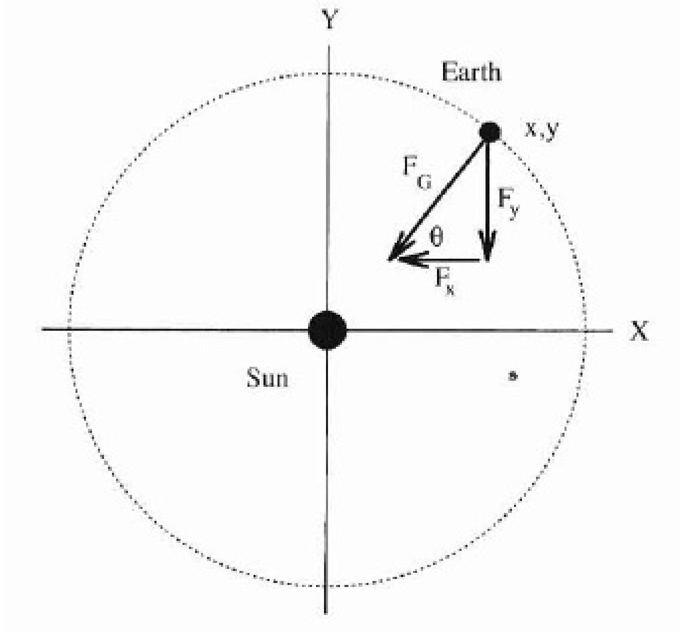
Сунчев систем

Кеплерови закони

На слици је приказан хипотетички сунчев систем. Садржи једну планету (Земљу нпр.) која се креће око Сунца и једина сила која се ту појављује је гравитационо привлачење.



Узимајући у обзир Њутнов закон гравитације, јачина те силе износи:

$$F_G = \gamma \frac{M_S M_Z}{r^2} \qquad (4.1)$$

где су M_S и M_Z масе Сунца и Земље, а $r-$растојање између њих.

$\gamma-$ гравитациона константа.

Претпоставка је да је Сунце далеко веће масе од земљине, тако да се кретање Сунца може занемарити. Задатак је да се израчуна положај Земље као функција од времена. Из другог Њутновог закона може се написати:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_{G,x}}{M_Z} \qquad (4.2)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_{G,y}}{M_Z}$$

при чему су $F_{G,x}$ и $F_{G,y}$, $x-$ и $y-$компоненте гравитационе силе. Са слике се види да је:

$$F_{G,x} = \gamma \frac{M_S M_Z}{r^2} \cos\theta = -\gamma \frac{M_S M_Z}{r^3} x \quad (4.3)$$

а сличан резултат се добија и за компоненту $F_{G,y}$. Негативан знак потиче од смера силе који је ка Сунцу које се налази у координатном почетку система.

Диференцијалне једначине другог реда се могу написати у облику система од две диференцијалне једначине првог реда:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\gamma \frac{M_S}{r^3} x \qquad (4.4)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\gamma \frac{M_S}{r^3} y$$
$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

Ово представља систем који се може решити нумеричким поступком. Остаје још да се изабере погодан систем јединица мере. Наравно, SI је једна могућност, једино јединице дужине и времена нису погодне у практичној примени пошто су експоненти велики. Нпр. полупречник Земљине орбите је $\sim 1.5 \times 10^{11}\mathrm{m}$ итд. Згодније је за јединицу мере користити **астрономску јединицу** (AJ) која представља средње растојање између Земље и Сунца и износи $\left(\approx 1.5 \times 10^{11}\mathrm{m}\right)$, а за јединицу времена изабрати годину $\left(1\,\text{година} = 3.2 \times 10^{7}\mathrm{s}\right)$. Остаје још да се уведе јединица за масу . Њу је најлакше увести ако се узме да је Земљина путања кружна те онда важи:

$$\frac{M_Z v^2}{r} = F_G = \gamma \frac{M_S M_Z}{r^2} \qquad (4.5)$$

Сређивањем се добија:

$$\gamma M_S = v^2 r = 4\pi^2 \frac{AJ^3}{1god^2} \qquad (4.6)$$

Пошто се γ и M_S појављују као производ, нема потребе изражавати их појединачно. Сада се једначине могу написати у облику погодном за нумеричко израчунавање:

$$v_{x,i+1} = v_{x,i} - \frac{4\pi^2 x_i}{r_i^3}\Delta t \quad (4.7)$$
$$x_{i+1} = x_i + v_{x,i+1}\Delta t$$
$$v_{y,i+1} = v_{y,i} - \frac{4\pi^2 y_i}{r_i^3}\Delta t$$
$$y_{i+1} = y_i + v_{y,i+1}\Delta t$$

где је $\Delta t -$ временски корак, а фактор $4\pi^2$ указује да се користе астрономске јединице. Користи се Ојлер-Кромеров метод. Користе се претходне вредности положаја и брзине да се израчуна нова брзина, док се претходна вредност полажаја и нова вредност брзине користи за израчунавање новог положаја. Као што је већ речено, Ојлеров метод није добар избор за решавање осцилаторног проблема, а кретање планета баш спада у ту групу проблема. Ако би се користио Ојлеров метод, добило би се да енергија планета расте током времена и њихово кретање би се описивало спиралом тако да се оне удаљавају од Сунца. Та тешкоћа је превазиђена Ојлер-Кромеровом методом код које се енергија не мења. Могуће је написати алгоритам помоћу којег се израчунавају положаји и брзине планета.

На сваком временском кораку i израчунава се положај (x, y) и брзина $\left(v_x, v_y\right)$ за временски корак $i+1$ коришћењем Ојлер-Кромеровог метода.

- Израчунава се растојање r_i од Сунца: $r_i = \sqrt{\left(x_i^2 + y_i^2\right)}$
- Израчунава се $v_{x,i+1} = v_{x,i} - \frac{4\pi^2 x_i}{r_i^3}\Delta t$ и $v_{y,i+1} = v_{y,i} - \frac{4\pi^2 y_i}{r_i^3}\Delta t$
- Ојлер-Кромеров корак: израчунава се x_{i+1} и y_{i+1} користећи вредности $v_{x,i+1}$ и $v_{y,i+1}$ тако да је $x_{i+1} = x_i + v_{x,i+1}\Delta t$ и $y_{i+1} = y_i + v_{y,i+1}\Delta t$
- Чувају се нови положаји како би се нацртао график
- Поступак се понавља за жељени број корака.

