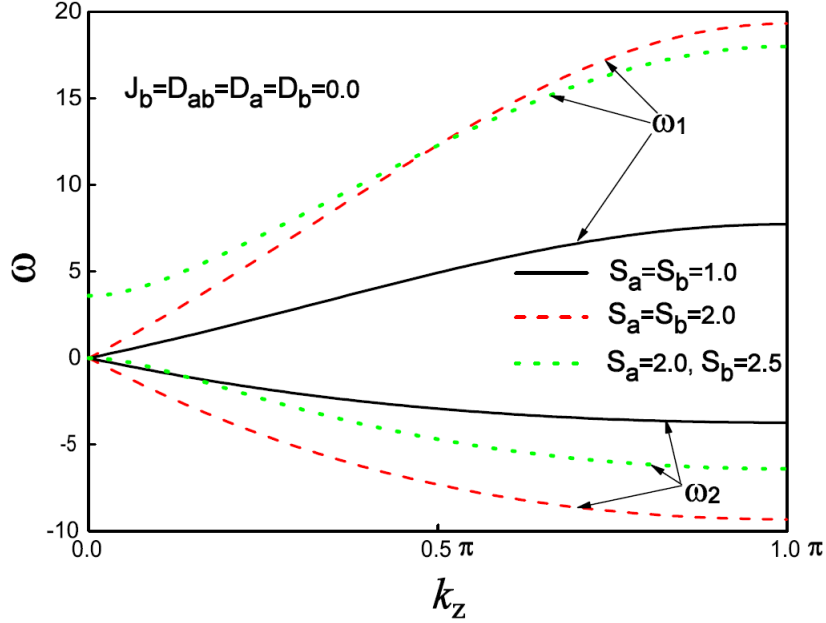
Modelni hamiltonijan je

$$\begin{aligned}
 H = & -2J_{ab} \sum_{n \in a, \lambda} \mathbf{S}_n^{(a)} \cdot \mathbf{S}_{n+\lambda}^{(b)} - 2D_{ab} \sum_{n \in a, \lambda} S_n^{z(a)} S_{n+\lambda}^{z(b)} \\
 & - J_a \sum_n \mathbf{S}_n^{(a)} \cdot \mathbf{S}_{n+\delta}^{(a)} - D_a \sum_n S_n^{z(a)} S_{n+\delta}^{z(a)} \\
 & - J_b \sum_m \mathbf{S}_m^{(b)} \cdot \mathbf{S}_{m+\delta}^{(b)} - D_b \sum_m S_m^{z(b)} S_{m+\delta}^{z(b)},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

gde je J_{ab} konstanta kuplovanja spinova unutar jednog sloja, J_a i J_b konstante kuplovanja spinova podrešetki a i b između slojeva, respektivno, D_{ab} , D_a i D_b konstante spinske anizotropije za svaku interakciju, λ vektori najbližih suseda unutar sloja, δ vektor najbližih suseda između slojeva.



Slika 2: Prikaz kvazi-dvodimenzionog Hajzenbergovog modela na heksagonalnoj rešetki.



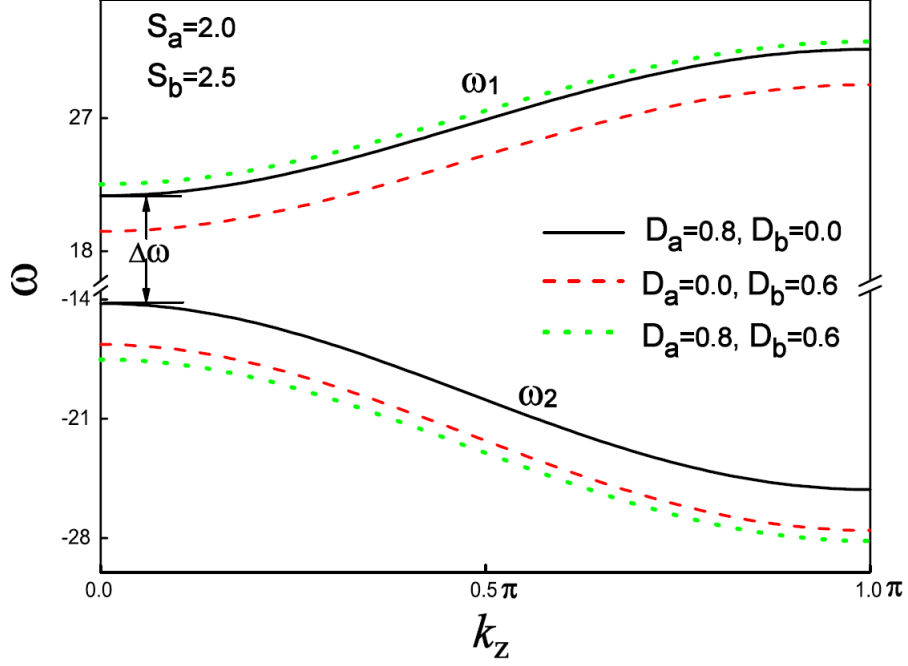
Slika 3: Frekvencije dobijene metodom Grinovih funkcija, videti [8].

Metodom Grinovih funkcija se može doći do identičnog problema negativnih frekvencija, videti Sliku 3, koji potom dovodi i do nepravilno određenog energetskeg procepa između energetskeg grana, predstavljeno na Slici 4. Isti problem negativnih frekvencija se javlja i u drugim sličnim problemima kao što su [9] i [10]. Za razrešenje ovog problema primenjuje se isti metod jednačina kretanja koji je prikazan i za slučajeve slobodnog skalarnog polja u odeljku 2.3 i Hajzenbergovog antiferomagneta u odeljku 2.4.

3.1 Jednačine kretanja i energije elementarnih ekscitacija

Pre nego što se odrede Hajzenbergove jednačine kretanja, zarad pogodnosti, hamiltonijan (3.1) se predstavlja pomoću operatora (2.53) na sličan način kao i za slučaj Hajzenbergovog antiferomagneta

$$\begin{aligned}
H = & - J_{ab} \sum_{n,\lambda} \left(S_n^{+(a)} S_{n+\lambda}^{-(b)} + S_n^{-(a)} S_{n+\lambda}^{+(b)} \right) - 2\eta_{ab} \sum_{n,\lambda} S_n^{z(a)} S_{n+\lambda}^{z(b)} \\
& - \frac{J_a}{2} \sum_n \left(S_n^{+(a)} S_{n+\delta}^{-(a)} + S_n^{-(a)} S_{n+\delta}^{+(a)} \right) - \eta_a \sum_n S_n^{z(a)} S_{n+\delta}^{z(a)} \\
& - \frac{J_b}{2} \sum_m \left(S_m^{+(b)} S_{m+\delta}^{-(b)} + S_m^{-(b)} S_{m+\delta}^{+(b)} \right) - \eta_b \sum_m S_m^{z(b)} S_{m+\delta}^{z(a)}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$



Slika 4: Energetski procep dobijen metodom Grinovih funkcija, videti [8].

