

## Осцилаторно кретање и хаос

Примери осцилаторног кретања се налазе у многим областима физике укључујући кретање електрона у атомима, понашање струје и напона у електричним колима, орбите планета и сателита итд. Вероватно најједноставнији механички систем који исказује такву врсту кретања је клатно које се састоји од масе повезане повезане помоћу нити за неки ослонац и које може слободно осциловати под утицајем гравитације. У идеалном случају се занемарује трење и претпоставља се даје угао који гради нит са вертикалом мали, па се клатно разматра као једноставан хармонијски осцилатор. Основна одлика оваквог кретања је заједничка за многе случајеве осцилаторног кретања и представља модел у књигама из елементарне физике. Међутим, елементарни ниво упознавања са моделом не подразумева понашање реалног клатна пошто на њега делује сила отпора, затим, може бити покретан под дејством спољашње силе, и коначно, угао осциловања не мора бити мали. Такво кретање укључује додатне особине које се не срећу у једноставном случају. Вероватно најважнија особина је могућност хаотичног кретања што представља централну тему овог разматрања.

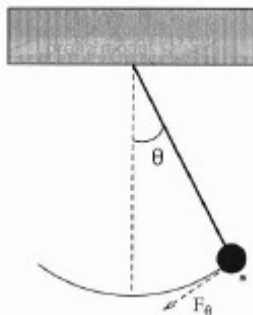
Испитаће се ефекти реалног осцилаторног система. Најпре ће се размотрити једноставно клатно, а хармонијско кретање ће се разматрати нумеричким путем. Након тога ће се модел уопштити додавањем силе отпора и нелинеарности што ће узроковати могућност појаве хаотичног понашања. Пошто израз хаос вероватно има интуитивни карактер, није лако дати прецизну дефиницију истог (нарочито такву каква би усрећила физичаре и математичаре). Због тога ће део времена бити утрошен на формулацију хаоса што води ка разматрању неколико кључних ствари.

### Једноставно хармонијско кретање

Пример једноставног клатна је честица масе  $m$  окачена помоћу нити занемарљиве масе за ослонац. Са  $\theta$  је означен угао који нит гради са вертикалом, а нит је увек затегнута. Претпоставка је да само две силе делују на честицу, гравитација и сила затезања нити. Уобичајено је разматрање компоненти тих сила паралелне и нормалне на нит. Паралелна сила је једнака нули пошто нема истезања или пуцања нити, док нормална компонента на нит има вредност:

$$F_{\theta} = -mg \sin \theta \quad (3.1)$$

где је  $g$  – гравитационо убрзање, а знак минус потиче од смера силе који је увек супротан од смера помераја у односу на вертикалу на којој је  $\theta = 0$ .



Други Њутнов закон примењен у овом случају даје  $F_\theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$ . Померај дуж лука износи  $s = \ell \cdot \theta$ , где је  $\ell$  – дужина нити. Претпоставља се да је угао мали тако да важи  $\sin \theta \approx \theta$  и добија се једначина кретања:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \theta \quad (3.2)$$

Ово је главна једначина једноставног хармонијског кретања. Једноставно је показати да је опште решење једначине дато у облику:

$$\theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \phi) \quad (3.3)$$

где је  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ , а  $\theta_0$  и  $\phi$  су константе које зависе од почетног помераја и брзине клатна. Види се да је кретање клатна заиста једноставно. Осцилације су синусоидалне и трају вечно без смањивања што је и логично, јер никаква сила отпора није укључена у модел. Осцилације су угаоне фреквенције  $\Omega$  која је функција дужине нити ( $\ell$  и  $g$ , наравно) али је независна од масе  $m$  и амплитуде кретања.

Проблем се може размотрити и нумерички. Можда то изгледа сувишно пошто је егзактно решење дато. Ипак, ово је само припрема за компликованије осцилаторно кретање где аналитичко решење није могуће добити. Основна једначина кретања је диференцијална једначина другог реда коју треба решити по променљивој  $\theta$  као функцији од времена  $t$ . Уобичајено је да се она разбије на две диференцијалне једначине првог реда:

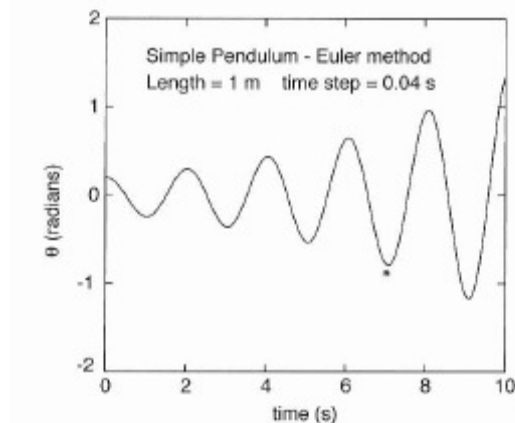
$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{g}{\ell} \theta & (3.4) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \end{aligned}$$

где је  $\omega$  – угаона брзина клатна. За решавање се користи Ојлеров метод тако што се време дискретизује временским кораком  $\Delta t$  ( $t = i\Delta t$ ), при чему је  $i$  – цео број.