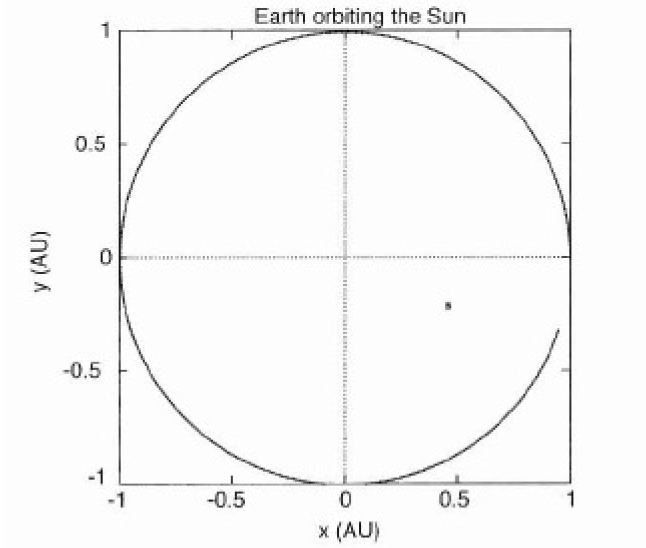
Корисно је визуелно представити кретање планета. То се може учинити након сваког рачунања положаја (у реалном времену) или што је друга могућност након што се израчуна довољан број тачака нацртати график путање.
У табели су дати подаци о орбитама планета сунчевог система:

планета	маса [kg]	пол.путање [AJ]	ексц.
Меркур	2.4×10^{23}	0.39	0.206
Венера	4.9×10^{24}	0.72	0.007
Земља	6.0×10^{24}	1.00	0.017
Марс	6.6×10^{23}	1.52	0.093
Јупитер	1.9×10^{27}	5.20	0.048
Сатурн	5.7×10^{26}	9.54	0.056
Уран	8.8×10^{25}	19.19	0.046
Нептун	1.03×10^{26}	30.06	0.01
Плутон	$\sim 6.0\times10^{24}$	39.53	0.248

За покретање програма потребно је изабрати почетне вредности координата и брзина. Може се узети да је Земљина путања кружна (ексцентрицитет је веома мали) и за почетне координате узети $x=1$ и $y=0$. Важно је изабрати правилно почетну вредност брзине како би се добила кружна путања. Пошто Земља обиђе око Сунца за једну годину, брзина износи $\frac{2\pi r}{1}=2\pi\frac{AJ}{1\mathrm{god}}$. Коришћењем тих вредности, резултат израчунавања је кружна орбита која се понавља током многих циклуса. Ово потврђује да је метод Ојлер-Кромера погодан за решавање оваквог проблема. Ипак, треба нагласити да се овако постављен модел разликује од реалног – у реалном проблему постоји више планета а не само једна.

Јохан Кеплер је у 17. веку проучавао планетарно кретање на основу података посматрања планета које је извео Тихо Брахе. Кеплер је показао да су Брахеова посматрања у сагласности са три правила:

- све планете се крећу по елиптичним путањама око Сунца које је у жижи
- радијус вектори планета за једнако време пребришу једнаке површине
- Ако је T период, а a дужина велике полуосе, онда је $\frac{T^2}{a^3}$ константно (иста је константа за све планете). Ако је путања кружна, онда је $a-$ полупречник.



Може се показати аналитички да су Кеплерови закони последица чињенице да гравитациона сила опада са квадратом растојања. Такође, програм за израчунавање орбите планета може се искористити за проверу трећег Кеплеровог закона. Опет, ради једноставности се узимају кружне орбите планета. У табели су дата растојања од Сунца, а потребно је правилно одабрати почетне брзине планета како би се добиле кружне путање. Програм се може модификовати тако да се одреде и времена када планета пролази кроз одређену тачку на путањи (нпр. када пресеца $x-$ осу) јер се на тај начин лако одређује период планете. У следећој табели дате су вредности односа $\frac{T^2}{a^3}$ за планете од Венере до Сатурна. Те планете имају орбите скоро кружне тако да се вредности a уједно полупречници орбита. На основу Кеплеровог закона овај однос треба да је константа блиска јединици.

планета	$\frac{T^2}{a^3}\left[\frac{1\text{god}^2}{AJ^3}\right]$
Венера	0.997
Земља	0.998
Марс	1.005
Јупитер	1.010
Сатурн	0.988

Нумерички резултати су у сагласности са предвиђањима Кеплеровог трећег закона. Временски корак које је коришћен је за Венеру, Земљу и Марс 0.005 година, а за Јупитер и Сатурн 0.005 година.

<u>Задаци:</u>

4.1. Испитати резултате добијене ланетарног кретања за различите вредности временског корака. Показати да за симулацију Земљиног кретања нису погодни кораци већи од $\Delta t = 0.01\text{god}$ јер долази до нестабилности орбита, тј. оне се не понављају. То је у складу са генералним правилом да временски корак не треба да буде већи од 1% карактеристичног времена за дати проблем. У овом случају карактеристично време представља период обиласка планете око Сунца. Такође, користити различите почетне брзине, мање и веће од вредности 2π која је потребна да би се добила кружна орбита и опет испитати стабилност елиптичне орбите за различите вредности временског корака.

4.2. Променити програм тако што се користи Ојлеров метод. Показати да је у том случају путања Земље спирала (Земља се удаљава од Сунца) без обзира на вредност временског корака.
4.3. Изменити програм тако да се помоћу њега може потврдити Кеплеров други закон у случају елиптичних путања. Као део проблема може се проверити квантитативно да су орбите заиста елипсе.
4.4. Испитати орбиту Халејеве комете. Та комета има перод од 76 година а растојање када је најближа Сунцу износи 0.59 АЈ. Користити метод покуђаја и грешака за одређивање максималне орбиталне брзине и максималног растојања од Сунца. Колико је то растојање у поређењу са подацима за Плутон?
4.5. Проширити програм (Ојлер-Кромеров) тако да се одмах израчунавају енергије (кинетичка, потенцијална и укупна) планете, а такође и угаони момент.

Почети са кружном орбитом и показати да су кинетичка и потенцијална енергија константна, а и угаони момент треба да буде сталан.