Međutim, ispostavlja se da je pogodnije ne primenjivati unitarnu transformaciju (2.55), te se nastavlja sa određivanjem jednačine kretanja operatora $S_x^{+(a)}$ kao Hajzenbergove jednačine kretanja

$$\begin{aligned}
i\dot{S}_x^{+(a)} = [S_x^{+(a)}, H] = & -2J_{ab} \sum_{\lambda} S_x^{z(a)} S_{x+\lambda}^{+(b)} + 2\eta_{ab} \sum_{\lambda} S_x^{+(a)} S_{x+\lambda}^{z(b)} \\
& - J_a \left(S_{x-\delta}^{+(a)} S_x^{z(a)} + S_x^{z(a)} S_{x+\delta}^{+(a)} \right) \\
& + \eta_a \left(S_{x-\delta}^{z(a)} S_x^{+(a)} + S_x^{+(a)} S_{x+\delta}^{z(a)} \right).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

S obzirom da se u jednačini kretanja za operator $S_x^{+(a)}$ javlja i operator $S_y^{+(b)}$, određuje se i njegova Hajzenbergova jednačina kretanja

$$\begin{aligned}
i\dot{S}_y^{+(b)} = [S_y^{+(b)}, H] = & -2J_{ab} \sum_{\lambda} S_{y-\lambda}^{+(a)} S_y^{z(b)} + 2\eta_{ab} \sum_{\lambda} S_{y-\lambda}^{z(a)} S_y^{+(b)} \\
& - J_b \left(S_{y-\delta}^{+(b)} S_y^{z(b)} + S_y^{z(b)} S_{y+\delta}^{+(b)} \right) \\
& + \eta_b \left(S_{y-\delta}^{z(b)} S_y^{+(b)} + S_y^{+(b)} S_{y+\delta}^{z(b)} \right).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Sistem jednačina (3.3) i (3.4) je kuplovan sistem jednačina koji u opštem slučaju nije moguće analitički rešiti te se pribegava određenim aproksimacijama. U ovom

slučju se primenjuje linearna aproksimacija spinskih talasa koja podrazumeva zamenu z komponente operatora spina $S_{\mathbf{n}}^{z(\alpha)}$ na svakom čvoru sa konstantnom vrednošću s , odnosno

$$S_{\mathbf{n}}^{z(\alpha)} \approx s, \quad \alpha \in \{a, b\}, \quad (3.5)$$

Primenom aproksimacije spinskih talasa, zajedno sa Furije transformacijom

$$S_{\mathbf{x}}^{\pm(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{N_{\alpha}}} \sum_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{k}}^{\pm(\alpha)} e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.6)$$

sistem jednačina (3.3) i (3.4) postaje

$$i\dot{S}_{\mathbf{k}}^{+(a)} = -2sJ_{ab}\gamma_{\mathbf{k}}S_{\mathbf{k}}^{+(b)} + 2s(\eta_{ab}z_1 + \eta_a - J_a \cos(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\delta}))S_{\mathbf{k}}^{+(a)} \quad (3.7)$$

$$i\dot{S}_{\mathbf{k}}^{+(b)} = -2sJ_{ab}\gamma_{\mathbf{k}}^*S_{\mathbf{k}}^{+(a)} + 2s(\eta_{ab}z_1 + \eta_b - J_b \cos(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\delta}))S_{\mathbf{k}}^{+(b)}. \quad (3.8)$$

Uvođenjem relacija

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\lambda}} \quad (3.9)$$

$$J(\mathbf{k}) = J_{ab}\gamma_{\mathbf{k}} \quad (3.10)$$

$$K_{\alpha}(\mathbf{k}) = \eta_{ab}z_1 + \eta_{\alpha} - J_{\alpha} \cos(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\delta}), \quad \alpha \in \{a, b\}, \quad (3.11)$$

pri čemu je z_1 broj najbližih suseda heksagonalne rešetke, sistem jednačina (3.7) se dalje svodi na

$$\dot{S}_{\mathbf{k}}^{+(a)} = 2isJ(\mathbf{k})S_{\mathbf{k}}^{+(b)} - 2isK_a(\mathbf{k})S_{\mathbf{k}}^{+(a)} \quad (3.12)$$

$$\dot{S}_{\mathbf{k}}^{+(b)} = 2isJ^*(\mathbf{k})S_{\mathbf{k}}^{+(a)} - 2isK_b(\mathbf{k})S_{\mathbf{k}}^{+(b)}. \quad (3.13)$$

Primenom još jednog izvoda po vremenu i sređivanjem moguće je svesti sistem jednačina (3.12) na matricnu jednačinu

$$\begin{bmatrix} \ddot{S}_{\mathbf{k}}^{+(a)} \\ \ddot{S}_{\mathbf{k}}^{+(b)} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} S_{\mathbf{k}}^{+(a)} \\ S_{\mathbf{k}}^{+(b)} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

gde je

$$M = \begin{bmatrix} -|J(\mathbf{k})|^2 - K_a^2(\mathbf{k}) & J(\mathbf{k})(K_a(\mathbf{k}) + K_b(\mathbf{k})) \\ J^*(\mathbf{k})(K_a(\mathbf{k}) + K_b(\mathbf{k})) & -|J(\mathbf{k})|^2 - K_b^2(\mathbf{k}) \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Dalji postupak predstavlja rešavanje svojstvenog problema matrice M

$$M|\alpha\rangle = \lambda_{\alpha}|\alpha\rangle, \quad (3.16)$$

zarad određivanja unitarne transformacije $U = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle e_{\alpha}|$ koja dijagonalizuje matricu M

$$\begin{aligned} U^{\dagger} M U &= \sum_{\alpha, \beta} |e_{\alpha}\rangle \langle \alpha| M |\beta\rangle \langle e_{\beta}| \\ &= \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |e_{\alpha}\rangle \langle e_{\alpha}|, \end{aligned} \quad (3.17)$$