Нека су  $\theta_i$  и  $\omega_i$  апроксимативно нумерички померај и угаона брзина на  $i$  – том кораку. Једначине постају:

$$\begin{aligned} \omega_{i+1} &= \omega_i - \frac{g}{\ell} \theta_i \Delta t & (3.5) \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + \omega_i \Delta t \end{aligned}$$

Вредности  $\theta_i$  и  $\omega_i$  се користе да се израчунају вредности  $\theta_{i+1}$  и  $\omega_{i+1}$  итд. Код писања програма треба узети у обзир да се вредности на сваком кораку требају сачувати у виду фајла. Програм заснован на Ојлеровој методи даје чудне резултате, кретање је у основи осцилаторно али амплитуда расте током времена. То је у супротности са аналитичким решењем једначине. Пошто нема никаквих извора енергије или сила отпора, укупна енергија клатна се одржава што је у супротности са резултатима програма.



Тешкоћа лежи у самом Ојлеровом методу. Већ је речено да он обезбеђује апроксимативно решење једначине. Грешке које укључује метод постају мање како се смањује временски корак. Могуће је претпоставити да се грешка решења може кориговати смањењем временског корака  $\Delta t$  у програму. Смањивањем  $\Delta t$  се заиста грешке смањују, али се ипак примећује да енергија клатна расте за било који временски корак  $\Delta t$  различит од нуле.

Овде се већ може посумњати у контрадикцију и ово је случај када је нумерички метод битно нестабилан. Како та нестабилност настаје, може се доћи разматрањем укупне енергије клатна. Укупна енергија је дата као:

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 + m g l (1 - \cos \theta) \quad (3.6)$$

Први члан представља кинетичку енергију клатна а други члан гравитациону потенцијалну енергију. Пошто је једначина кретања ограничена на мале углове, енергија се може написати као:

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \left( \omega^2 + \frac{g}{l} \theta^2 \right) \quad (3.7)$$

Замењујући  $\theta_{i+1}$  и  $\omega_{i+1}$  из Ојлеровог метода у  $\theta$  и  $\omega$ , резултат за енергију у временском тренутку  $t_{i+1}$  је:

$$E_{i+1} = E_i + \frac{1}{2} m l^2 \left( \omega_i^2 + \frac{g}{l} \theta_i^2 \right) (\Delta t)^2 \quad (3.8)$$

Пошто је други члан са десне стране увек позитиван енергија „Ојлеровог“ решења се повећава током времена без обзира колико мало  $\Delta t$  било.

Ако је Ојлеров метод нестабилан шта је потребно учинити да би он био применљив у овом случају? И у ранијим проблемима је Ојлеров метод давао решења која нису очувавала енергију. Међутим, у тим случајевима су грешке биле занемарљиве у односу на скале релевантне за те проблеме. Код проблема са осцилаторним кретањем често се жели разматрање понашања током више периода осциловања. Да би метод био применљив и у тим случајевима, нумерички метод мора да одржи енергију током дужег времена. Ојлеров метод није добар избор за овакав тип проблема.

Ово наводи на разматрање других метода за решавање обичних диференцијалних једначина као што су метод Рунге-Кута и Верлетов метод. Ипак,

једноставна модификација Ојлеровог метода може дати стабилно решење једначине осциловања. Та модификација је позната као Ојлер-Кромеров метод пошто је Кромер први пажљиво дискутовао алгоритам који уноси стабилност у решавању проблема. Ако се размотри алгоритам Ојлер-Кромера:

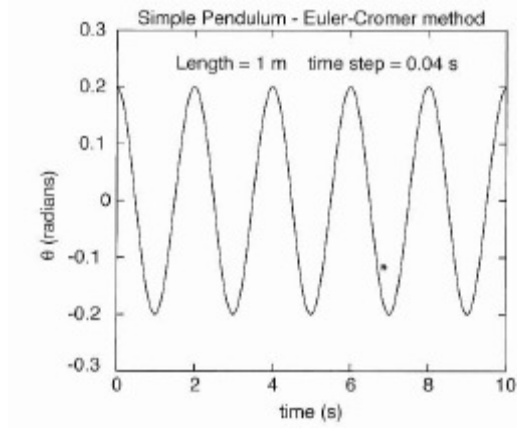
$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{\ell} \theta_i \Delta t$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_{i+1} \Delta t$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

затимм следи понављање поступка...

Једина разлика у односу на Ојлеров метод јесте да се претходне вредности  $\omega$  и  $\theta$  користе за израчунавање нове вредности  $\omega$ , али нова вредност  $\omega$  се користи за израчунавање нове вредности  $\theta$ . Изненађујуће је да овако мала промена у алгоритму доводи до било какве разлике. И заиста, у многим проблемима нема значајније разлике у решењима. Међутим, код проблема са осцилаторним кретањем, Ојлер-Кромеров метод одржава енергију током целог времена кретања. На слици је дато решење које представља стабилно осциловање.



### Задаци:

**3.1.** Нумерички испитати стабилност Ојлер-Кромеровог метода. Израчунати укупну енергију, кинетичку и потенцијалну енергију клатна као функцију од времена. Показати да се енергија одржава након сваке осцилације.

