

dr Fedor Skuban

Fizika

I godina studija na Tehnološkom fakultetu u Novom Sadu

Departman za fiziku, PMF Novi Sad

1

Mehanika

Sadržaj

Elementi vektorskog računa	4	Gravitaciona sila. Njutnov zakon univerzalne gravitacije	62
Fizičke veličine. SI sistem jedinica	8	Težina tela	63
Osnovni pojmovi kinematike	14	Sila normalne reakcije podloge	65
Brzina	17	Sila trenja	67
Ubrzanje	20	Sila elastičnosti	71
Pravolinjsko kretanje	24	Sile kod kružnog kretanja	78
Slobodno padanje	28	Rad i energija	82
Vertikalni hitac	30	Energija	85
Horizontalni hitac	32	Kinetička energija	86
Kosi hitac	35	Potencijalna energija	88
Kinematika rotacionog kretanja.		Gravitaciona potencijalna energija	90
Kružno kretanje	38	Konzervativna i nekonzervativna polja	94
Ugaona brzina	40	Konzervativne i nekonzervativne sile	95
Ugaono ubrzanje	41	Potencijalna energija elastične deformacije	96
Ravnomerno kružno kretanje	45	Zakon održanja energije	99
Jednako-ubrzano kružno kretanje	47	Snaga	102
Dinamika. Sila.	50	Impuls sile i količina kretanja	103
Njutnovi zakoni kretanja. I Njutnov zakon	52	Zakon održanja količine kretanja	106
Masa i inertnost. Količina kretanja.	54	Sudari	109
II Njutnov zakon	57	Elastičan jednodimenzionalni sudar	111
III Njutnov zakon	59	Neelastičan jednodimenzionalni sudar	111
Neki tipovi sile u mehanici	61		

2

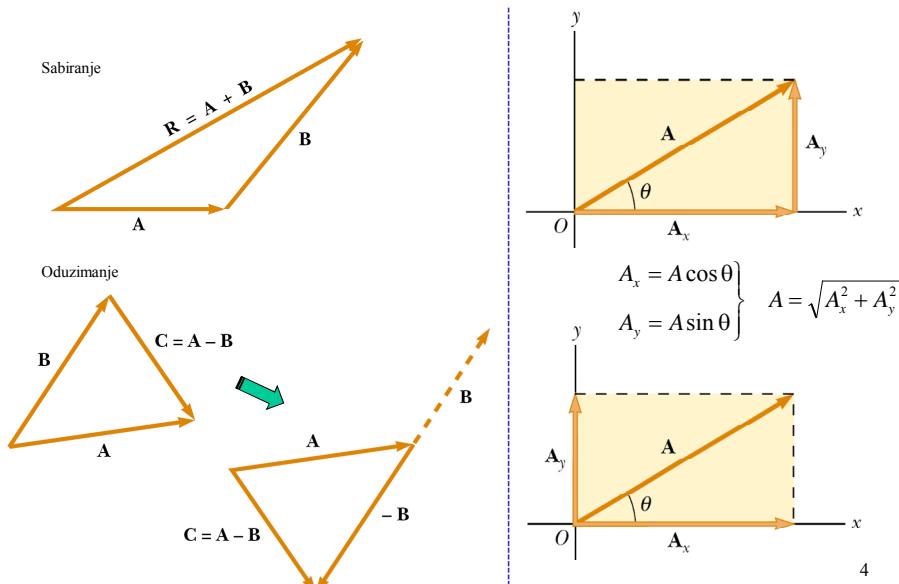
Sadržaj

Dinamika rotacionog kretanja krutog tela	113	Talasno kretanje. Prostiranje talasa	
Moment sile	117	u elastičnoj sredini.	149
Moment inercije	120	Jednačina progresivnog talasa	154
Osnovna jednačina dinamike rotacionog kretanja	123	Brzina širenja talasa	156
Kinetička energija i rad kod rotacionog kretanja	125	Energija talasa	158
Moment količine kretanja	126	Osnovne osobine talasnog kretanja	159
Zakon održanja momenta količine kretanja	129	Mehanika fluida.	164
Statika čvrstog tela	132	Statika fluida. Pritisak .	166
Uslovi ravnoteže čvrstog tela	133	Hidrostaticki pritisak	167
Vrste ravnoteže. Stabilnost.	135	Paskalov zakon	170
Oscilacije i talasi	136	Potisak. Arhimedov zakon.	172
Oscilacije	137	Površinski napon	174
Oscilovanje tela obešenog o elastičnu oprugu	139	Osobine gasova. Atmosferski pritisak.	176
Matematičko klatno	142	Dinamika fluida	177
Fizičko klatno	144	Jednačina kontinuiteta	179
Prigušene harmonijske oscilacije	145	Bernulijeva jednačina	181
Prinudne harmonijske oscilacije	147	Viskoznost	184

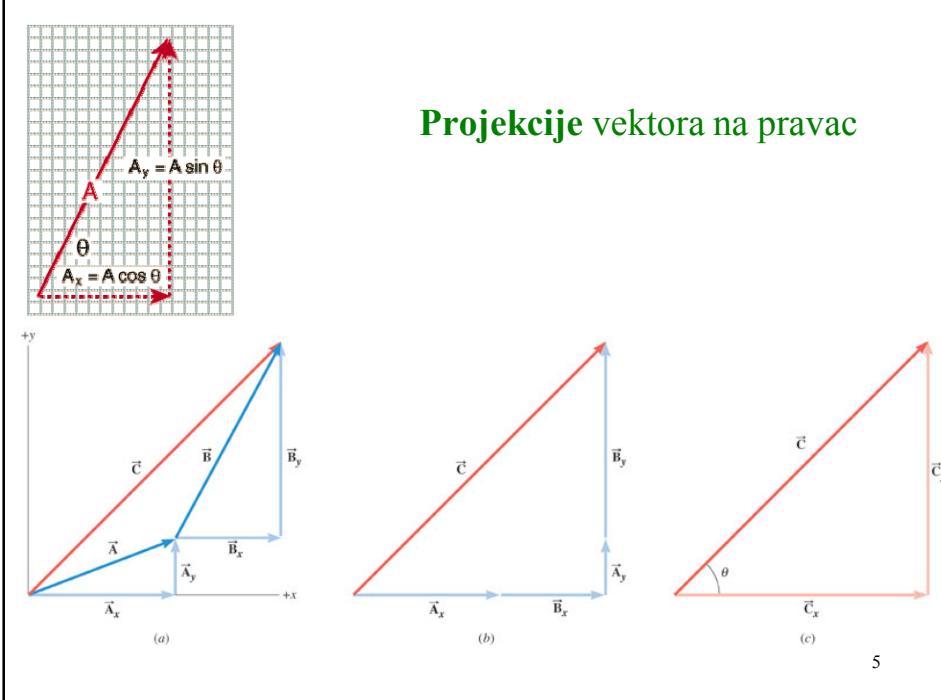
3

Elementi vektorskog računa

sabiranje i oduzimanje vektora; razlaganje na komponente



4



5

Skalarni i vektorski proizvod vektora

Skalarni proizvod dva vektora je **skalar**.

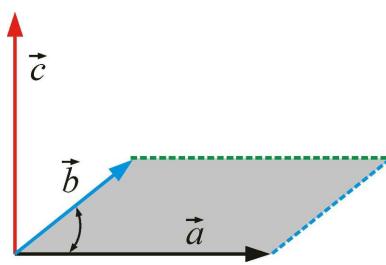
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = a \cdot b \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Vektorski proizvod dva vektora je **vektor** koji je normalan na ravan koju oni čine, a smer mu je određen pravilom desnog zavrtanja. Intenzitet je brojno jednak površini paralelograma konstruisanog iznad vektora \vec{a} i \vec{b} .

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \vec{c}_o$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

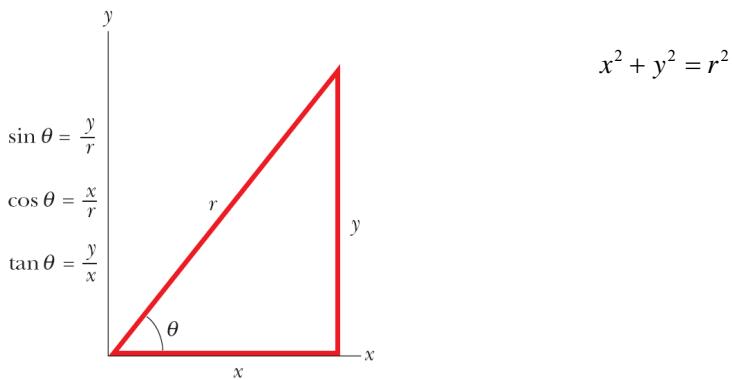
Jedinični (ort) vektor je bezdimenzionalni vektor jedinične dužine (intenzitet jednak jedinici), uveden u upotrebu samo da bi odredio pravac i smer neke vektorske fizičke veličine i nema nikakav drugi fizički smisao.



6

Trigonometrijske funkcije

- **Trigonometrijske funkcije** koje su najčešće korištene su sinus, kosinus i tangens i povezuju dužine stranica pravouglog trougla sa odgovarajućim uglovima.
- **Pitagorina teorema** povezuje dužine stranica pravouglog trougla.



7

Fizičke veličine. SI sistem jedinica.

- Potreba da se brojem izražavaju **osobine** ili opisuju **prirodne pojave** nametnula je potrebu uvođenja **fizičkih veličina** i **jedinica** fizičkih veličina.
- Fizičkim veličinama se **kvantitativno** opisuju **osobine tela, stanja i procesa** (pojava).
- Skalarne veličine su potpuno određene svojom brojnom vrednošću, dok su vektorske veličine definisane još **pravcem i smerom**.
- 1960. godine je na međunarodnom nivou dogovoren da se koristi jedinstveni sistem fizičkih **jedinica** u svetu, tzv. **SI sistem** (međunarodni sistem jedinica), koji sadrži 7 osnovnih **veličina** i njihovih **jedinica**, dok su sve ostale jedinice (jedinice ostalih fizičkih veličina) izvedene od osnovnih (iako imaju druge nazive, mogu se nedvosmisleno izraziti preko nekih od pomenutih sedam osnovnih jedinica).

8

Fizičke veličine. SI sistem jedinica.

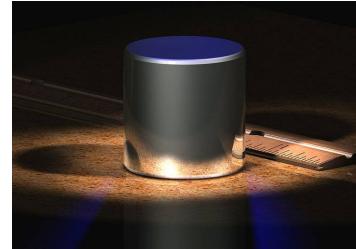
Osnovne fizičke veličine:

naziv veličine	najčešća oznaka veličine	jedinica	oznaka jedinice
masa	m	kilogram	kg
dužina	ℓ, s, r	metar	m
vreme	t	sekund	s
temperatura	T	kelvin	K
jačina električne struje	I	amper	A
jačina svetlosti	J	kandela	cd
količina supstance	n	mol	mol

9

Fizičke veličine. SI sistem jedinica.

- 1 m je dužina puta koju u vakuumu pređe svetlost za $1/299\ 792\ 458$ deo sekunde.
- 1 kg je masa etalona u obliku cilindra visine 39 mm i prečnika 39 mm od legure 90% Pt - 10% Ir, koji se čuva u Međunarodnom birou za težine i mere u Sevru, Francuska.
- 1 s je vreme trajanja 9 192 631 770 oscilacija elektromagnetskog talasa koji se emituje pri prelasku elektrona između dva hiperfina nivoa u atomu Cs.
- 1 K je termodinamička temperatura koja je jednaka $1/273.16$ delu termodinamičke temperature trojne tačke vode.
- 1 A je jačina vremenski stalne električne struje koja, prolazeći kroz dva prava, paralelna provodnika beskonačne dužine i zanemarljivog poprečnog preseka, koja se nalaze u vakuumu na rastojanju od 1 m, prouzrokuje između njih elektrodinamičku (privlačnu ili odbojnu) silu od $2 \cdot 10^{-7}$ N po metru dužine.



10

Fizičke veličine. SI sistem jedinica.

- 1 cd je svetlosna jačina koju u određenom pravcu emisija izvor svetlosti u vidu monohromatskog zračenja frekvencije $540 \cdot 10^{12}$ Hz i čija je izračena snaga u tom pravcu $1/683$ deo W po steradijanu.
- 1 mol je količina materije sistema koji sadrži toliko elementarnih jedinki koliko ima atoma u 0.012 kg izotopa ugljenika ^{12}C (Avogadrov broj).

11

Fizičke veličine

- **Izvedene fizičke veličine** - skup fizičkih veličina koje su funkcije osnovnih ili osnovnih i već izvedenih veličina, a dobijaju se na osnovu formule ili relacije.
- Primeri:
brzina $v = dx/dt$ [m/s]
ubrzanje $a = dv/dt$ [m/s²],
sila $F = m \cdot a$ [N = kgm/s²],
pritisak $p = F/S$ [Pa = N/m²]
gradijent brzine dv/dz [s⁻¹ = 1/s]
koeficijent dinamičke viskoznosti $\eta = F/(S \cdot (dv/dz))$ [Pas = Ns/m² = kg/sm]
- Mogu biti i **bezdimenzione**:
apsolutni indeks prelamanja $n = c/v$
Poasonov broj $\mu = (\Delta d/d)/(\Delta \ell/\ell)$
- Izuzetak su jedinice za:
ugao u ravni [rad]
prostorni ugao [sr]

12

Fizičke veličine

- **Jedinice** fizičkih **veličina** se vrlo često ne koriste u svom osnovnom obliku, već višestruko umanjene ili uvećane. Milimetar, nanosekunda ili mikrofarad su jedinice koje sadrže prefikse *mili-*, *nano-* i *mikro-* i predstavljaju umnoške osnovne jedinice (metar, sekunda, Farad) zasnovane na različitim eksponentima broja 10.

red veličine	prefiks	oznaka
10^{-12}	piko-	p
10^{-9}	nano-	n
10^{-6}	mikro-	μ
10^{-3}	mili-	m
10^{-2}	centi-	c
10^{-1}	deci-	d

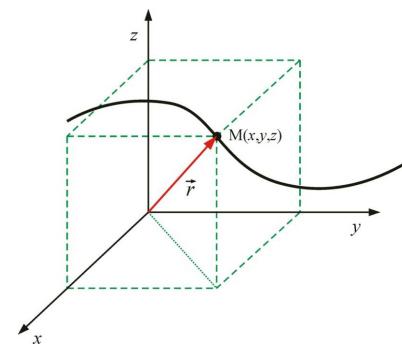
red veličine	prefiks	oznaka
10^1	deka-	da
10^2	hekt-	h
10^3	kilo-	k
10^6	mega-	M
10^9	giga-	G
10^{12}	tera-	T

13

KINEMATIKA

Osnovni pojmovi kinematike

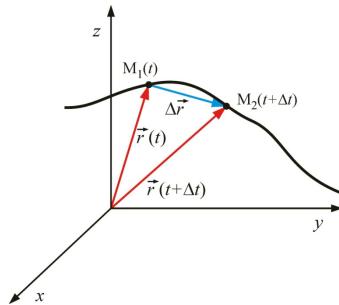
- **Mehaničko kretanje** tela je promena **položaja** tog tela u odnosu na bilo koje drugo telo.
- Da bi se odredio položaj tela koje se kreće (ili miruje) u odnosu na neko drugo telo, koriste se tzv. **referentni sistemi**, najčešće Dekartov pravougli koordinatni sistem (x -, y - i z -osa).
- Referentni sistemi su vezani za “posmatrača” događaja. Mogu ili mirovati ili se kretati (ravnomerno ili ubrzano).
- Referentni sistemi koji **miruju** ili se **ravnomerno kreću** su tzv. **inercijalni** referentni sistemi, a oni koji se **ubrzano kreću** nazivaju se **neinercijalni** referentni sistemi.



14

Osnovni pojmovi kinematike

- **Materijalna tačka** je telo zanemarljivih dimenzija, ali konačne mase. U kinematici nas manje interesuju dimenzije pokretnih tela, a više samo njihovo kretanje i veličine koje ga karakterišu.
- **Vektor položaja** \vec{r} je vektor koji spaja koordinatni početak (“posmatrača” pojave kretanja nekog tela) i datu tačku u koordinatnom sistemu u kojoj se nalazi telo, a usmeren je ka dатој таčки.
- **Linija** koju materijalna tačka opisuje tokom kretanja (skup uzastopnih položaja) predstavlja njenu **putanju**. Ili, to je skup tačaka kroz koje telo prolazi tokom svog kretanja.



15

Osnovni pojmovi kinematike

- **Deo putanje** Δs koji telo pređe za vreme Δt između dve tačke (npr. M_1 i M_2) je **predeni put**. To je rastojanje između krajnjeg i početnog položaja tela mereno duž putanje.

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

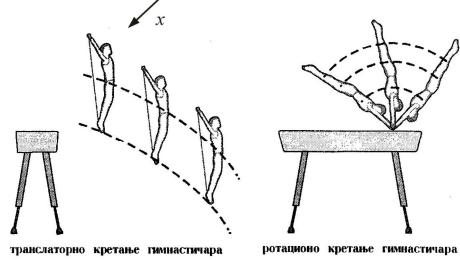
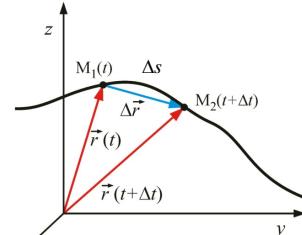
- **Vektor pomeraja** $\Delta\vec{r}$ je vektor koji spaja **početni** i **krajnji** položaj tačke u kretanju (najkraće rastojanje između početnog i krajnjeg položaja).

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

- Svako **složeno** kretanje se može predstaviti kao kombinacija **translacija** i **rotacija**.

Translacija – svaka prava (ili ravan) koja spaja tačke u telu koje se translatorno kreće ostaje sama sebi paralelna.

Rotacija – sve tačke tela koje rotira kreću se po koncentričnim krugovima čiji centri su na istoj pravoj – **osu rotacije**.



16

Vrste kretanja. Brzina.

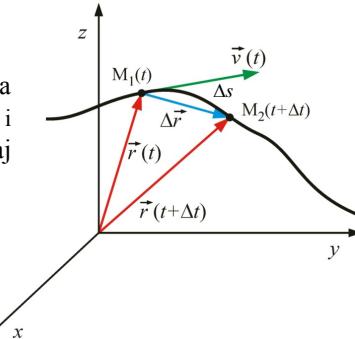
- **Brzinom** kretanja tela se, u opštem smislu, karakteriše pređeni put u jedinici vremena.
- **Srednja putna brzina** je skalarna veličina – količnik ukupnog pređenog puta Δs koje telo pređe za neko vreme Δt i vremena kretanja Δt .

■ Jedinica je [m/s].

$$v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

- **Srednja vektorska brzina** je vektorska veličina – količnik vektora pomeraja $\Delta \vec{r}$ (spaja početni i krajnji položaj) i vremena u toku kojeg je pomeraj napravljen Δt .

$$\vec{v}_{sv} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$



17

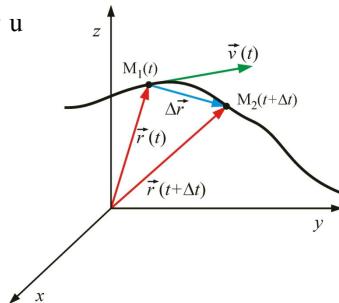
Trenutna brzina

- **Trenutna brzina** tela (brzina pokretne materijalne tačke) u datom trenutku t je srednja vektorska brzina u beskonačno malom intervalu vremena.
- **Vektor trenutne brzine** ima pravac **tangente** na putanju.
- **Intenzitet trenutne brzine** se, na osnovu činjenice da je dužina pomeraja jednaka pređenom putu Δs u slučaju da $\Delta t \rightarrow 0$, definiše kao:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \Delta t \rightarrow 0$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d \vec{r}}{dt}$$

$$|\vec{v}| \equiv v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

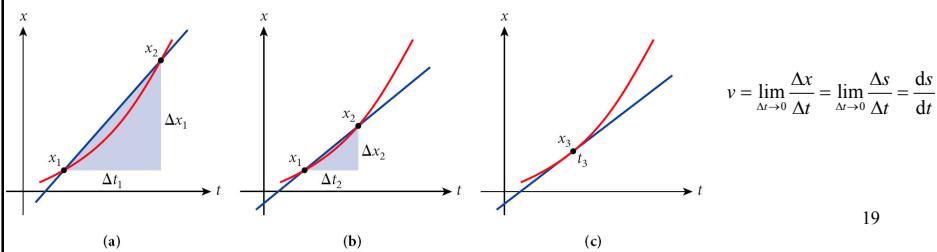


18

Trenutna brzina

Primer objašnjenja trenutne brzine (pravolinijsko neravnomerno kretanje):

- na grafičkoj zavisnosti položaja tela (x -koordinata; udaljenost) u funkciji vremena (t) zapaža se neravnomernost kretanja; Δx_1 je udaljenost između početnog (x_1) i krajnjeg položaja (x_2) tela, koju telo prede za interval vremena Δt_1 ; **intenzitet srednje** brzine u toku ovog intervala vremena je količnik $\Delta x_1/\Delta t_1$ – odgovara nagibu prave koja spaja x_1 i x_2 ;
- vremenski interval se smanjuje na Δt_2 , a rastojanje postaje Δx_2 ; **intenzitet srednje** brzine u toku ovog kraćeg intervala vremena je količnik $\Delta x_2/\Delta t_2$ – nagib prave od x_1 do x_2 je drugičiji;
- u graničnom slučaju, kada vremenski interval Δt teži beskonačno maloj vrednosti, u tački na mestu x_3 koordinatne x -ose i u trenutku t_3 od početka merenja vremena, **intenzitet trenutne** brzine ima neku končanu vrednost ds/dt (ili, ako se put označava sa s , ds/dt), kojoj odgovara **nagib tangente** na krivu $x=f(t)$ u tački sa koordinatama (t_3, x_3) .

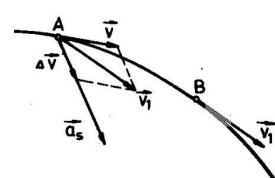


19

Ubrzanje

- **Ubrzanje** je veličina koja karakteriše **promenu vektora** brzine (u bilo kom pogledu, po **intenzitetu** i/ili **pravcu**) u jedinici vremena.
- **Srednje ubrzanje** je vektorska veličina – količnik promene brzine $\Delta \vec{v}$ i vremenskog intervala Δt u toku kojeg je ta promena načinjena.

$$\vec{a}_s = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$



$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad \Delta t \rightarrow 0$$

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d \vec{v}}{dt}}$$

- **Trenutno ubrzanje** je granična vrednost srednjeg ubrzanja kada vremenski interval $\Delta t \rightarrow 0$.
- Jedinica za ubrzanje je $[m/s^2]$.
- **Vektor ubrzanja** (srednjeg ili trenutnog) ima **pravac** vektora promene brzine $\Delta \vec{v}$.
- **Intenzitet trenutnog ubrzanja** se definiše kao:

$$|\vec{a}| \equiv a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d^2 r}{dt^2} * \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}}$$

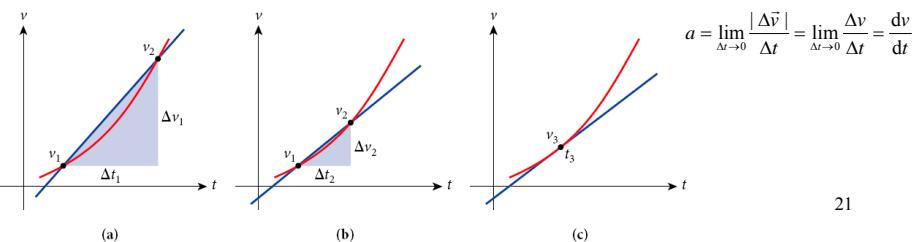
20

* Čita se: drugi izvod vektora pomeraja po vremenu.

Ubrzanje

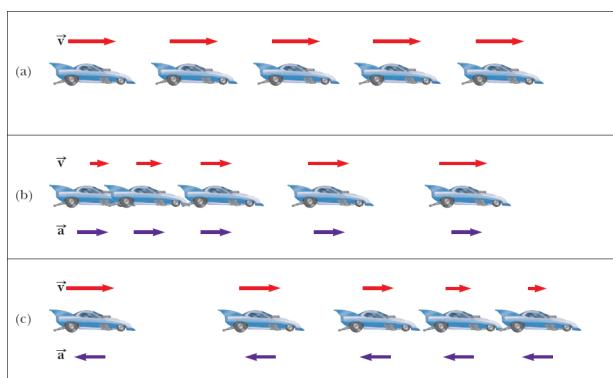
Primer objašnjenja trenutnog ubrzanja (pravolinijsko neravnomerno kretanje):

- na grafičkoj zavisnosti intenziteta brzine tela (v) u funkciji vremena (t) zapaža se neravnomernost u promeni brzine; Δv_1 je ukupna promena intenziteta brzine tela u toku intervala vremena Δt_1 ; **intenzitet srednjeg** ubrzanja u toku ovog intervala vremena je količnik $\Delta v_1/\Delta t_1$ – odgovara nagibu prave koja spaja v_1 i v_2 ;
- vremenski interval se smanjuje na Δt_2 , a promena brzine postaje Δv_2 ; **intenzitet srednjeg** ubrzanja u toku ovog kraćeg intervala vremena je količnik $\Delta v_2/\Delta t_2$ – nagib prave od v_1 do v_2 je drukčiji;
- u graničnom slučaju, kada vremenski interval Δt teži beskonačno maloj vrednosti, u tački na krivoj $v=f(t)$ sa koordinatama (t_3, v_3) , dakle u trenutku t_3 od početka merenja vremena, **intenzitet trenutnog** ubrzanja ima neku konačnu vrednost dv/dt , kojoj odgovara **nagib tangente** na krivu $v=f(t)$ u dатој таčки.



Ubrzanje

- Ubrzanje može biti **pozitivno** (vektor brzine i vektor ubrzanja imaju **isti smer**) ili **negativno** (tzv. usporenje – vektor brzine i vektor ubrzanja imaju **suprotne smerove**).



a) brzina se ne menja po intenzitetu;

b) brzina ravnomerno raste (ubrzanje ima konstantnu vrednost);

c) brzina ravnomerno opada (ubrzanje ima konstantnu vrednost, ali je suprotno usmereno smeru kretanja);

- Ubrzanje postoji i kada **nema** promene **intenziteta** vektora brzine. Dovoljno je da vektor brzine v menja **pravac** u prostoru.

