Путања артиљеријског зрна

Ојлеров метод који је примењен при проучавању кретања бициклисте може се уопштити и на кретање у две просторне димензије. Пример овога је коси хитац, а разматраће се зрно испаљено из артиљеријског оруђа. Ако се занемари отпор ваздуха, једначине кретања се добијају из II Њутновог закона и гласе:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g \qquad (2.14)$$

где су x и y хоризонтална и вертикална координата пројектила, а g гравитационо убрзање. Ово су диференцијалне једначине другог реда, те се у односу на диференцијалне једначине првог реда приступ мора мало уопштити. Код диф. једначина I реда је могуће користити апроксимацију коначних разлика као извода и тиме добити једноставни алгебарски облик једначине која садржи променљиве неопходне за прорачуне суседних корака. Међутим, ако се такав приступ примени и у овом случају и напише апроксимација за коначну разлику за други извод, добиће се компликованији израз који укључује трећи временски тренутак. Ипак, могуће је избећи компликације ако се диференцијалне једначине напишу у другачијем облику.

Нека се свака диф. једначина II реда напише као систем од две диф. једначине I реда:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \text{и} \quad \frac{dv_x}{dt} = 0 \qquad (2.15)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \quad \text{и} \quad \frac{dv_y}{dt} = -g$$

где су v_x и v_y компоненте брзине дуж $x-$, тј. $y-$осе. У овом случају се јавља два пута више једначина за примену Ојлеровог метода, а изводи се могу написати у облику коначних разлика на следећи начин:

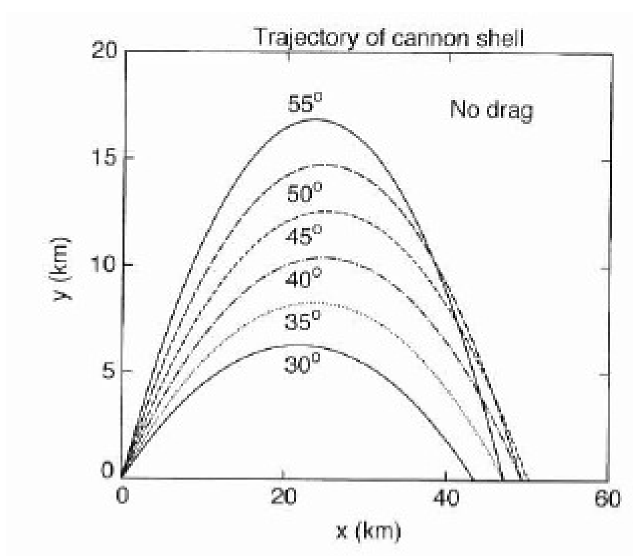
$$x_{i+1} = x_i + v_{x,i} \cdot \Delta t \qquad (2.16)$$

$$v_{x,i+1} = v_{x,i}$$

$$y_{i+1} = y_i + v_{y,i} \cdot \Delta t$$

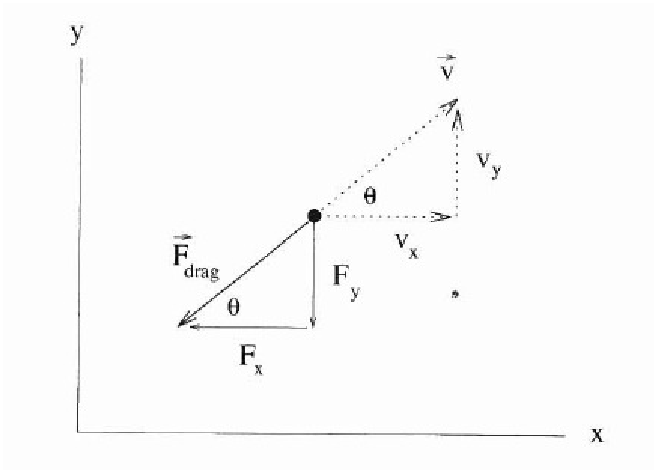
$$v_{y,i+1} = v_{y,i} - g \cdot \Delta t$$

Задајући почетне вредности за x, y, v_x и v_y могу се одредити њихове вредности у неком каснијем тренутку. Треба нагласити да су израчунавања апроксимативна пошто у развоју у ред постоје и виши чланови који се одбацију. Ако се изабере да је Δt довољно мало, онда је апроксимација оправдана, али не треба заборавити ову чињеницу.