**3.2.** Поновити претходни проблем користећи метод Рунге-Кута који је описан у додатку А. Упоредити прецизност овог метода са прецизношћу Ојлер-Кромеровог метода користећи једнаке временске кораке.

**3.3.** Користити Ојлеров метод за симулацију кретања клатна. Испитати понашање у функцији величине корака  $\Delta t$  и показати да укупна енергије расте током времена.

**3.4.** За једноставно хармонијско кретање општи облик једначине кретања гласи:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -kx^\alpha \quad (3.9)$$

са  $\alpha = 1$ . Та једначина има исти облик као и (3.2) само што променљиве имају другачије називе. Написати програм који користи Ојлер-Кромеров метод и решити

једначину по  $x$  као функцију од времена за  $\alpha=1$  (ради једноставности узети да је  $k=1$ ). Показати да је период осцилација независан од амплитуде кретања. То је кључна одлика једноставног хармонијског кретања. Затим програм проширити за случај  $\alpha=3$ . То је пример анхармонијског осцилатора. Израчунати период осцилација за неколико различитих амплитуда (добар избор амплитуда је од 0.2 до 1), и показати да сада период кретања зависи од амплитуде. Дати интуитиван разлог за објашњење зашто период постаје дужи како се амплитуда смањује.

**3.5.** За анхармонијски осцилатор (3.9) из претходног задатка могуће је аналитички добити период осциловања за општу вредност експонента  $\alpha$  изражен преко одређених специјалних функција. Наћи тај израз и описати како однос између периода и амплитуде зависи од експонента  $\alpha$ . Да ли је могуће дати физички смисао добијене зависности? Помоћ: ако се обе стране (3.9) помноже са  $\frac{dx}{dt}$  израз се може интегралити преко  $t$ . То доводи до везе између брзине и  $x$ .

### Клатно са силом отпора и принудном силом

Начин на који сила отпора делује на клатно може бити различит. Могући извори силе трења су у самој тачки вешања клатна за ослонац, отпор ваздуха и сл. У многим случајевима је сила која пригушује осцилације сразмерна брзини кретања клатна и таква претпоставка ће се и овде применити. Сила отпора стога има облик  $-q \frac{d\theta}{dt}$  пошто је брзина клатна  $\ell \frac{d\theta}{dt}$ . Овде је  $q$  параметар који представља меру пригушења, а знак минус обезбеђује да је сила отпора увек у супротном смеру од смера кретања клатна. Добија се једначина кретања:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta - q \frac{d\theta}{dt} \quad (3.10)$$

где је други члан десне стране модел силе отпора. Диференцијална једначина је и даље линеарна и може се решити аналитички, а решење показује да постоје три случаја различитог понашања клатна.

У првом случају који се назива слабо пригушено осциловање и који наступа када је пригушење мало, решење једначине је:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{qt}{2}} \sin\left(\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}}t + \phi\right) \quad (3.11)$$

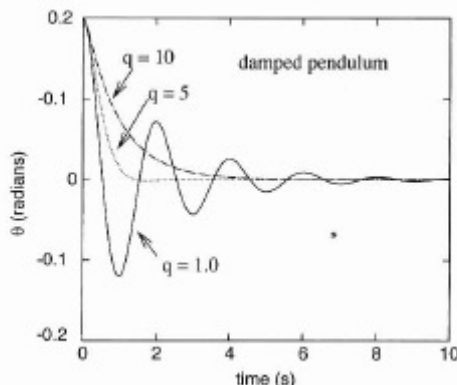
и види се се јавља осциловање фреквенције  $\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}}$ , где је  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$  а амплитуда опада током времена. Други крајњи случај наступа када је пригушење велико. У овом случају је решење:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{\left(\frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4\Omega^2}}{2}\right)t} \quad (3.12)$$

са монотоним експоненцијалним смањењем амплитуде. На граници између слабо пригушеног и пригушеног случаја, клатно је критично пригушено са амплитудама:

$$\theta(t) = (\theta_0 + Ct) e^{-\frac{qt}{2}} \quad (3.13)$$

Нумеричка решења су приказана на слици:



Види се да се резултати знатно разликују од случаја непригушеног осциловања. Нека на клатно делује и принудна сила. Облик силе може бити различит и зависи од начина на који сила делује на клатно. Уобичајено је претпоставити да је сила синусног облика, амплитуде  $F_D$  и угаоне фреквенције  $\Omega_D$  (не треба је мешати са природном фреквенцијом осциловања клатна  $\Omega$ ). Пример деловања принудне силе је ако је куглица клатна наелектрисана и налази се у осцилујућем електричном пољу. Једначина кретања у том случају гласи:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta - q\frac{d\theta}{dt} + F_D \sin(\Omega_D t) \quad (3.14)$$

где последњи члан са десне стране представља принудну силу. Принудна сила додаје енергију у систем (или је смањује), а фреквенција  $\Omega$  и  $\Omega_D$  се међусобно „надмећу“ тако да се могу очекивати нови случајеви у понашању клатна.