čime matrična jednačina (3.14) prelazi u jednostavniji oblik

$$\begin{aligned} U^{\dagger} \begin{bmatrix} \ddot{S}_{\mathbf{k}}^{+(a)} \\ \ddot{S}_{\mathbf{k}}^{+(b)} \end{bmatrix} &= U^{\dagger} M U U^{\dagger} \begin{bmatrix} S_{\mathbf{k}}^{+(a)} \\ S_{\mathbf{k}}^{+(b)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \ddot{S}_{\mathbf{k}}^{+(a)} \\ \ddot{S}_{\mathbf{k}}^{+(b)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(a)} \\ \tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(b)} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

gde su uvedeni transformisani operatori

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(a)} \\ \tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(b)} \end{bmatrix} = U^{\dagger} \begin{bmatrix} S_{\mathbf{k}}^{+(a)} \\ S_{\mathbf{k}}^{+(b)} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

pri kojima sistem jednačina (3.14) postaje znatno jednostavniji sistem dve nezavisne diferencijalne jednačine drugog reda koje su analogne jednačinama (2.38) i (2.77)

$$\ddot{S}_{\mathbf{k}}^{+(a)} = \lambda_1(\mathbf{k}) \tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(a)} \quad (3.20)$$

$$\ddot{S}_{\mathbf{k}}^{+(b)} = \lambda_2(\mathbf{k}) \tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(b)}. \quad (3.21)$$

Svojtvene vrednosti matrice M su date sa

$$\lambda_1 = -2s^2 \left(\Omega_a(\mathbf{k}) + \Omega_b(\mathbf{k}) + \sqrt{4|\xi(\mathbf{k})|^2 + (\Omega_a(\mathbf{k}) - \Omega_b(\mathbf{k}))^2} \right) \quad (3.22)$$

$$\lambda_2 = -2s^2 \left(\Omega_a(\mathbf{k}) + \Omega_b(\mathbf{k}) - \sqrt{4|\xi(\mathbf{k})|^2 + (\Omega_a(\mathbf{k}) - \Omega_b(\mathbf{k}))^2} \right), \quad (3.23)$$

pri čemu su uvedene sledeće relacije

$$\Omega_a(\mathbf{k}) = |J(\mathbf{k})|^2 + K_a^2(\mathbf{k}) \quad (3.24)$$

$$\Omega_b(\mathbf{k}) = |J(\mathbf{k})|^2 + K_b^2(\mathbf{k}) \quad (3.25)$$

$$\xi(\mathbf{k}) = J(\mathbf{k})(K_a(\mathbf{k}) + K_b(\mathbf{k})). \quad (3.26)$$

Da bi jednačine (3.20) bile istog oblika kao i jednačine (2.38) i (2.77) neophodno je da svojstvene vrednosti λ_1 i λ_2 budu negativne, čime bi se moglo pisati

$$\ddot{S}_{\mathbf{k}}^{+(a)} = -|\lambda_1(\mathbf{k})| \tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(a)} \quad (3.27)$$

$$\ddot{S}_{\mathbf{k}}^{+(b)} = -|\lambda_2(\mathbf{k})| \tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(b)}, \quad (3.28)$$

odnosono

$$\ddot{\tilde{S}}_{\mathbf{k}}^{+(a)} = -\omega_1^2(\mathbf{k})\tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(a)} \quad (3.29)$$

$$\ddot{\tilde{S}}_{\mathbf{k}}^{+(b)} = -\omega_2^2(\mathbf{k})\tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(b)}, \quad (3.30)$$

gde je

$$\omega_i^2(\mathbf{k}) = |\lambda_i(\mathbf{k})|, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (3.31)$$

Prva svojstvena vrednost λ_1 prema (3.22) je očigledno manja od nule, dok isti zaključak za drugu svojstvenu vrednost λ_2 sledi iz

$$\begin{aligned} -2s^2 \left(\Omega_a(\mathbf{k}) + \Omega_b(\mathbf{k}) - \sqrt{4|\xi(\mathbf{k})|^2 + (\Omega_a(\mathbf{k}) - \Omega_b(\mathbf{k}))^2} \right) &< 0 \\ \Omega_a(\mathbf{k}) + \Omega_b(\mathbf{k}) - \sqrt{4|\xi(\mathbf{k})|^2 + (\Omega_a(\mathbf{k}) - \Omega_b(\mathbf{k}))^2} &> 0 \\ (|J(\mathbf{k})|^2 - K_a(\mathbf{k})K_b(\mathbf{k}))^2 &> 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Sa svojstvenim vrednostima λ_1 i λ_2 manjim od nule rešenja sistema (3.20) su data sa

$$\tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(a)} = A(\mathbf{k})e^{i\omega_1(\mathbf{k})t} + B(\mathbf{k})e^{-i\omega_1(\mathbf{k})t} \quad (3.33)$$

$$\tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(b)} = C(\mathbf{k})e^{i\omega_2(\mathbf{k})t} + D(\mathbf{k})e^{-i\omega_2(\mathbf{k})t}, \quad (3.34)$$

gde su frekvencije sistema

$$\omega_1(\mathbf{k}) = \sqrt{2s^2 \left(\Omega_a(\mathbf{k}) + \Omega_b(\mathbf{k}) + \sqrt{4|\xi(\mathbf{k})|^2 + (\Omega_a(\mathbf{k}) - \Omega_b(\mathbf{k}))^2} \right)} \quad (3.35)$$

$$\omega_2(\mathbf{k}) = \sqrt{2s^2 \left(\Omega_a(\mathbf{k}) + \Omega_b(\mathbf{k}) - \sqrt{4|\xi(\mathbf{k})|^2 + (\Omega_a(\mathbf{k}) - \Omega_b(\mathbf{k}))^2} \right)}. \quad (3.36)$$

pozitivne. S obzirom da se pokušava rešiti sistem (3.14) neophodno je odrediti i unitarnu transformaciju U kojom je određena veza između operatora $\tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(\alpha)}$ i $S_{\mathbf{k}}^{+(\alpha)}$. Svojstveni vektori matrice M su dati sa