Код разматрања кретања бициклисте добијено је да је отпор ваздуха веома важан и мора се додати у модел кретања пројектила. Претпоставка је да је интензитет силе отпора сразмеран квадрату брзине и има облик:

$$F_o = -B_2 \cdot v^2 \qquad (2.17)$$



где је $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Сила отпора је увек усмерена у супротном смеру од смера брзине, тако да се могу разматрати компоненте те силе:

$$F_{o,x} = F_o \cos\theta = F_o \frac{v_x}{v} \quad \text{и} \quad F_{o,y} = F_o \sin\theta = F_o \frac{v_y}{v} \qquad (2.18)$$

Компоненте силе отпора ваздуха су:

$$F_{o,x} = -B_2 \cdot v \cdot v_x \quad \text{и} \quad F_{o,y} = -B_2 \cdot v \cdot v_y \qquad (2.19)$$

Ако се компоненте силе отпора ваздуха додају у једначине добија се систем:

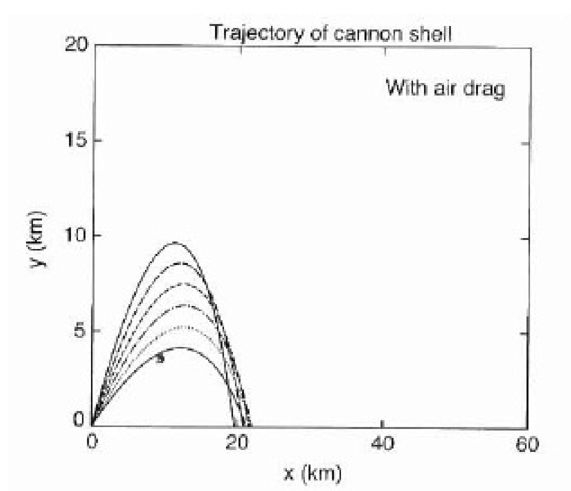
$$x_{i+1} = x_i + v_{x,i} \cdot \Delta t \qquad (2.20)$$

$$v_{x,i+1} = v_{x,i} - \frac{B_2 \cdot v \cdot v_{x,i}}{m} \Delta t$$

$$y_{i+1} = y_i + v_{y,i} \cdot \Delta t$$

$$v_{y,i+1} = v_{y,i} - g \cdot \Delta t - \frac{B_2 \cdot v \cdot v_{y,i}}{m} \Delta t$$

Поступак се понавља све док y_{i+1} не постане негативно. Тада треба изаћи из петље и извршити интерполацију између два последња израчуната положаја да би се одредио положај удара зрна у земљу.



Прорачуни показују да је у присуству отпора ваздуха домет зрна смањен у просеку два пута у односу на домет када се отпор не урачунава.Осим тога, познато је из механике да се у случају косог хица највећи домет постиже при углу од 45°, док у реалном случају тај угао највећег домета износи око 37°.

У свим овим прорачунима није узето у обзир да се густина ваздуха мења са висином, наиме, сила отпора ваздуха је сразмерна густини ваздуха, а ова се мења (опада) са висином. Проблем одређивања функције $\rho = \rho(h)$ је сложен, а најједноставнији модел је тзв. модел изотермалне атмосфере ($T = \text{const}$) код ког притисак зависи од висине по закону:

$$p(y) = p(0)e^{-\frac{mgy}{k_B T}} \qquad (2.22)$$

где је $m -$ средња маса молекула ваздуха, $y -$ висина у односу на неку референтну тачку (нпр. ниво мора), $k_B -$ Болцманова константа, $T -$ апсолутна температура.
Код идеалног гаса је притисак сразмеран густини па важи:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{y}{y_0}} \qquad (2.23)$$

$y_0 = \dfrac{k_B T}{mg} \approx 1.0 \times 10^4\,\text{m}$, а $\rho_0 -$ густина на нивоу мора ($y = 0$)

Овакам модел није баш реалистичан пошто се зна да температура може знатно варирати унутар висина од неколико километара. Други приступ је претпоставка да је ваздух лош проводник топлоте и у том случају је конвекција слаба. Ово доводи до тзв. адијабатске апроксимације која је много погоднија за тропосферу (висине до 10 km). У овом случају је зависност густине од висине другачија:

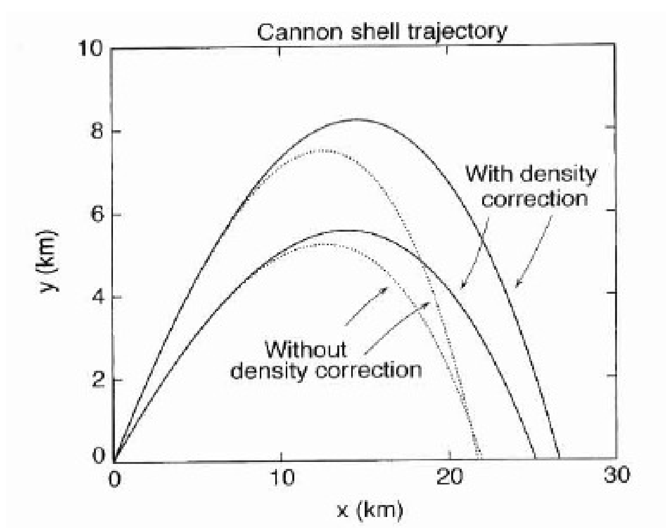
$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{ay}{T_0}\right)^{\alpha} \qquad (2.24)$$

где је $a \approx 6.5 \times 10^{-3}\,\dfrac{\text{K}}{\text{m}}$, $T_0 -$је температура на нивоу мора, а експонент $\alpha \approx 2.5$ за ваздух. Поређењем једначина (2.23) и (2.24) може се очекивати значајна разлика када y постане значајан део од y_0.