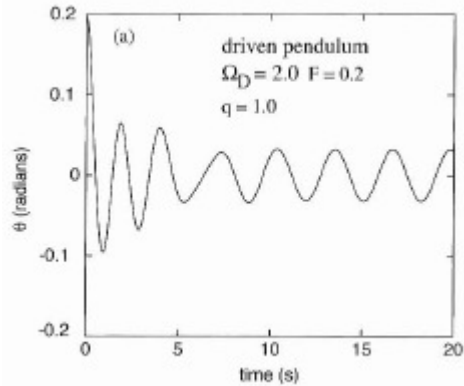
И једначина (3.14) се може решити аналитички а решење је облика:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\Omega_D t + \phi) \quad (3.15)$$

где је аплитуда  $\theta_0$  дата као:

$$\theta_0 = \frac{F_D}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + (q\Omega_D)^2}} \quad (3.16)$$

Понашање клатна је дато на слици а резултат је решавања једначине по метуду Ојлер-Кромера.

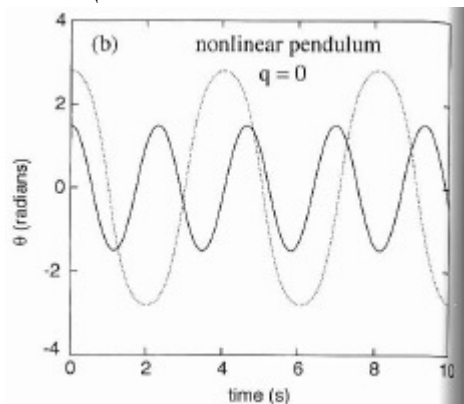


Клатно под дејством принудне силе исказује једноставно хармонијско осциловање са угаоном фреквенцијом принудне силе, што је у неку руку чак и једноставније од слободног осциловања клатна. Занимљив је случај када се фреквенција принудне силе  $\Omega_D$  подудара са природном угаоном фреквенцијом клатна  $\Omega$  - наступа резонанција и амплитуда  $\theta_0$  постаје велика, нарочито у случају мале силе отпора.

До сада је разматран случај осциловања клатна са малом амплитудом и тада се једноставно  $\sin \theta$  замењује самим углом  $\theta$ . Биће размотрен случај када амплитуда није мала или чак случај када се тачка вешања клатна помера. Потребно је размотрити једначину кретања:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta \quad (3.17)$$

што представља случај нелинеарног клатна без силе отпора и принудне силе. Пошто се у овом случају енергија нити додаје, нити одузима систему, укупна механичка енергија се одржава и клатно изводи периодично кретање. Период међутим, је сада зависан од амплитуде. То може бити демонстрирано и аналитички, с тим што је математички прорачун сложен. Ипак, нумерички прорачун даје резултат који је приказан на слици:



Нека се клатно покрене са почетним углом  $\theta(0)$  и нека је  $\omega(0) = 0$ . Кретање је периодично али више није описано једноставном синусном или косинусном функцијом. Када је амплитуда велика клатну треба више времена да се нађе у тачки у којој се мења смер кретања (тачка где је  $\theta$  највеће) и период је већи него када је амплитуда мања.

Сви ови резултати за реално клатно су у сагласности са тим како клатно треба да се понаша. Као крајњи случај испитивања понашања клатна јесте укључивање у разматрање сва три ефекта, нелинеарности, силе отпора и принудне силе.

### Задаци

**3.6.** Испитати три начина кретања код линеарног клатна са губицима (3.10) користећи Ојлер-Кромеров (или други погодан) метод. У сва три режима дисипација због силе отпора доводи до експоненцијалног опадања укупне енергије. Нумерички наћи границу између слабо пригушеног и јако пригушеног случаја и упоредити са аналитичким резултатом.

**3.7.** Нумерички испитати линеарно клатно са силом отпора и принудном силом (3.14). Нумерички показати да постоји резонанција и потврдити зависност резонантне амплитуде од угаоне фреквенције  $\Omega_D$  принудне силе, и параметра  $q$ .

**3.8.** Код нелинеарног клатна (3.17) користити Ојлер-Кромеров или други погодан метод да би се испитао однос између амплитуде и периода. Да ли се може дати интуитивни аргумент за потврду добијеног резултата?

### Нелинеарно клатно са принудном силом

Ако се сва три ефекта укључе у игру једначина кретања постаје:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta - q \frac{d\theta}{dt} + F_D \sin(\Omega_D t) \quad (3.18)$$

ово је модел пригушеног, нелинеарног клатна под дејством принудне силе., чије понашање може бити веома разнолико. Разматраће се понашање променљиве  $\theta$  као функције од времена у неколико случајева. Прво се мора написати програм који ће да да нумеричко решење пошто је егзактно решење у овом општем случају немогуће добити. Програм је сличног облика као што је коришћен за испитивање једноставног клатна. Главна разлика је нешто компликованија једначина за  $\omega$ . Ако се опет напише (3.18) у облику две диференцијалне једначине првог реда, следи:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{g}{\ell} \sin(\theta) - q \frac{d\theta}{dt} + F_D \sin(\Omega_D t) & (3.19) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \end{aligned}$$

Ово може бити претворено у једначине по  $\theta_i$  и  $\omega_i$  као у (3.5), а затим написати потпрограм за њихово израчунавање. Поступак је следећи:

За сваки корак времена  $i$ , почиње од ( $i=1$ ), израчунава се  $\omega$  и  $\theta$  на кораку  $i+1$

$$\begin{aligned} \omega_{i+1} &= \omega_i - \left[ \frac{g}{\ell} \sin \theta_i - q \omega_i + F_D \sin(\Omega_D t_i) \right] \Delta t \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + \omega_{i+1} \Delta t \end{aligned}$$

Ако је  $\theta_{i+1}$  ван опсега  $[-\pi, \pi]$ , додати или одузети  $2\pi$  да би се одржало у опсегу.