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \begin{bmatrix} \frac{4s^2\xi(\mathbf{k})}{4s^2\Omega_a(\mathbf{k}) + \lambda_1(\mathbf{k})} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{4s^2\xi^*(\mathbf{k})}{4s^2\Omega_a(\mathbf{k}) + \lambda_1(\mathbf{k})} \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

gde je

$$\mu = 1 + \frac{16s^4|\xi(\mathbf{k})|^2}{(4s^2\Omega_a(\mathbf{k}) + \lambda_1(\mathbf{k}))^2}, \quad (3.39)$$

pomoću kojih je unitarna transformacija U^\dagger potom određena kao

$$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \begin{bmatrix} \frac{4s^2\xi^*(\mathbf{k})}{4s^2\Omega_a(\mathbf{k})+\lambda_1(\mathbf{k})} & 1 \\ 1 & -\frac{4s^2\xi(\mathbf{k})}{4s^2\Omega_a(\mathbf{k})+\lambda_1(\mathbf{k})} \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Vraćajući se na originalne operatore $S_{\mathbf{k}}^{+(a)}$ i $S_{\mathbf{k}}^{+(b)}$ unitarnom transformacijom U dobijaju se rešenja početnog sistema (3.14) kao

$$S_{\mathbf{k}}^{+(a)} = -\frac{1}{\sqrt{\mu(\mathbf{k})}} \left(\beta(\mathbf{k})\tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(a)} - \tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(b)} \right) \quad (3.41)$$

$$S_{\mathbf{k}}^{+(b)} = \frac{1}{\sqrt{\mu(\mathbf{k})}} \left(\tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(a)} + \beta^*(\mathbf{k})\tilde{S}_{\mathbf{k}}^{+(b)} \right), \quad (3.42)$$

gde je

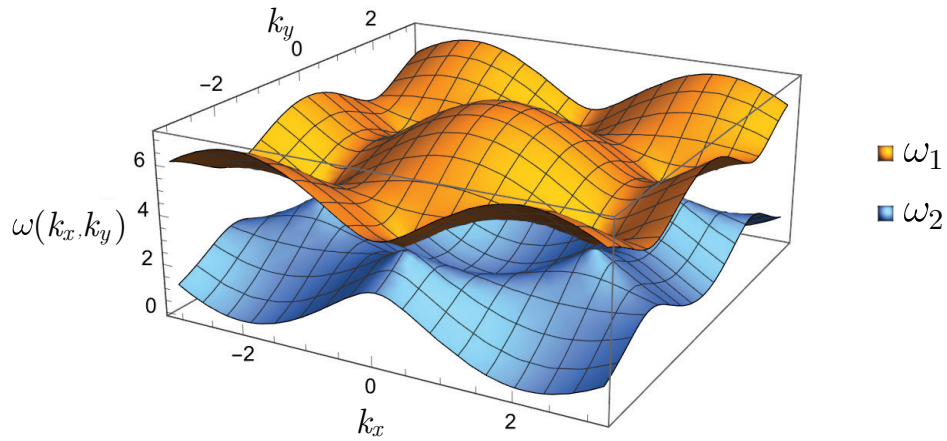
$$\beta(\mathbf{k}) = -\frac{4s^2\xi(\mathbf{k})}{4s^2\Omega_a(\mathbf{k}) + \lambda_1(\mathbf{k})}. \quad (3.43)$$

Po analogiji sa Hajzenbergovim antiferomagnetom, dalji postupak koji podrazumeva primenu transformacije Bogoljubova i određivanje koeficijenata transformacije na sličan način onim predstavljenim u [12], direktno dovodi do dijagonalnog hamiltonijana u linearnoj aproksimaciji spinskih talasa

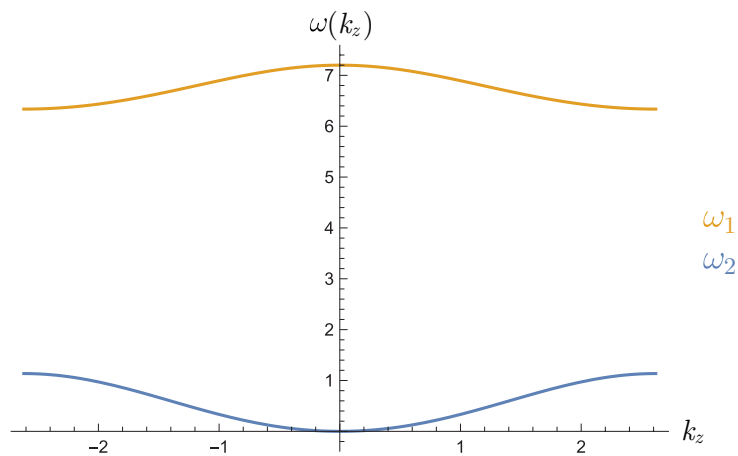
$$H = E_0 + \sum_{\mathbf{k}} \omega_1(\mathbf{k})(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}) + \omega_2(\mathbf{k})(c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}} + d_{\mathbf{k}}^\dagger d_{\mathbf{k}}), \quad (3.44)$$

koji je određen do na konstantu E_0 i gde su frekvencije ω_1 i ω_2 , date relacijama (3.35) i (3.36), pozitivne, čineći ovu teoriju stabilnom. Prema iznesenom, negativne frekvencije koje se dobijaju kao polovi Grinove funkcije u teoriji Hajzenbergovog modela kvazi-dvodimenzionih magneta na heksagonalnoj rešetki je moguće interpretirati kao drugi deo opšteg rešenja diferencijalne jednačine drugog reda koja je ekvivalentna diferencijalnoj jednačini linearnog harmonijskog oscilatora, identično kao u slučajevima slobodne skalarne teorije polje opisane u odeljku 2.3 i Hajzenbergovog antiferomagneta opisanog u odeljku 2.4. Razmatranjem dijagonalnog hamiltonijana (3.44) jasno je da je broj elementarnih ekscitacija očuvan u linearnoj aproksimaciji spinskih talasa. Međutim, čak i u komplikovanijim prikazima sa različitim geometrijama rešetke dolazi se do identičnih osobina elementarnih ekscitacija, videti [11], [13] i [14].