Разматрати елиптичне путање. Путања са почетним положајем 1 АЈ од Сунца и почетном брзином од 5 АЈ/год је уобичајени избор. Показати да како се планета креће по орбити, тако се мењају кинетичка и потенцијална енергија али њихов збир остаје константан. Такође показати да је угаони момент сталан. Доказати да су резултати директна последица чињеница да је гравитационо поље конзервативно, а сила је централна.
4.6. Разматрати планету са растојањем 1 АЈ од Сунца. Методом покушаја и грешака одредити колику почетну брзину мора да има да би побегла од Сунца. Упоредити добијену вредност са егзактним резултатом.
4.7. Разматрати хипотетички соларни систем у којем маса сунца није много већа од масе планете. У овом случају се крећу и сунце и планета. Модификовати програм тако да укључује овај ефекат. Испитати могуће типове орбиталног кретања у таквом систему. Почети са системом двојне звезде где су оба објекта једнаких маса. Након тога испитати случај неједнаких маса. Упутство: Да би се добиле једноставне орбите, најбоље је одабрати почетне услове такве да је укупни линеарни момент нула. Пошто се овај проблем може разматрати са стационарним сунцем заједно са концептом редуковане масе, ово израчунавање је неопходан увод за проучавање орбита планета у бинарном (двојном) систему звезда.

Инверзни квадратни закон и стабилност планетарних орбита

У овом делу се разматра путања тела (као што су планете или комете) у систему који садржи само Сунце и то тело.

Треба подвући да су у таквом систему, Кеплерови закони последица чињенице да је гравитациона сила обрнуто сразмерна квадрату растојања, односно, јачинина силе зависи искључиво од растојања r. Релативно кретање у таквом систему може се проучавати као и у случају само једног тела, једно тело је у мировању док друго орбитира око њега. Тело које се креће има у таквом систему тзв. редуковану масу $\mu = \dfrac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$, где су m_1 и m_2 масе тела у реалном систему. Положај еквивалентног тела је дат релативним померајем $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ реалних тела. У случају да је $m_1 \gg m_2$ као нпр. да је прво тело Сунце, а друго планета, $\mu \approx m_2$, а $\vec{r}$ ће бити положај планете релативно у односу на стационарно Сунце.

Путања тела редуковане масе μ је дата у поларним координатама као

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{L^2} F(r) \qquad (4.8)$$

где је $L = \mu r^2 \theta$ и представља угаони момент а $F(r)$ је сила која делује на тело. За Сунчев систем са Сунчевом масом M_S и масом планете M_P, сила износи

$F(r) = -G\frac{M_S M_P}{r^2}$, а угаони момент се одржава пошто је систем инваријантан у односу на ротацију.

Пошто $F(r)$ зависи обрнуто сразмерно квадрату растојања, једначина () се може лако решити и решење гласи:

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{\mu G M_S M_P}{L^2}\right)\left[1 - e\cos(\theta + \theta_0)\right] \quad (4.9)$$

или, ако се изабере да је $\theta_0 = 0$ (што дефинише саму елипсу),

$$r = \left(\frac{L^2}{\mu G M_S M_P}\right)\frac{1}{1 - e\cos\theta} \quad (4.10)$$

Резултат не даје положај планете током времена, него облик орбите $r(\theta)$. Једначина (4.9) описује конусни пресек, он је круг за $e = 0$, за $0 \le e < 1$ елипса, парабола за $e = 1$, а хипербола за $e > 0$ са жижом у координатном почетку. Вредност e је позната као ексцентрицитет. Дакле, затворена орбита у систему од два тела мора бити елипса са једним телом у њеној жижи као што то предвиђа I Кеплеров закон. Кеплеров други закон описује очување момента импулса L као чињеницу која је већ искоришћена.

Једначина (4.10) је корисна за израчунавање тачке најкраћег растојања између та два тела (перихел) $r_{\min} = a(1-e)$, и највећег $r_{\max} = a(1+e)$, као и одговарајућих брзина у тим тачкама. Ове вредности често обезбеђују почетне вредности за нумеричка израчунавања. Дужина половине велике осе елипсе износи $a = \frac{L^2}{\mu G M_S M_P (1-e^2)}$, а момент импулса $L = \sqrt{a \cdot \mu G M_S M_P (1-e^2)}$ се одржава током времена. Момент импулса се може написати у облику $\mu r_{\min} v_{\max}$ и $\mu r_{\max} v_{\min}$, одакле се одмах могу добити одговарајуће брзине:

$$v_{\max} = \sqrt{G M_S}\sqrt{\frac{1+e}{a(1-e)}\left(1 + \frac{M_P}{M_S}\right)}, \text{ и } (4.11)$$

$$v_{\min} = \sqrt{G M_S}\sqrt{\frac{1-e}{a(1+e)}\left(1 + \frac{M_P}{M_S}\right)}$$

Период обиласка планете T се може добити дељењем површине обухваћене елипсом са константном брзином којом површина бива пребрисана у складу са Другим Кеплеровим законом. Одатле следи Трећи Кеплеров закон као

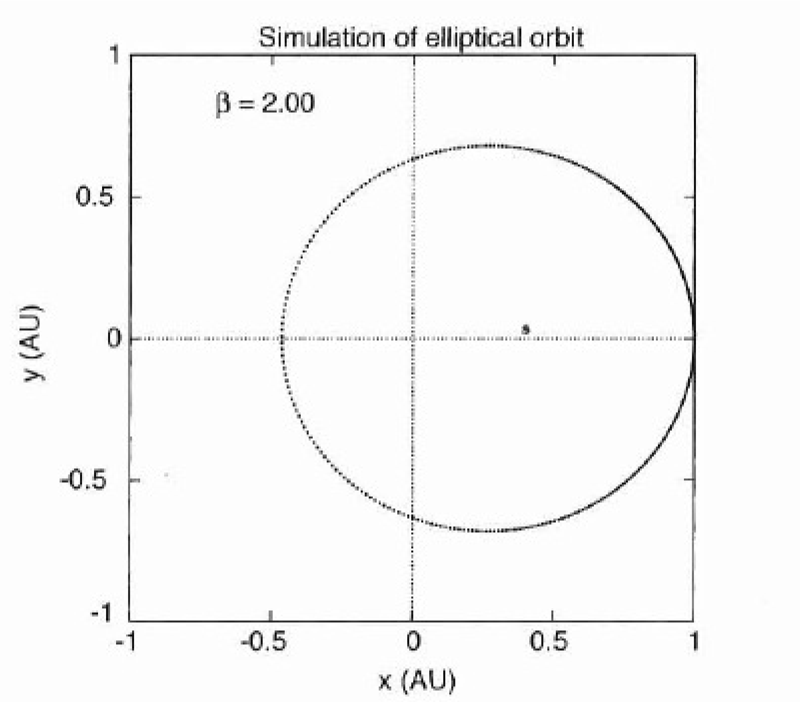
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_S + M_P)} \approx \frac{4\pi^2}{G M_S}.$$

Значи, сви Кеплерови закони су последица инверзног квадратног закона.