Kretanje

- Kretanje se, **prema obliku putanje**, može podeliti na:
 - pravolinijsko, i
 - krivolinijsko.
- Prema **brzini**, kretanje može biti:
 - ravnomerne, jednoliko (brzina ne menja intenzitet ni pravac), i
 - ubrzano, promenljivo (brzina menja intenzitet i/ili pravac).
- Pravolinijsko kretanje može biti **ravnomerne** (brzina ne menja *intenzitet*) ili **promenljivo** (*intenzitet* brzine se menja)
- Krivolinijsko kretanje je **uvek promenljivo**, jer brzina menja svoj pravac u prostoru u toku kretanja tela.

23

Pravolinijsko (jednodimenzionalno) kretanje – ravnomerne kretanje

- Kretanje kod kojeg je **putanja prava linija** je pravolinijsko. Vektori **brzine** i **ubrzanja** (ako je $a \neq 0$) se poklapaju sa pravcem kretanja, a **intenziteti** trenutnih ovih veličina su (s obzirom da je dužina vektora pomeraja Δr jednaka pređenom putu s):

$$v = \frac{ds}{dt} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

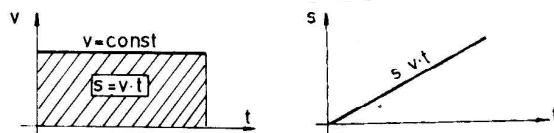
- Najjednostavniji oblik pravolinijskog kretanja je ravnomerne (jednoliko, uniformno) pravolinijsko kretanje – brzina se ne menja ni po **intenzitetu** ni po **pravcu** u toku vremena ($\vec{v} = \text{const.}$). Njen **intenzitet** je ravan količniku pređenog puta s i vremena t :

$$\vec{a} = 0 \Rightarrow v = \frac{s}{t} = \text{const.}$$

24

Pravolinijsko kretanje – ravnomerno kretanje

- Grafici intenziteta brzine v i pređenog puta s u funkciji vremena:



- Zakon položaja** je funkcija promene položaja tela (materijalne tačke) sa vremenom, $x = f(t)$.
- U slučaju pravolinijskog ravnomernog kretanja zakon položaja glasi *:

$$x = x_0 + vt$$

ili prosto (ako uzmem da je početni položaj (početna kordinata) tela $x_0 = 0$):

$$x = vt$$

* Kod pravolinijskog kretanja koordinatnu osu (recimo x -osu) na kojoj se prati položaj tela usmeravamo duž pravca kretanja.

25

Pravolinijsko kretanje – jednako-ubrzano kretanje

- Kretanje po prvoj liniji pri kojem je ubrzanje konstantno ($\vec{a} = \text{const.}$) je **jednako-ubrzano pravolinijsko kretanje**. Ubrzanje može biti **pozitivno** ili **negativno** (usporenje; intenzitet brzine se smanjuje u toku vremena).
- Zakon brzine** je, u opštem slučaju, funkcija koja pokazuje zavisnost brzine od vremena, $\vec{v} = f(t)$. U slučaju pravolinijskog kretanja to je vremenska zavisnost intenziteta brzine $v = f(t)$
- Za slučaj da je početna brzina (brzina u trenutku $t=0$ s) $v_0 \neq 0$, zakon brzine glasi:

$$v = v_0 + at$$

- Zakon položaja** u slučaju pravolinijskog jednako-ubrzanog kretanja glasi:

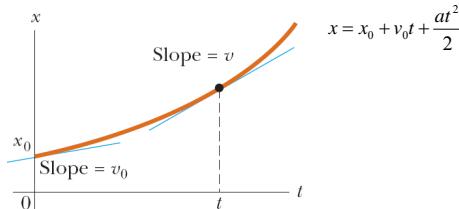
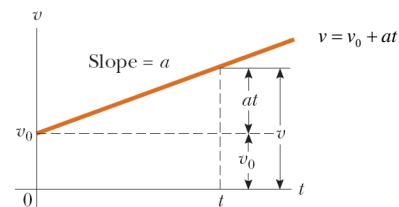
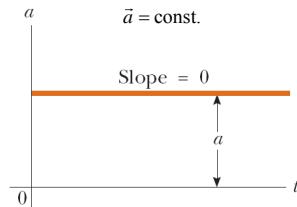
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad \text{za } x_0 = 0 \Rightarrow x = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

26

Pravolinijsko kretanje – jednako-ubrzano kretanje

- Veza između krajne (v) i početne brzine (v_0) i pređenog puta x je:
$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

- Srednja brzina kod jednako-ubrzanog pravolinijskog kretanja je:
$$v_s = \frac{v_0 + v}{2}$$

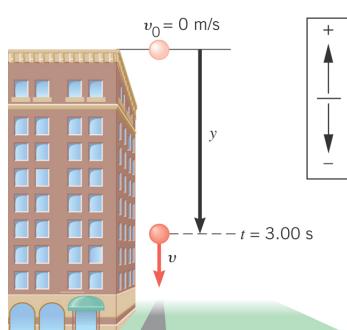


27

Primeri pravolinijskog jednako-ubrzanog kretanja

1. Slobodno padanje

- Slobodno padanje tela je pravolinijsko (jednodimenzionalno) i jednako-ubrzano kretanje tela **u polju sile Zemljine teže bez početne brzine** ($v_0=0$).
- Intenzitet** ubrzanja tela približno iznosi $a \equiv g = 9.81 \text{ m/s}^2$ i pod izvesnim uslovima se može smatrati konstantnom veličinom (u blizini površine Zemlje, uz zanemarivanje sile otpora vazduha, ...). **Smer** ubrzanja je ka površini Zemlje (tačnije ka centru Zemlje).



- Intenzitet brzine v , položaj tela na vertikalnoj, y -osi duž koje se posmatra kretanje tela i pređeni put (računajući od mesta gde se telo pušta da slobodno pada, a to je visina h):

$$v = gt \quad y = h - \frac{gt^2}{2} \quad s = \frac{gt^2}{2}$$

28

Slobodno padanje

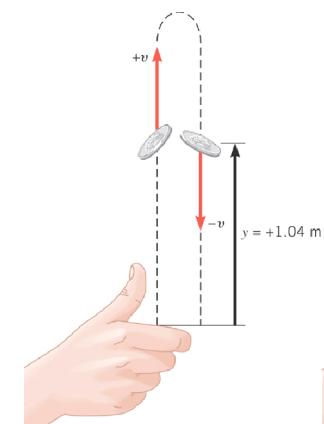


- Kada nema drugih uticaja, već deluje samo sila Zemljine teže na ubrzanje tela, tada **sva tela padaju jednako** – ako su istovremeno puštena da padaju, istovremeno i stižu do površine.
- Drugim rečima, sva tela prilikom slobodnog padanja imaju jednako ubrzanje (g).
- U opštem slučaju, telo može slobodno padati i pod uticajem **gravitacione sile** drugih astronomskih objekata (na drugim planetama, satelitima, ...), ali drugim ubrzanjem u odnosu na ubrzanje g koje tela imaju na Zemlji usled delovanja sile Zemljine teže.

29

2. Vertikalni hitac

- Vertikalni hitac je jednodimenzionalno (pravolinjsko) i jednakoubrzano kretanje tela **u polju sile Zemljine teže sa nekom početnom brzinom** ($v_0 \neq 0$) – telo je bačeno u **vertikalnom** pravcu (naviše ili naniže nekom početnom brzinom).
- Intenzitet ubrzanja tela je takođe $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, a **smer** ubrzanja je ka površini Zemlje (tačnije ka centru Zemlje).



- **Smer brzine**, međutim, može biti i suprotan od **smera ubrzanja** – kada se telo baca naviše (**vertikalni hitac naviše**), brzina je u početku usmerena u pozitivnom smeru y -ose duž koje se posmatra položaj bačenog tela – telo usporava dok ne dostigne maksimalnu visinu (brzina tela u tom trenutku jednaka je nuli), a zatim slobodno pada.
- Kod **vertikalnog hica naniže**, brzina tela i ubrzanje uvek imaju isti smer i brzina se neprekidno povećava.

30

Vertikalni hitac

- Zakon brzine $v=f(t)$ i zakon položaja $y=f(t)$ pri vertikalnom hodu sa visine h :

- Hitac naniže

$$v = v_0 + gt$$

$$y = h - v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$



- Hitac naviše

$$v = v_0 - gt$$

$$y = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

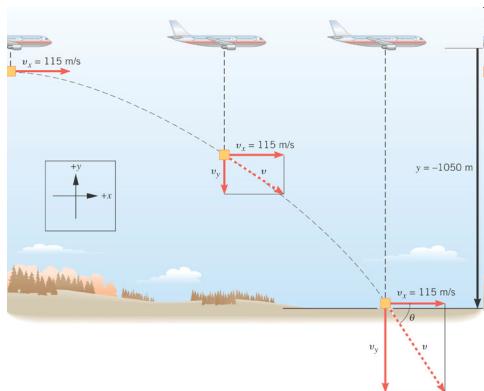
U momentu pada na zemlju je koordinata tela **y=0**;

u najvišoj tački putanje je **intenzitet brzine v=0**.

31

Dvodimenzionalno (krivolinijsko) kretanje u polju sile Zemljine teže – Horizontalni hitac

- Horizontalni hitac je dvodimenzionalno (krivolinijsko) i složeno kretanje tela **u polju sile Zemljine teže sa nekom početnom brzinom** ($v_0 \neq 0$) – telo je bačeno (lansirano, ispaljeno) u horizontalnom pravcu sa neke visine.



- U slučaju dvodimenzionalnog kretanja (po krivolinijskoj putanji), **brzina** tela se u svakom momentu može razložiti na **dve komponente** – duž x - i duž y -ose koordinatnog sistema vezanog za posmatrača (obično je to Zemljina površina).

32

Horizontalni hitac

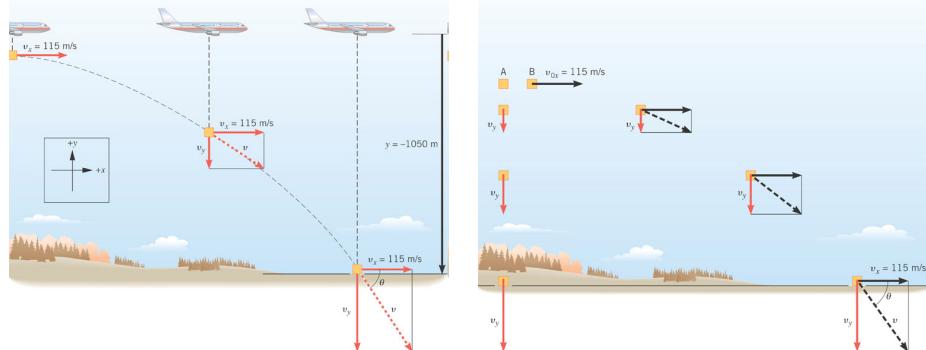
- Kretanje duž **x-ose** je **ravnomerno** – brzina je konstantna.
- Kretanje duž **y-ose** je **jednako-ubrzano** – brzina raste.
(slobodno padanje – ubrzanje je g ; znak “–” ima samo fizički značaj – brzina v_y duž y-ose je usmerena **suprotno** od pozitivnog smera y-ose).

$$v_x = v_0$$

$$v_y = -gt$$

$$x = v_0 t$$

$$y = h - \frac{gt^2}{2}$$



* h – je visina sa koje je bačeno telo po putanji horizontalnog hica.

33

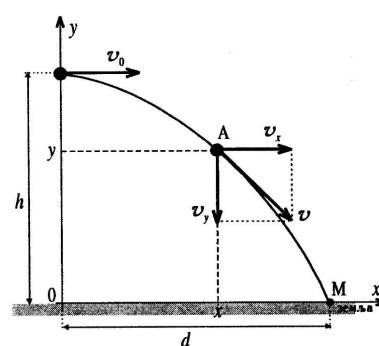
Horizontalni hitac

- Putanja tela koje se kreće u horizontalnom hicu je **parabola**.
- Zakon (jednačina) putanje**, (zavisnost y-koordinate položaja tela koje se kreće po putanji horizontalnog hica od x-koordinate):
- U svakom momentu intenzitet brzine tela v može se naći na osnovu poznavanja komponenti brzine duž odgovarajućih osa:

$$y = h - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

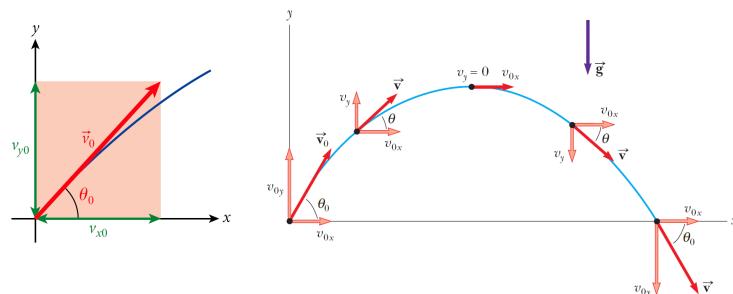
U momentu pada na zemlju, y-koordinata tela je **y=0** (ukoliko tako postavimo koordinatni sistem)
⇒ domet x_D , brzina v_D , ugao putanje α_D .



34

Kosi hitac

- Kosi hitac je dvodimenzionalno (krivolinijsko) i složeno kretanje tela **u polju sile Zemljine teže sa nekom početnom brzinom** ($v_0 \neq 0$) – telo je bačeno pod nekim uglom u odnosu na horizontalni pravac. Kretanje se može opisati kao superpozicija dva kretanja – duž x - i duž y -koordinatne ose.
- Duž x -ose kretanje je **ravnomerno** – brzina je konstantna.
- Duž y -ose kretanje je **jednako-promenljivo** – ako je ugao izbacivanja pozitivan, brzina duž y -ose prvo opada (vertikalni hitac naviše), a nakon dostizanja maksimalne visine, brzina menja smer i raste po intenzitetu (kao kod slobodnog padanja); u slučaju negativnog ugla, brzina duž y -ose stalno raste (vertikalni hitac naniže).



35

Kosi hitac

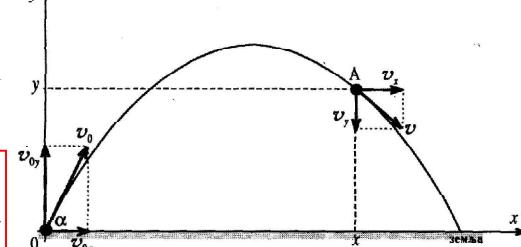
- Putanja tela u kosom hicu je **parabola**.
- Vremenska promena komponenti **brzina i koordinata tela:**

$$v_x = v_{0x} \Rightarrow$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y = v_{0y} - gt \Rightarrow$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$



$$x = v_{0x}t \Rightarrow$$

$$x = v_0 t \cos \alpha$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow$$

$$y = y_0 + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

- **Zakon (jednačina) putanje $y=f(x)$** ima oblik:

$$y = y_0 + x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

* y_0 – je visina sa koje je bačeno telo po putanji kosog hica.

36

Kosi hitac

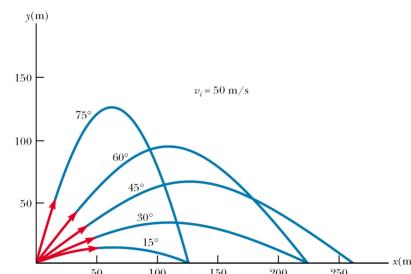
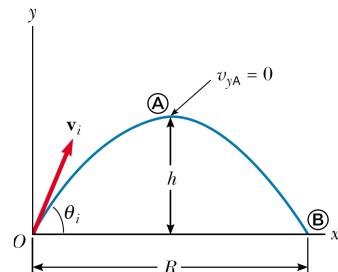
- U najvišoj tački putanje je $v_y = 0$ ($v = v_x$) \Rightarrow maksimalna visina y_{\max} . Pod uslovom da je $y_0 = 0$:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

- U momentu pada na zemlju je $y=0 \Rightarrow$ domet x_D , brzina v_D , ugao putanje α_D :

$$x_D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

- Domet zavisi od početne brzine tela (v_0) i od ugla α pod kojim je ispaljen projektil po putanji kosog hica.



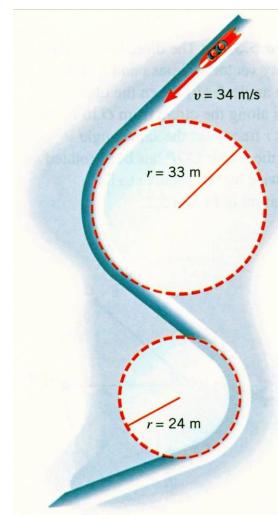
* Pretpostavlja se da je otpor vazduha zanemarljiv.

37

Krivolinijsko kretanje.

Kinematika rotacionog kretanja. Kružno kretanje.

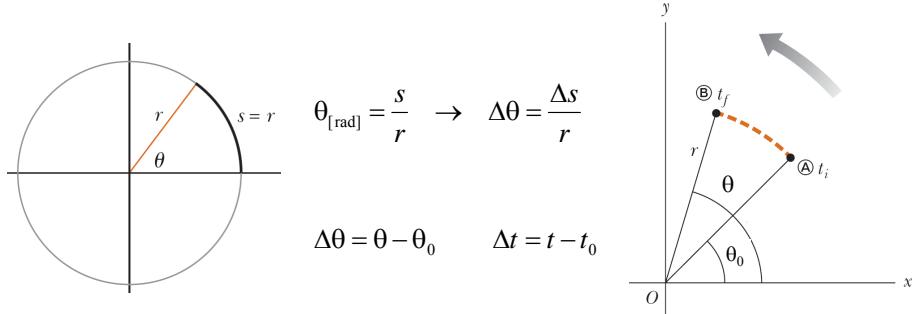
- Svako krivolinijsko kretanje se može predstaviti kao kretanje po **kružnici**, pri čemu se poluprečnik kružnice menja u toku kretanja.
- Položaj materijalne tačke pri kretanju po kružnici je dat **radijus-vektorom**.
- Svako krivolinijsko kretanje je i **ubrzano** kretanje, jer se brzina menja barem po pravcu.



38

Kružno kretanje.

- Položaj materijalne tačke pri kretanju po kružnici dat je **radius-vektorom**, koji polazi od centra kružne putanje, a završava na mestu materijalne tačke.
- Ugaoni pomeraj $\Delta\theta$** je ugao između početnog (θ_0) i krajnjeg (θ) položaja radius-vektora. Uglovi se izražavaju u radijanima (rad).



* Ugao od 1 rad je onaj za koji je odgovarajuća dužina luka na kružnici jednaka njenom poluprečniku ($s=r$), $\theta=s/r=1$ rad.

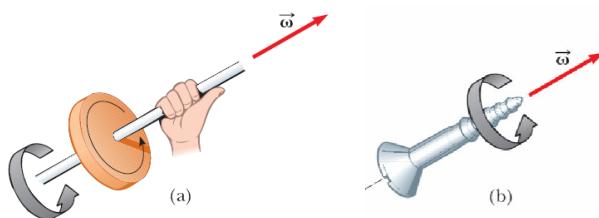
39

Ugaona brzina ω

- Srednja ugaona brzina ω_s** je količnik ugaonog pomeraja i vremena u toku kojeg je taj ugao opisan. Jedinica je [rad/s].
- Trenutna ugaona brzina ω** je jednaka srednjoj ugaonoj brzini kada vremenski interval $\Delta t \rightarrow 0$. Ugaona brzina je pozitivna, ako se θ povećava, a negativna, ako se θ smanjuje.
- Trenutna** ugaona brzina je **vektor** čiji se **pravac** poklapa sa pravcem ose rotacije – normalan je na ravan rotacije. **Smer** vektora je, prema dogovoru, određen pravilom desnog zavrtanja.

$$\omega_s = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$



40

Ugaono ubrzanje α

- **Ugaono ubrzanje** je posledica ubrzanog kretanja materijalne tačke po kružnici (povećanje ili smanjenje intenziteta periferne brzine v), odnosno **promene intenziteta ugaone brzine ω** .
- **Srednje ugaono ubrzanje α_s** je količnik promene ugaone brzine i vremenskog intervala u toku kojeg je došlo do te promene.
- Jedinica je $[\text{rad/s}^2]$ ili samo $[\text{s}^{-2}]$.
- **Trenutno ugaono ubrzanje α** je srednje ugaono ubrzanje za graničan slučaj kada $\Delta t \rightarrow 0$.
- **Trenutno** ugaono ubrzanje $\bar{\alpha}$ je **vektor** čiji se **pravac** poklapa sa pravcem ose rotacije, dakle normalan je na ravan kružnice i kolinearan sa vektorom ugaone brzine $\vec{\omega}$. **Smer** vektora ugaonog ubrzanja zavisi da li se ugaona brzina povećava (istи smer sa vektorom ugaone brzine) ili smanjuje (suprotan smer).
- Ni **srednja** ugaona brzina ω_s , ni **srednje** ugaono ubrzanje α_s **nisu vektorske veličine**, jer se ugaoni pomeraji $\Delta\theta$ ne mogu sabirati kao vektori da bi se na kraju dobio ukupan ugao rotacije vektora položaja.

$$\alpha_s = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

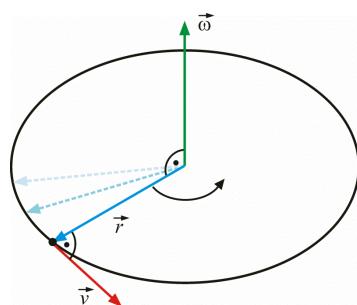
$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

41

Veza između linearnih i ugaonih veličina

- Veza između **intenziteta periferne brzine** v kretanja materijalne tačke (tela) po kružnici i **intenziteta ugaone brzine** ω radijus vektora te materijalne tačke:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta s/r}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{r\Delta t} = \frac{v}{r} \Rightarrow v = \omega r$$



- **Vektor** periferne brzine \vec{v} leži u ravni kružnice, kao i radijus-vektor \vec{r} , a vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$ je tada normalan na ravan kružnice. Prema pravilu vektorskog proizvoda, veza između ugaone brzine radijus vektora i periferne brzine date je izrazom:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

42

Veza između linearnih i ugaonih veličina

- Slično tome, veza između intenziteta **ubrzanja** a materijalne tačke koja se kreće po kružnici (dakle, periferna brzina v se menja po intenzitetu) i intenziteta **ugaonog ubrzanja** α radijus vektora dobija se na sledeći način:

$$a_{\tau} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{r \Delta \omega}{\Delta t} = r \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = r \alpha \Rightarrow a_{\tau} = r \alpha$$

- Pošto je ubrzanje a_{τ} ovde posledica promene **intenziteta periferne brzine**, vektor ove veličine (\vec{a}_{τ}) ima pravac **tangente** na kružnu putanju (kao i vektor periferne brzine) – iz tog razloga nosi naziv **tangencijalno ubrzanje**. Smer zavisi od toga da li se periferna brzina povećava ili smanjuje u toku vremena.

$$\vec{a}_{\tau} = \frac{dv}{dt} \vec{v}_o$$

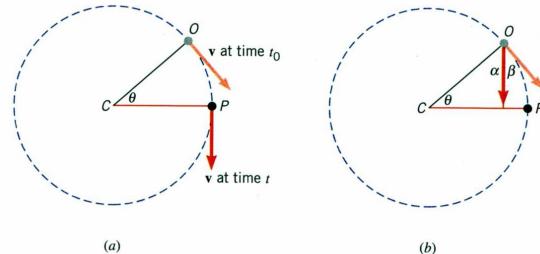
- Oznaka a_{τ} ističe da ovo ubrzanje treba razlikovati od tzv. **normalnog** (centripetalnog ubrzanja) koje je posledica promene **pravca periferne brzine**.

* \vec{v}_o je jedinični vektor periferne brzine.

43

Normalno i tangencijalno ubrzanje kod kružnog kretanja

- U opštem slučaju, **vektor ubrzanja** tela koje se kreće po kružnoj putanji ima dve komponente:
 - **tangencijalno** ubrzanje \vec{a}_{τ} , koje ima pravac tangente na putanju, i
 - **normalno** (centripetalno) ubrzanje \vec{a}_n , koje je normalno na tangentu u posmatranoj tački.
- Kod **ravnomernog** krivolinijskog kretanja (intenzitet periferne brzine se ne menja, već samo **pravac**) **vektor ubrzanja** ima pravac normalan na tangentu putanje, tj. **usmeren je ka centru krivine putanje** i radi se o **normalnom** (centripetalnom) ubrzaju.



(a)

(b)

44

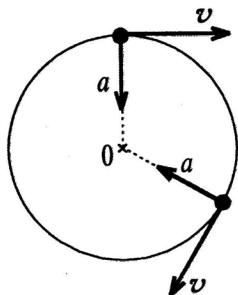
Ravnomerno (uniformno) kružno kretanje

- Periferna brzina v ima stalan intenzitet, $v=\text{const}$.
- Ugaona brzina ω takođe ima konstantni intenzitet, $\omega=\text{const}$.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

pun krug $\theta = 2\pi \text{ rad}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi v \quad \left(v = \frac{1}{T} \right)$$

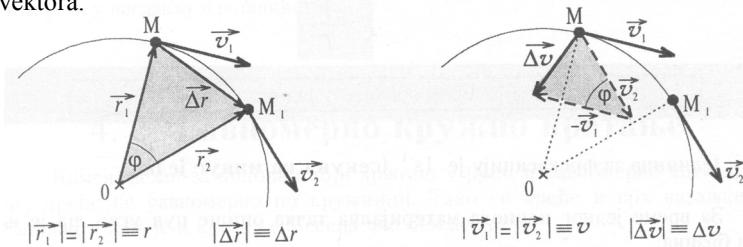


- Ravnomerno kružno kretanje je **periodično**, a **period rotacije T** je vreme potrebno da radijus-vektor opiše pun krug od 2π rad.
- **Frekvencija** ili učestanost obrtanja v (ili f) obrnuto je srazmerna periodu obrtanja T .