Zavisnost frekvencija ω_1 i ω_2 od talasnog vektora \mathbf{k} u slučaju kada je samo interakcija $J_{ab} = -1.2$ prisutna je prikazana na Slici 5, dok je na Slici 6 predstavljena zavisnost frekvencija od z komponente talasnog vektora k_z za vrednosti parametara $J_{ab} = -1.2$ i $J_a = 1$ pri ostalim parametrima jednakim nuli i u oba

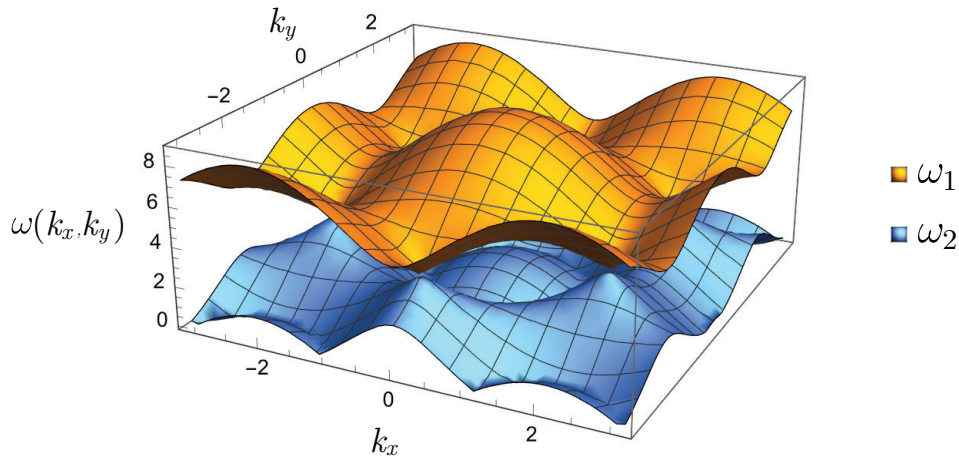


Slika 5: Zavisnost frekvencija ω_1 i ω_2 od talasnog vektora \mathbf{k} pri $J_{ab} = -1.2$ i svim ostalim parametrima jednakim nuli.

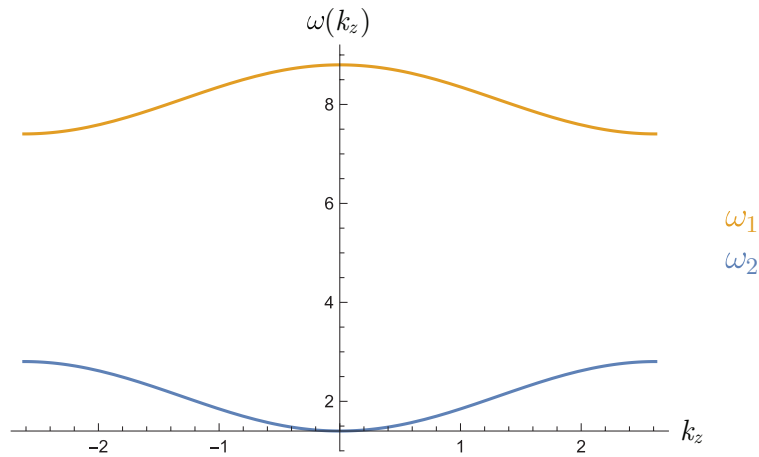


Slika 6: Zavisnost frekvencija ω_1 i ω_2 od z komponente talasnog vektora pri parametrima $J_{ab} = -1.2$, $J_a = 1$, i svim ostalim parametrima jednakim nuli.

slučaja se jasno vidi postojanje Goldstonovog moda kao i u slučaju Hajzenbergovog antiferomagneta opisanog hamiltonijanom (2.79), sa energijama elementarnih ekscitacija predstavljenim na Slici 1.

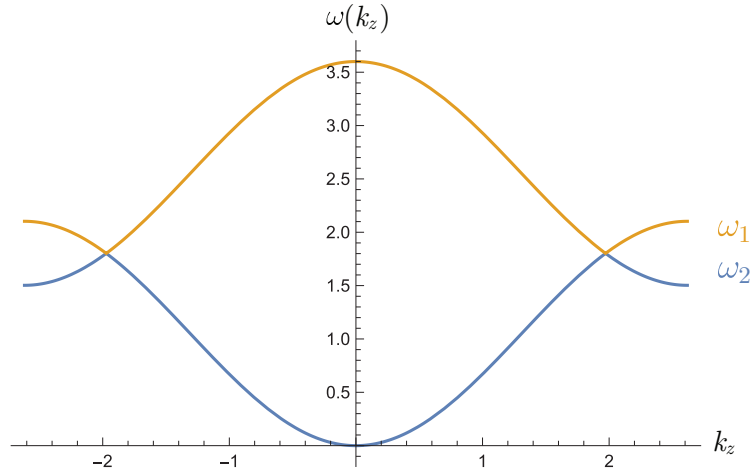


Slika 7: Zavisnost frekvencija ω_1 i ω_2 od talasnog vektora \mathbf{k} pri parametrima $J_{ab} = -1.2$, $J_a = 0.8$, $J_b = 0.6$, $D_{ab} = 0.4$, $D_a = 0.2$, $D_b = 0.2$.

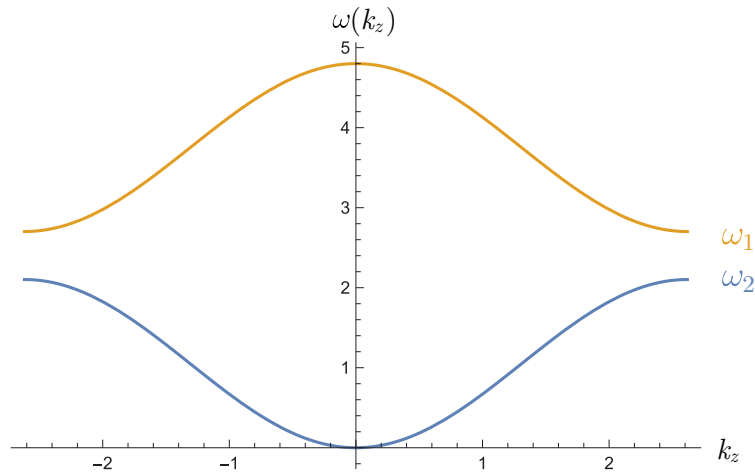


Slika 8: Zavisnost frekvencija ω_1 i ω_2 od z komponente talasnog vektora pri parametrima $J_{ab} = -1.2$, $J_a = 0.8$, $J_b = 0.6$, $D_{ab} = 0.4$, $D_a = 0.2$, $D_b = 0.2$.

