Распад језгара

Познато је да су многа језгра нестабилна. Типичан пример је језгро изотопа $^{235}\mathrm{U}$ (ураново језгро садржи 143 неутрона и 92 протона) које има малу, али незанемарљиву вероватноћу распада на два језгра приближно половине величине почетног језгра. Процес распада је случајан у смислу да ако је дато једно језгро $^{235}\mathrm{U}$, не постоји могућност предвиђања када ће наступити распад језгра. Највише што се може рећи је вероватноћа распада. Еквивалентан начин за опис овог процеса је преко средњег времена за распад. За $^{235}\mathrm{U}$ оно износи приближно 1×10^9 година.

Корисно је замислити узорак који садржи огроман број језгара $^{235}\mathrm{U}$ што је у пракси уобичајено и у том случају извести експеримент којим се проучава радиоактивни распад. Ако је $N_U(t)$ број присутних језгара у тренутку времена t, понашање система се може описати диференцијалном једначином:

$$\frac{dN_U}{dt} = -\frac{N_U}{\tau} \quad (1)$$

где је τ временска константа распада.
Једначина се може решити егзактно а решење гласи:

$$N_U = N_U(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (2)$$

где је $N_U(0)$ број присутних језгара у тренутку $t=0$. Овакав тип диференцијалних једначина и решења је прилично распрострањен (нпр. $RC-$ коло). Види се и смисао константе τ - за време $t=\tau$, број језгара који се још није распао износи $\frac{N_U(0)}{e}$.

Нумерички приступ

Иако се горе поменута диференцијална једначина може решити и аналитички, она је згодна за упознавање са неколико нумеричких метода решавања диференцијалних једначина. Разматраћемо једноставан начин за решавање овог проблема нумеричким путем. Циљ је да се добије N_U као функција од времена t. Задавајући вредност N_U у одређеном тренутку времена t (обично у $t=0$), могуће је одредити вредност N_U у неком каснијем тренутку. Ово се назива почетни проблем. Сада ће бити описан један од начина за решавање проблема заснован на развоју у Тајлоров ред величине N_U:

$$N_U(\Delta t) = N_U(0) + \frac{dN_U}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2N_U}{dt^2}\Delta t^2 + \ldots \qquad (3)$$

где је $N_U(0)$ вредност наше функције у тренутку $t=0$, а $N_U(\Delta t)$ је вредност у тренутку $t=\Delta t$. Вредности извода се рачунају у тренутку $t=0$. Ако се узме да је Δt мало, онда се чланови вишег степена по Δt могу занемарити што је добра апроксимација. Остаје:

$$N_U(\Delta t) \approx N_U(0) + \frac{dN_U}{dt}\Delta t \quad (4)$$

Исти резултат би се добио полазећи од дефиниције првог извода. Први извод од N_U по времену t се може израчунати као:

$$\frac{dN_U}{dt} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_U(t+\Delta t)-N_U(t)}{\Delta t} \approx \frac{N_U(t+\Delta t)-N_U(t)}{\Delta t} \qquad (5)$$

где је претпостављено да је Δt мало али није нула. Онда се последњи израз може написати као:

$$N_U(t+\Delta t) \approx N_U(t) + \frac{dN_U}{dt}\Delta t \qquad (6)$$

што је еквивалентно са горе датим изразом (4). Важно је уочити да је то само апроксимација која садржи симбол $\approx$, а не $=$. Грешка која је учињена одбацивањем члана који садржи $(\Delta t)^2$ је за најмање фактор Δt мања од било ког члана у изразу (6). Што је Δt мање, очекује се да се грешке могу занемарити. То је случај код многих проблема, али ипак постоје ситуације код којих чланови вишег реда могу закомпликовати ситуацију. Због тога је важно анализирати грешке које укључује нумерички метод.

Са физичког становишта проблема ми знамо да је функционални облик извода дат као (1) и ако се он замени у израз (6), добија се

$$N_U(t+\Delta t) \approx N_U(t) - \frac{N_U}{\tau}\Delta t \qquad (7)$$

Овај апроксимативни облик је основа за нумеричко решење проблема радиоактивног распада. Задајући вредност N_U у неком тренутку времена t, може се искористити (7) за одређивање те вредности у каснијем тренутку Δt (као што се може очекивати, прецизност ће зависити од вредности Δt). Обично се даје почетна вредност функције у тренутку $t=0$ и искористити (7) за одређивање вредности у $t=\Delta t$. Затим се добијена вредност користи за одређивање вредности у тренутку $t=2\Delta t$, а онда индентичним поступком у тренутку $t=3\Delta t$, итд. Понављање поступка води ка апроксимативном решењу $N_U(n\Delta t)$ у тренутку $t=n\Delta t$, где је $n-$ цео број. Не може се строго нагласити да је нумеричко решење добијено на тај начин само апроксимација правог, тј. егзактног решења. Циљ методе је да се разлика између њих учини занемарљивом.

Приступ израчунавању $N_U(t)$ на основу израза (6) и (7) је познат као Ојлеров метод и користан је као општи алгоритам за решавање обичних диференцијалних једначина.

Задаци:

1. Брзина предмета који слободно пада у близини Земљине површине дата је изразом:

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

где је v брзина, а $g = 9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ убрзање због гравитационог дејства. Написати програм за решавање дате једначине, а који се базира на Ојлеровој методи. Решење треба да представља зависност $v = v(t)$. Ради једноставности, узети да је почетна брзина нула, тј. да предмет креће из мировања и израчунати решење у интервалу времена од $t = 0$ до $t = 10\,\mathrm{s}$.Поновити израчунавање за неколико различитих вредности корака времена и упоредити то решење са егзактним решењем једначине.