45

Ravnomerno kružno kretanje

- Zbog **neprekidne promene pravca** vektora periferne brzine v , postoji **normalno ubrzanje** intenziteta a_n , usmereno uvek ka centru rotacije, suprotno od radijusa vektora.



- Na osnovu **sličnosti trouglova** i **definicije** normalnog ubrzanja a_n i periferne brzine v , sledi:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} * \Rightarrow \Delta v = \frac{v}{r} \Delta r \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Intenzitet normalnog ubrzanja:

Vektor normalnog ubrzanja:

$$a_n = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad v = \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad v = \omega r \quad \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

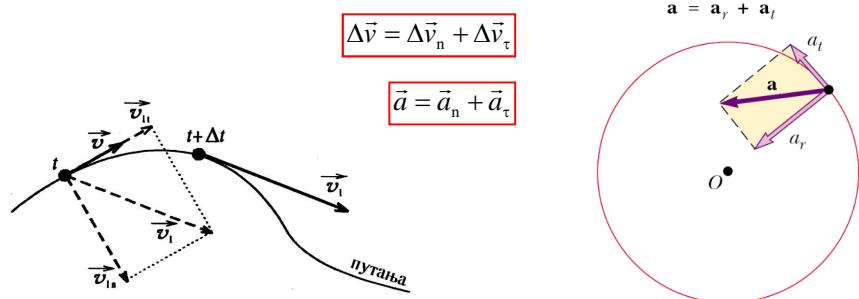
$$\vec{a}_n = -\frac{v^2}{r} \vec{r}_0$$

* Vektor $\overrightarrow{\Delta v}$ je posledica promene pravca vektora periferne brzine.

46

Jednako-ubrzano kružno kretanje

- Ako se **menja i intenzitet brzine**, a ne samo pravac, **promena brzine** tela koje se kreće po kružnici ima dve komponente, a takođe i **ubrzanje** koje je opisuje:



- Promena brzine u pravcu normale (brzina promene pravca) definiše **normalno ubrzanje**, a u pravcu tangente (brzina promene intenziteta) - **tangencijalno ubrzanje**.

* Vektor $\vec{\Delta v}$ (posledica promene pravca vektora periferne brzine) je ovde zamenjen oznakom $\Delta \vec{v}_n$.

47

Jednako-ubrzano kružno kretanje

- Najprostiji oblik **neravnomernog kružnog kretanja** je **jednako-ubrzano** (ili jednako-usporeno) kretanje u toku kojeg se, pored **pravca**, i **intenzitet** periferne brzine (pa tako i **ugaone** brzine) menjaju **pravilno** u toku vremena. Drugim rečima, tangencijalno ubrzanje a_τ ima konstantni intenzitet.
- Tangencijalno ubrzanje a_τ je **vektor** kolinearan tangenti na kružnicu.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_\tau = r\alpha$$

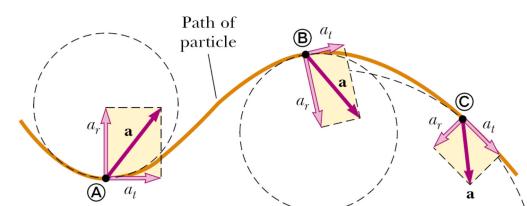
$$\bar{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{v}_o$$

* \vec{v}_o je jedinični vektor periferne brzine.

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

$$a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2} = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

- Kretanje po krivoj liniji je, praktično, stalno kretanje po kružnim putanjama, čiji se **poluprečnici** stalno menjaju, a takođe i **brzina i ubrzanja** tela koje se kreće.



48

Jednako-ubrzano kružno kretanje

- Pri **jednako-ubrzanom kružnom** kretanju mogu se definisati izrazi analogni onim kod **jednako-ubrzanog pravolinjiskog** kretanja.

$$\omega = \omega_0 \pm \alpha t$$

$$v = v_0 \pm at$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t \pm \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$x = x_0 + v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm 2\alpha\theta$$

$$v^2 = v_0^2 \pm 2ax$$

Dinamika.

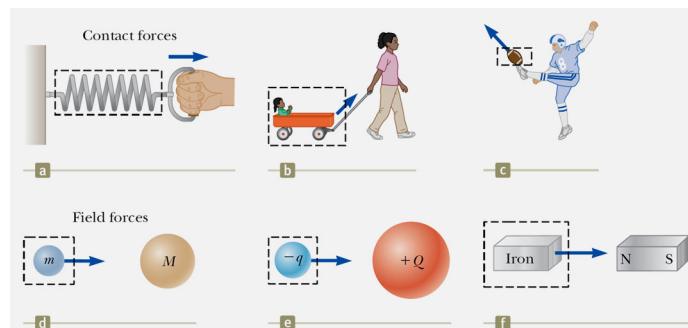
Sila

- **Dinamika** je deo mehanike koji se bavi vezom između kretanja tela i sila koje deluju na njih, tj. **uzrocima** promene stanja kretanja tela (pri čemu je i mirovanje neko stanje kretanja).
- Do **promene stanja kretanja** (brzine) nekog tela može doći **samo pri interakciji**, uzajamnom delovanju tela sa drugim telima, odnosno pri delovanju sile na telo.
- Silom se može uticati ne samo na promenu **intenziteta** brzine kretanja tela već i **pravca** vektora brzine → sila je **vektorska** veličina.
- Silom se može uticati i na promenu **oblika** tela.
- **Sila** je **kvantitativna mera interakcije** (međusobnog delovanja) tela, tj. izražava intenzitet interakcije (jedinica je Njutn, [N]).

50

Sila

- **Sile** mogu biti:
 - **kontaktne**, kada pri interakciji postoji dodir između tela, i
 - **bezkontaktne**, kada se interakcija ostvaruje na daljinu, tj. putem **fizičkog polja** (redosled prema intenzitetu: **jaka nuklearna sila** – između subatomnih čestica; **elektromagnetna sila** – između nanelektrisanja; **slaba nuklearna sila** – pojavljuje se u procesima radioaktivnog raspada; **gravitaciona sila** – između materijalnih objekata).

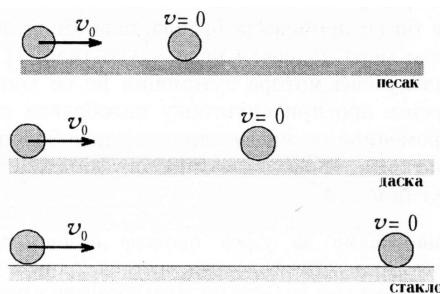


51

Njutnovi zakoni kretanja – I Njutnov zakon

Primer 1:

- Slika prikazuje **različit** uticaj sile trenja na kretanje istog tela (koje se kreće u početku istom brzinom) po različitim podlogama – postoji, dakle, **interakcija** između kontroljajućeg tela i podloge.
- Podloga, preko sile trenja, utiče na **promenu stanja kretanja**.
- U slučaju da je podloga **glatka** (da nema sile trenja) telo bi nastavilo kretanje nesmanjenom brzinom.



* Isak Njutn, engleski fizičar i matematičar (1642-1727).

52

Njutnovi zakoni kretanja – I Njutnov zakon

▪ I Njutnov zakon - zakon inercije

Svako telo zadržava stanje mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja sve dok drugo telo svojim delovanjem to stanje ne promeni, tj. dok ne interaguje sa drugim telom.

▪ Ili:

Brzina tela ostaje konstantna po intenzitetu i pravcu sve dok neka rezultantna sila, različita od nule, ne deluje na njega.

- Rezultantna sila** – je vektorska suma svih spoljašnjih sila koje deluju na neko telo.
- Spoljašnje sile potiču od okoline tela.
- Unutrašnje sile potiču od samog objekta i ne mogu promeniti brzinu tela (osim kada se radi o rotaciji tela).

53

Masa i inertnost. Količina kretanja.

- **Prirodna tendencija** tela da ostane u stanju mirovanja ili ravnomernog kretanja po pravoj liniji u odsustvu spoljašnje sile je **inertnost** i jedna je od osnovnih osobina tela.
- **Masa** tela je **kvantitativna mera inertnosti**. Što je veća masa tela, to je teže promeniti stanje njegovog kretanja. To je osobina tela **nezavisna** od uticaja okoline i od metode merenja. Jedinica za masu je [kg].
- **Inercija** je pojam koji se odnosi na mirovanje ili kretanje tela bez obzira na njihovu masu, a **inertnost** je opiranje promeni stanja kretanja.
- Brzina je osnovna **kinematička** veličina koja karakteriše telo u kretanju.
- Pri promeni brzine dolazi do izražaja inertnost tela, pa se **masa**, kao njena mera, i **brzina** javljaju zajedno u novoj, kompleksnijoj veličini koja bolje **opisuje kretanje**. To je **količina kretanja k** – vektor, koji se dobija kao proizvod mase i brzine tela (jedinica za količinu kretanja je [kgm/s]):

$$\vec{k} = m \cdot \vec{v}$$

54

Matematički izraz I Njutnovog zakona

- Suština I Njutnovog zakona je u tome što govori ne o tome šta se dešava sa telom kada nema spoljašnjih sila već što se dešava kada one **prestaju** da deluju.
- Nakon **prestanka** delovanja **spoljašnjih sila**, tj. kada rezultanta spoljašnjih sila postane jednaka nuli, a kada se vrši posmatranje ponašanja tela u **inercijalnom** referentnom sistemu, telo koje miruje ostaje u stanju mirovanja, a telo koje se kreće nastavlja kretanje sa konstantnom brzinom i to po pravoj liniji (nepromenjena količina kretanja).

Ukoliko je:

$$\bar{F} = 0 \Rightarrow \bar{a} = 0$$

$$\vec{v} = \text{const.} \Rightarrow m\vec{v} = \text{const.}$$

- Dakle, kada nema sile koje bi delovale na telo, nema ni njegovog ubrzanja, ili obrnuto – telo koje se kreće **ubrzano** mora biti **pod uticajem neke sile**.
- Ovaj Njutnov zakon upravo definiše **sili** kao **uzrok promene stanja kretanja**.

55

Matematički izraz I Njutnovog zakona

- Ovaj zakon važi samo u tzv. **inercijalnim referentnim sistemima**, koji ili miruju ili se **ravnomerno kreću** po pravoj liniji.
- * Referentni sistem je koordinatni sistem u kojem se ili u odnosu na koji se posmatra kretanje nekog tela.
- ** Postoje **neinercijalni** referentni sistemi koji se kreću **ubrzano** i tela čije se kretanje posmatra u takvim sistemima trpe delovanje dodatnih (fiktivnih) tzv. inercijalnih sila, koji su posledica neravnomernog kretanja referentnog sistema.
- Iz I Njutnovog zakona koji definiše **silu** kao **uzrok promene stanja kretanja** proizilazi II Njutnov zakon koji bliže definiše uticaj sile na stanje kretanja.
- **Primer:**
 - Kada se deluje silom \vec{F} na telo mase m (npr. gura se blok po glatkoj površini u horizontalnom pravcu), ono se kreće ubrzanjem \vec{a} .
 - Kada se deluje silom **dvostrukog** intenziteta, eksperiment pokazuje **dvostruko** intenzivnije ubrzanje; trostruko jača sila daje telu trostruko veće ubrzanje $\rightarrow \vec{F} \propto \vec{a}$.
 - Obrnuto, kada se **masa** tela **dvostruko** poveća ($2m$), ubrzanje je **upola** manje; delovanje iste sile na trostruko masivnije telo ($3m$), uzrokuje trostruko manje ubrzanje $\rightarrow \vec{a} \propto 1/m$.

56

II Njutnov zakon - osnovni zakon dinamike

- Ako na telo mase m deluje spoljašnja sila \vec{F} , ubrzanje \vec{a} koje pri tome telo dobija direktno je srazmerno (rezultantnoj) sili koja na njega deluje, a obrnuto srazmerno masi tela.

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

- Ova jednačina je **vektorskog** oblika, a njoj ekvivalentan je sistem jednačina napisan za komponente sile i ubrzanja duž svake koordinatne ose:

$$\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y \quad \sum F_z = ma_z$$

- **NAPOMENA:**

Proizvod $m\vec{a}$ **nije sila**. Sve sile koje deluju na telo vektorski se sabiraju i daju rezultantnu силу (leva strana jednačine) koja je jednaka tom proizvodu.

57

II Njutnov zakon - osnovni zakon dinamike

- Brzina promene količine kretanja tela proporcionalna je sili koja na njega deluje i vrši se u pravcu sile.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

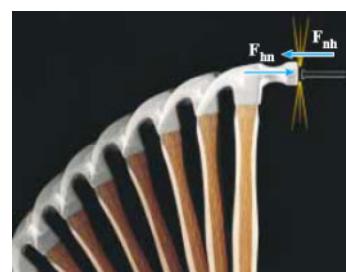
- Sila nije **uzrok** kretanja tela, već je **uzrok promeni stanja kretanja**, koja se meri ubrzanjem – ona menja količinu kretanja tela.
- Masa** u ovim izrazima je **inercijalna masa** i predstavlja **meru odupiranja** tela promeni stanja kretanja – ona je **kvantitativna mera inertnosti** tela.

58

III Njutnov zakon - zakon akcije i reakcije

Primer:

- Udarac čekića o ekser čini da ekser ulazi u zid, ali isto tako ekser deluje na čekić koji usporava svoje kretanje do zaustavljanja. Dakle, udarac čekića izaziva reakciju kod eksra istog intenziteta i pravca, ali u suprotnom smeru.
- Njutn je zapazio da **izolovana sila ne može postojati** – sile uvek postoje **u parovima**.



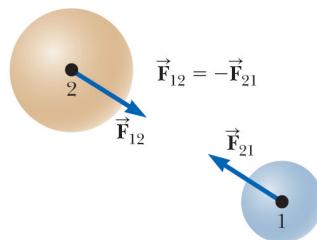
- Ako jedno telo deluje na drugo nekom silom, onda i drugo telo deluje na prvo silom **istog intenziteta i pravca, a suprotnog smera**.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2$$

59

III Njutnov zakon - zakon akcije i reakcije

- Svako delovanje (akcija) stvara uvek **suprotno po smeru i jednako po intenzitetu** protivdelovanje (reakciju), tj. delovanja dva tela jedno na drugo su jednaka i suprotnog smera.



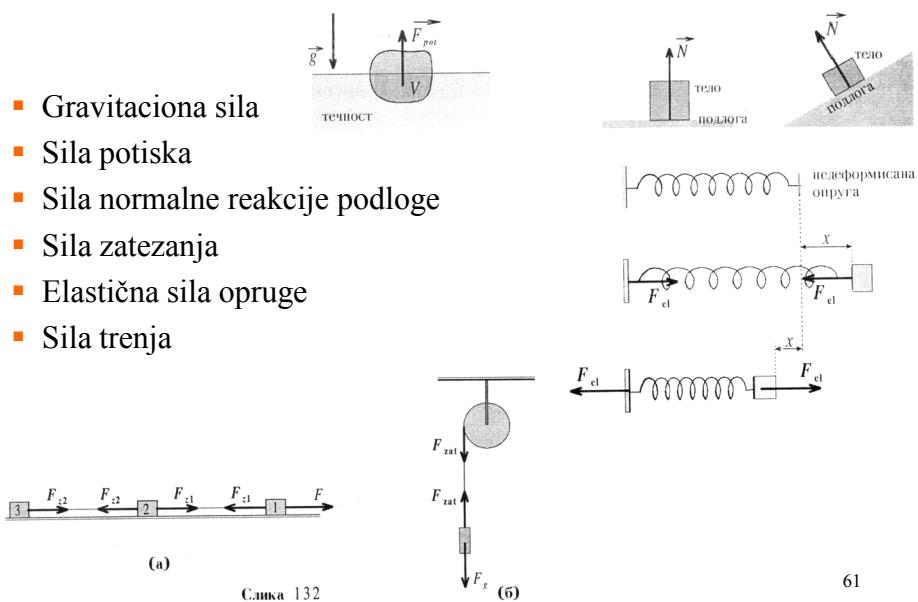
- Svaka sila se može označiti kao sila akcije ili kao sila reakcije na delovanje one druge, sile akcije.
- Sile akcije i reakcije deluju na **različita tela** i uvek su **iste prirode** (kontaktne sile*, električne, gravitacione, itd.).

* Kontaktne sile su, strogo gledano, elektromagnete prirode.

60

Neki tipovi sila u mehanici

- Gravitaciona sila
- Sila potiska
- Sila normalne reakcije podloge
- Sila zatezanja
- Elastična sila opruge
- Sila trenja



Слика 132

61

Gravitaciona sila. Njutnov zakon univerzalne gravitacije.

- Gravitaciona sila je jedna od osnovnih interakcija u prirodi (najslabija) – sila uzajamnog privlačenja između bilo koja dva tela u svemiru.

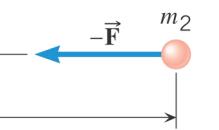
▪ Zakon univerzalne gravitacije:

Bilo koje dve materijalne tačke u prirodi uzajamno se privlače gravitacionom silom: pravac te sile prolazi kroz materijalne tačke, intenzitet je srazmeran masama materijalnih tačaka, a obrnuto srazmeran kvadratu rastojanja između njih.

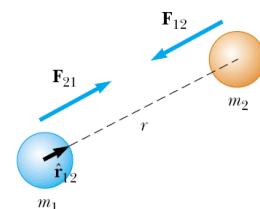


$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\gamma = 6.672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$



$$\bar{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \bar{r}_o$$



$$\gamma - \text{gravitaciona konstanta}$$

\bar{r}_o - jedinični vektor usmeren od m_1 ka m_2

62

Težina tela

- **Težina** ***Q*** nekog objekta na ili iznad površine Zemlje (ili iznad nekog drugog svemirskog tela) je sila kojom telo deluje **na horizontalnu podlogu** na koju je postavljeno, odnosno sila kojom telo **zateže konopac** o koji je okačeno da visi. Težina tela je **posledica i mera gravitacione sile** kojom Zemlja (ili dato svemirsko telo) deluje na objekat.

$$Q = \gamma \frac{m M_Z}{r^2}$$

$r=R_Z$ – na površini Zemlje
 $r=R_Z+h$ – na visini h iznad površine Zemlje

Izraz za težinu na osnovu II Njutnovog zakona dinamike (gde su sila i ubrzanje srazmerni) ima oblik:

$$\bar{Q} = m \vec{g}$$

- g je **ubrzanje gravitacione sile** Zemlje.
- Sila težine **nije nezavisna** osobina tela, kao što je to masa tela. Težina je mera gravitacionog privlačenja između tela i Zemlje (ili nekog drugog svemirskog objekta). Težina je **osobina sistema objekata** (u ovom slučaju tela i Zemlje).

63

Težina tela

- U slučaju da se **zanemari** rotacija Zemlje, njena **nehomogenost** i odstupanje od pravilnog sfernog oblika, težina Q objekta mase m na površini Zemlje (ili blizu površine, $r \approx R_Z$) jednaka je gravitacionoj sili:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \gamma \frac{m M_Z}{R_Z^2} \\ Q &= mg \end{aligned} \right\} \Rightarrow g = \gamma \frac{M_Z}{R_Z^2}$$

Iz II Njutnovog zakona \rightarrow

- Ubrzanje g sile Zemljine teže na njenoj **površini**.
- Ono opada sa povećanjem rastojanja od centra Zemlje.

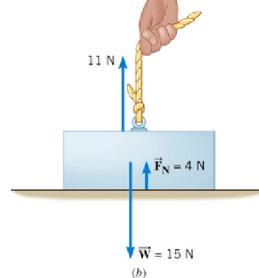
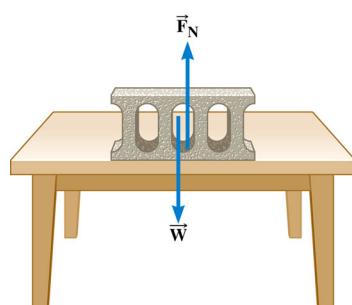
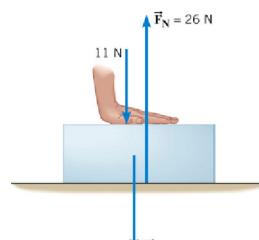
VAŽNO:

- Sila Zemljine teže (gravitaciono privlačenje od strane Zemlje) deluje na telo, a težina tela deluje na podlogu (ili na neko drugo telo).

64

Sila normalne reakcije podloge - normalna sila F_N

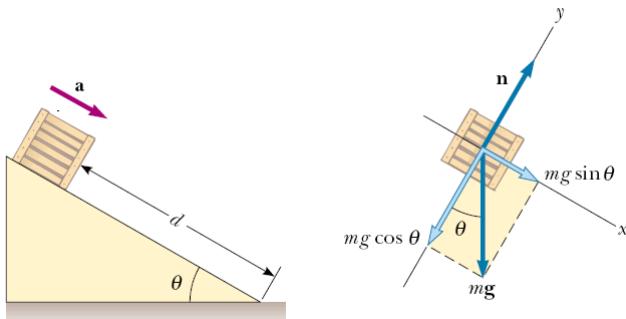
- U mnogim situacijama telo je u kontaktu sa nekom podlogom (površinom), a **sila reakcije površine** na **silu teže**, tj. na **ukupnu silu** kojom telo pritiska podlogu je upravo normalna sila \vec{F}_N .
- Tačnije, komponenta sile reakcije podloge koja je normalna na površinu predstavlja normalnu silu \vec{F}_N .



65

Sila normalne reakcije podloge - normalna sila F_N

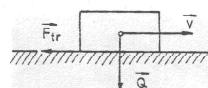
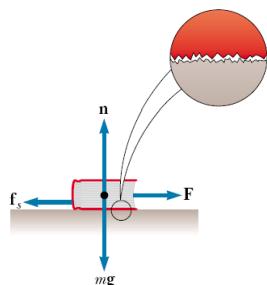
- Telo na strmoj ravni (slučaj kretanja **bez prisutne sile trenja** između tela i strme ravni).
- Za proučavanje kretanja tela po strmoj ravni pravi se **dijagram sile** u kome se sile i njihove komponente predstavljaju u x - y koordinatnom sistemu.



66

Sila trenja

- Kada se neko telo kreće po nekoj površini ili kroz tzv. viskoznu sredinu (vazduh, voda, ...), javlja se otpor tom kretanju zbog interakcije tela sa okruženjem – **trenje**.
- Trenje je posledica delovanja **medumolekularnih sile** između dodirnih površina tela i podloge na kojoj se telo nalazi (spoljašnje trenje), ili između sastavnih delova unutar nekog sistema, kao što su fluidi (unutrašnje trenje).
- Sila trenja deluje na dodirnoj površini između tela i usmerena je **nasuprot** smeru (predstojećeg) kretanja tela u odnosu na površinu.
- U opštem slučaju, postoji sila **statičkog** trenja (trenje mirovanja), i sila **kinetičkog** trenja (ona se još deli na trenje **klizanja** i trenje **kotrljanja**).

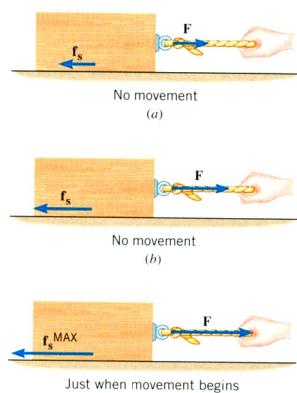


- Sila trenja kotrljanja je znatno slabija od sile trenja klizanja.

67

Sila statičkog trenja (trenje mirovanja)

- Sila trenja mirovanja je po intenzitetu i pravcu, a suprotna po smeru (u odnosu na moguće kretanje) rezultantnoj spoljašnjoj sili koja deluje na telo u pravcu paralelnom podlozi (suprotna predstojećem kretanju).
- Sila statičkog trenja F_s može imati intenzitet od 0 do neke maksimalne vrednosti, nakon koje telo počinje da se kreće (F_s^{\max}), a sila statičkog trenja ustupa mesto sili kinetičkog trenja, koja je po intenzitetu nešto slabija.



$$0 \leq F_s \leq F_s^{\max} \quad F_s^{\max} = \mu_s F_N$$

- Maksimalna vrednost sile statičkog trenja F_s^{\max} je srazmerna sili normalne reakcije podlove F_N na kojoj se telo nalazi.
- μ_s – koeficijent statičkog trenja (zavisi od prirode dodirnih površina).
- F_N – normalna sila, kojom podloga deluje na površinu tela sa kojim je u kontaktu i zaklapa prav ugao sa površinom.

68

Sila kinetičkog trenja (trenje klizanja)

- Sila kinetičkog trenja deluje u pravcu tangente na dodirnu površinu između tela i podlove po kojoj se kreće i uvek je usmerena nasuprot relativnoj brzini tela u odnosu na podlogu. Pod određenim uslovima, približno važi sledeće:
 - nezavisna je od veličine dodirne površine između tela i podlove;
 - nezavisna je od brzine kretanja (klizanja), ukoliko je brzina mala;
 - proporcionalna je veličini normalne sile F_N .
- Po intenzitetu je nešto manja od maksimalne sile statičkog trenja.

$$F_k = \mu_k F_N$$

μ_k – koeficijent kinetičkog trenja (zavisi od prirode dodirnih površina).

F_N – normalna sila*, kojom podloga deluje na površinu tela sa kojim je u kontaktu i zaklapa prav ugao sa površinom.

* Na grafiku je normalna sila F_N obeležena sa N .

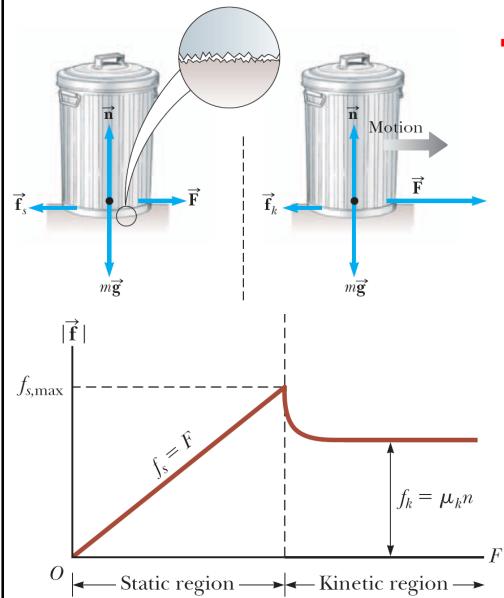
$$F_k < F_s^{\max}$$



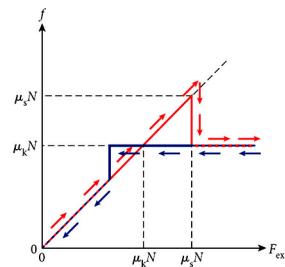
$$\mu_k < \mu_s$$

69

Sila kinetičkog trenja (trenje klizanja)



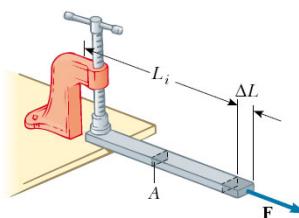
- U oblasti statičkog trenja sa porastom vučne sile F povećava se i sila statičkog trenja sve do neke maksimalne vrednosti F_s^{\max} , nakon čega telo počinje svoje kretanje, a na njega deluje sada sila kinetičkog trenja (nešto manja po vrednosti od F_s^{\max}) – oblast kinetičkog trenja.