U ostalim slučajevima, kada su svi parametri hamiltonijana (3.1) različiti od nule, zavisnosti frekvencija ω_1 i ω_2 od talasnog vektora \mathbf{k} su predstavljene na slikama 7 i 8, gde pri $\mathbf{k} \rightarrow 0$ frekvencija ω_2 uzima malu ali konačnu vrednost.



Slika 9: Zavisnost frekvencija ω_1 i ω_2 od z komponente talasnog vektora pri parametrima $J_{ab} = -0.6$, $J_a = 1.1$, $J_b = 1$ i ostalim parametrima jednakim nuli.



Slika 10: Zavisnost frekvencija ω_1 i ω_2 od z komponente talasnog vektora pri parametrima $J_{ab} = -0.8$, $J_a = 1.1$, $J_b = 1$ i ostalim parametrima jednakim nuli.

U slučaju kada je feromagnetna međuslojna interakcija jača od antiferomagnetne interakcije unutar sloja linearna aproksimacija predviđa preklapanje energetske zone u određenim tačkama recipročnog prostora što je prikazano na Slici 9. Međutim, to ne mora uvek biti slučaj, na Slici 10 je moguće uočiti postojanje energetskog procepa između zona iako je feromagnetna interakcija jača od antiferomagnetne

4 Toplotni kapacitet

Jedna od termodinamičkih veličina koja direktno zavisi od energija elementarnih ekscitacija je toplotni kapacitet. Kao i energetski procep $\Delta\omega$ nepravilna interpretacija negativnih frekvencija može dovesti i do greške pri računanju toplotnog kapaciteta. Toplotni kapacitet se može izračunati ukoliko je poznata unutrašnja energija sistema koja je u slučaju Hajzenbergovog antiferomagneta data relacijom

$$U_{2D} = E_0 + \sum_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) \left(\langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle + \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \rangle \right). \quad (4.1)$$

gde je uzet u obzir dijagonalni hamiltonijan (2.79) kao i frekvencije ω data relacijom (2.73). U slučaju kvazi-dvodimenzionog magneta opisanog hamiltonijanom (3.44) unutrašnja energija je data sa

$$U = E_0 + \sum_{\mathbf{k}} \omega_1(\mathbf{k}) \left(\langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle + \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \rangle \right) + \omega_2(\mathbf{k}) \left(\langle c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \rangle + \langle d_{\mathbf{k}}^\dagger d_{\mathbf{k}} \rangle \right). \quad (4.2)$$

gde su ω_1 i ω_2 date relacijama (3.35) i (3.36). S obzirom da se i u oba slučaja radi o bozonima srednje vrednosti operatora broja čestica zadovoljavaju Boze-Ajnštajnovu raspodelu

$$\langle n_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\omega(\mathbf{k})}{T}} - 1}, \quad (4.3)$$

pa unutrašnja energija Hajzenbergovog antiferomagneta (4.1) postaje

$$U_{2D} = E_0 + \sum_{\mathbf{k}} \frac{2\omega(\mathbf{k})}{e^{\frac{\omega(\mathbf{k})}{T}} - 1}. \quad (4.4)$$

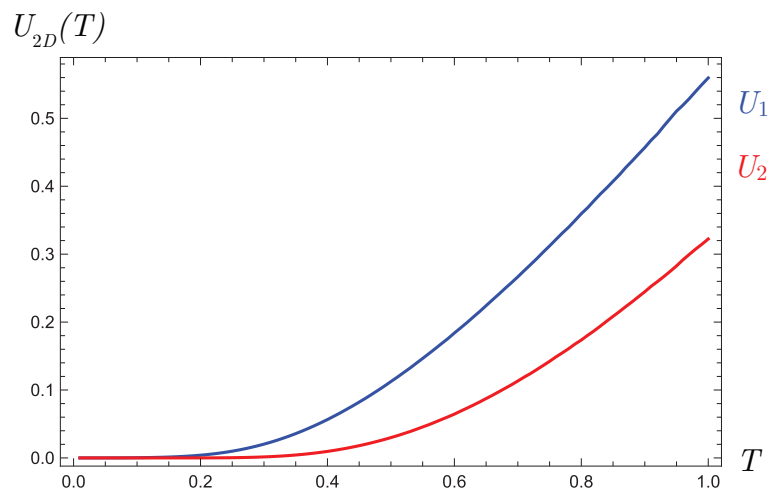
dok unutrašnja energija (4.2) postaje

$$U = E_0 + \sum_{\mathbf{k}} \frac{2\omega_1(\mathbf{k})}{e^{\frac{\omega_1(\mathbf{k})}{T}} - 1} + \frac{2\omega_2(\mathbf{k})}{e^{\frac{\omega_2(\mathbf{k})}{T}} - 1}. \quad (4.5)$$

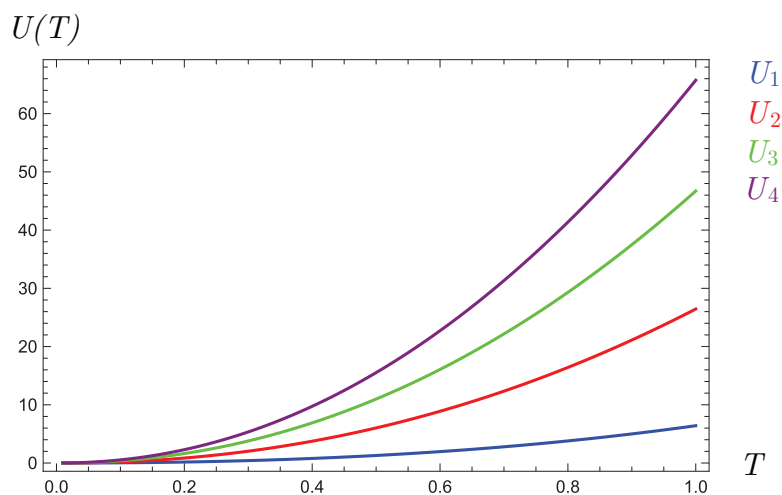
Na Slici 11 je predstavljena zavisnost unutrašnje energije U_{2D} od temperature za različite vrednosti parametara J i g koji figurišu u hamiltonijanu (2.51), dok je na Slici 12 predstavljena zavisnost unutrašnje energije U od temperature za različite vrednosti parametara datih u Tabeli 1, pri čemu je u oba slučaja uzeto $E_0 = 0$.