Ови закључци се могу проширити и на друге силе код којих важи иста законитост промене као што је Кулонова сила. Да ли је у питању случајност или постоји нешто специјално што је у самој природи сила? Да ли сила зависи тачно од квадрата растојања или је експонент можда мало различит од 2, нпр. 2.00000001?

За одговор на прво питање је неопходно разматрати како се сила „преноси са једног тела на друго“, или речено на други начин, како масе знају једна за другу. Од користи може бити класична слика која укључује приказ линија силе. Замишља се да линије силе извиру из свих тела и протежу се радијално у бесконачност. Број таквих линија је сразмеран маси тела и сила коју осцећа друго тело у близини је сразмерна броју линија сила које га пресецају. Како се растојање између тела повећава, број тих линија опада пошто се исти број линија продире кроз све већу и већу површину.

Инверзни квадратни закон је добро описује слику линија силе. Површина сфере полупречника r која окружује тело је сразмерна са r^2 Пошто је број линија силе константан, њихова густина кроз дату сферу је сразмерна са $\frac{N}{r^2}$. Инверзни квадратни закон је директна последица таквог начина представе поља заједно са геометријом Еуклидског простора у коме живимо.



Изложени аргументи који поткрепљују овај закон су теоријски. Треба размотрити шта се дешава у стварном свету у вези са овим. Пошто је већ размотрено да су Кеплерови закони последица инверзног квадратног закона, они се могу експериментом тестирати да би се видело да гравитација заиста „поштује“ инверзни квадратни закон. Један од начина да се то уради јесте тестирање стабилности елиптичних орбита током времена. Тачније говорећи, ако се систем састоји од звезде и једне планете, планета се креће по елиптичној путањи при чему се не мења оријентација оса елипсе током времена.

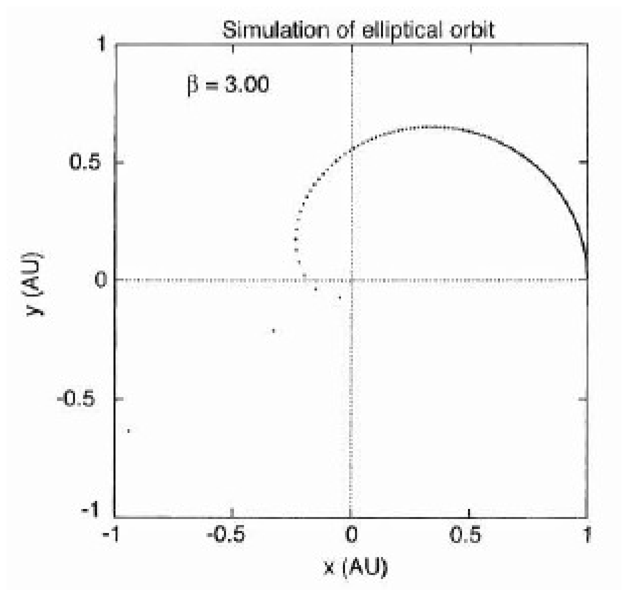
Ако се претпостави да се експонент у закону гравитације мало разликује од 2 и износи β, онда сила има облик:

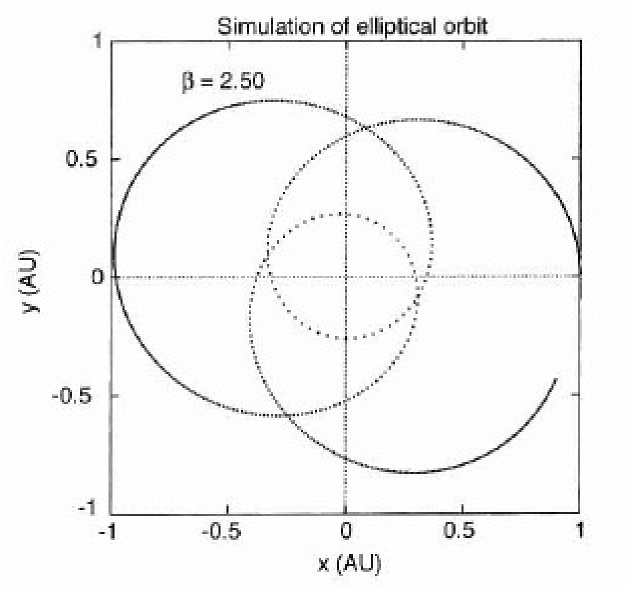
$$F_G = \frac{GM_S M_P}{r^\beta} \qquad (4.12)$$

и могу се размотрити кретања планете за различите вредности β. Прорачун орбита се може извести на већ описан начин једноставном заменом експонента.

На слици је приказан резултат за $\beta = 2$. Изабрани су почетни услови који дају елиптичне орбите и види се да Сунце није у центру орбите. То је и очекивано у складу са Првим Кеплеровим законом по којем је Сунце у жижи елипсе. Осим тога, узастопним понављањем прорачуна добија се да је орбита стабилна током времена.