70

Sila elastičnosti. Elastičnost čvrstih tela.

- Svako telo pod uticajem spoljašnjih dejstava, osim **položaja**, menja i svoj **oblik**. **Sila elastičnosti** tela deluje unutar njih i teži da vrati deformisanim telima prvobitni oblik.
- Elastične sile u telima su posledica delovanja **međatomskih sile** – pod uticajem spoljašnjih sila menjaju se međusobna rastojanja i položaji atoma, a međatomskе sile se tome suprotstavljaju.
- Teorijski, postoje **savršeno elastična** i **savršeno plastična** tela.
- Bez obzira na primjenjenu silu, savršeno elastična tela uvek poprimaju prvobitni oblik nakon prestanka njenog dejstva. Savršeno plastična tela, bez obzira na primjenjenu silu, uvek zadrže deformisan oblik nakon prestanka njenog delovanja.



71

Sila elastičnosti. Elastičnost čvrstih tela.

- Ukoliko su sile koje deformišu telo relativno male, postoji direktna srazmernost između **sile** (napona sile) i veličine **deformacije** koju ona izaziva.
- Konstanta srazmernosti (modul elastičnosti) zavisi od **prirode materijala** koji je deformisan i **oblika deformisanja**. Modul elastičnosti izražava elastične osobine tela, odnosno materijala od kojih su napravljena.

$$\text{modul elastičnosti} = \frac{\text{napon sile}}{\text{deformacija}}$$

- Napon sile** je količnik sile i površine na koju ta sila deluje:

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

- U zavisnosti od načina delovanja sile i izazvane deformacije postoje tri osnovna oblika elastične deformacije i odgovarajuća koeficijenta elastičnosti:
 - deformacija **istezanja**,
 - deformacija **smicanja**,
 - **zapreminska** deformacija.

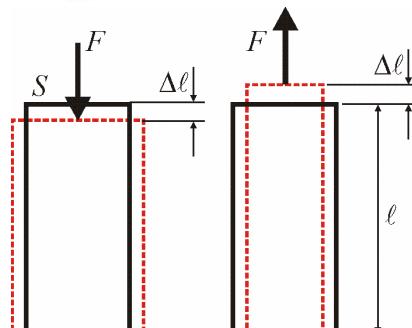
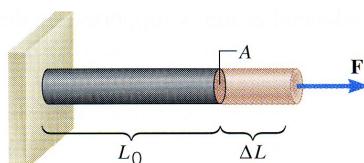
72

Elastična deformacija istezanja

- Istezanje (ili sabijanje) nastaje pri **normalnom** delovanju sile (pod pravim uglom) na površinu.
- Veza između napona sile (F/S) i veličine relativne deformacije izduženja ($\Delta\ell/\ell$) izražena je preko **Hukovog zakona** za elastičnu deformaciju izduženja:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

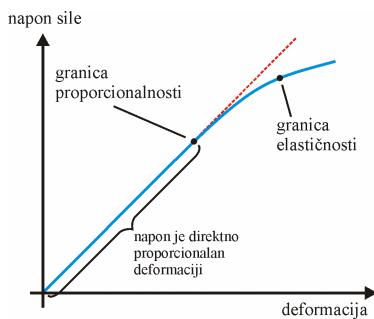
- E – Jangov modul elastičnosti predstavlja meru otpora koji pruža telo promeni svoje dužine pod uticajem spoljašnje normalne sile.



73

Elastična deformacija istezanja

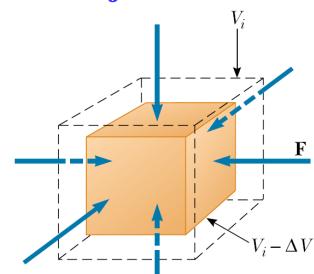
- Direktna proporcionalnost (Hukov zakon) važi samo u izvesnim granicama intenziteta sile (napona sile) – **granica proporcionalnosti**.
- Jače primenjene sile izazivaju elastične deformacije koje nisu direktno сразмерне sili.
- Nakon **granice elastičnosti**, primenjene sile izazivaju trajne promene oblika tela – plastične deformacije.



74

Zapreminska elastična deformacija

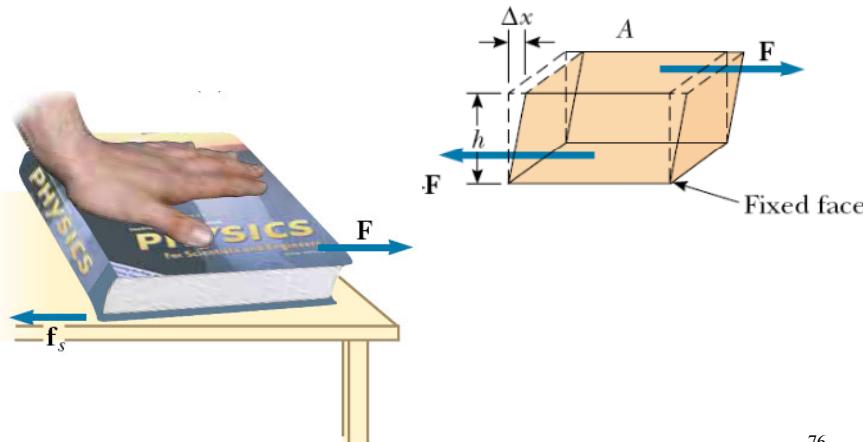
- U fizici materijala se može zapaziti da se deformacija na predmetu dešava ne samo kod jedne njegove dimenzije, već ceo predmet trpi promene u dimenzijama.
- Iz tog razloga se elastične osobine **materijala** od kojeg je načinjen neki predmet izražavaju preko **koeficijenta stišljivosti K** ili preko **zapreminskog koeficijenta** (modula) **elastičnosti B**.
- Zapremski koeficijent elastičnosti B je koeficijent proporcionalnosti koji povezuje **promenu** (povećanje) **pritiska Δp** koji se vrši sa svih strana na predmet i **relativnu promenu** (smanjenje) **zapremine** izazvanu datom promenom pritiska.
- Osim čvrstih tela, i tečnosti su okarakterisane zapreminskim modulom elastičnosti.
$$\frac{\Delta F}{S} = \Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}$$
 Znak “-” je zbog smanjenja zapremine.
- Recipročna vrednost zapreminskog modula elastičnosti je stišljivost K .
$$K = \frac{1}{B}$$



75

Elastična deformacija smicanja

- Smicanje je oblik deformacije koji nastaje pri **tangencijalnom** delovanju sile na površinu tela.

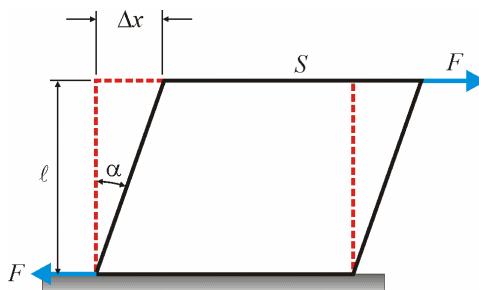


76

Elastična deformacija smicanja

- Tangencijalna sila izaziva **pomeranje** (smicanje) **slojeva** (atomskih ravnih) u čvrstom telu jednih u odnosu na druge za neki mali iznos, a ukupan efekat delovanja sile je odstupanje gornje ivice predmeta za Δx u odnosu na prvobitni položaj.
- Relativna deformacija se izražava preko ugla α ($\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$), koji predstavlja odnos apsolutnog pomeranja gornje ivice predmeta Δx i dimenzija deformisanog predmeta:

$$\alpha = \frac{\Delta x}{\ell}$$

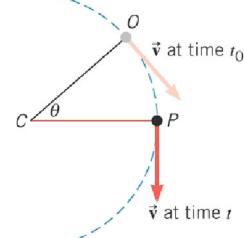


- Hukov zakon** elastične deformacije **smicanja**:
$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta x}{\ell}$$

77

Sile kod kružnog kretanja - centripetalna sila

- Prilikom kretanja po kružnici, tela se kreću ubrzano - njihova brzina se svakako menja po **pravcu**, a može i po **intenzitetu**.
- Pri **ravnomernom** kretanju po kružnici, telo trpi samo normalno ubrzanje a_n – posledica promene **pravca** brzine.
- Prema **II Njutnovom zakonu**, ako se tela ubrzavaju, znači da na njih deluje **neka sila F** koja je **uzročnik** promene stanja kretanja (koje se opisuje vektorom količine kretanja \vec{k}), tj. koja je uzrok pomenutog ubrzanja.

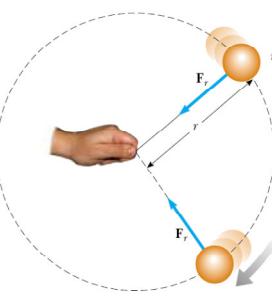
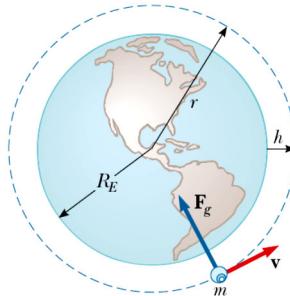


$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

78

Sile kod kružnog kretanja - centripetalna sila

- Sila koja uzrokuje normalno (centripetalno) ubrzanje i zakrivljuje putanju tela naziva se **centripetalna sila F_c** (gravitaciona kod planeta, sila zatezanja lanaca, ...).
- Centripetalna sila je uvek usmerena **ka centru** kružne putanje tela.



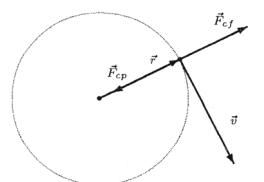
$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

$$\vec{F}_c = -\frac{mv^2}{r} \vec{r}_0$$

79

Sile kod kružnog kretanja - centrifugalna sila

- Tela koja se kreću po zakriviljenoj putanji osećaju, pored delovanja centripetalne sile (realna sila, koja ima i svoju silu reakcije, koja deluje na neko drugo telo) i dejstvo "fiktivne" sile, koja je istog intenziteta i pravca, a suprotnog smera – to je **centrifugalna sila \vec{F}_{cf}** .
- Centrifugalna sila je **posledica ubrzanog kretanja** referentnog sistema (koji je vezan za telo), tačnije posledica centripetalnog ubrzanja tela usmerenog ka centru kružne putanje i otpora koji pruža telo (svojom inertnošću) ovom ubrzanom kretanju.
- Centrifugalna sila je "fiktivna" zato što nema svoju silu reakcije.



$$\vec{F}_{cf} = \frac{mv^2}{r} \vec{r}_o$$

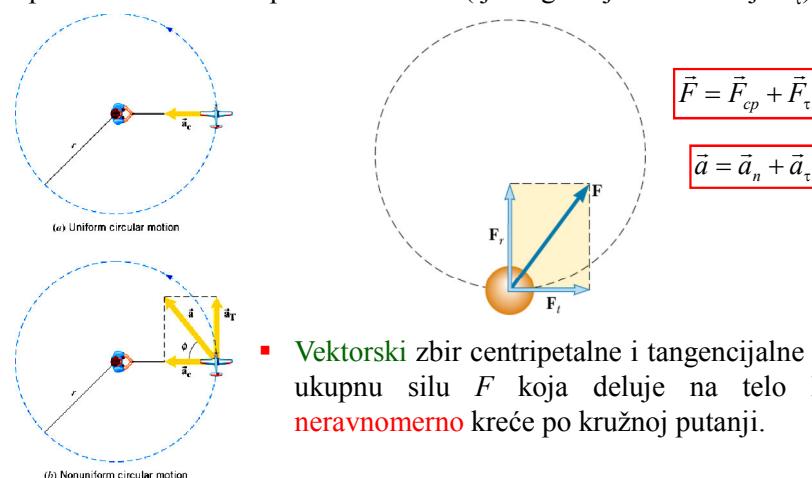
$$F_{cf} = \frac{mv^2}{r}$$

- Centrifugalna sila je **ravnotežna sila** centripetalnoj i omogućava da telo ostane na zakriviljenoj putanji tokom svog kretanja.

80

Sile kod kružnog kretanja – tangencijalna sila

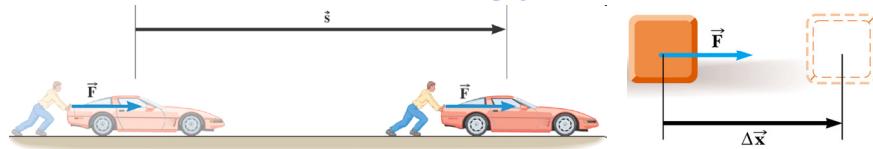
- Pri **neravnomernom** kretanju po kružnici, osim **centripetalne sile \vec{F}_{cp}** koja zakriviljuje putanju tela i uzrokuje centripetalno ubrzanje a_n (tj. promenu **pravca brzine**), mora postojati i **tangencijalna sila \vec{F}_τ** koja uzrokuje promenu **intenziteta** periferne brzine (tj. tangencijalno ubrzanje a_τ).



- Vektorski zbir centripetalne i tangencijalne sile daje ukupnu silu F koja deluje na telo koje se **neravnomerno** kreće po kružnoj putanji.

81

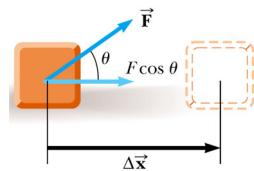
Rad i energija



- Ako na telo duž puta njegovog pomeranja deluje sila **konstantnog intenziteta, pravca i smera**, ukupan **rad** te sile prilikom pomeranja tela je proizvod **pređenog puta** tela i komponente **sile** paralelne sa putem (tzv. aktivna komponenta sile).
- Ako se **pravac sile** ne poklapa sa pravcem pomeranja tela, već zaklapa ugao θ sa njim, samo komponenta sile F koja ima pravac pomeranja tela (F_x) može vršiti rad.

$$A = F \cdot \Delta x$$

$$\vec{F} = \text{const.}$$



$$F_y = F \sin \theta \quad (\text{komponenta koja ne vrši rad})$$

$$F_x = F \cos \theta \quad (\text{aktivna komponenta})$$

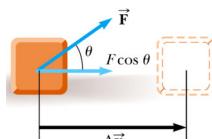
82

Rad i energija

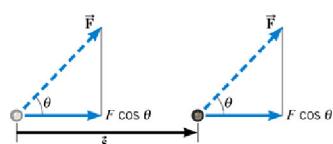
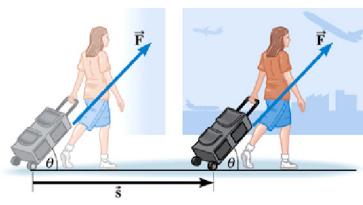
- Rad** je **skalarna** veličina, **skalarni proizvod** vektora sile \vec{F} i vektora pređenog puta $\Delta \vec{x}$ koji telo pri tome prelazi. Jedinica za **rad** je džul ([J]=[Nm]).

$$A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = F \Delta x \cos \theta$$

$$\theta = \angle(\vec{F}, \Delta \vec{x})$$



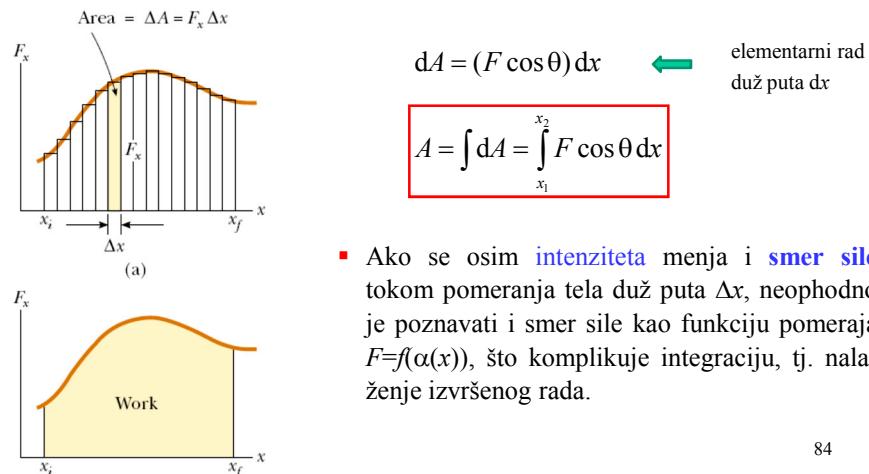
- Ako na telo deluje sila pod **oštrim (tupim)** uglom u odnosu na pravac duž kog se kreće telo, rad sile je **pozitivan (negativan)**.
- Ako sila deluje pod **pravim** uglom u odnosu na pravac kretanja, ili ako telo miruje, rad sile je jednak **nuli**.



83

Rad i energija

- Ako sila **nije konstantna** po intenzitetu, već se menja duž puta pomeranja, rad se izražava u diferencijalnom obliku, a njegova ukupna vrednost se nalazi preko integralnog računa (sabiranjem doprinosa ukupnom radu na beskonačno malim delovima puta) – to je površina ispod krive zavisnosti $F=f(x)$.



84

- Ako se osim **intenziteta** menja i **smer sile** tokom pomeranja tela duž puta Δx , neophodno je poznavati i smer sile kao funkciju pomeraja $F=f(\alpha(x))$, što komplikuje integraciju, tj. nalaženje izvršenog rada.

Energija

- Fizička veličina koja karakteriše **sposobnost** tela, ili sistema tela da izvrše rad naziva se **energijom**.
- Iz toga proizilazi činjenica:
rad je proces kojim se vrši prenošenje energije među telima za vreme uzajamne interakcije (delovanja sile).



$$\Delta E = E_f - E_i \equiv \boxed{\Delta E = E_f - E_i}$$

- Razlika između krajnjeg i početnog stanja tela u pogledu sadržaja energije (ΔE) jednaka je radu A izvršenom prilikom promene tog stanja.
- Pozitivan rad** je prenošenje energije na telo (povećanje njene energije), a **negativan rad** je prenos energije sa tela (smanjenje energije koju telo posede).
- Energija** je veličina koja karakteriše **stanje** tela, dok je **rad** veličina koja karakteriše **promenu tog stanja**. Energija je **skalarna** veličina. Jedinica za **energiju** je džul ([J]).
- Kaže se da telo **poseduje** energiju, a rad je proces **prenosa** ili **pretvaranja** jednog oblika energije u drugi.

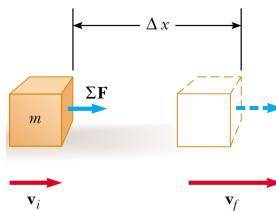
85

Kinetička energija

- Primer: pomeranje tela po horizontalnoj ravni bez trenja pod uticajem neke resultantne sile F koja izaziva promenu stanja kretanja (količine kretanja $\Delta k = m\Delta v$), tj. promenu **intenziteta** brzine od neke vrednosti v_1 do vrednosti v_2 .

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F dx \quad F = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} mv \frac{dv}{dx} dx = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = m \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$



- Kinetička energija translacionog kretanja:**

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

- Kinetička energija tela pri njegovom translacionom kretanju srazmerna je **masi** m tela i **kvadratu njegove brzine** v . To je **skalarna** veličina.
- Rad A izvršen nad telom u primeru menja stanje kretanja tela (k) – menja brzinu kretanja od v_1 do v_2 , a time i energiju koju telo poseduje (kinetičku, u ovom slučaju).

86

Kinetička energija

Teorema o radu i energiji:

- Kada spoljašnja sila F vrši rad A nad nekim telom, pri čemu se menja **samo intenzitet** brzine kretanja tela, njegova kinetička energija E_k se menja, a ta promena je upravo jednaka radu.
- Rad A sile F na pomeranju nekog tela je razlika između početne i krajnje kinetičke energije E_k tela.

$$A = E_{k2} - E_{k1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad A = \Delta E_k$$

- Teorema o radu i energiji ukazuje na to da će se **intenzitet brzine tela povećati** ako je izvršen **rad** nad telom od strane spoljašnjih sila **pozitivan**, jer je u tom slučaju krajnja kinetička energija tela veća od početne. Nasuprot tome, intenzitet brzine tela se smanjuje, ako je izvršeni rad nad telom **negativan**.

87

Potencijalna energija

- Potencijalna energija je drugi oblik mehaničke energije koji može posedovati telo, ali samo ako je ono sastavni deo nekog **sistema** tela.
- Pod **sistemom tela** se podrazumeva skup od dva ili više tela koja mogu međusobno interagovati, delovati jedno na drugo nekom silom.
- Ako dva tela u sistemu međusobno interaguju putem sile, tada **rad** koji izvrši sila pri delovanju jednog tela na drugo **uzrokuje pretvaranje** kinetičke (ili nekih drugih oblika) energije koju poseduju tela u druge oblike energije.
- Ako se menja **međusobni raspored tela** u posmatranom sistemu – menja se i njihova **potencijalna energija**.
- Potencijalna energija je, dakle, pojam vezan za **sistem tela** zato što zavisi od **fizičkog položaja jednog tela u odnosu na drugo**.

88

Potencijalna energija

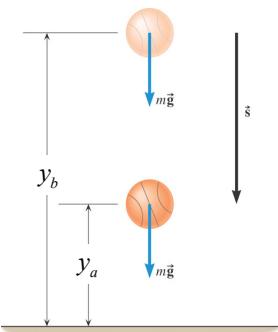
U opštem slučaju:

- Potencijalna energija predstavlja **sposobnost** tela da izvrši rad zahvaljujući položaju u kome se nalazi.
 - To je **rad** koji telo **akumulira** dospevajući u neku tačku **polja sila**, koje potiču od drugog/ih tela sistema.
-
- Potencijalna energija je **skalarna** veličina.
 - Postoje i sistemi tela u kojima je **jedno telo znatno masivnije** od drugih, tako da se može smatrati da **miruje** (tj. njegova kinetička energija se zanemaruje), a da se ukupna kinetička sistema odnosi na preostala tela u sistemu.
Npr. ako u sistemu “planeta Zemlja – lopta” lopta pada na površinu, tada se smatra da jedino lopta poseduje kinetičku energiju.

89

Gravitaciona potencijalna energija

- **Primer:** U sistemu "Zemlja-lopta" izvrši se rad nad loptom pri pomeranju sa visine y_a u odnosu na površinu Zemlje na veću visinu y_b .
- Posto je lopta mirovala i pre i nakon izvršenog rada nad njom, ne dolazi do promene njene kinetičke energije, već se radi o promeni nekog drugog oblika energije usled promene položaja.
- Kada se lopta pusti na visini y_b , ona **slobodno pada** ka površini Zemlje (ka položaju y_a) pod uticajem gravitacione sile privlačenja od strane Zemlje.

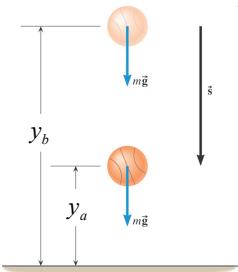


- Dakle, u položaju na visini y_b lopta poseduje **mogućnost (potencijal)** da promeni svoje stanje kretanja, tj. da promeni svoju kinetičku energiju.
- Pri padanju, lopta menja brzinu kretanja (stanje kretanja), tj. njena potencijalna energija koju je posedovala na visini y_b , postepeno se transformiše u kinetičku energiju.

90

Gravitaciona potencijalna energija

- Prilikom slobodnog padanja sa visine y_b , jedina sila koja deluje na loptu je **gravitaciona sila** (jednaka sili težine), i to u pravcu kretanja ka mestu na visini y_a .
- Pri tome se, usled **promene položaja** u gravitacionom polju Zemlje, **promenila** (smanjila) i **potencijalna energija** lopte, dok se njena kinetička energija povećala (brzina lopte raste).
- Rad A koji je izvršila gravitaciona sila Zemlje (njena intenzitet iznosi $F=mg$) na privlačenju (premeštanju) lopte za rastojanje $h=y_b-y_a$ jednak je **smanjenju** potencijalne energije za iznos $\Delta E_p=mgh$.
- **Rad** gravitacione sile pri slobodnom padanju lopte je **pozitivan – povećava** njenu **kinetičku energiju** (gravitaciona sila deluje u smeru pomeranja).



$$\vec{F} = mg \quad A = (mg \cos 0^\circ)(y_b - y_a) \\ h = y_b - y_a \quad A = mgh \quad \Rightarrow \quad A = -(E_{pa} - E_{pb}) = -\Delta E_p$$

- Isti rad se izvrši i kada se telo težine $Q=mg$ podigne sa mesta na visini y_a na visinu y_b , čime se **poveća** njegova gravitaciona potencijalna energija za iznos $\Delta E_p=mgh$.

91

Gravitaciona potencijalna energija

- **Gravitaciona potencijalna energija** – energija koju poseduje telo mase m kada se nalazi u gravitacionom polju drugog tela. To je energija **sistema tela** (recimo “Zemlja-telo”).
- Pošto je gravitaciona sila **najslabija** od osnovnih interakcija u prirodi, i gravitaciona potencijalna energija nekog tela ima značaj samo ako se ono nalazi u jakom gravitacionom polju – polju nekog masivnog nebeskog tela, kao što je Zemlja.

U opštem slučaju:

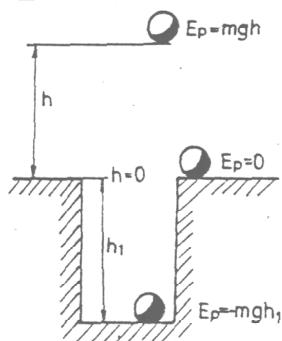
- Gravitaciona potencijalna energija koju poseduje neko telo u gravitacionom polju Zemlje je **rad** ($E_p = A$) koji na telu mase m izvrši Zemljino gravitaciono polje privlačeći ga iz **beskonačnosti** u neku tačku na rastojanju r od centra Zemlje.