Toplotni kapacitet predstavlja promenu unutrašnje energije sa temperaturom te se može izračunati na sledeći način

$$C_V(T) = \frac{d\langle E \rangle}{dT} = \frac{1}{T^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{2\omega^2(\mathbf{k}) e^{\frac{\omega(\mathbf{k})}{T}}}{e^{\frac{\omega(\mathbf{k})}{T}} - 1}. \quad (4.6)$$



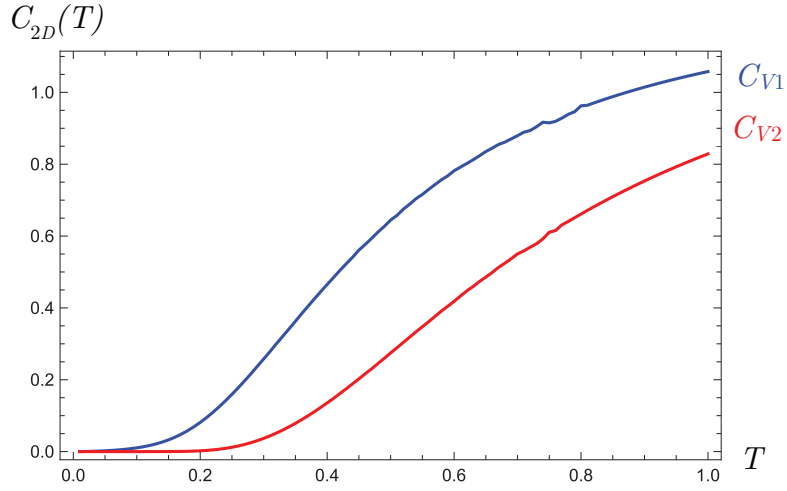
Slika 11: Zavisnost unutrašnje energije U_{2D} od temperature T , pri čemu unutrašnjoj energiji U_1 odgovaraju parametri $J = 1.2$ i $g = 0$ dok unutrašnjoj energiji U_2 odgovaraju parametri $J = 1.2$ i $g = 0.4$.



Slika 12: Zavisnost unutrašnje energije U od temperature T .

u slučaju Hajzenbergovog antiferomagneta opisanog hamiltonijanom (2.79), a u slučaju kvazi-dvodimenzionog magneta opisanog sa (3.44) toplotni kapacitet je dat sa

$$C_V(T) = \frac{1}{T^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{2\omega_1^2(\mathbf{k})e^{\frac{\omega_1(\mathbf{k})}{T}}}{e^{\frac{\omega_1(\mathbf{k})}{T}} - 1} + \frac{2\omega_2^2(\mathbf{k})e^{\frac{\omega_2(\mathbf{k})}{T}}}{e^{\frac{\omega_2(\mathbf{k})}{T}} - 1}. \quad (4.7)$$

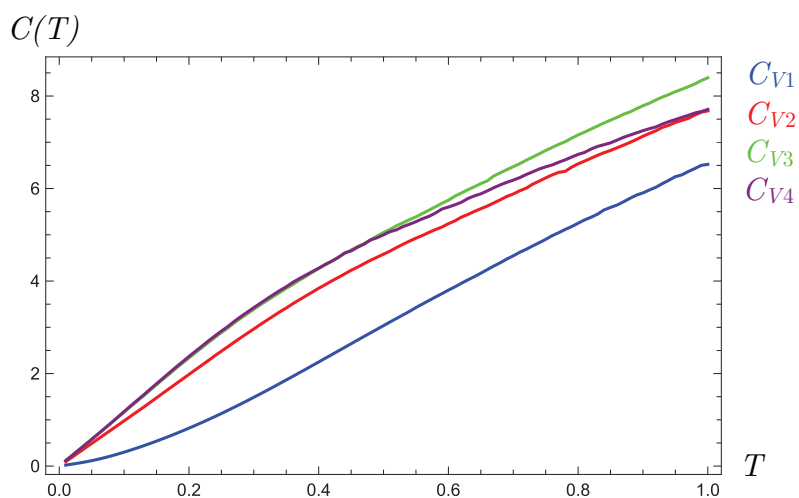


Slika 13: Zavisnost toplotnog kapaciteta C_V od temperature T , pri čemu unutrašnjoj energiji U_1 odgovaraju parametri $J = 1.2$ i $g = 0$ dok unutrašnjoj energiji U_2 odgovaraju parametri $J = 1.2$ i $g = 0.4$.

Na Slici 13 su predstavljene zavisnosti toplotnog kapaciteta od temperature za različite vrednosti parametara J i g dok su na Slici 14 i predstavljene zavisnosti toplotnog kapaciteta od temperature za različite vrednosti parametara datih u Tabeli 1.

	C_{V1}, U_1	C_{V2}, U_2	C_{V3}, U_3	C_{V4}, U_4
J_{ab}	-1.2	-1.2	-1.2	-1.2
J_a	0	1	1	1
J_b	0	0	0.7	0.7
D_{ab}	0	0	0	0.4
D_a	0	0	0	0.2
D_b	0	0	0	0.3

Tabela 1: Parametri korišćeni za predstavljanje zavisnosti toplotnog kapaciteta od temperature na Slikama 12 i 14.



Slika 14: Zavisnost toplotnog kapaciteta C_V od temperature T .

Poređenjem Slika 11 i 12 kao i Slika 13 i 14 može se zaključiti da se unutrašnja energija Hajzenbergovog modela kvazi-dvodimenzionog magneta u linearnoj aproksimaciji spinskih talasa pri niskim temperaturama ponaša slično kao i unutrašnja energija Hajzenbergovog antiferomagneta u istoj aproksimaciji, pri čemu bi razlika bila u konstanti E_0 do na koju su unutrašnje energije određene, dok se toplotni kapacitet kvazi-dvodimenzionog sistema razlikuje znatno razlikuje od Hajzenbergovog antiferomagneta zbog prisustva međuslojne feromagnetne interakcije.