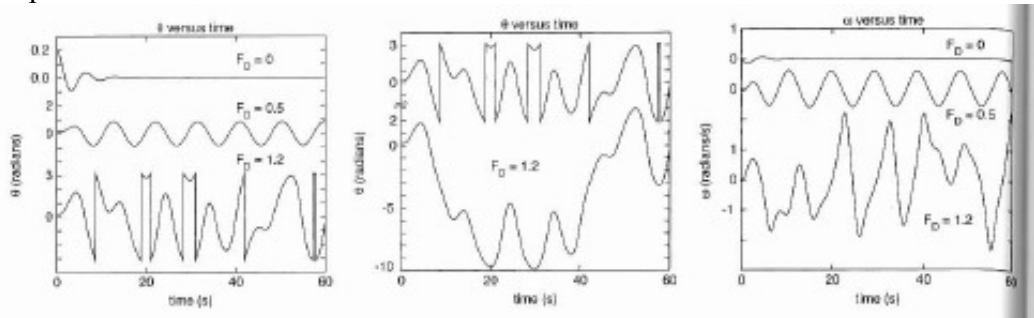
$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$



Потпрограм је организован као и код једноставног клатна са извесним разликама:

- једначина за  $\omega_{i+1}$  је компликованија пошто је једначина кретања сложенија
- вредност  $\theta$  се одређује после сваке итерације тако да лежи у интервалу  $[-\pi, \pi]$ . Подсетимо се да клатно осцилује око тачке вешања што одговара  $|\theta| > \pi$ . Пошто је  $\theta$  угаона променљива вредности  $\theta$  које се разликују за  $2\pi$  одговарају истом положају клатна. Ово је учињено због самог цртања графика пошто је уобичајено да се  $\theta$  представља у том интервалу. Ако  $\theta$  постане мање од  $-\pi$ , додаје се на његову вредност  $2\pi$ , а ако постане веће од  $\pi$ , од његове вредности се одузима  $2\pi$ .
- Опет се користи метоф Ојлер-Кромера али је могуће користити и друге погодне поступке.

Типични резултати за вредности  $\theta$  и  $\omega$  су приказани на сликама при чему су разматране различите вредности принудне силе, а сви остали параметри су фиксирани.



Када је принудна сила једнака нули, кретање је пригушено и клатно долази у стање мировања након неколико осцилација. Пригушене осцилације су фреквенције блиске природној  $\Omega$  као код непригушеног клатна. Са малом принудном силом  $F_D = 0.5$  дешава се следеће:

- првих неколико осцилација се пригушују као и у случају када принудне силе нема. Почетно извођење клатна из равнотежног положаја доводи до кретања које се смањује током времена и угаоне фреквенције је  $\sim \Omega$ .
- Након овог прелазног режима наступа стационарно стање у складу са деловањем принудне силе. Клатно се креће угаоном фреквенцијом  $\Omega_D$  која се разликује од природне, а амплитуда је одређена равнотежом између енергије која се уноси у систем и енергије која се губи због деловања силе отпора. Случај је сличан линеарном осцилатору. У смислу кретања клатна, може се случај схватити као кретање између две фреквенције  $\Omega$  и  $\Omega_D$ .

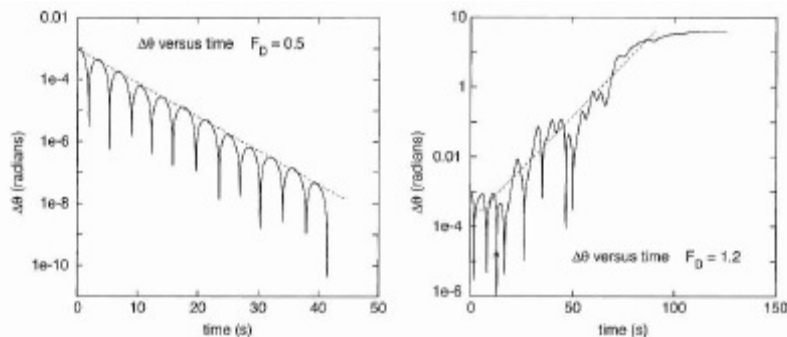
Понашање се радикално мења када принудна сила порасте до  $F_D = 1.2$ . Кретање више није једноставно чак и током дужег времена. Велики скокови угла  $\theta$  су условљени његовим ресетовањем да би он остао у интервалу  $[-\pi, \pi]$ . Да би било јасније шта се дешава, на средњој слици су приказани упоредо графици зависности  $\theta(t)$  са трансформацијом (горња крива) и без трансформације (доња крива). Види

се да се клатно не враћа у положај након кога се ситуација понавља, бар не у датом временском интервалу. Може се посумњати да би време требало да буде дуже како би се доспело у стационарно стање, али то није случај. Ово је случај хаотичног понашања које ће бити главна тема за наредна разматрања.