92

Gravitaciona potencijalna energija

- Uobičajeno je, međutim, da se **vrednost gravitacione potencijalne energije** koju tela poseduju u Zemljinom gravitacionom polju računa u odnosu na neki **referentni (nulti) nivo** – položaj u kome se (prema sopstvenom izboru) smatra da je potencijalna energija tela jednaka nuli.

$$E_p = mgh$$



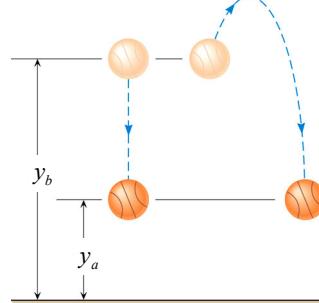
- **Vrednost gravitacione potencijalne energije** u nekom položaju tela u polju gravitacije, dakle, **zavisi** od **izbora** referentnog (nultog) nivoa.
- Sa druge strane, **rad gravitacione sile** (sile Zemljine teže) **ne zavisi** od izbora referentnog (nultog) nivoa potencijalne energije.

93

Konzervativna i nekonzervativna polja

- **Izvršen rad** na pomeranju tela u **gravitacionom polju** **ne zavisi od oblika putanje**, već samo od početne i krajnje tačke položaja tela u tom polju, tj. od njihove visinske razlike (vertikalnog rastojanja).

$$A = mg(y_b - y_a)$$



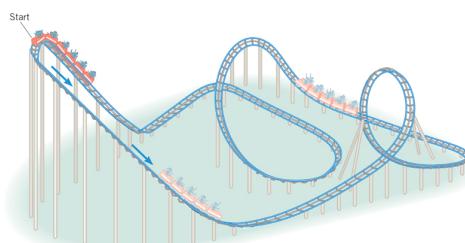
- Sva polja sila u kojima **izvršen rad** sile zavisi samo od **početnog i krajnjeg položaja** tela (a ne i od oblika putanje) su **konzervativna** (potencijalna) polja.
- Sila je **konzervativna** (potencijalna), ako njen rad na pomeranju tela zavisi samo od početnog i krajnjeg položaja tela, a ne i od oblika putanje duž koje se vrši pomeranje.

94

Konzervativne i nekonzervativne sile

- **Rad** konzervativnih sila na pomeranju tela **po zatvorenoj putanji** jednak je **nuli**, jer se početni i krajnji položaj tela poklapaju.

- U konzervativne sile spadaju: **gravitaciona** sila, **električna** sila, ali i **elastična** sila.
- Svakoj konzervativnoj sili se može pridružiti neki oblik **potencijalne energije**.
- U **realnim** situacijama, na tela simultano deluju i **konzervativne** sile (kao što je sila gravitacije) i **nekonzervativne** sile (kinetička sila trenja, otpor vazduha, ...), čiji se rad delimično pretvara u druge oblike.
- Nekonzervativne sile uzrokuju **promenu** mehaničke energije **sistema**.



95

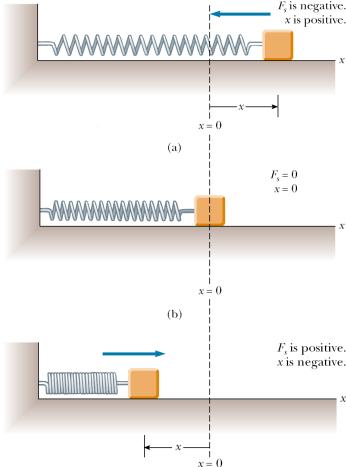
Potencijalna energija elastične deformacije

- Deformisana opruga sposobna je da izvrši rad na račun **elastičnih sila \vec{F}_e** koje teže da je vrate u prvobitno stanje, a koje su posledica spoljašnjih sila \vec{F}_i koje su dovelе do deformacije.
- Prema Hukovom zakonu, veličina izduženja (sabijanja) opruge x je сразмерна spoljašnjoj sili F_i koja je izazvala deformaciju.

$$\vec{F}_i = k\vec{x}$$

- Suprotno spoljašnjoj sili F_i usmerena je **elastična (restitucionala) sila \vec{F}_e** koja se javlja u deformisanoj opruzi i ona je uvek suprotnog smera od smera porasta deformacije x .

$$\vec{F}_e(x) = -\vec{F}_i = -k\vec{x}$$



k – je koeficijent elastičnosti opruge, zavisi od materijala i oblika.

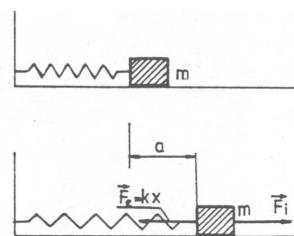
96

Potencijalna energija deformisane opruge

- U deformisanom stanju opruga poseduje izvesnu **potencijalnu energiju** – sposobna je da pod uticajem elastičnih sила izvrši neki rad prilikom vraćanja u nedeformisani oblik.

$$A = \int_a^0 F_e dx = -k \int_a^0 x dx = -k \frac{x^2}{2} \Big|_a^0 = -\left(0 - k \frac{a^2}{2}\right)$$

$$A = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p = k \frac{a^2}{2}$$



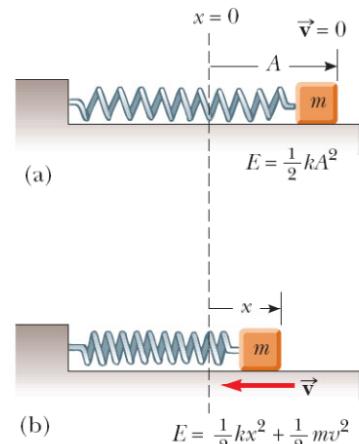
- Pri vršenju rada, **elastična sila smanjuje potencijalnu energiju** deformisane opruge za iznos $\Delta E_p = ka^2/2$ i menja se stanje kretanja opruge (**povećava kinetičku energiju**) – vrši se pretvaranje energije iz jednog u drugi oblik.
- Rad je, u ovom slučaju, **pozitivan**, jer elastična sila deluje u smeru pomeranja tela, a kinetička energija tela okačenog na oprugu **raste**.

97

Potencijalna energija deformisane opruge

- Nakon prolaska kroz ravnotežni položaj ($x=0$), sistem “opruga-telo” nastavlja kretanje, a elastična sila ga usporava.
- Smanjenje kinetičke energije odgovara povećanju elastične potencijalne energije opruge.
- Rad je, u ovom slučaju, negativan, jer elastična sila ima suprotan smer od smera kretanja tela.
- U opštem slučaju, potencijalna energija deformisane opruge je:

$$E_p = k \frac{x^2}{2}$$



98

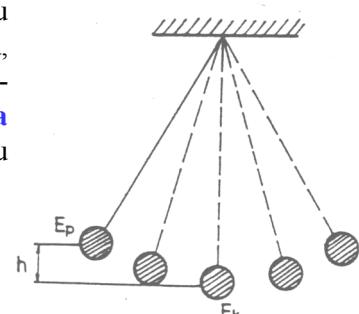
Zakon održanja energije

Zakon održanja mehaničke energije

- Ukupna mehanička energija E (kinetička i potencijalna) zatvorenog (izolovanog) sistema tela, između kojih deluju samo konzervativne sile, ostaje nepromenjena (konstantna).

- U zatvorenom sistemu u kojem ne deluju nekonzervativne sile (npr. kinetička sila trenja, otpor vazduha, itd.), zbir kinetičke i potencijalne energije, tj. ukupna mehanička energija je konstantna, tj. ne menja se u toku vremena.

$$E = E_k + E_p = \text{const.}$$



99

Zakon održanja energije

- Primer: slobodno padanje tela sa visine h .

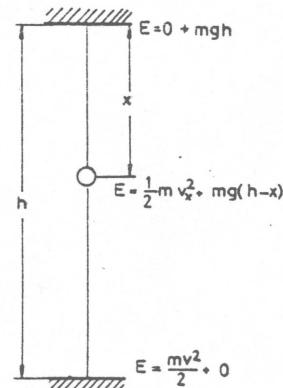
$$E = E_p = mgh$$

$$E = \frac{mv_x^2}{2} + mg(h - x) = \frac{m}{2}2gx + mg(h - x) = mgh$$

$$E = E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}2gh = mgh$$

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}$$

$$E_k + E_p = \text{const.}$$



Promena mehaničke energije u ovom slučaju jednaka je nuli:

$$\Delta(E_k + E_p) = 0$$

100

Zakon održanja energije – zatvoren i otvoren sistem

- Energija može prelaziti iz jednog u drugi oblik i prenositi se sa jednog na drugo telo, ali ukupna energija u **zatvorenom** sistemu tela u kome **deluju samo konzervativne sile** ostaje **konstantna**.

$$E = E_k + E_p = \text{const.}$$

- U opštem slučaju, za **otvoren** sistem tela u kome, osim međusobnih sila interakcije, deluju i spoljašnje **nekonzervativne sile**, rad spoljašnjih nekonzervativnih sila A_{nk} bio bi jednak promeni ukupne mehaničke energije .

$$A_{nk} = \Delta E = \Delta(E_k + E_p) \neq 0$$

- Energija se ne može stvoriti niti nestati, već samo promeniti oblik iz jednog u drugi.

101

Snaga

- **Srednja snaga (brzina vršenja rada)** je količnik rada A i vremenskog intervala Δt za koji je rad izvršen prilikom pomeranja tela duž puta Δx pod uticajem sile F . Jedinica za **snagu** je vat ([W]=[J/s]).

$$P_s = \frac{A}{\Delta t} \quad P_s = \frac{F \Delta x}{\Delta t} = F v_s$$

- **Trenutna snaga** je srednja snaga u beskonačno malom intervalu vremena: $P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}$
- Ako **sila nije konstanta**, analizira se u kratkom intervalu vremena dt , za koji sila deluje na putu dx .
- Snaga je **skalarna** veličina, skalarni proizvod vektora sile i vektora brzine pomeranja i u opštem slučaju važi:

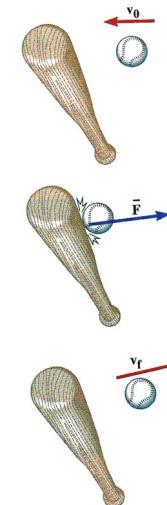
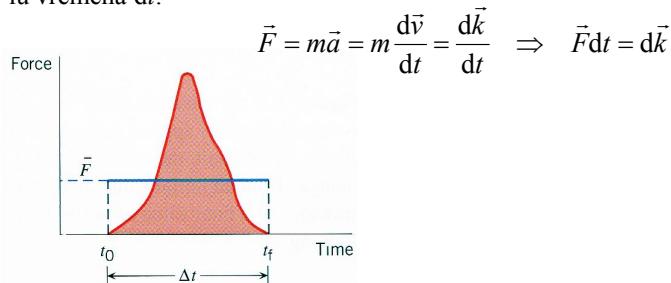
$$P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \quad P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad P = F \cdot v \cos \angle(\vec{F}, \vec{v})$$

102

Impuls sile i količina kretanja

Primer:

- Bejzbol loptica se udara palicom, pri čemu intenzitet sile \vec{F} (a možda ni pravac) nije konstantan za vreme kontakta (Δt).
- Kratkotrajna (Δt) interakcija ima za posledicu **promenu stanja kretanja** loptice (ali i palice) – promenu količine kretanja $\Delta \vec{k}$.
- Na osnovu II Njutnovog zakona, proizvod **trenutne sile** \vec{F} i **elementarnog vremenskog intervala** dt u toku kojeg sila deluje na telo jednak je **promeni količine kretanja** $d\vec{k}$ u tom intervalu vremena dt :

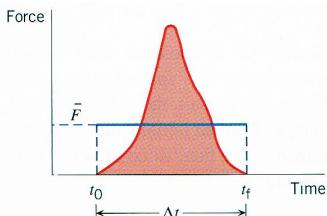


103

Impuls sile i količina kretanja

- **Ukupna promena količine kretanja** tela $\vec{\Delta k}$ koja je izazvana delovanjem **promenljive** sile \vec{F} u toku **konačnog** intervala vremena Δt dobija se integracijom:

$$\vec{\Delta k} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$



- Ista promena količine kretanja loptice se postiže i delovanjem neke prosečne sile \bar{F} u toku celokupnog intervala vremena Δt :

$$\vec{\Delta k} = \bar{F} \Delta t$$

- Za slučaj **konstantne** sile: $\vec{F} = \text{const.}$ $\vec{\Delta k} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{F} \cdot \Delta t$

104

Impuls sile i količina kretanja

- **Impuls sile** \vec{p} je integral proizvoda sile \vec{F} i vremena dt u kojem ta sila deluje i jednak je **ukupnoj promeni količine kretanja tela** $\vec{\Delta k}$ u toku intervala vremena $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{\Delta k}$$

- **Teorema** o **impulu i količini kretanja**:

Kada na telo deluje rezultantna sila \vec{F} u toku konačnog vremenskog intervala Δt , **impuls** \vec{p} ove rezultantne **sile** je jednak **ukupnoj promeni količine kretanja** $\vec{\Delta k}$ koju ta sila uzrokuje u toku vremena Δt .

$$\vec{p} = \vec{\Delta k}$$

105

Zakon održanja količine kretanja - zatvoren sistem

- Zatvoren sistem** – nema delovanja spoljašnjih sile između tela, već samo međusobnih sila interakcije \vec{f} .

$$\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$$

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = 0$$

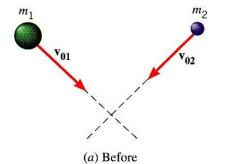
$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const.}$$

- U opštem slučaju (kada u sistemu ima n tela):

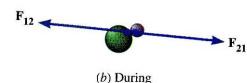
$$\vec{k} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

$$\Delta \vec{k} = 0$$

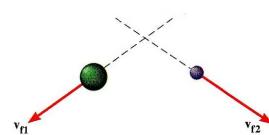
- Ukupna **količina kretanja zatvorenog sistema** (u kome nema delovanja spoljašnje rezultantne sile) **ne menja** se tokom vremena, tj. ostaje konstantna.



(a) Before



(b) During



106

Zakon održanja količine kretanja - otvoren sistem

- Otvoren sistem** – osim delovanja međusobnih sila interakcije \vec{f} , na tela deluju i **spoljašnje** sile \vec{F} .

$$\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$$

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = (\vec{f}_1 + \vec{f}_2) + (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{F}_R + \vec{F}$$

- U opštem slučaju (kada u sistemu ima n tela), vremenska promena ukupne količine kretanja je:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{k}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_R = \text{const.} \Rightarrow \Delta \left(\sum_{i=1}^n \vec{k}_i(t) \right) = \Delta \vec{k} = \int \sum_{i=1}^n \vec{F}_i dt = \vec{F}_R \Delta t$$

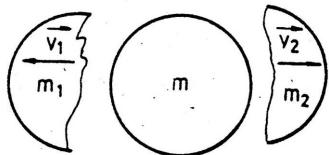
Impuls rezultujuće sile \vec{p} .

$$\Delta \vec{k} = \vec{F}_R \Delta t = \vec{p}$$

- Promena** ukupne količine kretanja $\Delta \vec{k}$ otvorenog **sistema** tela jednaka je impulsu \vec{p} spoljašnje rezultantne sile \vec{F} .

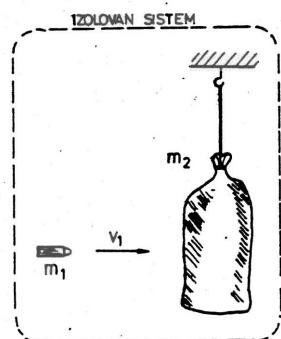
107

Primeri zakona održanja količine kretanja (zatvoren sistem)



$$m\vec{v} = 0$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_2$$



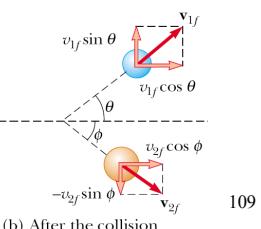
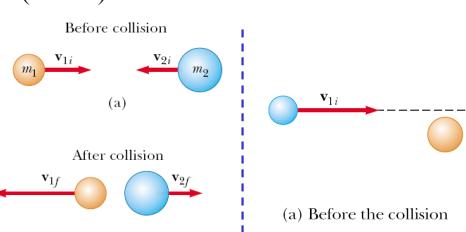
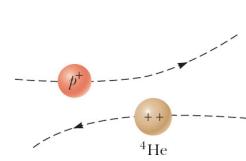
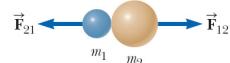
$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_2$$

108

Sudari

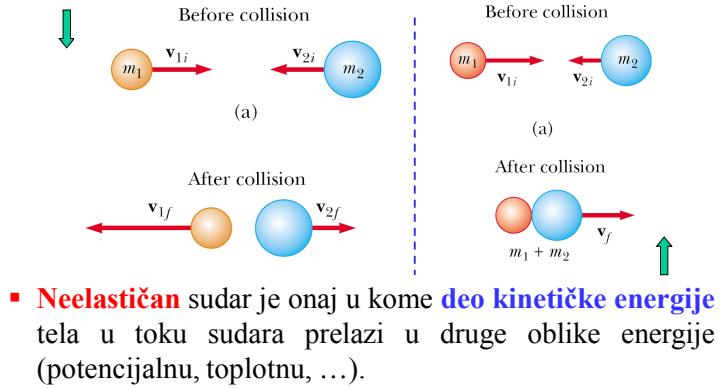
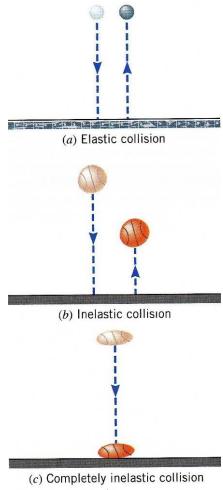
- Sudar je **kratkotrajna uzajamna interakcija** između tela bez uticaja spoljašnjih sila, u kojoj se više ili manje ispoljavaju elastične osobine tela. Uzajamna interakcija se **ne mora** ostvarivati **kontaktnim** silama.
- Nakon sudara, **brzine tela** se menjaju, u opštem slučaju, i po **intenzitetu** i po **pravcu**, a deo energije se može pretvoriti u toplotu.
- Sudari dvaju tela mogu biti **jednodimenzionalni** (kada se tela i pre i nakon sudara kreću po istoj pravoj liniji) i **dvodimenzionalni**.
- Poseban slučaj predstavlja **centralni sudar** kod kojeg se tela pre sudara kreću po pravcu koji prolazi kroz centre (težišta) tela.



109

Sudari

- **Elastičan** sudar sudar je slučaj sudara u kome se ukupna kinetička energija tela pre i posle sudara ne menja.



- **Neelastičan** sudar je onaj u kome **deo kinetičke energije** tela u toku sudara prelazi u druge oblike energije (potencijalnu, toplotnu, ...).

- u **savršeno neelastičnom** sudaru tela nakon sudara ostaju zajedno;
- u ostalim slučajevima, kada se deo kinetičke energije transformiše u druge oblike (deformacija tela koja učestvuju u sudaru, toplota, ...), a tela ne ostaju spojena, reč je samo o **neelastičnom** sudaru u širem smislu reči.

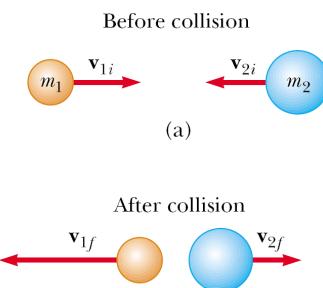
110

Elastičan jednodimenzionalni sudar

- Zakon održanja **količine kretanja**
- Zakon održanja **kinetičke energije**

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v'_2^2$$



Neelastičan jednodimenzionalni sudar

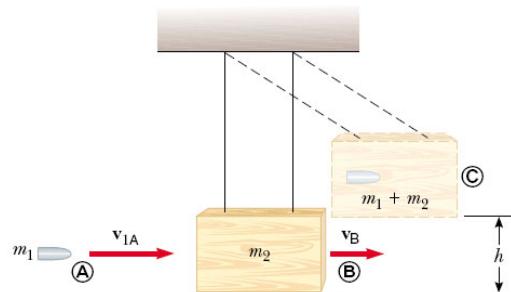
- **Deformacije** koje nastaju na telima u sudaru su **trajne**.
- Zakon održanja **kinetičke** energije u neelastičnom sudaru **ne važi**, jer se deo te energije pretvara u neki drugi vid. Važi samo zakon održanja količine kretanja.

Before collision	After collision	$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$
m_1 v_{1i}	m_2 v_{2i}	$m_1 + m_2$ v_f

111

Neelastičan sudar

- Primer: savršeno neelastičnog sudara: Balističko klatno

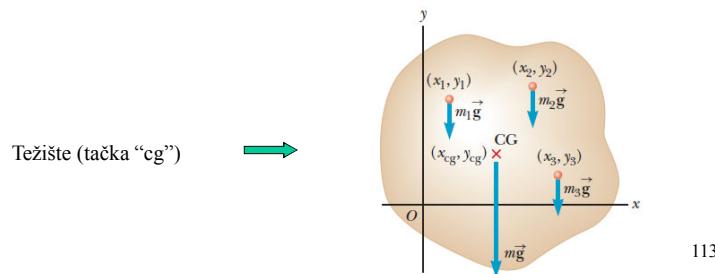


- Zakon održanja **količine kretanja** $m_1 v_{1A} = (m_1 + m_2) v_B$
- Deo kinetičke energije projektila je potrošen na deformaciju masivnog (drvenog) bloka.

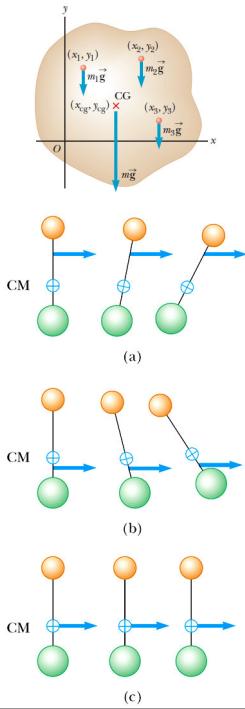
Dinamika rotacionog kretanja krutog tela.

Delovanje sila i momenata sila na kruto telo

- **Čvrsto (kruto) telo** je sistem čvrsto povezanih materijalnih tačaka (masa $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$) čiji se međusobni raspored ne menja.
- Na svaki elementarni sastavni deo krutog tela (materijalna tačka) deluje gravitaciona sila koja ima intenzitet jednak njegovoj težini ($\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_i, \dots, \mathbf{Q}_n$), a zbir ovih sila predstavlja ukupnu težinu tela \mathbf{Q} .
- Napadna tačka **rezultante** svih ovih sila težine koje deluju na pojedinačne materijalne tačke je **težište tela**.
- Bez obzira na položaj tela, ona ostaje na istom mestu.



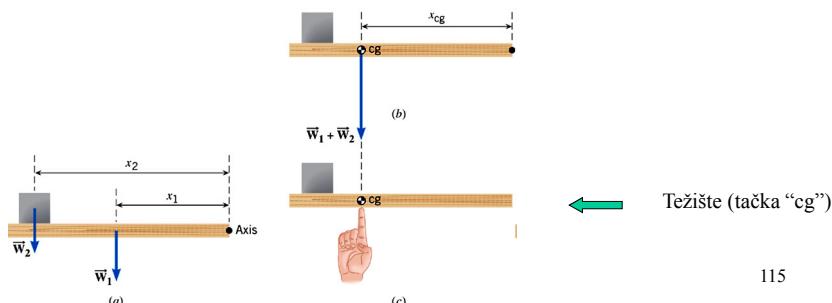
Delovanje sila i momenata sila na kruto telo.



- **Centar mase** je tačka koja reprezentuje **prosečan položaj ukupne mase** tela – tačka za koju se može zamisliti kao da je sva masa tela skoncentrisana u njoj.
- **Centar mase** je tačka **karakteristična za kruto telo** izloženo delovanju spoljašnje sile, koja se kreće na isti način kao što se bi se kretala i materijalna tačka (mase jednake masi datog tela) pod dejstvom te iste rezultantne spoljašnje sile.
- Samo u **homogenom** gravitacionom polju se **težište** i **centar mase poklapaju** (ako je ubrzanje g jednako u svim delovima tela).
- U **primeru**, napadna tačka **rezultantne sile** na slikama (a) i (b) se ne poklapa sa centrom mase – tela (spojena šipkom zane-marljive mase) pod uticajem sile započinju rotaciono kretanje.
- Kada je **napadna tačka sile** u centru mase, kao na slici (c) – sistem tela ne rotira, već se kreće **translatorno**.

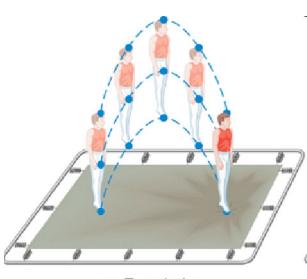
Delovanje sila i momenata sile na kruto telo

- U **primeru** na slici je težište (pa i centar mase) svakog pojedinačnog tela su na različitim mestima.
- Napadna tačka **rezultantne** gravitacione sile (od strane Zemlje) koja deluje na dasku je na rastojanju x_1 od ose rotacije oko koje se daska može okretati, a napadna tačka **rezultantne** gravitacione sile koja deluje na predmet na dasci je na rastojanju x_2 od nje.
- Centar mase sistema tela je na rastojanju x_{cg} i tu je napadna tačka **rezultantne** gravitacione sile koja deluje na sistem tela "daska-predmet".
- Delovanje silom jednakog intenziteta kao ukupna sila težine oba tela u **vertikalnom pravcu** koji prolazi kroz **centar mase** (težište), ali u suprotnom smeru od rezultantne gravitacione sile održava ceo sistem tela u **ravnoteži**.