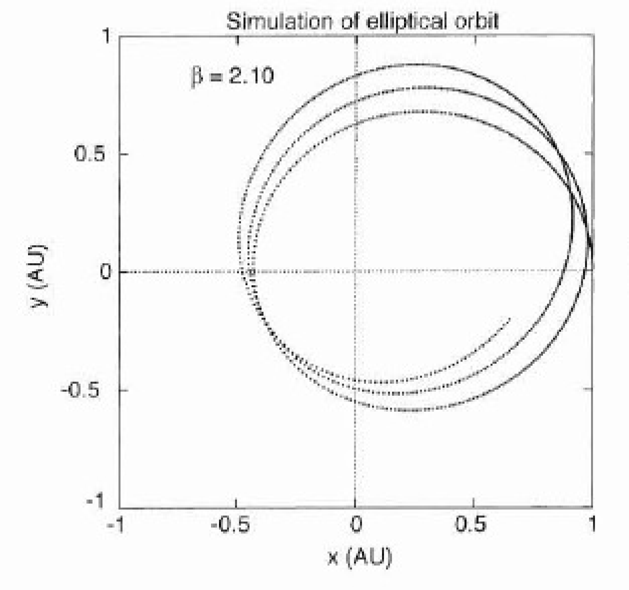
Занимљиви резултати се добијају када се β разликује од 2. Резултат за $\beta = 3.00$ тј. инверзни кубни закон је приказан на слици.

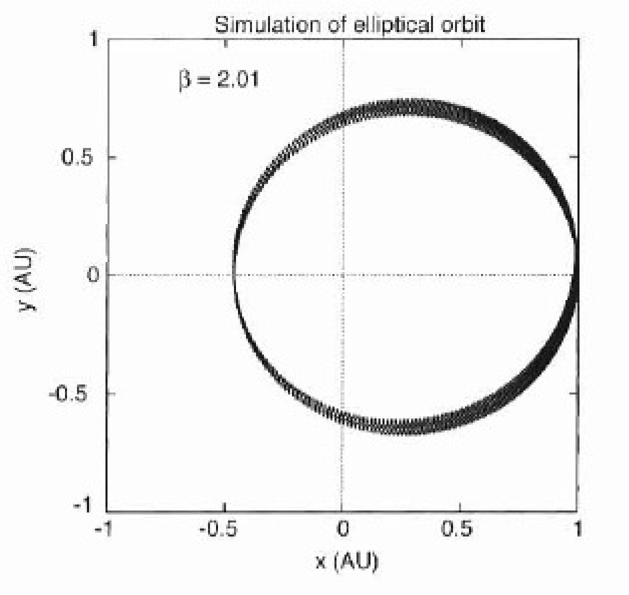




Понашање се значајно разликује него у случају $\beta = 2.00$. Планета у систему нема стабилну (понављајућу) орбиту. Хипотетичка планета пролази веома близу Сунца а затим бива избачена из система. Резултат за $\beta = 2.50$ није толико драматичан, планета има приближно елиптичну путању при чему осе елипсе ротирају за око 360° након само три орбите.

Што је β ближе 2 орбите постају стабилније, али чак и за $\beta = 2.01$, елипса ротира значајно након само неколико орбита. Уствари, поређењем ових резултата са оним добијеним за $\beta = 2$ види се да је понашање крајње осетљиво на одступања од инверзног квадратног закона. То указује да је могуће користити посматрања планета за одређивање фактора који доводе до одступања од овог закона.





Наравно, такав експеримент није једноставан као изведени прорачуни. Код дискусије Кеплерових закона често је подвлачено да се систем састоји од Сунца и једне планете. У стварности је сасвим другачије. Постоји девет планета и симулација треба да укључи утицај сваке планете на сваку другу. Због тога ће елиптичне орбите ротирати током времена.

<u>Задаци</u>

4.8. Потврдити Трећи Кеплеров закон за елиптичне орбите. Искористити програм за планетарно кретање са почетним условима који дају орбите које нису кружне. Израчунати $\frac{T^2}{a^3}$ и упоредити их са подацима из табеле.

4.9. У овом делу је показано да су орбите нестабилне за сваку вредност β која није тачно 2. Питање које је у вези с тим, а које до сада није постављано је како орбите могу бити нестабилне, уствари, колико дуго та нестабилност траје док не постане озбиљна. Одговор на то питање зависи од природе орбите. Ако је почетна брзина изабрана тако да је орбита строго кружна, тада вредност β уопште нема утицаја. Наравно, у пракси је немогуће креирати орбиту која је егзактно кружна тако да нестабилности када је $\beta \neq 2$ излазе на видело увек, уколико се прорачун врши за довољно дуг интервал времена. Чак и када су орбите скоро кружне, током дужег времена се испоставља да су јако елиптичне. Испитати ово проучавајући орбите са истом вредношћу β (нпр. $\beta = 2.05$) и поредећи понашање са различитим вредностима ексцентричности орбита. Треба да се добије да се оријентација орбита које су ближе кружним спорије ротира него оријентација оних које су више елиптичне.

<u>Прецесија Меркуровог перихела</u>

Већ је речено да је проучавање сунчевог система једна од могућности провере инверзног квадратног закона. Уствари, такви експерименти су већ проведени. Кеплер је своје законе извео на основу посматрања Тихо Брахеа који је сва осматрања неба проводио голим оком, телескоп још није био откривен. Употребом телескопа астрономска посматрања су постала далеко прецизнија. У сунчевом систему који садржи више од једне планете настају одступања од Кеплерових закона. У нашем систему та одступања су мала па су Кеплерови закони веома корисна почетна тачка за проучавање познатих планета. Ипак, постоје нека одступања од тог закона. Узроци одступања потичу углавном од међусобног утицаја планета. Таквим проблемима се бави небеска механика и познато је неколико егзактних резултата.

Орбите планета су углавном скоро кружне. Једино је код Меркура и Плутона запажено значајно одступање и та чињеница доводи до интересантних последица. За Меркур је било познато још почетком 19. века да се оријентација оса елипсе мења, тј. ротира током времена. Појава је позната као прецесија перихела Меркура (перихел је тачка орбите најближа Сунцу). Интензитет ротације је око 566 лучних секунди за 100 година, па Меркуров перихел начини једну пуну ротацију за сваких 230000 година. Иако је ефекат мали он је мерљив што показује колика је прецизност астрономских посматрања помоћу различитих уређаја. То одступање од Кеплеровог закона је од велике важности за небеску механику, и средином 19. века је извршен прорачун утицаја гравитационог поља осталих планета на Меркур чиме је добијена вредност прецесије од 523 лучних секунди за 100 година. Јупитер који је далеко највећа планета врши и највећи утицај. Задивљује у свему томе да су сви прорачуни вршени ручно, коришћењем логаритамских таблица...