Без обзира који од модела узели у разматрање, сила отпора ваздуха основна стратегија нумеричког израчунавања је иста. Сила отпора ваздуха је сразмерна густини тако да је:

$$F_o^* = \frac{\rho}{\rho_0} F_0(y = 0) \qquad (2.25)$$

где је $F_0(y=0)$ сила отпора на нивоу мора, а $F_o^* -$ сила отпора на некој висини.
Приликом израчунавања потребно је заменити фактор B_2 из једначине (2.20) са $B_2 \dfrac{\rho}{\rho_0}$.



Када се узме у обзир изотермални модел примећује се да је због смањења густине ваздуха на већим висинама дошло до повећавања домета за око 20%. Највећи домет се у овом случају постиже при углу који је нешто већи од 45°.

<u>Задаци:</u>

2.6 Користећи Ојлеров метод извршити прорачун путање зрна не разматрајући утицај ваздуха, нити његову густину. Упоредити добијено решење са егзактним.

2.7 Узети у обзир адијабатски модел густине ваздуха и упоредити добијене резултате са резултатима за изотермски модел. Такође, може се даље убацити и ефекат промене температуре (сезонске промене) замењујући B_2 са $B_2^{ref}\left(\dfrac{T_0}{T_{ref}}\right)^{\alpha}$ где B_2^{ref} представља вредност коефицијента B_2 на температури T_{ref}, а T_0 је текућа температура при тлу. Вредности које су дате у разради проблема се односе на температуру $T = 300\,\mathrm{K}$. Колики је утицај овог ефекта у адијабатском моделу на максимални домет и на угао под којим се максимални домет постиже? Колике су промене у односу на хладан зимски и топао летњи дан?

2.8 У датом моделу узима се да је гравитационо убрзање константно, међутим, оно зависи од висине изнад тла. Убацити у модел и ову зависност и анализирати њен утицај на максимални домет зрна.

2.9 Израчунати путању артиљеријског зрна узимајући у обзир и силу отпора ваздуха, и смањење густине ваздуха са висином. Прорачун извести за различите вредности углова почетне брзине и одредити вредност угла при којој се постиже максимални домет.

2.10* Уопштити претходни проблем тако што се мета налази на различитој висини (оба случаја, мета је изнад, односно, испод) у односу на артиљеријско оруђе. Испитати најмању вредност брзине испаљивања зрна тако да оно погоди мету за различите висине мете у односу на оруђе.

2.11* Циљ сваког гађања је да се погоди тачно одређена мета. Ипак, то није лак задатак пошто мале промене почетних параметара могу да проузрокују велике разлике у месту приземљења зрна. Испитати како се мења домет зрна са променом почетне брзине у оквиру 1%. Осим тога, размотрити утицај ветра који је слаб (10 km/h). Уверити се да и овако мале промене могу значајно утицати на место приземљења зрна.

2.12* Размотрити утицај Земљине ротације узимајући у разматрање Кориолисову силу.

	Задаци				Испит
Име и презиме Број индекса	I	II	III	IV	
Бранкица Анђелић 173/10	1	2.8			
Јелена Стојшин 163/10	1	2.8			
Миљана Ковачевић 225/10	2	2.10			
Марко Вељковић 221/10	2	2.10			
Милена Бајић 251/08	1	2.8			
Петар Мареш 428/08	3	2.11			
Михајло Колесар 438/08	3	2.11			
Мирољуб Арбутина	1	2.8			
Ана Лалић	2	2.10			
Дарио Павловић 826/11	4	2.6			
Радош Раонић 167/11	4	2.6			
Бојан Месарош 24/11	5	2.9			
Горан Ивковић-Ивандекић 484/11	5	2.9			
Селена Илић 16/11	5	2.9			
Соња Тодоровић 393/11	5	2.9			
Татјана Веселиновић 323/11	6	2.7			
Стефан Илић 241/11	6	2.7			
Игор Шћекић 337/11	4	2.6			
Михајло Думитрашковић 526/11	4	2.6			
Живко Раичевић 280/11	6	2.7			
Филип Уљаревић 156/10	6	2.7			
Игор Дракулић 206/11	3	2.11			
Стефан Ракић 235/11	3	2.11			
Синиша Шовљански	2	2.10			