115

Delovanje sila i momenata sile na kruto telo

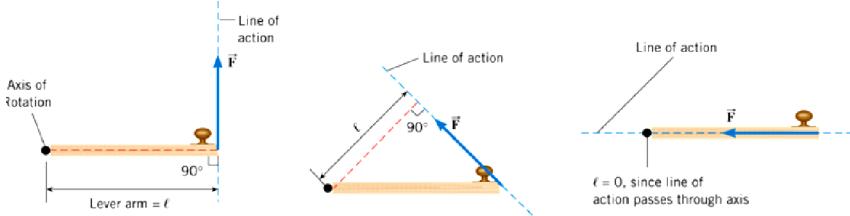


- Svako kretanje krutog (čvrstog) tela može se predstaviti kao kombinacija **translatornog** i **rotacionog** kretanja.
- Kod translatornog kretanja **prave** koje spajaju tačke u telu u toku kretanja ostaju same sebi paralelne.
- Kod rotacionog kretanja **tačke** u telu se kreću po koncentričnim kružnicama različitih poluprečnika.
- Na složeno kretanje krutog tela deluju **sile** i **momenti sile**.



116

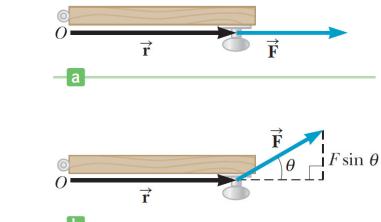
Moment sile



- U **primjeru** na slici na vrata koja mogu rotirati oko vertikalne ose deluje se silom F istog intenziteta i u **istoj napadnoj tački**.
- Razlika je u **pravcima delovanja sile** u odnosu na vektor položaja (radijus vektor) napadne tačke sile.
- Najlakše je zarotirati vrata kada radijus vektora napadne tačke sile i vektor sile zaklapaju prav ugao, a rotacije vrata nema kada se pravci ova dva vektora poklapaju.
- Dakle, **pravac** delovanja sile određuje ukupan efekat rotacije tela (vrata).

117

Moment sile

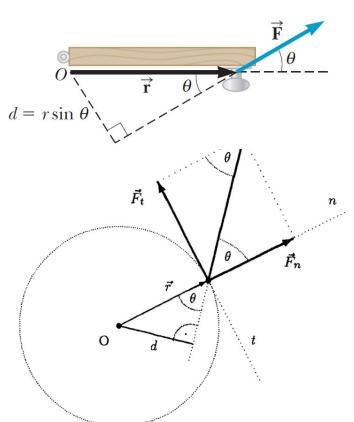


- Moment** \vec{M} sile \vec{F} je vektorski proizvod radijus vektora \vec{r} napadne tačke sile i vektora sile \vec{F} . Jedinica za moment sile je [Nm].
- Moment sile je **vektor** čiji se pravac poklapa sa osom rotacije, a smer zavisi od smera sile.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

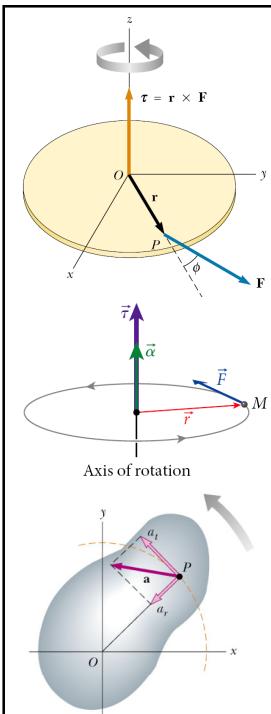
$$M = rF \sin \theta \quad \theta = \angle(\vec{r}, \vec{F})$$

$$M = F_t r = F d$$



- Veličina $d = r \sin \theta$ se naziva **krak sile** – normalno rastojanje pravca delovanja sile od ose rotacije.
- Samo **tangencijalna komponenta sile** (\vec{F}_t) uzrokuje **rotaciono** kretanje krutog tela.

118



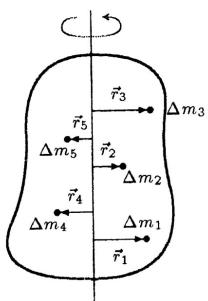
Moment sile

- Tangencijalna komponenta sile \vec{F}_t koja stvara **moment sile** \vec{M} odgovoran za rotaciju krutog tela, ujedno daje **tangencijalno ubrzanje** α_t telu, čime se ugaona brzina ω stalno povećava. Drugim rečima, kruto telo ima neko **ugaono ubrzanje** α .
- Za ugaono ubrzanje α krutog tela odgovorni su **momenti sile**.
- Na veličinu ugaonog ubrzanja α , međutim, utiču ne samo **momenti sile**, već i masa tela, tačnije **raspored masa** u krutom telu **u odnosu na osu rotacije**.
- Tako je u dinamici rotacionog kretanja definisan tzv. **moment inercije** I , veličina koja opisuje **uticaj rasporeda masa** u krutom telu na rotaciju, tj. na ugaono ubrzanje.

119

Moment inercije

- Za svaku **materijalnu tačku** u telu mase Δm_i koja se nalazi na rastojanju r_i od proizvoljno odabrane ose rotacije, moment inercije I_i je definisan preko:



$$I_i = \Delta m_i r_i^2$$

- Sumiranjem momenata inercije I_i za sve materijalne tačke koje čine **kruto telo**, dobija se **moment inercije** I tela **u odnosu na datu osu rotacije**. Jedinica za moment inercije je $[kgm^2]$.

$$I = \sum_i I_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \quad \text{ili}$$

$$I = \sum_i \rho \Delta V_i r_i^2 = \rho \sum_i r_i^2 \Delta V_i$$

120

Moment inercije

- Moment inercije I je veličina **analogna masi** u dinamici translatornog kretanja.
- Moment inercije je **skalarna** veličina, **mera inertnosti tela** pri rotacionom kretanju.
- Masa** je nezavisna osobina tela, a **moment inercije zavisi od izbora ose rotacije** u odnosu na koju se posmatra raspored mase u telu.

Moment inercije za materijalnu tačku

$$I = m r^2$$

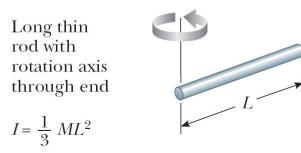
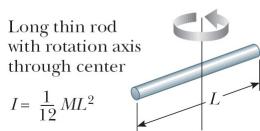
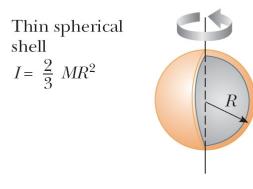
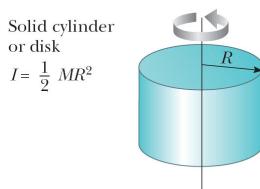
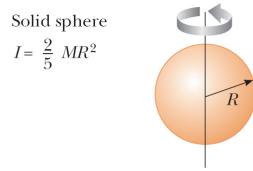
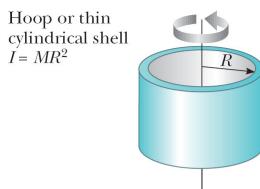
Moment inercije za kruto telo

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

$$I = \int_0^M r^2 dm$$

121

Moment inercije za razna geometrijski pravilna tela



122

Osnovna jednačina dinamike rotacionog kretanja

- Za ugaono ubrzanje α krutog tela odgovorni su momenti sila.
- Prema **II Njutnovom zakonu**, tangencijalna komponenta sile \vec{F}_t koja uzrokuje tangencijalno a_t i ugaono ubrzanje α i čija je napadna tačka na rastojanju r od ose rotacije (krak sile), stvara moment sile \vec{M} koji se može izraziti u obliku koji sadrži informaciju o **rasporedu masa** u odnosu na osu rotacije, tj. veličinu momenta inercije I krutog tela:

▪ Primer rotacije materijalne tačke:

$$a_t = r \alpha \quad F_t = m a_t = m r \alpha$$

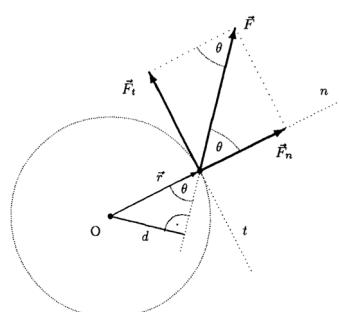
$$M = r F_t = m r^2 \alpha$$

$$M = r F \sin \theta \quad \theta = \angle(\vec{r}, \vec{F})$$

II Njutnov zakon za rotaciju **materijalne tačke** oko nepokretnе ose:

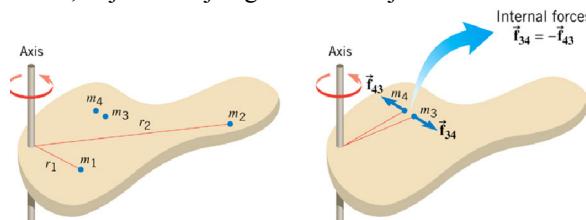
$$\boxed{M = I \alpha} \quad \boxed{\vec{M} = I \vec{\alpha}}$$

123



Osnovna jednačina dinamike rotacionog kretanja

- U **krutom telu** se delovanje unutrašnjih sila $f_{ij} = -f_{ji}$ međusobno poništava.
- Samo tangencijalne komponente **spoljašnjih sila** \vec{F}_i koje deluju na pojedine delice mase m_i krutog tela uzrokuju rotaciono kretanje.
- Momenti \vec{M}_i takvih spoljašnjih sila se sabiraju, čime se dobija **rezultantni moment** spoljašnjih sila \vec{M} , koji uzrokuje ugaono ubrzanje α .



▪ Primer rotacije **krutog tela**:

$$M = \sum_i M_i = \sum_i r_i F_i = \sum_i m_i r_i^2 \alpha = I \alpha$$

$$a_i = r_i \alpha \quad F_i = m_i a_i = m_i r_i \alpha$$

II Njutnov zakon za rotaciju **krutog tela** oko nepokretnе ose

$$M = r F \sin \theta \quad \theta = \angle(\vec{r}, \vec{F})$$

$$\boxed{M = I \alpha} \quad \boxed{\vec{M} = I \vec{\alpha}}$$

124

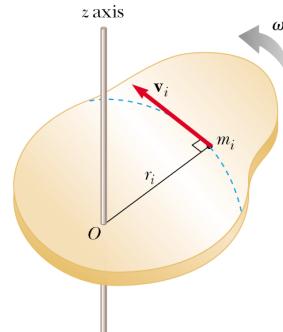
Kinetička energija i rad kod rotacionog kretanja

- Pri **rotaciji** krutog tela (bez translatornog kretanja):

$$v_i = r_i \omega \quad E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2}$$

- Vrši se sumiranje kinetičkih energija za svaki delić krutog tela:

$$E_k^R = \frac{I \omega^2}{2}$$



- Pri **složenom kretanju** krutog tela **ukupna** kinetička energija je suma kinetičkih energija translatornog kretanja **centra mase** i rotacionog kretanja **tela**:

$$E_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}$$

- Ako se pri rotaciji telo obrne za ugao θ (u [rad]) pod uticajem momenta sile M , izvršeni **rad** je dat preko:

$$A = M \theta$$

125

Moment količine kretanja L

- Moment količine kretanja** \vec{L} **materijalne tačke** oko **nepokretnе ose rotacije** je vektorski proizvod njenog vektora položaja \vec{r} i vektora njene količine kretanja \vec{k} :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{k} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

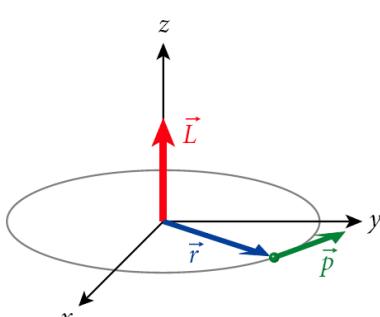
$$L = r k \sin \theta = m r v \sin \theta$$

$$\angle(\vec{r}, \vec{v}) = 90^\circ$$

$$v = r\omega$$

$$L = mrv = mr^2\omega$$

$$L = I\omega \quad \vec{L} = I\vec{\omega}$$



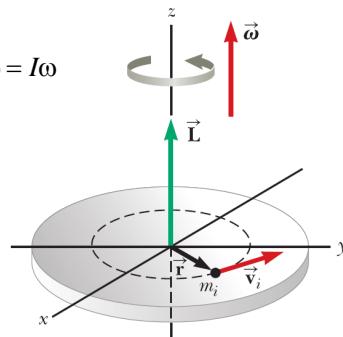
126

Moment količine kretanja \vec{L}

- Moment količine kretanja \vec{L} krutog tela** oko nepokretnе ose rotacije dobija se sumiranjem momenata količine kretanja za sve materijalne tačke koje čine telo:

$$L = \sum_i L_i = \sum_i r_i \times \Delta m_i v_i = \sum_i \Delta m_i r_i v_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega = I\omega$$

$$\boxed{L = I\omega} \quad \vec{L} = I\vec{\omega}$$



127

Moment količine kretanja L

- Vremenska promena momenta količine kretanja \vec{L} materijalne tačke oko nepokretnе ose rotacije:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_0 + \vec{r} \times \vec{F} = 0 + \vec{M}$$

\vec{M} - ukupni moment spoljašnjih sila

\vec{v} - periferna brzina materijalne tačke usled delovanja momenta sile \vec{M}

$$\angle(\vec{v}, (m\vec{v})) = 0^\circ$$

- Ovo je drugi oblik II Njutnovog zakona za rotaciono kretanje – analogija sa silom koja je jednaka brzini promene količine kretanja kod translatornog kretanja tela:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

- Vremenska promena momenta količine kretanja \vec{L} krutog tela oko nepokretnе ose rotacije:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

128

Zakon održanja momenta količine kretanja

Zakon održanja momenta količine kretanja u izolovanom sistemu:

- Ako je rezultanta momenata spoljašnjih sila, koje deluju na kruto telo i uzrokuju njegovo rotaciono kretanje, jednaka nuli ($\vec{M} = 0$), tj. ako je sistem izolovan, ugaoano ubrzanje je jednako nuli ($\alpha=0 \Rightarrow \omega=\text{const.}$), a moment količine kretanja \vec{L} ima konstantnu vrednost (konstantni intenzitet i pravac):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = I\vec{\alpha} \quad \text{za } \vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \vec{L} = \text{const.}$$

- Analogija sa I Njutnovim zakonom dinamike, prema kome tela zadržavaju svoje stanje kretanja (mirovanja ili pravolinijskog ravnomernog kretanja) ukoliko je rezultantna sila koja na njega deluje jednaka nuli:

ukoliko je $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{const.} \Rightarrow \frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = 0 \quad m\vec{v} = \text{const.}$

- Ako kruto telo rotira oko **nepokretnе ose** rotacije, moment količine kretanja \vec{L} se može predstaviti i kao:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

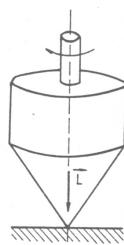
Zakon održanja momenta količine kretanja je:

$$I\vec{\omega} = \text{const.}$$

129

Primeri zakona održanja momenta količine kretanja

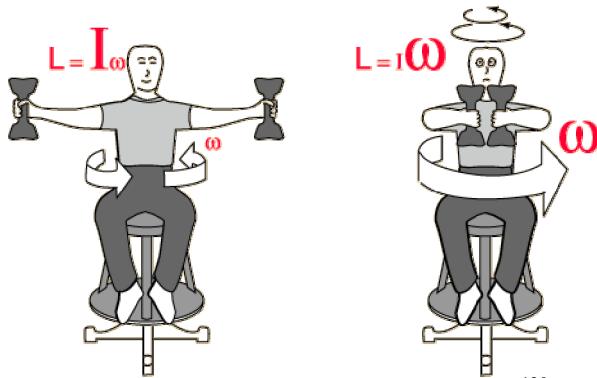
- Rotacija čigre



- Rotacija balističkih projektila



- Prandtlova stolica



130

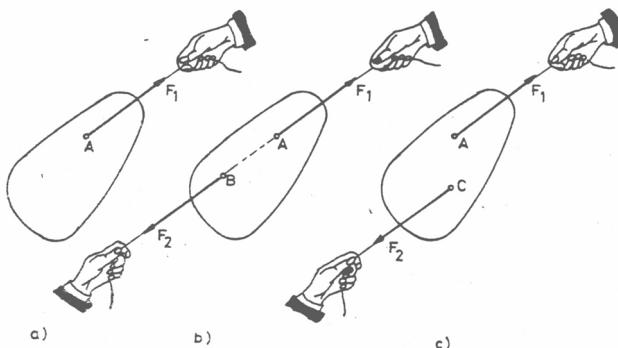
Analogne veličine i jednačine koje važe kod translacionog i rotacionog kretanja

translatorno kretanje		rotaciono kretanje	
pomeraj, x		ugaoni pomeraj, θ	
brzina, v	$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$	ugaona brzina, ω	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
ubrzanje, a	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	ugaono ubrzanje, α	$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
masa, m		moment inercije, I	
količina kretanja, k	$\vec{k} = m\vec{v}$	moment količine kretanja, L	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
sila, F	$\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt}$	moment sile, M	$\vec{M} = I\vec{\alpha}$ $\vec{M} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
kinetička energija, E_k	$E_k = \frac{mv^2}{2}$	rotaciona kinetička energija, E_k^R	$E_k^R = \frac{I\omega^2}{2}$
snaga, P	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	snaga, P	$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$

131

Statika čvrstog tela

- Primer delovanja sila na kruto telo:
 - delovanje jedne sile izaziva samo pomeranje tela na jednu stranu;
 - delovanje dve sile istog intenziteta i pravca, a suprotnog smera daju rezultantnu silu koja je jednak nuli – telo je i u translatornoj i u rotacionoj ravnoteži;
 - delovanje dve sile istog intenziteta i suprotnog smera, čiji se **pravci ne poklapaju** daju **rezultantni moment**, pod čijim uticajem telo počinje **rotaciju** – telo nije u rotacionoj ravnoteži.



132

Uslovi ravnoteže čvrstog tela

- Za ravnotežu je neophodno da se poništavaju ne samo spoljašnje sile, već i momenti spoljašnjih sila.

Uslovi ravnoteže čvrstog (krutog) tela:

- Rezultantna spoljašnja sila koja deluje na telo treba da je jednaka nuli.
- Rezultantni moment spoljašnjih sila oko bilo koje ose rotacije treba da je jednak nuli.

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \sum_i \vec{M}_i = 0$$

$$\vec{a} = 0 \quad \vec{\alpha} = 0$$

$$\vec{v} = \text{const.} \quad \vec{\omega} = \text{const.}$$

- Uslovi ravnoteže** za sve pravce koordinatnog sistema:

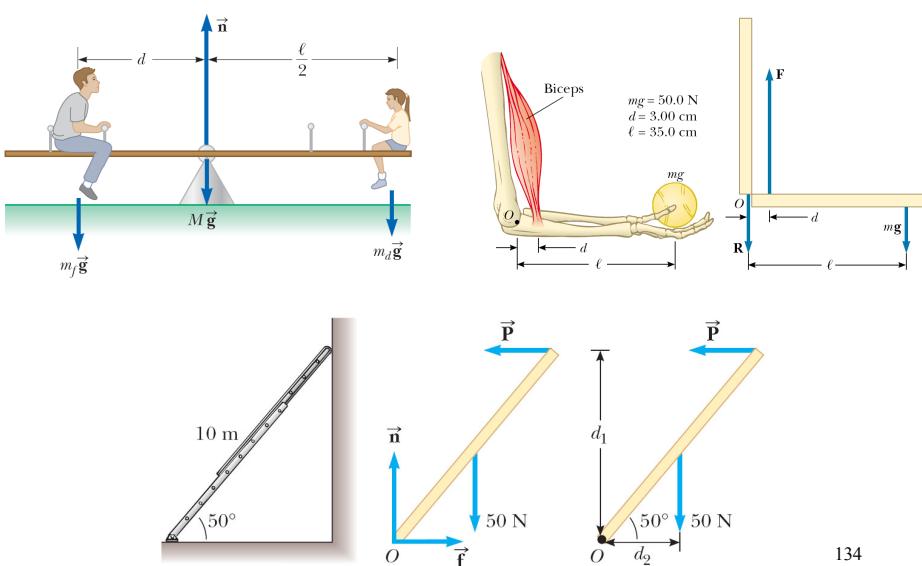
$$\sum_i \vec{F}_{xi} = 0 \quad \sum_i \vec{F}_{yi} = 0 \quad \sum_i \vec{F}_{zi} = 0$$

$$\sum_i \vec{M}_{xi} = 0 \quad \sum_i \vec{M}_{yi} = 0 \quad \sum_i \vec{M}_{zi} = 0$$

133

Uslovi ravnoteže čvrstog tela

Primeri:



134

Vrste ravnoteže. Stabilnost.

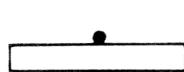
- Postoji: a) **stabilna**,
b) **labilna**,
c) **indiferentna** ravnoteža.
- Primer lenjir okačen o konac:
 - a) težište C je ispod tačke vešanja;
 - b) težište C je iznad tačke vešanja;
 - c) težište C i tačka vešanja se poklapaju.
- Prema veličini **potencijalne energije** koju telo poseduje u gravitacionom polju Zemlje:



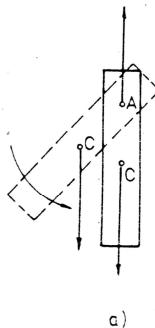
$E_p = E_p(\min)$
STABILNA RAVNOTEŽA



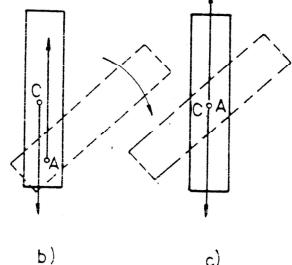
$E_p = E_p(\max)$
LĀBILNA RAVNOTEŽA



$E_p = \text{const}$
INDIFERENTNA RAVNOTEŽA



a)



b)

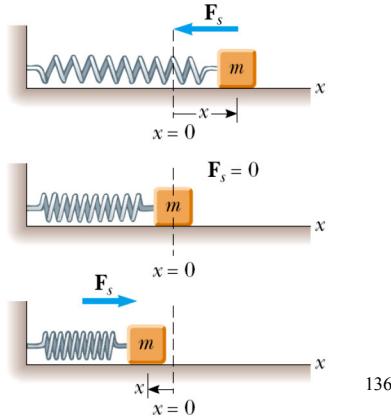
c)

Oscilacije i talasi

- Svako kretanje koje se po određenom pravilu ponavlja u toku vremena je **periodično** ili **oscilatorno kretanje**.
- Ukoliko su **sila** koja teži da vrati oscilatorni sistem u ravnotežno stanje, pa prema tome i **ubrzanje** koje sistem ima, direktno сразмерni rastojanju od njega i usmereni ka njemu, tada se radi o **jednostavnom harmonijskom kretanju**.

Primer:

telo vezano za učvršćenu oprugu
– može da se kreće u vertikalnoj ili u horizontalnoj ravni (po glatkoj površini, **bez trenja**)

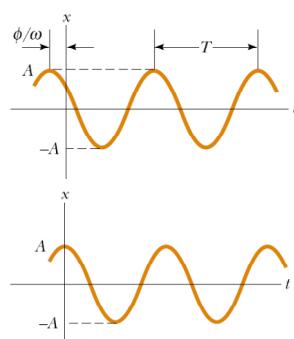
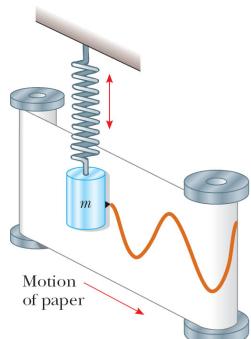


136

Oscilacije

Osnovne osobine **harmonijskog oscilovanja**:

- Period oscilovanja** T je vreme za koje telo izvrši jednu oscilaciju.
- Frekvencija oscilovanja** v (ili f) je broj oscilacija u jedinici vremena.
- Elongacija** x je proizvoljno **rastojanje** od ravnotežnog položaja.
- Amplituda** A je maksimalna elongacija.
- Kod **harmonijskih oscilacija** promenljiva veličina (elongacija) se menja po **sinusnom** ili **kosinusnom** zakonu u funkciji vremena.



137

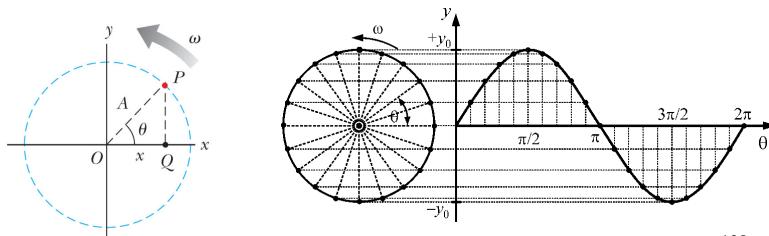
Oscilacije

Osnovne osobine harmonijskog oscilovanja:

- **Kružna frekvencija** ω je povezana sa frekvencijom f (ili v) i periodom T .

$$f = \frac{1}{T} \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

- Pri kretanju materijalne tačke po kružnici **ravnomernom** perifernom brzinom v i njen radijus vektor (vektor položaja) se obrće ravnomernom ugaonom brzinom ω .
- **y-koordinata** položaja materijalne tačke koja se ravnomerno kreće po kružnici menja se po sinusnom (kosinusnom) zakonu, odnosno projekcija radijus-vektora na y-koordinatnu osu menja svoj intenzitet po sinusnom (kosinusnom) zakonu u funkciji vremena. T je vreme potrebno materijalnoj tački da obide pun krug.



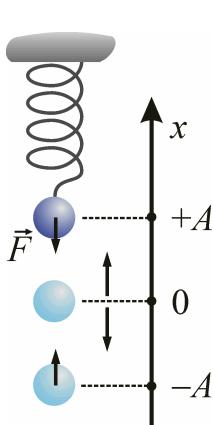
138

Primeri harmonijskih oscilacija

- Oscilovanje **tela obešenog o elastičnu oprugu**
- Sila koja vraća telo i oprugu ka ravnotežnom položaju je **elastična sila** deformisane opruge i (prema Hukovom zakonu za elastične deformacije istezanja) srazmerna je veličini deformacije).