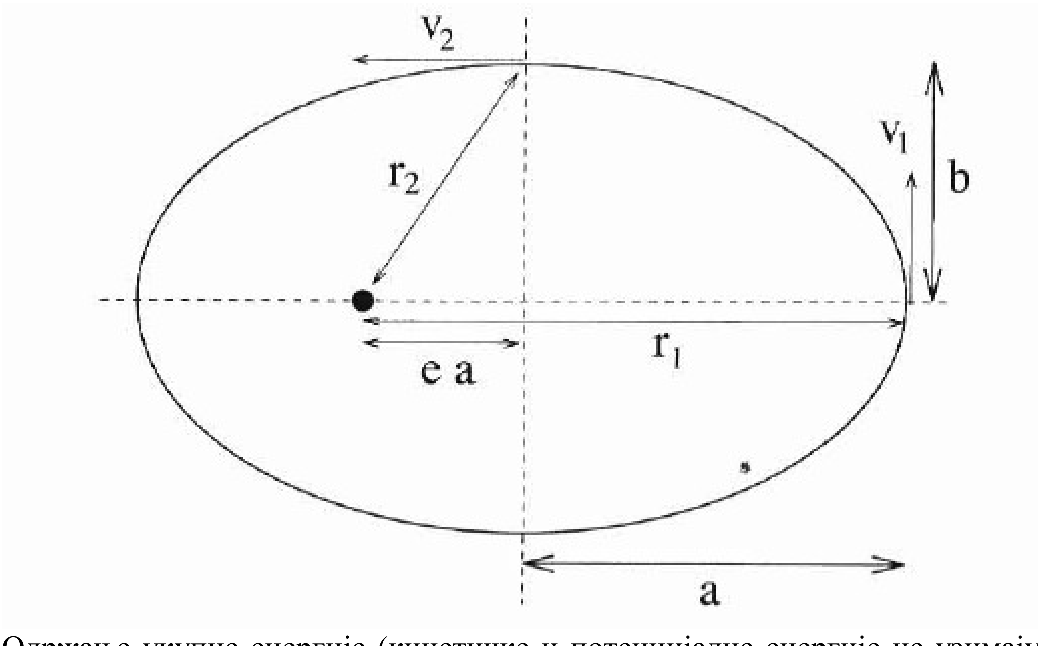
Иако су резултати прорачуна и мерења импресивни, они нису у сагласности један са другим. Схваћено је да ово неслагање можда представља нешто ново у физици и предложена су многа решења. Једно од најпопуларнијих је да постоји још једна планета унутар Меркурове орбите. Осим тога, предложено је да је могуће постојање веће количине прашине у близини Сунца и да та прашина утиче на кретање Меркура. Ниједно од предложених решења није потврђено.

Ова разлика није објашњена све до 1917. године када је Ајнштајн развио општу теорију релативности. Теорија разматра геометрију простора и посматра гравитацију на много компликованији начин него што то чини Еуклидска геометрија и инверзни квадратни закон. Мање више, општа теорија предвиђа слично понашање гравитационе силе све док су тела далеко једно од другог (или нису превише масивна). У случају да су растојања између тела довољно мала, општа теорија предвиђа одступања од инверзног квадратног закона. Треба нагласити да су Сунце и Меркур довољно близу и да девијација долази до изражаја чиме је Ајнштајн објаснио недостајућих 43 лучне сукунде у прецесији. То је била велика победа опште теорије релативности.

Прецесија због опште релативности се може израчунати аналитички али је прорачун веома компликован. Међутим, нумерички се може релативно једноставно доћи до вредности прецесије. Оно што треба урадити јесте применити закон силе из опште релативности на кретање планете. Прецесија је веома мала и програм треба написати тако да није потребно израчунати кретање перихела током свих 230000 година. Закон силе који предвиђа општа теорија релативности има облик $F_G \approx \frac{GM_S M_M}{r^2}\left(1+\frac{\alpha}{r^2}\right)$ (4.13)

где је M_M – маса Меркура, а $\alpha = 1.1\times10^{-8}\,\text{AJ}^2$. Сила је дата преко инверзног квадратног закона са малом поправком која је сразмерна са $\frac{1}{r^4}$. Ефект ове поправке је превише мали да би био лако мерљив помоћу рачунарске симулације. Приступ који ће бити коришћен је да се израчуна брзина прецесије као функција од α са вредностима које су много веће од вредности за Меркур. Брзина прецесије је дата преко C_α где је $C-$константа која се рачуна. Након што се израчуна вредност за C, могуће је одредити вредност прецесије за $\alpha = 1.1\times10^{-8}\,\text{AJ}^2$ што је овде од интереса.

Најпре се мора модификоват програм за израчунавање планетарног кретања уз коришћење закона () са променљивим параметром α. Неопходно је затим одредити почетне услове неопходне за добијање Меркурове орбите. То је важно пошто понашање зависи и од величине, и од вредности ексцентрицитета. Дужина велике полуосе за Меркурову орбиту је $a = 0.39$ AJ. Одговарајућа брзина v_1 која је неопходна као почетни услов може се одредити на један од два начина. Један је израчунавање кретања за различите пробне верзије v_1 и подешавање вредности док се за ексцентрицитет не добије измерена вредност $e = 0.206$. Други приступ је коришћење одржања енергије и момента импулса. Од помоћи је приложена слика.



Одржање укупне енергије (кинетичке и потенцијалне енергије не узимајући у обзир кинетичку енергију Сунца) захтева да су енергије у тачкама 1 и 2 једнаке. Одатле је:

$$-\frac{GM_S M_M}{r_1}+\frac{1}{2}M_M v_1^2 = -\frac{GM_S M_M}{r_2}+\frac{1}{2}M_M v_2^2 \qquad (4.14)$$

Пошто је гравитациона сила централна, она не мења момент импулса планете. Одатле је момент импулса у тачки 1 једнак моменту импулса у тачки 2:

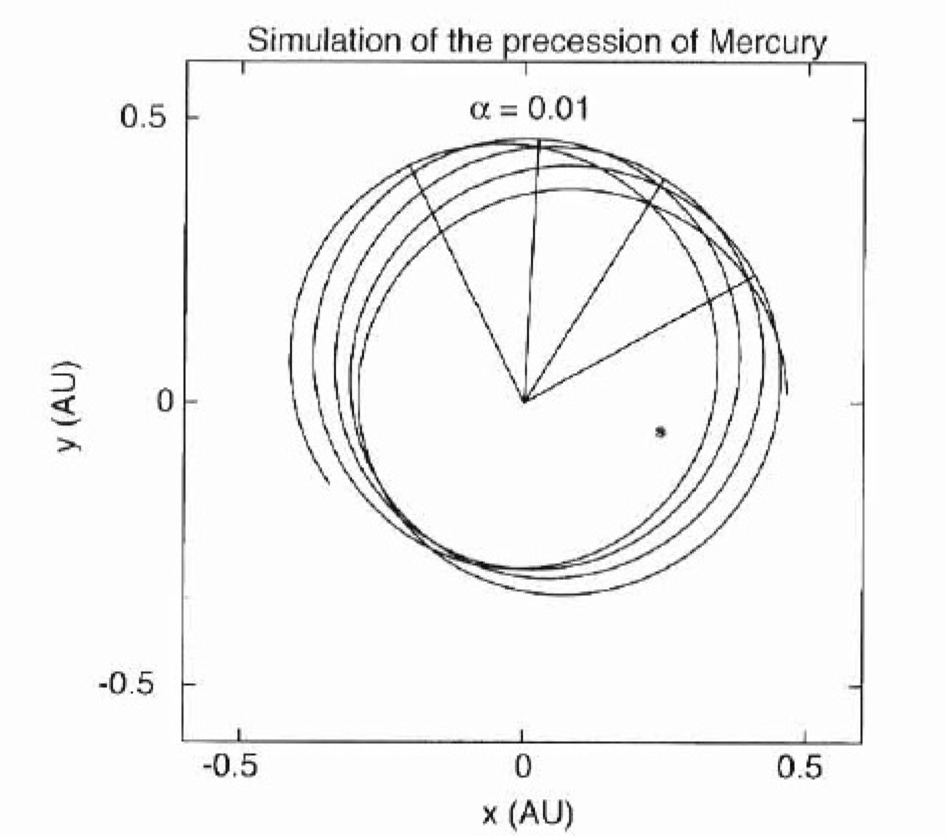
$$r_1 \cdot v_1 = b \cdot v_2 \qquad (4.15)$$

Ово је систем једначина по v_1 и v_2 и може се једна од брзина изразити, нпр. v_1:

$$v_1 = \sqrt{2GM_S\left[\frac{b^2}{a^2(1+e)^2 - b^2}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{e^2a^2+b^2}} - \frac{1}{a+ea}\right]} = \sqrt{\frac{GM_S(1-e)}{a(1+e)}} \qquad (4.16)$$

где је у последњем кораку узето у обзир да је $b = a\sqrt{1-e^2}$. То је у суштини идентично са ранијим извођењем за елиптичну орбиту. Убацивањем вредности за a и e даје вредност $v_1 = 8.2\frac{\mathrm{AJ}}{\mathrm{god}}$ и то је један од почетних услова. Други је растојање од Меркура до Сунца које износи $r_1 = (1+e)a = 0.47\ \mathrm{AJ}$. Пошто су почетни услови познати може се симулирати Меркурово кретање. Резултат добијен коришћењем једначине (4.13) са $\alpha = 0.01$ је дат на слици испод.

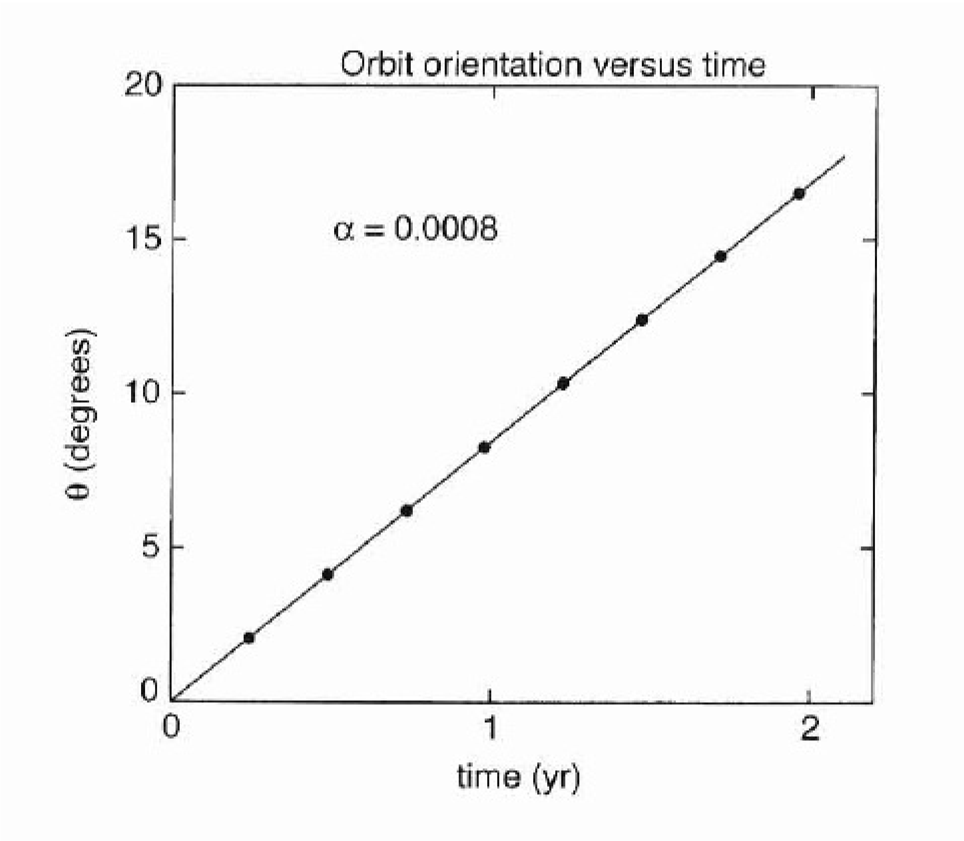
Ова вредност је много већа од праве вредности за Меркур и види се елипса прецесира значајно. Линије повучене од Сунца до орбите показују оријентацију дуже осе и повучене су ка најдаљој тачки на орбити. Линије су веома корисне пошто се прецесија може изразити преко углова које оне граде са $x-$осом.