5 Zaključak

U ovom radu je ispitana interpretacija negativnih frekvencija koje se javljaju pri razmatranju sistema metodom Grinovih funkcija za sisteme slobodne skalarne teorije polja u odeljku 2.3, Hajzenbergovog antiferomagneta u odeljku 2.4, kao i za sistem kvazi-dvodimenzionog magneta na heksagonalnoj reški u odeljku 3 i diskutovan je način pravilne interpretacije. U slučaju kvazi-dvodimenzionog magneta na heksagonalnoj rešetki rešavanjem jednačina kretanja spinskih operatora određene su energije elementarnih ekscitacija optičke i akustičke grane i ustanovljeno postojanje Goldstonovog moda pri odsustvu spinske anizotropije. Energije elementarnih ekscitacija kvazi-dvodimenzionog sistema su poređene sa energijama elementarnih ekscitacija Hajzenbergovog antiferomagneta i ustanovljeno je očuvanje osobina elementarnih ekscitacija izemđu modela. Za svaki od navedenih sistema je ustanovljeno da negativne frekvencije, koje se dobijaju kao polovi Grinove funkcije sistema, predstavljaju drugi deo opšteg rešenja diferencijalne jednačine drugog reda koja je ekvivalentna diferencijalnoj jednačini linearnog harmonijskog oscilatora i koja se javlja kao jednačina kretanja operatora teorije u svakom od ispitanih slučajeva. U odeljku 4 prikazana je zavisnost unutrašnje energije kao i toplotnog kapaciteta Hajzenbergovog antiferomagneta i kvazi-dvodimenzionog sistema za različite vrednosti parametara.

Literatura

- [1] A. Altland, B. Simons *Condensed Matter Field Theory*, Cambridge University Press (2010).
- [2] J. J. Sakurai, J. Napolitano *Modern Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge (2021).
- [3] A. A. Abrikosov, L.P. Gorkov, I.E. Dzyaloshinski *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Revised Edition, Prentice-Hall Inc., New Jersey (2012)
- [4] W. Nolting *Theoretical Physics 9: Fundamentals of Many-body Physics*, Springer-Verlag (2009).
- [5] E. Fradkin *Quantum Field Theory An Integrated Approach*, Princeton University Press (2021).
- [6] S. Radošević *Metodi teorije polja u statističkoj fizici*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad (2023).
- [7] A. Auerbach *Interacting Electrons and Quantum Magnetism* Springer-Verlag (1994).
- [8] F. Zhang, W. Jiang, A. B. Guo, W. Wang, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 51, no. 11, pp. 1-4, Nov. 2015, Art no. 2700204.
- [9] A. B. Guo, W. Jiang, N. Zhang, *Physica A* 490 (2018) 1138–1149.
- [10] Jin-Qiu Hu et al., *Physica E* 129 (2021) 114673
- [11] A. Liu, A. M. Finkel'stein, *Phys. Rev. B* 105, 214409 (2022)
- [12] A. N. Petsch et al., *Phys. Rev. Resreach* 5, 033113 (2023)
- [13] A. V. Syromyatnikov, *J. Phys.: Condens. Matter* 22 (2010) 216003 (7pp)
- [14] M. Powalski, G. S. Uhrig, K. P. Schmidt, *Phys. Rev. Letters* 115, 207202 (2015)

Biografija



Jeremija Kovačević je rođen u Sremskoj Mitrovici, 09.09. 1999. godine. Tehničku školu "Nikola Tesla" u Šidu je završio kao đak generacije 2018. godine kada se i upisao na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer diplomirani fizičar. Na osnovnim studijama je diplomirao 2022. godine nakon čega se upisao na master studije fizike, smer Teorijska fizika kondenzovane materije.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

TD

Tip zapisa:

TZ

Vrsta rada:

VR

Autor:

AU

Mentor:

MN

Naslov rada:

NR

Jezik publikacije:

JP

Jezik izvoda:

JI

Zemlja publikovanja:

ZP

Uže geografsko područje:

UGP

Godina:

GO

Izdavač:

IZ

Mesto i adresa:

MA

Fizički opis rada:

FO

Naučna oblast:

NO

Naučna disciplina:

ND

Predmetna odrednica/ ključne reči:

PO

UDK

Čuva se:

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

Monografska dokumentacija

Tekstualni štampani materijal

Master rad

Jeremija Kovačević

dr Slobodan Radošević

Elementarne ekscitacije i niskotemperaturna termodinamika kvazi-dvodimenzionih magneta na heksagonalnoj rešetki srpski (latinica)

srpski/engleski

Srbija

Vojvodina

2023

Autorski reprint

Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

(poglavlja/strana/citata/tabela/grafika/dodataka)
(5/32/14/1/14/0)

Fizika

Teorijska fizika kondenzovane materije

Elementarne ekscitacije, Hajzenbergov model, kvazi-dvodimenzioni magneti, heksagonalna rešetka, Grinove funkcije, spinski talasi

Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu

nema

U ovom radu se analiziraju elementarne ekscitacije i niskotemperaturna termodinamika kvazi-dvodimenzionih magneta na heksagonalnoj rešetki.

Datum prihvatanja teme od NN veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik:

član:

član:

dr Petar Mali, vanredni profesor,
Prirodno-matematički fakultet Novi Sad
dr Slobodan Radošević, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet Novi Sad
dr Miodrag Krmar, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet Novi Sad

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

Monograph publication

DT

Type of record:

Textual printed material

TR

Content code:

Final paper

CC

Author:

Jeremija Kovačević

AU

Mentor/comentor:

dr Slobodan Radošević

MN

Title:

Elementary excitations and low-temperature thermodynamics of quasi-twodimensional magnets on a honeycomb lattice

TI

Language of text:

Serbian (Latin)

LT

Language of abstract:

English

LA

Country of publication:

Serbia

CP

Locality of publication:

Vojvodina

LP

Publication year:

2023

PY

Publisher:

Author's reprint

PU

Publication place:

Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

PP

Physical description:

(5/32/14/1/14/0)

PD

Scientific field:

Physics

SF

Scientific discipline:

Theoretical Condensed Matter Physics

SD

Subject/ Key words:

Elementary excitations, Heisenberg model, quasi-twodimensional magnets, honeycomb lattice, Green's functions, spin waves

SKW

UC

Holding data:

Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4

HD

Note:

none

N

Abstract:

This paper analyses elementary excitations and low-temperature thermodynamics of quasi-twodimensional magnets on a honeycomb lattice

AB

Accepted by the Scientific Board:

ASB

Defended on:

DE

Thesis defend board:

DB

President:

dr Petar Mali, Associate Professor, Faculty of Science, Novi Sad

Member:

dr Slobodan Radošević, Full Professor, Faculty of Science, Novi Sad

Member:

dr Miodrag Krmar, Full Professor, Faculty of Science, Novi Sad