Znak "−" znači suprotan smer sile \vec{F} od vektora položaja x tela vezanog za oprugu.

$$\vec{F} = -k \vec{x} \quad k - \text{koeficijent elastičnosti opruge}$$



- Iz II Njutnovog zakona sledi **jednačina kretanja**:

$$\text{Smena: } \frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

- Rešenje ove diferencijalne jednačine ima oblik:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

139

Oscilovanje tela obešenog o elastičnu oprugu

- Elongacija x je sinusna (ili kosinusna) funkcija vremena:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

ω_0 – kružna frekvencija oscilatornog kretanja

α – početna faza, opisuje početni položaj sistema

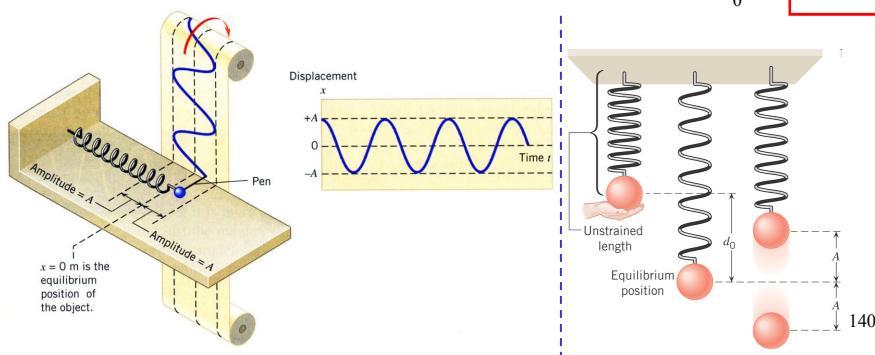
$(\omega_0 t + \alpha)$ – faza oscilovanja

A – amplituda (maksimalna elongacija)

- Period oscilovanja T zavisi od osobina opruge (koeficijent elastičnosti k) i od mase m tela okačenog na nju:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



Energija tela koje osciluje na elastičnoj opruzi

- Energija tela koje osciluje na elastičnoj opruzi je zbir **kinetičke energije** tela i **potencijalne energije** elastične deformacije opruge.

S obzirom da važi:

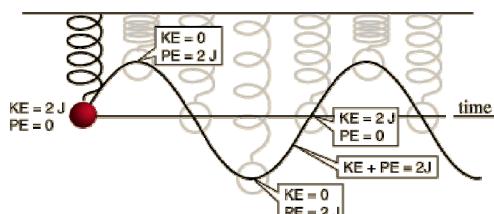
$$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad E = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \text{const.}$$

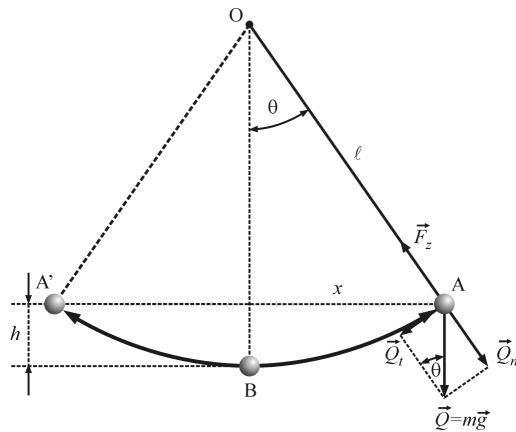
- Zbir **kinetičke** i **elastične potencijalne** energije pri harmonijskom oscilovanju, ukoliko nema gubitaka, je konstantan.



Matematičko klatno

- Matematičko klatno je materijalna tačka koja se u polju Zemljine teže kreće na stalnom rastojanju od date tačke (tačke oslonca).

$$\sin \theta = \frac{Q_t}{Q} = \frac{x}{\ell} \Rightarrow Q_t = -\frac{mgx}{\ell} \quad Q_t = ma = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$



"-" znači suprotan smer sile Q_t od vektora položaja x .

- Jednačina kretanja:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{mgx}{\ell} = 0$$

x – horizontalno rastojanje od ravnotežnog položaja

s – lučno rastojanje od ravnoteže (pređeni put)

142

Matematičko klatno

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{mgx}{\ell} = 0 \quad \text{Za male uglove } \varphi, x \approx s. \text{ Smena: } \frac{g}{\ell} = \omega_0^2 \quad \boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

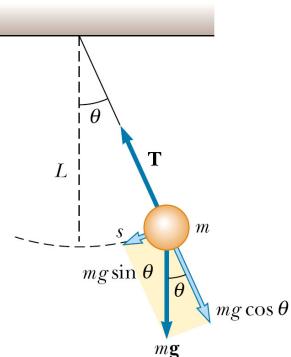
- Rešenje jednačine je da je elongacija x sinusna (ili kosinusna) funkcija vremena t oblika:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

- Period oscilovanja T , za slučaj malih amplituda oscilovanja, zavisi od dužine klatna ℓ i ubrzanja sile Zemljine teže g :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$



143

Fizičko klatno

- Fizičko klatno je kruto telo koje se u polju sile Zemljine teže može slobodno kretati oko nepokretnе horizontalne ose, a koja ne prolazi kroz njegov centar mase (težište).

- Za male uglove θ odstupanja od ravnotežnog položaja, rešenje jednačine kretanja fizičkog klatna je sinusna (ili kosinusna) zavisnost elongacije (ugla θ) od vremena:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

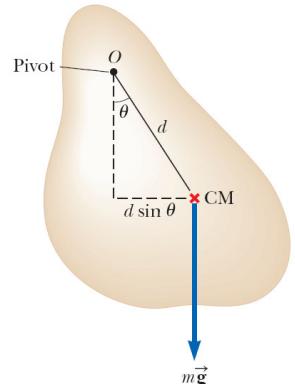
- Period oscilovanja fizičkog klatna:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

d – rastojanje centra mase (CM) od ose rotacije

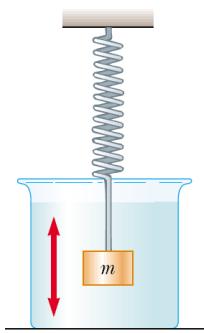
m – masa krutog tela

I – moment inercije krutog tela u odnosu na datu osu rotacije



144

Prigušene harmonijske oscilacije



- Na svaki realni oscilatorni sistem deluje sila trenja.
- Prigušeno oscilovanje je oscilovanje u kojem veličina amplitude opada sa vremenom.
- Sila otpora koja smanjuje veličinu amplitute je srazmerna brzini kretanja tela:

$$\vec{F} = -b \vec{v}$$

b - koeficijent srazmernosti - konstanta prigušenja

- Rešenje jednačine kretanja u slučaju prigušenih oscilacija je elongacija x koja se u toku vremena menja po sinusnom (ili kosinusnom) zakonu.

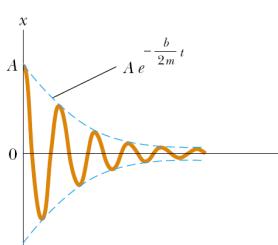
$$x(t) = A(t) \sin(\omega'_0 t + \alpha)$$

ω'_0 - sopstvena kružna frekvencija amortizovane oscilacije

- Amplituda $A(t)$ u toku vremena opada do nulte vrednosti prema eksponencijalnoj funkciji.

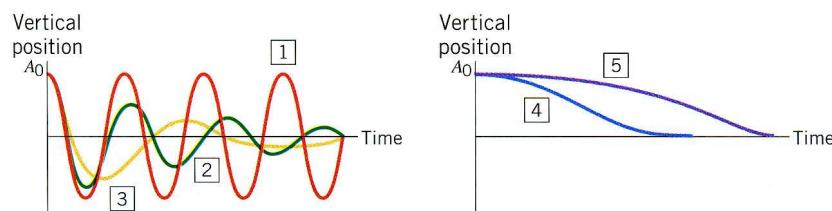
$$A(t) = A e^{-\frac{b}{2m}t}$$

145



Prigušene harmonijske oscilacije

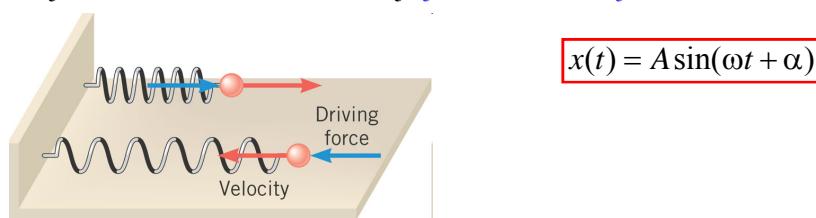
- U zavisnosti od veličine prigušenja b (tj. otpora sredine), oscilovanje može imati sledeće oblike:
 1. **Neprigušeno oscilovanje**
 2. **Malo prigušenje (kvaziperiodično oscilovanje)**
 3. **Srednje prigušenje (kvaziperiodično oscilovanje)**
 4. **Kritično prigušenje** (u najkraćem intervalu vremena sistem se vraća u ravnotežno stanje)
 5. **Aperiodično prigušenje** (veoma sporo vraćanje sistema u ravnotežno stanje – velike vrednosti sile otpora sredine)



146

Prinudne harmonijske oscilacije. Rezonancija.

- **Prinudno oscilovanje** je oscilovanje u kojem osim elastične sile postoji još jedna **spoljašnja sila** koja pojačava oscilovanje.
- Ako je **prinudna sila harmonijska** (menja se po sinusnom zakonu sa kružnom frekvencijom ω , $F=F_0\sin\omega t$) i $\omega \neq \omega_0$ (ω_0 je sopstvena frekvencija oscilovanja sistema bez prisustva prinudne sile) u *realnom* slučaju, kada postoji i neka **sila trenja** koja deluje na oscilatorni sistem, rešenje **jednačine kretanja** ima oblik:

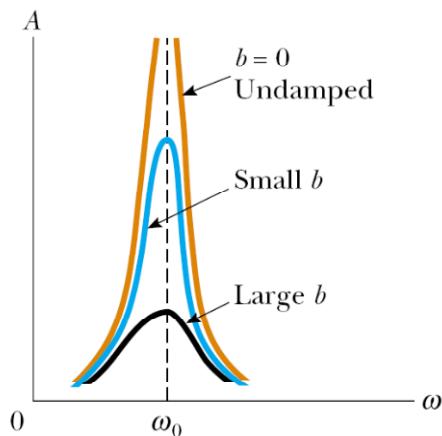


- Telo mase m osciluje **istom frekvencijom ω** kojom se menja i periodična sila F , ali sa **modifikovanom amplitudom A** , čija veličina se **ne menja** u toku vremena.

147

Prinudne harmonijske oscilacije. Rezonancija.

- Ako frekvencija prinudne sile F teži sopstvenoj kružnoj frekvenciji oscilatora ($\omega \rightarrow \omega_0$), amplituda A prinudnog oscilovanja teži visokim vrednostima (u slučaju kada nema trenja, u beskonačnost). Nastupa stanje **rezonancije**.



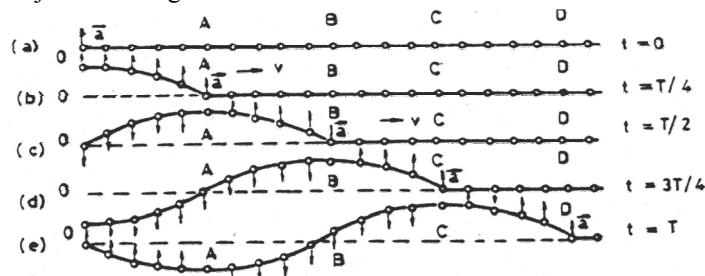
148

Talasno kretanje - Prostiranje talasa u elastičnoj sredini

- Mehanički talas (talasno kretanje) je **širenje oscilatornog poremećaja** u elastičnoj materijalnoj sredini.
- Pri prostiranju talasa, ne premeštaju se delići sredine. Oni osciluju oko ravnotežnih položaja, a prenosi se **energija** talasa.

Za postojanje **mehaničkog talasa** neophodno je postojanje:

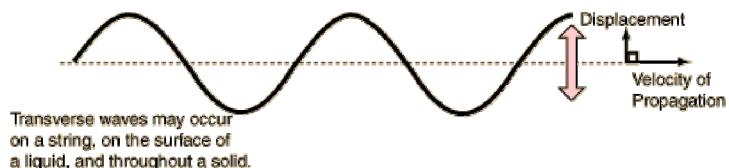
- **izvora** talasnog poremećaja,
- **materijalne sredine** kroz koju se poremećaj prenosi, i
- nekog **fizičkog mehanizma** preko kojeg elementi materijalne sredine utiču jedan na drugi.



149

Prostiranje talasa u elastičnoj sredini

- Kod **transverzalnih** talasa deliči elastične sredine osciluju **normalno** na pravac prostiranja talasa. Javljuju se **samo** u sredinama gde postoje elastične sile **smicanja** - **čvrsta tela**.



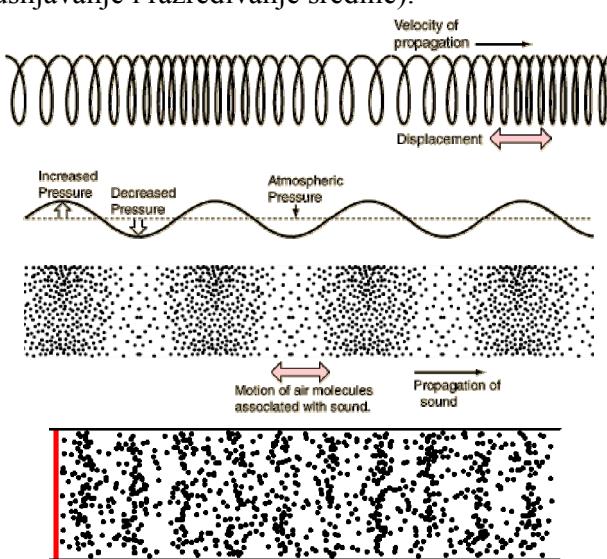
Transverse waves may occur on a string, on the surface of a liquid, and throughout a solid.

©2002, Dan Russell

150

Prostiranje talasa u elastičnoj sredini

- Kod **longitudinalnih** talasa deliči sredine osciluju **duž** pravca prostiranja talasa (zgušnjavanje i razređivanje sredine).



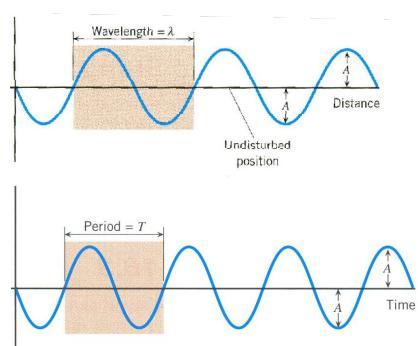
151

Prostiranje talasa u elastičnoj sredini

- **Sinusoidalni** talas postoji kada svaka tačka elastične sredine u kojoj se prostire talas vrši **harmonijske** oscilacije oko ravnotežnog položaja sa **elongacijom**:

$$y_i = y_{i0} \sin(\omega t + \phi_i)$$

- Rastojanje između dva najbliža delića koji osciluju u istoj fazi (ili im se faze razlikuju za 2π) je **talasna dužina** λ .

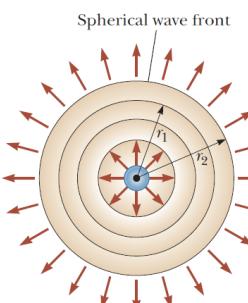


- Talasni poremećaj prelazi put od jedne talasne dužine dok delići sredine izvrše jednu oscilaciju (za vreme T), pa je brzina prostiranja talasa (**fazna brzina**):

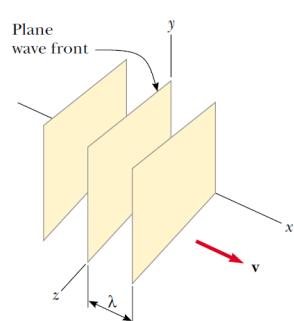
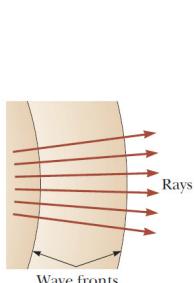
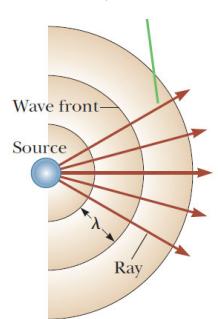
$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda v$$

152

Prostiranje talasa u elastičnoj sredini



- **Površina** koja spaja tačke do kojih je stigao talasni poremećaj je **talasni front**.
- U homogenoj i izotropnoj sredini talasni front ima oblik **sfera**.
- Ako je talasni front **ravan**, reč je o ravnom talasu. Na velikoj udaljenosti od izvora talasa i sferni talas ima ravan talasni front.



153

Jednačina progresivnog talasa

- **Progresivni talas** je talas koji se u celoj elastičnoj sredini prostire **bez promene pravca ili smera**.
- Prostiranjem talasa u nekoj elastičnoj sredini **u stanje oscilovanja** se dovode **sve tačke te sredine** i njihova elongacija se opisuje sinusnom (ili kosinusnom) funkcijom za harmonijsko kretanje.
- Zbog kašnjenja u oscilovanju udaljenijih delića sredine u odnosu na izvor talasa, definiše se jednačina koja opisuje **vremensku i prostornu** zavisnost elongacije delića elastične sredine – **jednačina progresivnog talasa**:

$$y = y_0 \sin(\omega t - \phi)$$

- Ovo je tzv. **talasna funkcija**, koja opisuje **elongaciju** proizvoljnog delića materijalne sredine, **na rastojanju x od izvora talasa u proizvoljnom trenutku t** .

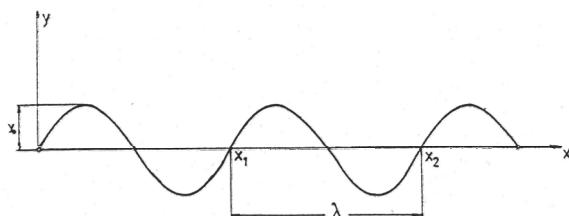
- Početna faza talasa:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} x$$

154

Jednačina progresivnog talasa

- Slika ukazuje na položaj, fazu u kojoj se nalaze različiti delići materijalne sredine koji su pobuđeni na oscilovanje i to u datom trenutku vremena:



- Razlika u fazi za dve tačke elastične sredine:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$$

- Delići osciluju u fazi:

$$\Delta\phi = k 2\pi \quad \text{ili}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = k \lambda$$

rastojanje između tačaka elastične sredine koje su u fazi:

- Delići osciluju u suprotnim fazama:

$$\Delta\phi = (2k - 1)\pi \quad \text{ili}$$

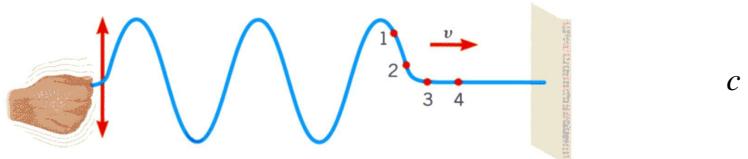
$$\Delta x = x_2 - x_1 = (2k - 1) \frac{\lambda}{2}$$

rastojanje između tačaka elastične sredine koje su u suprotnim fazama

155

Brzina širenja talasa

- Brzina prostiranja mehaničkih talasa zavisi od **elastičnih osobina** materijalne sredine kroz koju se prostire.
- Za **trasverzalni talas** koji se prostire kroz zategnutu žicu (F – sila zatezanja žice; $\mu = m/L$ – linijska masa žice), brzina talasa je:



- U opštem slučaju, za **trasverzalni talas** koji se prostire kroz čvrsti materijal (G – modul smicanja materijala; ρ - gustina materijala), brzina talasa je:

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

156

Brzina širenja talasa

- Za **longitudinalni talas** koji se prostire kroz **čvrsto telo** (E – Jangov modul elastičnosti; ρ – gustina tela), brzina talasa je:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- Za **longitudinalni talas** koji se prostire kroz **tečnost** (B – zapreminski koeficijent elastičnosti; ρ – gustina tečnosti), brzina talasa je:

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- Za **longitudinalni talas** koji se prostire kroz **gas** (κ – adijabatska konstanta; p – pritisak gasea; ρ – gustina gasea), brzina talasa je:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}$$

157

Energija talasa

- Elongacija i brzina kretanja čestica (mase m) sredine:

$$y = y_0 \sin \omega t \quad v = \frac{dy}{dt} = y_0 \omega \cos \omega t \quad E = E_{k \max} = \frac{mv_{\max}^2}{2}$$

- Energija jedne oscilujuće čestice u elastičnoj sredini: $E = \frac{1}{2} m \omega^2 y_0^2$

- Gustina energije u** koju prenose talasi (n je koncentracija čestica elastične sredine, tj. broj u jedinici zapreminje):

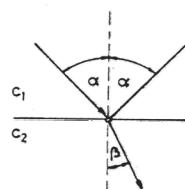
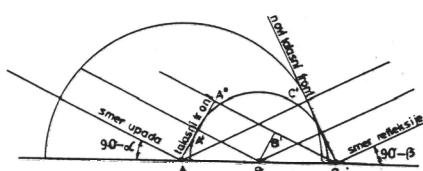
$$u = nE = \frac{1}{2} \rho \omega^2 y_0^2$$

158

Osnovne osobine talasnog kretanja.

1. Odbijanje talasa.

- Ravan talas na granici dve sredine u kojima su brzine prostiranja talasa različite delimično se **odbija**, a delimično **prelama**.

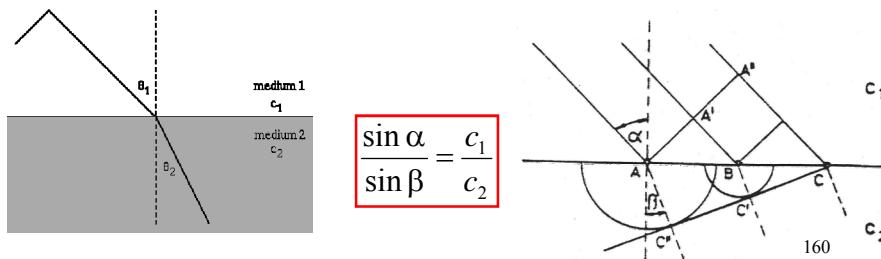


- Odbijanje (refleksija) talasa se objašnjava pomoću **Hajgensovog principa**: Svaka tačka na granici dve elastične sredine do koje je stigao talasni front može se smatrati novim izvorom talasa.
- Novi talasni front** (odbijenog talasa) čini **zajednička tangenta** na sferne talasne frontove koji potiču od tačaka na granici dve sredine.
- Upadni ugao jednak je uglu odbijanja.
- Pravci upadnog i odbojnog talasa i normale na graničnu površinu leže u istoj ravni.

159

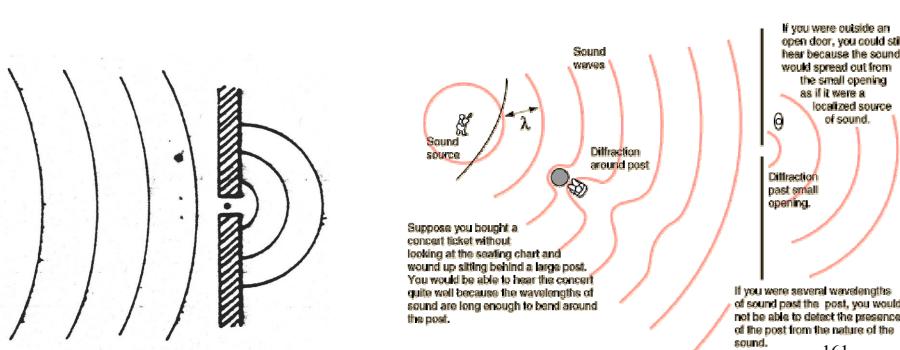
2. Prelamanje talasa

- Prelamanje (refrakcija) talasa se dešava na granici dve sredine u kojima se talas prostire različitim brzinama – talas menja pravac prostiranja.
- Prema **Hajgensovom principu**, talasni front prelomljenog talasa menja pravac kretanja.
- Novi talasni front** (prelomljenog talasa) čini **zajednička tangenta** na sferne talasne frontove koji potiču od tačaka na granici dve sredine.
- Ako se prelamaju složeni talasi koji sadrže komponente **različite frekvencije**, dolazi do **disperzije** - svaka komponenta se prelama pod različitim uglovima.



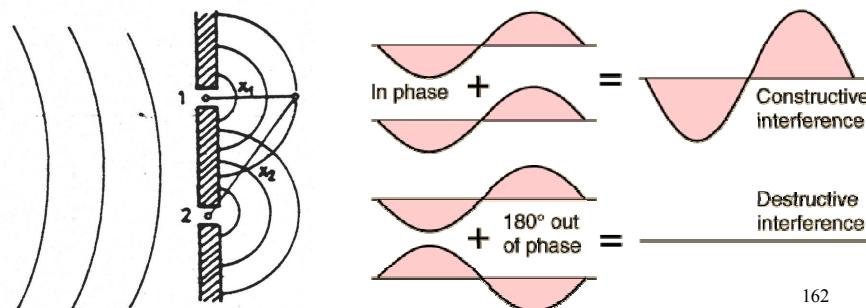
3. Difrakcija talasa

- Difrakcija talasa je pojava širenja talasa iza prepreka sa pukotinom, odnosno **savijanja** talasa na preprekama. Talasi **skreću** sa prvobitnog pravca u **istoj** elastičnoj sredini.
- Dimenzije pukotine treba da su istog reda veličine kao i talasna dužina.
- Prema **Hajgensovom principu**, svaka tačka pukotine je novi izvor talasa.



4. Interferencija talasa

- Interferencija talasa je pojava **slaganja** (superpozicije) talasa koji se prostiru u **istoj** materijalnoj sredini.
- Interferencija se javlja samo ako postoji **stalna fazna razlika** između talasa koji interferiraju (**koherentni** talasi).
- Interferencija je **konstruktivna**, ako se amplitude sabiraju (talasi u fazi), a **destruktivna** ako se poništavaju (talasi u suprotnim fazama).

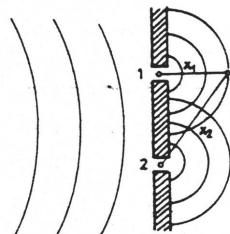


4. Interferencija talasa

- Posmatramo **interferenciju** talasa u proizvoljno odabranoj dotoj tački materijalne sredine **difraktovanih** sa dve pukotine – imaju iste amplitude, frekvencije i talasne dužine, a različite faze u toj tački.