Понашање клатна приказано на горњим сликама је важно размотрити. При малим вредностима принудне силе кретање је просто хармонијско (након што се заврши прелазни период) и теоријски гледано, понавља се вечно. Са друге стране, при великим вредностима принудне силе кретање је хаотично, веома компликована функција која се не понавља. Шта заправо значи хаотично кретање? Интуитивно, то би представљало случајно и непредвидиво понашање клатна при великим вредностима принудне силе. Ту долази до контрадикције, ако је понашање непредвидиво, како онда програм може да израчунава положаје клатна? Ово тешко питање се намеће увек када се реализује кретање клатна описано једначином (3.18). Из теорије оваквих једначина познате су почетне вредности стања, док је решење за угао  $\theta$  у потпуности одређен за сва будућа времена. Али како понашање може бити одређено и непредвидиво у исто време?

Овде је реч о привидној контрадикцији између аналитичке теорије (теорије диференцијалних једначина) и нумеричких израчунавања (програма). Пошто је једини доказ за сада, то да се клатно понаша хаотично на основу нумеричких резултата, можда се може посумњати у грешку у програмирању, или у погрешно тумачење нумеричких резултата. Нпр. може се замислити да ако се чека довољно дуго, може да наступи предвидиви образац понашања чак и у случају велике принудне силе. Уствари, како се могу успоставити правила за такво понашање? Постоји једна друга могућност-понашање је одређено и непредвидиво истовремено. Чини се да је то немогуће, јер је реч о два привидно супротна појма.

Нека се размотри стабилност решења једначина клатна. Ако се претпостави да се разматрају два идентична клатна са једнаким пригушењима и принудним силама, онда је згодно видети разлику у њиховом понашању ако она започну кретање са угловима који се мало разликују. Израчунавају се углови  $\theta_1$  и  $\theta_2$  помоћу програма који је веома сличан оном који је већ описан. Резултати разлике у угловима  $\Delta\theta = |\theta_1 - \theta_2|$  су дати на графицима доле за две различите вредности принудне силе.



За малу вредност принудне силе  $F_D = 0.5$  примећују се велике промене у разлици сваке 3 секунде. Ти падови за  $\Delta\theta$  се уочавају када једно од клатна достигне крајњи положај и почне да се враћа.  $\Delta\theta$  ће се губити у близини сваке тачке промене смера кретања пошто се путање  $\theta_1(t)$  и  $\theta_2(t)$  укрштају. Корисније је усредсредити се на

област платоа који показује константно смањење током времена  $t$ . То значи да кретање два клатна постаје све више и више слично пошто разлика два угла постаје нула како се кретање наставља (заиста, разлика углова се мења за шест редова величина). Дакле, кретање постаје предвидиво. Ако из неког разлога не знамо почетне услове за једно од клатана, још увек можемо предвидети кретање у будућности, пошто резултати показују да  $\theta(t)$  конвергира партикуларном решењу (које је исто и за друго клатно).

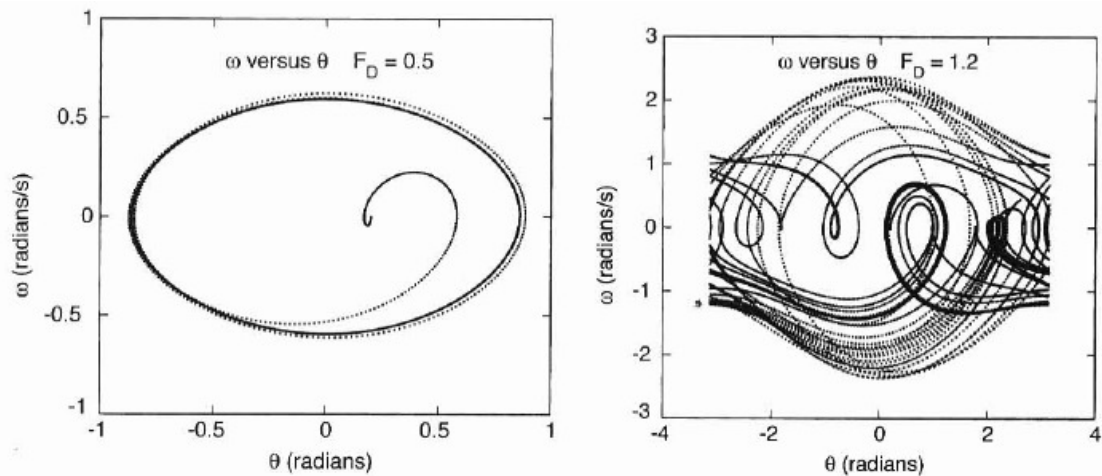
Супротно од овог, за велике вредности принудне силе  $F_D$ , налази се да се разлика  $\Delta\theta$  повећава брзо и неправилно током времена, а тренд понашања је дат испрекиданом линијом на десном графику. Обично се каже да путање  $\theta_1(t)$  и  $\theta_2(t)$  дивергирају једна у односу на другу. Дивергенција је јако исказана током кратког времена ( $t < 75$  s), а до сатурације  $\Delta\theta$  долази након дужег времена али само зато што разлика достиже вредност од  $2\pi$  и не може бити већа. На сликама је дата логаритамска скала јер су промене велике. Неправилно понашање  $\Delta\theta$  не може се описати једноставном функцијом. Ипак, ако се изврше понављања прорачуна за различите почетне вредности  $\theta_1(t)$  (задржавајући  $\Delta\theta(0)$  константним) и резултат усредњи, добија се много глаткије понашање налик испрекиданој линији на графику. Ова линија одговара функцији  $\log(\Delta\theta) \sim \lambda \cdot t$  што даје зависност:

$$\Delta\theta \approx e^{\lambda t} \quad (3.20)$$

Облик функције за  $\Delta\theta$  је веома чест, а параметар  $\lambda$  је познат као експонент Љапунова.

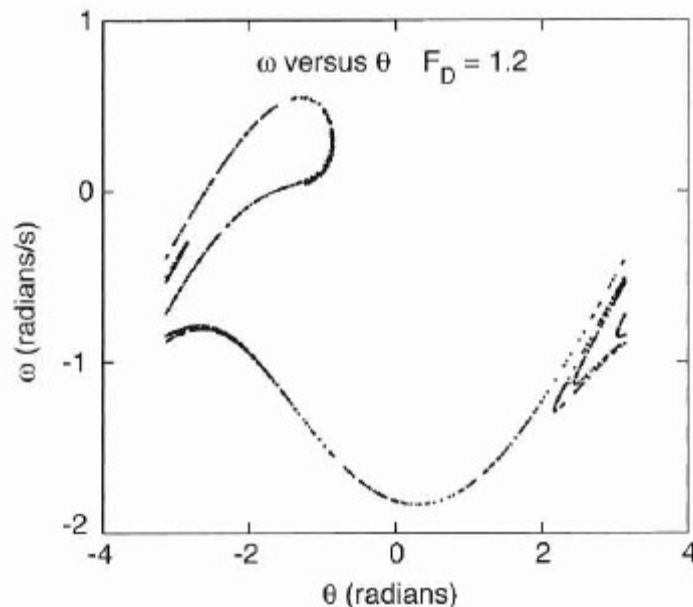
Нумерички резултати показују да је за велике вредности принудне силе  $\lambda$  позитивно, што значи да за два клатна која крећу под сличним почетним условима, путање дивергирају експоненцијално брзо. Пошто се почетни услови или неки други параметри клана не знају егзактно, значи да је понашање при  $F_D = 1.2$  непредвидиво. Овакав систем је одређен али непредвидив. Систем се покораво одређеним физичким законима али исказује понашање које је непредвидиво због велике осетљивости на почетне услове. У том смислу је систем хаотичан. Треба подвући и нешто друго што је видљиво са графика. Понашање  $\Delta\theta$  се може описати Љапуновим експонентима како у хаотичном, тако и у нехаотичном режиму. У пређашњем случају је  $\lambda > 0$ , док је касније  $\lambda < 0$ . Прелаз ка хаосу се одвија при  $\lambda = 0$ .

Могло би се помислити да је због непредвидивости  $\theta(t)$  немогуће развити теоријски опис у хаотичном режиму. Ипак, могуће је дати одређена прецизна предвиђања за  $\theta$ , чак и у режиму хаоса. Да би се то демонстрирало, путању клатна треба разматрати на другачији начин. Уместо да се црта  $\theta(t)$ , може се представити угаона брзина клатна  $\omega$  као функција од  $\theta$ . Понекад се то назива графиком фаза-простор. Пошто програм за прорачун  $\theta$  и  $\omega$  већ постоји, потребна је само мала модификација да би се добио жељени график који је приказан за две вредности принудне силе  $F_D$ .



За мале вредности принудне силе, путања у фазном простору ( $\omega-\theta$  простор) је лако схватљива у складу са понашањем које је пронађено за  $\theta(t)$ . За кратко време догађа се прелаз (а које зависи од почетних услова) и након тога клатно се смешта у правилну орбиту у фазном простору која одговара осцилаторном кретању обе величине. Може се показати да је коначна орбита независна од почетних услова – то управо имплицира резултат за експонент Љапунова. Понашање у режиму хаоса показује да постоји много орбита које су међусобно блиске али трају само једна или два циклуса. Слика није једноставна, али није ни потпуно хаотична као што се може очекивати код хаотичних система. То је општа особина хаотичних система, они генерално исказују путање у фазном простору које имају некакву структуру.

Путање се могу испитати и на нешто другачији начин. На следећем графику су дате исте променљиве али је представљена зависност  $\omega = \omega(\theta)$  само у тренуцима када су у фази са принудном силом.



Приказане су само тачке када је  $\Omega_D \cdot t = 2n\pi$ , где је  $n$  – цео број. Ово је пример тзв. Поенкареовог приказа и веома је користан код анализе понашања динамичких система. Разлог за представљање резултата на овај начин је аналогија са начином рада стробоскопа. Дешава се понекад да је потребно испитати предмет који се обрће великом брзином. Дobar пример је грамофон. Када се плоча врти немогуће је прочитати називе песама на плочи. Међутим, ако се плоча осветљава помоћу извора светлости (стробоскопа) који се наизменично пали и гаси са фреквенцијом обртања плоче, око прима светлост само када је натпис у одређеном положају. Резултат овога је да је могуће прочитати називе песама.