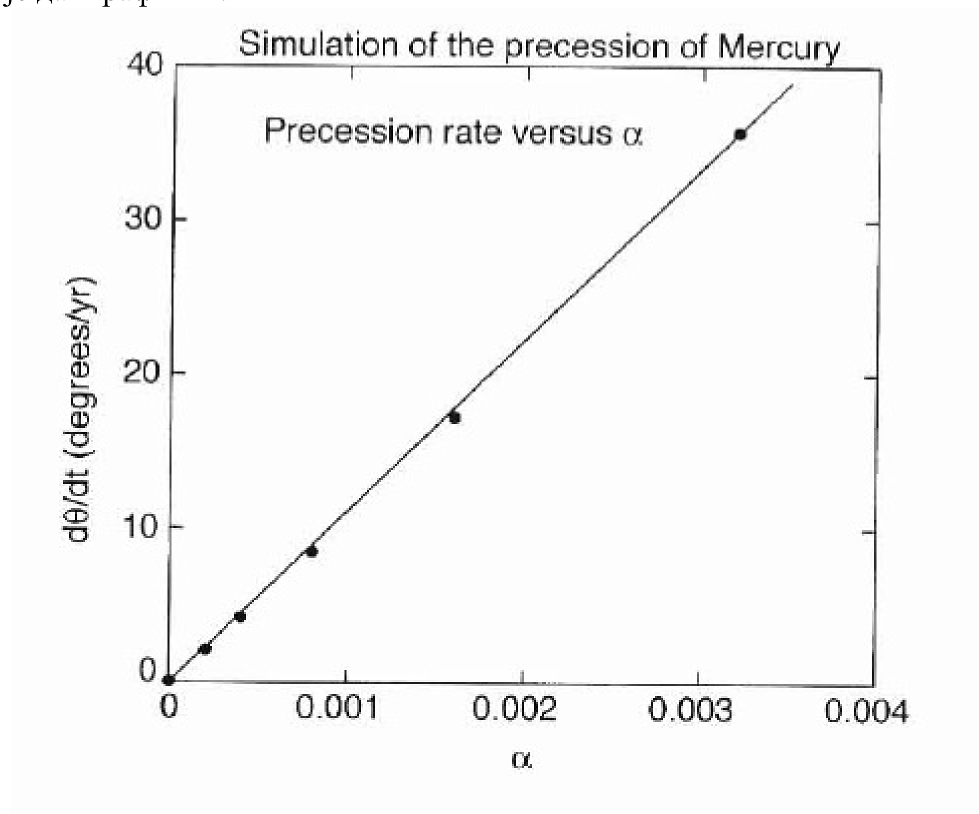
Следећи корак је израчунавање угла прецесије као функција од времена за различите вредности α. Приказан је график зависности угла од времена за вредност $\alpha = 0.0008$. Види се да је зависност линеарна, тако да је брзина прецесије константна.

Брзина прецесије $\frac{d\theta}{dt}$ је нагиб праве са слике. Може се одредити графички или применом методе најмањих квадрата. То подразумева конструкцију линије која је најближа свим тачкама. Ако би био могућ перфектан прорачун $\theta(t)$, све тачке би лежале на правој.

Ипак, због нумеричких грешака (корак времена итд.) настаје одступање од идеалног резултата.



Потребно је на исти начин извршити прорачун $\frac{d\theta}{dt}$ за различите вредности коефицијента α а затим нацртати функционалну зависност $\frac{d\theta}{dt}$ од α. Резултат таквог прорачуна је дат графички.



Види се да брзина прецесије линеарно зависи од коефицијента α. Из нагиба праве помоћу методе најмањег квадрата може се добити коефицијент правца а он износи у овом случају 1.1×10^{4} степени годишње по јединичној вредности α. Након тога се може извести завршно израчунавање екстраполирањем за случај $\alpha=1.1\times10^{-8}\,\mathrm{AJ}^{2}$ коју предвиђа општа теорија. То даје брзину прецесије од $1.1\times10^{-8}\times1.11\times10^{4}\approx1.2\times10^{-4}\,\dfrac{\left[{}^{\circ}\right]}{\mathrm{god}}$ а то је приближно 43 лучне секунде за столеће, што је у потпуној сагласности са измереним вредностима.

<u>Задаци:</u>

4.10. Израчунати прецесију перихела Меркура у складу са приступом датим у тексту.
4.11. Испитати како прецесија перихела планете због опште релативности зависи као функција од ексцентричности орбите. Проучити прецесију различитих елиптичних орбита са различитим ексцентрицитетима али са истом вредношћу перихела. Нека перихел има вредност као код Меркура, тада је могуће поређење резултата са резултатима датим у тексту.

		Задаци				Испит
Име и презиме	Број индекса	I	II	III	IV	
Бранкица Анђелић	173/10	1	2.8	3.4	4.1	
Јелена Стојшин	163/10	1	2.8	3.4	4.1	
Миљана Ковачевић	225/10	2	2.10	3.9	4.2	
Марко Вељковић	221/10	2	2.10	3.9	4.2	
Милена Бајић	251/08	1	2.8	3.4	4.3	
Петар Мареш	428/08	3	2.11	3.13	4.4	
Михајло Колесар	438/08	3	2.11	3.13	4.4	
Мирољуб Арбутина		1	2.8	3.4	4.3	
Ана Лалић		2	2.10	3.9	4.5	
Дарио Павловић	826/11	4	2.6	3.11	4.6	
Радош Раонић	167/11	4	2.6	3.11	4.6	
Бојан Месарош	24/11	5	2.9	3.14	4.7	
Горан Ивковић-Ивандекић	484/11	5	2.9	3.14	4.7	
Селена Илић	16/11	5	2.9	3.14	4.8	
Соња Тодоровић	393/11	5	2.9	3.14	4.8	
Татјана Веселиновић	323/11	6	2.7	3.6	4.9	
Стефан Илић	241/11	6	2.7	3.6	4.9	
Игор Шћекић	337/11	4	2.6	3.11	4.10	
Михајло Думитрашковић	526/11	4	2.6	3.11	4.10	
Живко Раичевић	280/11	6	2.7	3.6	4.11	
Филип Уљаревић	156/10	6	2.7	3.6	4.11	
Игор Дракулић	206/11	3	2.11	3.13	4.1	
Стефан Ракић	235/11	3	2.11	3.13	4.1	
Синиша Шовљански		2	2.10	3.9	4.5	