Elongacije delića materijalne sredine u dotoj tački prostora (y_1 i y_2) koje su izazvane talasima iz dva različita izvora talasa:

$$y_1 = y_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1\right) \quad y_2 = y_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_2\right) \quad \phi_i = \frac{2\pi}{\lambda} x_i$$



$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x$$

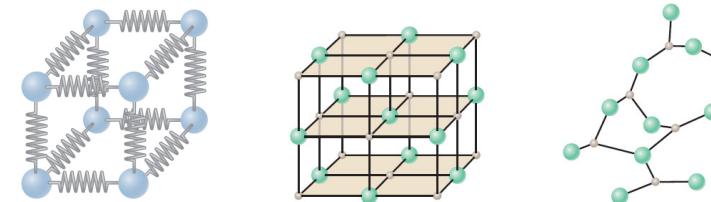
$$\Delta x = \begin{cases} k\lambda & \text{konstruktivna interferencija} \\ (2k-1)\frac{\lambda}{2} & \text{destruktivna interferencija} \end{cases}$$

- U dotoj tački **rezultantno oscilovanje** čestice elastične sredine ima **amplitudu** koja zavisi ne samo od **amplitude** talasa koji interferiraju, već i od **fazne razlike** $\Delta\phi$, odnosno od **razlike u predenim putevima** Δx talasa od pojedinih izvora.

163

Mehanika fluida

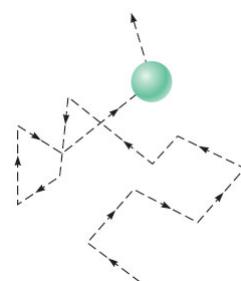
- Fluidi: **tečnosti** ("stalna" zapremina i promenljiv oblik) i **gasovi** (promenljivi i zapremina i oblik).
- Statika** fluida proučava ravnotežu u fluidima; **dinamika** fluida proučava kretanje fluida.
- Sva materija ima izvesnu distribuciju (raspored) atoma i molekula.
- U zavisnosti od jačine (električnih) sila između atoma i molekula, oni mogu biti jače ili slabije međusobno povezani.
- Na niskim temperaturama sastavni delovi materije su relativno jako povezani i vrše oscilatorno kretanje oko ravnotežnih položaja – čvrsta tela.
- U zavisnosti od stepena uređenosti, čvrsta materija može biti kristalna (trodimenzionalna uređenost) ili amorfna (odsustvo trodimenzionalne uređenosti).



164

Mehanika fluida

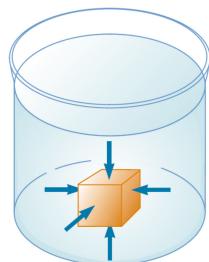
- U tečnostima i gasovima slabije međumolekulske sile omogućavaju relativno slobodno i slučajno kretanje molekula.
- Slabije međumolekulske sile** u poređenju sa čvrsttim telima uzrokuju promenljivost oblika (i zapremine).
- Delovanje sile na **tečnosti** uzrokuje promenu oblika, a **samo u maloj meri** i zapremine (stisljivost). U većini *idealnih* slučajeva smatra se da je i zapremina stalna, nepromenljiva (tj. njena promena je zanemarljiva).
- Delovanje sile na **gasove** uzrokuje promenu i oblika i zapremine.



165

Statika fluida. Pritisak.

- Sila koja deluje od strane fluida (tečnosti i gasova) na telo koje se nalazi u njima deluje na sve površine pod pravim uglom – nikako tangencijalno niti u posebnoj napadnoj tački – i teži da sa svih strana sabije telo.
- Pomeranje fluida izazivaju sile koje deluju na njihovu površinu (zbog toga što nemaju stalan oblik), a ne u posebnoj napadnoj tački. Zato je uvedena fizička veličina **pritisak** (skalarna veličina) koja predstavlja odnos **normalne sile** F i **površine** S na koju deluje sila. Jedinica za pritisak je Paskal ($[Pa]=[N/m^2]$).



$$p = \frac{F}{S}$$

$$\text{Pressure} = \frac{\text{Force}}{\text{Area}} = \frac{F}{A}$$

Weight
100 N
 $A = 0.1 m^2$
 $P = 1000 \text{ Pascals}$

$A = 0.01 m^2$
 $P = 10,000 \text{ Pascals}$

Same force,
different area,
different pressure

- Efekat delovanja sile na fluide zavisi od površine na koju ona deluje. 166

Hidrostatički pritisak

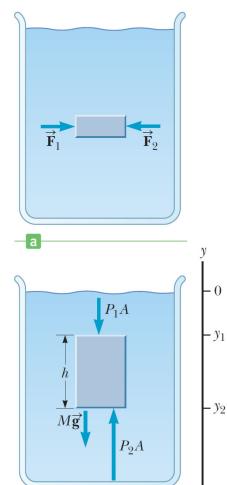
- U tečnostima (fluidima uopšte) postoji **pritisak** koji je **posledica delovanja gravitacione sile** na sve čestice (molekule) tečnosti. Svaki delić tečnosti svojom težinom vrši pritisak na deliće ispod njega.
- Ovaj pritisak **raste sa dubinom**.
- Kada je fluid (na slici – tečnost) u statičkoj ravnoteži, nijedan deo fluida nije u pokretu.
- Sile koje deluju na izdvojeni deo fluida u horizontalnom pravcu međusobno se poništavaju, a takođe i sile koje deluju u vertikalnom pravcu (da nije tako fluid bi se kretao sa mesta višeg ka mestu nižeg pritiska).
- Ravnoteža sile duž vertikalnog pravca (sila odozgo i odozdo na izdvojenu zapreminu fluida i njegova težina Q):

$$\sum_i F_i = 0 \quad p_2 S - p_1 S - Q = 0 *$$

$$p_2 S - p_1 S - \rho Shg = 0$$

$$p_2 = p_1 + \rho gh$$

* S – poprečni presek izdvojenog fluida; h – visina stuba fluida.



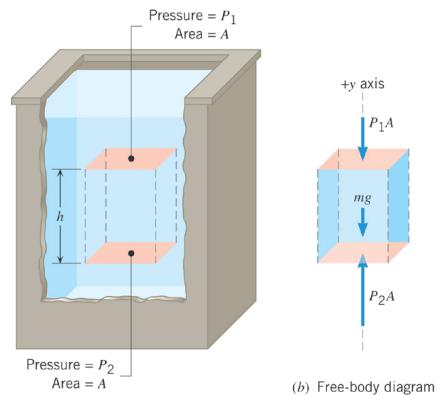
Hidrostatički pritisak

- Pritisak koji deluje odozdo na izdvojeni deo fluida veći je od pritiska koji deluje odozgo za veličinu ρgh – to je **težina** stuba fluida **po jedinici površine** na koju deluje:

$$p = \frac{Q}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho Vg}{S} = \frac{\rho Shg}{S} = \rho gh$$

- To je **hidrostatički pritisak** stuba tečnosti gustine ρ i visine h :

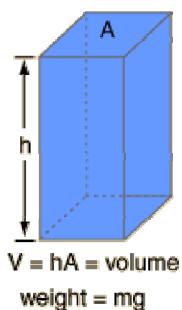
$$p = \rho gh$$



168

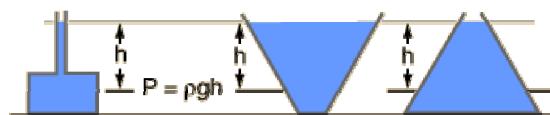
Hidrostatički pritisak

- Pritisak u fluidu gustine ρ (hidrostatički) zavisi samo od **dubine h** , a ne i od ukupne količine ili težine fluida (tečnosti) u sudu – na istoj dubini pritisak je isti.



Static fluid pressure does **not** depend on the shape, total mass, or surface area of the liquid.

$$\text{Pressure} = \frac{\text{weight}}{\text{area}} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho Vg}{A} = \rho gh$$



- Ako se **iznad slobodne površine tečnosti** nalazi **atmosfera**, tada je ukupan pritisak na dubini h jednak zbiru **atmosferskog** p_0 i **hidrostatičkog** ρgh :

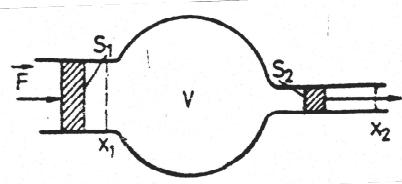
$$p_{uk} = p_0 + \rho gh$$

169

Pritisak

- Pritisak u fluidu (tečnosti ili gasu) potiče od **težine same tečnosti** i/ili od delovanja **spoljašnje sile**. Ako postoji povećanje pritiska usled delovanja spoljašnje sile, to se prenosi na sve delove fluida, upravo zbog činjenice da je pritisak isti na istom nivou (dubini) u fluidu.

- Jednakost izvršenih radova na potiskivanju fluida na levoj i desnoj strani zatvorenog suda sa fluidom:



$$\begin{cases} A_1 = F_1 x_1 = p_1 S_1 x_1 \\ A_2 = F_2 x_2 = p_2 S_2 x_2 \end{cases}$$

$$A_2 = A_1 \quad S_2 x_2 = S_1 x_1$$

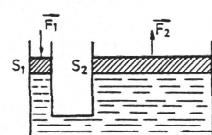
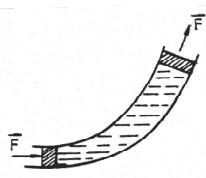
$$p_1 = p_2$$

- Paskalov zakon:** Pritisak koji se spolja vrši na neku tečnost (ili, u opštem slučaju, na **fluid**) prenosi se kroz nju nesmanjenim intenzitetom na sve strane podjednako.
- Usled toga, moguće je menjati **intenzitet, pravac i smer** delovanja sile pomoću tečnosti u **zatvorenom** sudu.

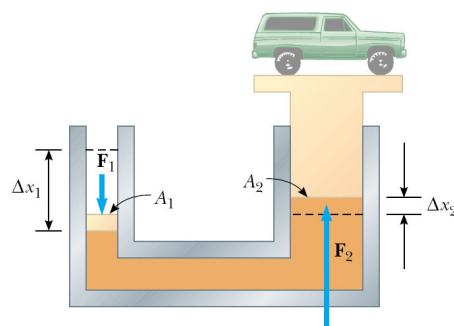
170

Pritisak

- Hidraulična presa** - ilustracija primene Paskalovog zakona i primer promene pravca i intenziteta delovanja sile.



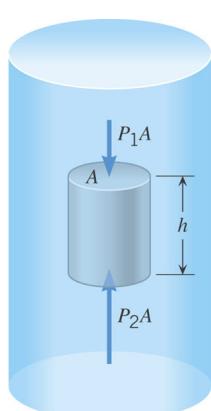
$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$$



171

Potisak. Arhimedov zakon.

- Na sva tela potopljena u tečnost (fluid uopšte) deluje sila suprotnog smera od gravitacione, koja teži da istisne telo iz tečnosti – **sila potiska**.
- Sila potiska je posledica činjenice da hidrostatički pritisak raste sa dubinom, tj. njen uzrok je razlika u hidrostatičkim pritiscima koji na uronjeno telo deluju na njegovoj gornjoj i donjoj strani.



$$F_p = F_2 - F_1 = p_2S - p_1S$$

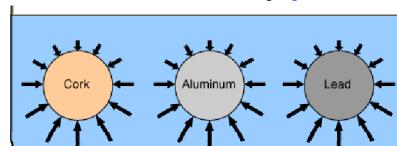
$$F_p = [p_0 + \rho g(h+x) - (p_0 - \rho gx)]S \quad x - \text{dubina na mestu gornje površine}$$

$$F_p = \rho g h S$$

$$F_p = \rho g V = m_f g$$

▪ **Sila potiska je jednaka težini istisnute tečnosti (fluida).**

▪ Tela jednake zapremine trpe delovanje **jednakih** sila potiska.



172

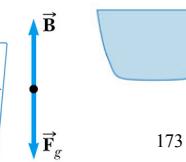
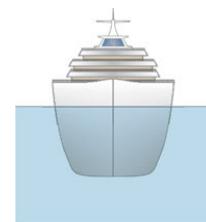
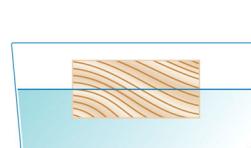
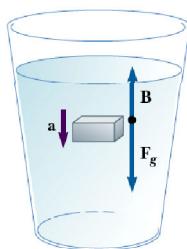
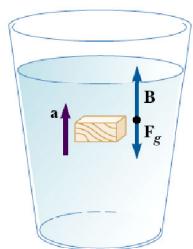
Potisak. Arhimedov zakon.

- Arhimedov zakon:** Svako telo potpuno ili delimično uronjeno u tečnost (fluid) prividno gubi od svoje težine toliko koliko teži istisnuta tečnost.

- Efektivna težina tela (gustine ρ_t) potopljenog u tečnost (fluid, gustine ρ_f):

$$Q_{ef} = Q - F_p = (\rho_t - \rho_f) g V$$

$\rho_t > \rho_f$	$Q > F_p$	telo tone
$\rho_t = \rho_f$	$Q = F_p$	telo lebdi
$\rho_t < \rho_f$	$Q < F_p$	telo pliva

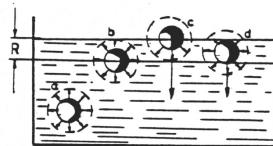
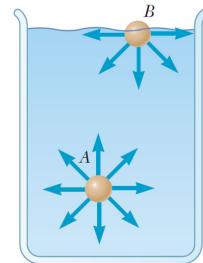


173

Površinski napon

- **Površinski napon** je pojava **narušavanja ravnoteže** privlačnih međumolekulskih sila u površinskom (graničnom) sloju u tečnostima.
- Usled postojanja površinskog napona, tečnosti teže da smanje svoju slobodnu površinu.
- **Koeficijent površinskog napona** je **rad** na dovođenju molekula tečnosti na površinu koji je potrebno izvršiti za jedinično povećanje slobodne površine tečnosti.

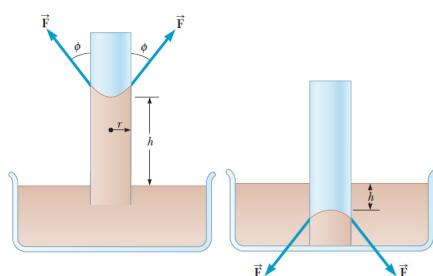
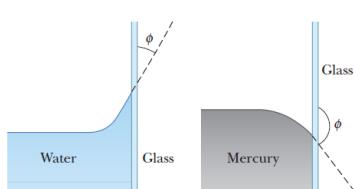
$$\gamma = \frac{\Delta A}{\Delta S}$$



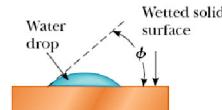
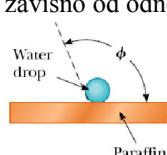
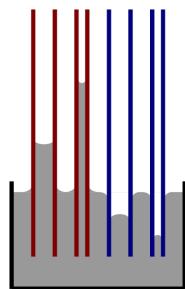
174

Površinski napon

- U zavisnosti od materijala sa kojim se graniči tečnost, razlikuju se slučajevi kada tečnost **kiasi** (jače athezionate sile), odnosno **ne kiasi** (jače kohezione sile) sud u kome se nalazi.



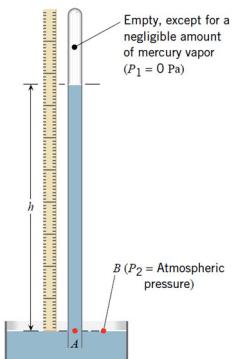
- **Kapilarnost** je pojava da se tečnost u uskim kapilarnim cevima ne ponaša po principu spojenih sudova, već zauzima viši ili niži nivo u odnosu na nivo u spoljašnjem sudu, zavisno od odnosa kohezionih i athezionih sila.



175

Osobine gasova. Atmosferski pritisak

- U **gasovima** su **međumolekulske sile slabe**, a potencijalna energija koja teži da ih drži na okupu je manja od njihove kinetičke energije.
- Nemaju stalan oblik ni zapreminu.
- Pritisak u zatvorenim gasovima se prenosi podjednako u svim pravcima - važi **Paskalov zakon**.
- I u gasovima deluje **sila potiska**, ali je ona, zbog njihove male gustine, relativno mala.



- Pritisak koji vrše gasovi atmosfere na sva tela na Zemlji naziva se **atmosferski pritisak**.
- Merenje atmosferskog pritiska iz ravnoteže pritisaka koji deluju na istom nivou unutar i izvan cevi sa tečnošću gustine ρ :

$$p_2 = p_1 + \rho g$$

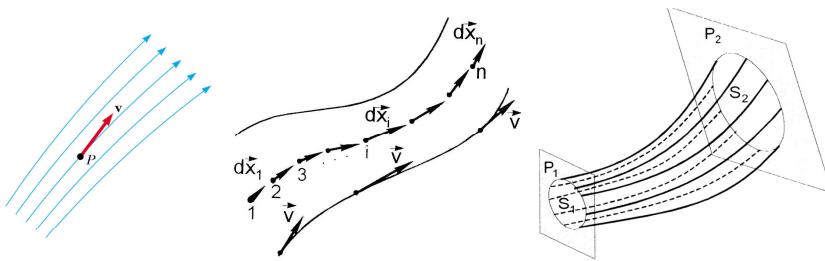
$$p_1 = 0 \text{ Pa} \quad p_2 = p_a$$

$$p_a = \rho g h$$

176

Dinamika fluida

- Pod uticajem sile fluidi (**tečnosti** i **gasovi**) se kreću, a pravac i smer kretanja zavisi od **smera** i **pravca** delovanja sile i **oblika prostora** koji zauzimaju.
- Pojedini delovi fluida se mogu kretati **različitim brzinama** jedni u odnosu na druge.
- **Strujna linija** je zamišljena linija duž koje se kreću čestice fluida - kriva linija kod koje je tangenta u svakoj tački kolinearна sa vektorom brzine.
- Brzina čestica se duž strujne linije menja po **intenzitetu** i **pravcu**.
- **Strujna cev** je deo fluida ograničen strujnim linijama, a broj čestica unutar strujne cevi je stalan.



177

Dinamika fluida

- **Stacionarno kretanje** je kretanje kod kojeg se raspored strujnih linija ne menja u toku vremena (brzina mala i nema prepreka na putu fluida) – **brzina u svakoj tački ostaje konstantna u toku vremena.**
- **Turbulentno kretanje** je složeno kretanje, u kome se formiraju vrtlozi (brzo proticanje i brze promene brzine delića fluida pri nailasku na prepreke).
- **Idealni fluid** je:
 - **nestišljivi** fluid – ima stalnu gustinu;
 - koji se kreće **bez trenja** (neviskozni fluid);
 - koji se kreće **stacionarno** (laminarno, slojevito) – brzina, gustina fluida i pritisak u svakoj tački u njemu se ne menjaju u toku vremena;
 - koji se kreće **bez vrtloga**.
- U **realnim fluidima** uvek postoji trenje (posledica međumolekularnih sila).

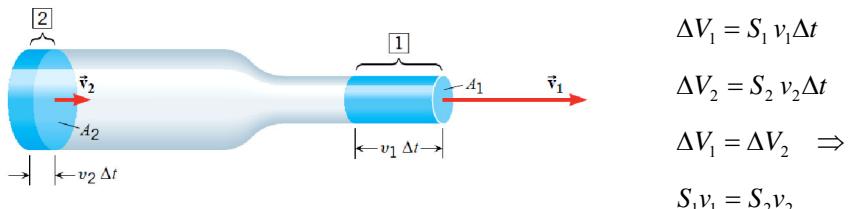
178

Jednačina kontinuiteta

- **Protok fluida** je protekla količina (zapremina ili masa) fluida kroz strujnu cev u jedinici vremena:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = S v \quad Q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \rho S v$$

- Zbog osobine **nestišljivosti** (gustina fluida je ista u svim delovima strujne cevi) **zapremine** proteklog fluida na dva različita preseka strujne cevi su jednake – zapreminski protok je konstantan.

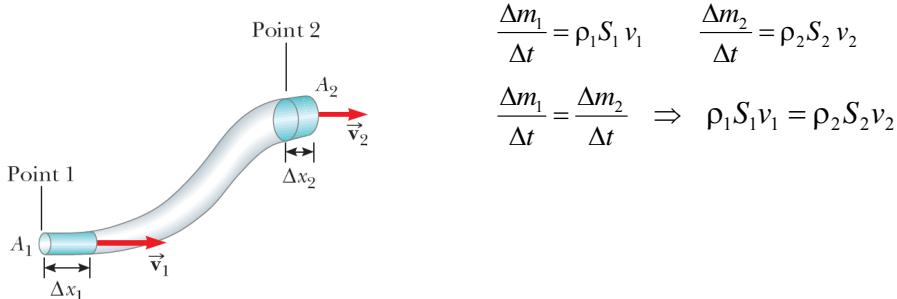


Jednačina kontinuiteta → S v = const.

179

Jednačina kontinuiteta.

- U **realnom** slučaju, kada je fluid **stičljiv** (ima različitu zapreminu, pa tako i gustinu u različitim delovima strujne cevi), uzima se da je **maseni protok fluida** na dva različita preseka strujne cevi jednak – kolika masa fluida prođe u jedinici vremena kroz jedan poprečni presek strujne cevi, toliko masa mora proći i kroz bilo koji drugi poprečni presek.



Jednačina kontinuiteta → $\rho S v = \text{const.}$

180

Bernulijeva jednačina

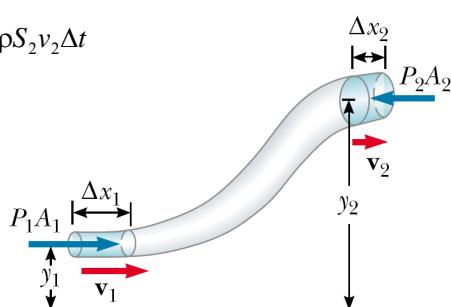
- Strujanje tečnosti (fluida) je posledica delovanja **spoljašnjih sila**.
- Rad spoljašnjih sila** menja **kinetičku** i **potencijalnu** energiju tečnosti.
- Neka je Δm masa potisnutog (nestičljivog) fluida za vreme Δt u bilo kom preseku strujne cevi:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \frac{\Delta m}{\rho} \quad \Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t$$

- Pri protoku fluida, menja se njegova kinetička i gravitaciona potencijalna energija:

$$\Delta E_k = \frac{\Delta m v_2^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^2}{2}$$

$$\Delta E_p = \Delta m g h_2 - \Delta m g h_1$$



(Oznaka h u jednačini odgovara oznaci y na slici – položaj fluida u odnosu na odabrani referentni nivo.)

*Danijel Bernuli (1700-1782), švajcarski fizičar i matematičar.

181

Bernulijeva jednačina

- Na osnovu **zakona održanja energije**, promena ukupne energije fluida ΔE je jednaka radu spoljašnjih sila ΔA na pomeranju fluida:

$$\Delta E = \left(\frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 \right) - \left(\frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1 \right) \quad \Delta V_1 = \Delta V_2 \equiv \Delta V$$

$$\Delta A = F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2 = p_1 S_1 \Delta x_1 - p_2 S_2 \Delta x_2 = p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2 = (p_1 - p_2) \Delta V$$

- Znak " $-$ " je zbog suprotnog smera sile F_2 u odnosu na smer kretanja fluida.

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \text{const.}$$

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$$

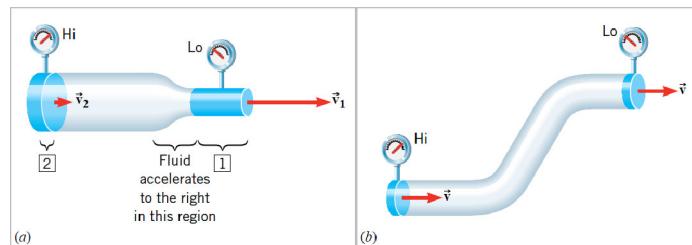
Bernulijeva jednačina ↑

- Kod stacionarnog strujanja **nestišljivog** fluida zbir **statičkog** p , **visinskog** $\rho g h$ i **dinamičkog** $\rho v^2/2$ pritiska duž strujne cevi je stalan.
- Ili:** suma pritiska p , kinetičke energije po jedinici zapremine $\rho v^2/2$ i potencijalne energije po jedinici zapremine $\rho g h$ nestišljivog fluida ima konstantnu vrednost duž strujne cevi.

182

Bernulijeva jednačina

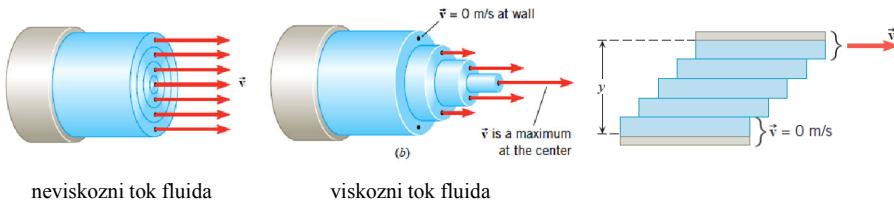
- Bernulijeva jednačina (kao i jednačina kontinuiteta) se primenjuje za određivanje pritisaka i brzina proticanja nestišljivog idealnog fluida kroz razne profile strujnih cevi.
- Strogo uvezvi, Bernulijeva jednačina u ovom obliku nije u potpunosti tačna za gasove jer su stišljivi, ali **kvalitativno**, gasovi se takođe ponašaju u skladu sa ovom jednačinom – kada je brzina protoka veća, pritisak opada i obrnuto.



183

Viskoznost

- **Viskoznost** je pojava **unutrašnjeg trenja** koje se javlja između slojeva tečnosti pri laminarnom (slojevitom) kretanju.
- Posledica je da se brzina kretanja slojeva fluida međusobno razlikuje.



- Prema Njutnovom zakonu za viskoznost, **sila viskoznog trenja F** je srazmerna dodirnoj **površini** između slojeva **S** , a obrnuto srazmerna **gradijentu brzine dv/dy** (promena brzine duž pravca normalnog na brzinu kretanja):

$$F = \eta S \frac{dv}{dy}$$

- η - koeficijent **dinamičke viskoznosti** (u [Pas])
- v - koeficijent **kinematičke viskoznosti** (u [m^2/s]).

$$v = \frac{\eta}{\rho}$$

184