2. Положај тела које се креће хоризонтално сталном брзином v је описан једначином:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

Претпоставимо да је брзина стална и износи $v = 40\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Користећи Ојлеров метод решити дату једначину, односно наћи функцију $x = x(t)$. Упоредити добијени резултат са егзактним решењем.

3. Чест је случај да се сила отпора (трења) која делује на покретно тело повећава са повећањем брзине. Пример тога је падобранац, улога падобрана је да ствара силу отпора ваздуха која је већа него у случају када падобрана нема. Разматрајмо веома једноставан пример где сила отпора зависи од брзине тела. Нека се брзина тела понаша у складу са једначином:

$$\frac{dv}{dt} = a - b \cdot v$$

где су a и b константе. Може се узети да константа a потиче од дејства силе, као нпр. гравитације, док је константом b окарактерисана сила отпора. Треба подвући да је сила отпора негативна (претпоставка је да је $b > 0$), тако да се супротставља кретању и њен интензитет расте са повећањем брзине тела. Користећи Ојлеров метод решити дату једначину, односно, добити функцију $v = v(t)$. Уобичајени избор константи је $a = 10$ и $b = 1$. Требате добити да брзина тежи константној вредности током дужег интервала времена, та брзина се назива терминална брзина.

4. Разматрајмо проблем радиоактивног распада у који су укључене две врсте језгара, A којих има $N_A(t)$, и B којих има $N_B(t)$. Претпоставимо да се језгра типа A распадају и настају језгра типа B која се такође распадају. Ови процеси су описани диференцијалним једначинама:

$$\frac{dN_A}{dt} = -\frac{N_A}{\tau_A}$$

$$\frac{dN_B}{dt} = \frac{N_A}{\tau_A} - \frac{N_B}{\tau_B}$$

где су τ_A и τ_B временске константе распада за сваку врсту језгара. Користећи Ојлеров метод решити спрегнуте једначине по N_A и N_B као функције од времена. Овај проблем се може решити и егзактно. Добити аналитичке изразе за $N_A(t)$ и $N_B(t)$ и упоредити их са нумеричким резултатима. Интересантно је испитати понашање за различите вредности односа временских константи $\frac{\tau_A}{\tau_B}$. Покушајте интерпретирати понашање система током краћег и дужег времена за различите вредности односа $\frac{\tau_A}{\tau_B}$.

5. Разматрајмо поново проблем радиоактивног распада две врсте језгара A и B, али сада претпоставимо да се језгра типа A распадају у језгра типа B, док се језгра типа B распадају у језгра типа A. Строго говорећи, то и није процес распада, пошто је могућ да се језгра типа B поново распадну у језгра типа A. Боља аналогија би била резонанција при којој систем може тунеловати и вратити се назад између два стања A и B која су једнаке енергије. Одговарајуће једначине гласе:

$$\frac{dN_A}{dt} = \frac{N_B}{\tau} - \frac{N_A}{\tau_A}$$
$$\frac{dN_B}{dt} = \frac{N_A}{\tau} - \frac{N_B}{\tau_A}$$

где је ради једноставности претпостављено да се оба типа распада карактеришу истом временском константом τ. Решити систем једначина по бројевима језгара N_A и N_B као функцијама од времена. Разматрати различите почетне услове као нпр. $N_A = 100$, $N_B = 0$, итд. и узети $\tau = 1\text{s}$. Показати да нумерички резултати указују да систем достиже стационарно стање, односно, N_A и N_B постају константни током времена. У таквом стационарном стању временски изводи $\frac{dN_A}{dt}$ и $\frac{dN_B}{dt}$ треба да нестану.

6. Проблем пораста популације често расте брзином која је дата као диференцијална једначина првог реда, нпр. једначина:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2$$

може да опише како број индивидуа N у популацији зависи од времена. Први члан aN одговара рођењу нових чланова, док други члан $-bN^2$ одговара смрти чланова. Овај други члан је сразмеран N^2 и одговара чињеници да се храна теже налази што је број јединки N у популацији већи. Решавање једначине помоћу Ојлеровог метода почети са вредношћу $b = 0$ и упоредити нумерички резултат са егзактним решењем једначине. Након тога, решити једначину са ненултом вредношћу параметра b. Дати интуитивно објашњење резултата. Од интереса су вредности параметара a и b које зависе од почетног броја јединки N. За мале вредности $N(0)$, $a = 10$ и $b = 3$ је добар избор, док је за $N(0) = 1000$ добар избор $a = 10$ и $b = 0.01$.

		Задаци				Испит
Име и презиме	Број индекса	I	II	III	IV	
Бранкица Анђелић	173/10	1				
Јелена Стојшин	163/10	1				
Миљана Ковачевић	225/10	2				
Марко Вељковић	221/10	2				
Милена Бајић	251/08	1				
Петар Мареш	428/08	3				
Михајло Колесар	438/08	3				
Мирољуб Арбутина		1				
Ана Лалић		2				
Дарио Павловић	826/11	4				
Радош Раонић	167/11	4				
Бојан Месарош	24/11	5				
Горан Ивковић-Ивандекић	484/11	5				
Селена Илић	16/11	5				
Соња Тодоровић	393/11	5				
Татјана Веселиновић	323/11	6				
Стефан Илић	241/11	6				
Игор Шћекић	337/11	4				
Михајло Думитрашковић	526/11	4				
Живко Раичевић	280/11	6				
Филип Уљаревић	156/10	6				
Игор Дракулић	206/11	3				
Стефан Ракић	235/11	3				
Синиша Шовљански		2				