Ово може бити примењено и на клатно разматрајући понашање преко вредности  $\theta$  и  $\omega$  у ритму карактеристичне фреквенције система. За клатно са принудном силом, та фреквенција је фреквенција принудне силе а то је и урађено на Поенкареовом приказу. Ако се конструише график у нехаотичној области, за  $F_D = 0.5$ , могуће је наћи допринос поједине тачке (након што је прелазни режим завршен), пошто се за сваку поједину тачку циклуса понављају исте вредности  $\theta$  и  $\omega$ .

Резултат оваквог стробоскопског графика је потпуно различит у режиму хаоса. Уочава се да осим у области прелазна, путања у фазном простору је иста за широки интервал почетних услова. Другим речима, чак и ако није могуће предвидети понашање  $\theta(t)$ , зна се да ће систем имати вредности  $\omega$  и  $\theta$  које се могу сместити на ту површину тачака. Путања клатна је приказана на тој површини која је позната као атрактор. Уствари, постоје атрактори у обе области, и у нехаотичној, и у хаотичној. И док су атрактори једноставни у нехаотичној фази, они могу имати веома компликовану структуру у режиму хаоса. Нејасноће хаотичног атрактора на слици не потичу од нумеричких неодређености или грешака цртања. Једноставно, то је особина атрактора. Хаотични атрактори имају фракталну структуру и обично се називају «чудни» атрактори.

### Задаци:

- 3.9** Проучити ефекат пригушења са почетном вредношћу ула од нпр.  $\theta = 0.5$  радијана, и проучити како се кретање пригушује током времена. Користити  $q = 0.1$  и проценити временску константу пригушења. Упоредити резултат са аналитички проценом тог времена. Примедба: Сваки од задатака може бити решен конвенционално било помоћу Ојлер-Кромеровог алгорита, било помоћу метода Рунге-Кута.
- 3.10** Израчунати  $\theta(t)$  за  $F_D = 0.1; 0.5; 0.99$  са осталим параметрима као на графику. Упоредити таласни облик са посебним освртом на чисту синусоиду при високим вредностима принудне силе.
- 3.11** За три вредности принудне силе  $F_D$  са слике (0, 0.5, 1.2) израчунати и нацртати график укупне енергије система као функцију од времена и дискутовати резултате.

- 3.12** У конструкцији Поенкареовог приказа на последњој слици, унесене су тачке које одговарају тренуцима када су у фази са принудном силом, односно, у тренуцима када је  $t \approx \frac{2\pi n}{\Omega_D}$ , где је  $n$  – цео број. За те вредности  $t$  принудна сила пролази кроз нулу. Међутим, могуће је лако изабрати да се тачке унесу у тренуцима када је принудна сила максимална, или у тренуцима када разлика у фазама  $\frac{\pi}{4}$ , итд. Нацртати Поенкареов приказ у тим случајевима и упоредити га са датим графиком.
- 3.13** Написати програм за израчунавање и поређење понашања два готово идентична клатна. Искористити резултате за израчунавање одступања путања у хаотичном режиму као на слици. Дати квалитативну процену одговарајућег експонента Љапунова из нагиба графика  $\log(\Delta\theta)$  као функције од времена  $t$ .
- 3.14** Поновити претходни проблем, али задати клатнима факторе пригушења који се мало разликују. Какав је утицај на вредност експонента Љапунова. Упоредити са претходним резултатом.

		Задаци				Испит
Име и презиме	Број индекса	I	II	III	IV	
Бранкица Анђелић	173/10	1	2.8	3.4		
Јелена Стојшин	163/10	1	2.8	3.4		
Миљана Ковачевић	225/10	2	2.10	3.9		
Марко Вељковић	221/10	2	2.10	3.9		
Милена Бајић	251/08	1	2.8	3.4		
Петар Мареш	428/08	3	2.11	3.13		
Михајло Колесар	438/08	3	2.11	3.13		
Мирољуб Арбутина		1	2.8	3.4		
Ана Лалић		2	2.10	3.9		
Дарио Павловић	826/11	4	2.6	3.11		
Радош Раонић	167/11	4	2.6	3.11		
Бојан Месарош	24/11	5	2.9	3.14		
Горан Ивковић-Ивандекић	484/11	5	2.9	3.14		
Селена Илић	16/11	5	2.9	3.14		
Соња Годоровић	393/11	5	2.9	3.14		
Татјана Веселиновић	323/11	6	2.7	3.6		
Стефан Илић	241/11	6	2.7	3.6		
Игор Шћекић	337/11	4	2.6	3.11		
Михајло Думитрашковић	526/11	4	2.6	3.11		
Живко Раичевић	280/11	6	2.7	3.6		
Филип Уљаревић	156/10	6	2.7	3.6		
Игор Дракулић	206/11	3	2.11	3.13		
Стефан Ракић	235/11	3	2.11	3.13		
Синиша Шовљански		2	2.10	3.9		