Задатак 3: Удаљавање месеца услед плиме и осеке (10 поена)

Услед међусобног гравитационог привлачења, земља и месец ротирају око заједничког центра масе тако да центрифугална сила у просеку компензује гравитационо привлачење. Међутим, на површини земље, гравитациона сила којом месец привлачи земљу није свуда једнака центрифугалној, јер месец снажније привлачи оне делове земље које су му ближи (док је центрифугално убрзање исто у свим тачкама), као што је приказано на слици 1. Тако се на површини земље јављају резултантне **плимске силе** које одговарају разлици гравитационе и центрифугалне силе. Слика 1, десно, показује како су усмерене плимске силе на површини земље.

Плимске силе деформишу земљин водени покривач, и од њега сачињавају облик приближан елипсоиду који је оријентисан према месецу, као на слици 2 (утицај континената занемарујемо). Унутар тог елипсоида, земља ротира око своје осе брзином ω која је знатно већа од брзине Ω којом месец ротира око земље, и тако два пута дневно доживљавамо плиму и осеку. Да би испупчени део елипсоида остао усмерен према месецу, земља мора да се креће у односу на воду, па се између земље и воде ствара трење. Када не би било трења између воденог покривача и земље, велика оса елипсоида (правац OP на слици 2) би била директно усмерена према месецу (правац ON на слици 2), али због трења она се отклања у смеру ротације земље за неки мали константан угао, θ, у односу на правац земља-месец. Услед тог трења, ротација земље око своје осе полако успорава, и дан постаје све дужи. Са друге стране, отклон елипсоида генерише момент силе који делује на месец и успорава његову ротацију око земље, истовремено чинећи да се он полако удаљава од земље.

(а) **[1 п]** Током мисије Аполо 11 1969. године на месец су постављени рефлектори који су омогућили изузетно прецизно мерење растојања до месеца. Ово се постиже мерењем времена, dt, потребног да се кратки ласерски пулсеви емитовани са површине земље врате на земљу након одбијања од рефлектора. За потребе овог задатка можемо занемарити све факторе који компликују ово мерење и замислити да време путовања од $dt = 2.56\,s$ тачно одговара просечном растојању до месеца, a. Како се месец полако удаљава од земље, ово време се између 1970. и 2020. године продужило за $\Delta dt = 12.7\,ns$. На основу ових података, одредити растојање до месеца, a, и брзину његовог удаљавања од земље, v, у cm/години.

(б) **[1.75 п]** Сматрајући да је брзина удаљавања месеца од земље из претходног дела задатка константа, одредити колико је година потребно да се дан на земљи продужи за $1\,h$?

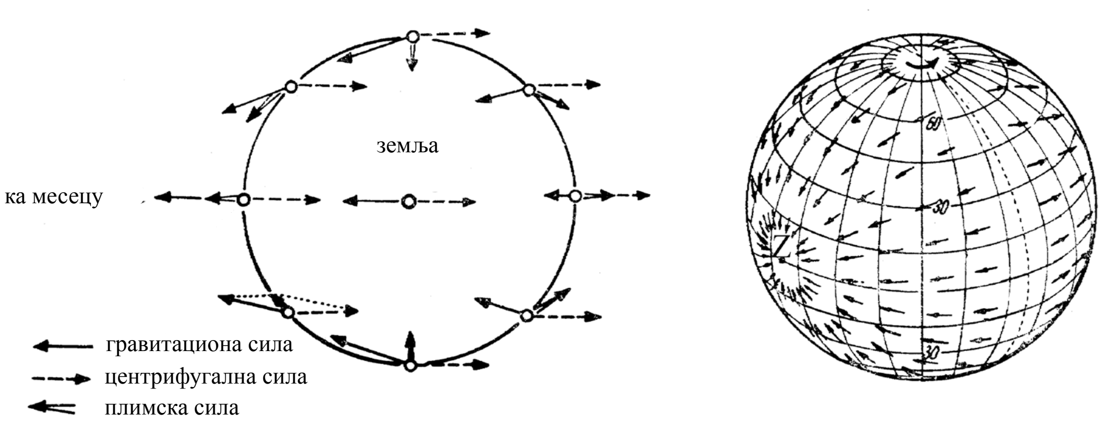
(в) **[2.75 п]** Плиму и осеку можемо замислити као талас на воденом покривачу земље. Занемарујући утицај сферног облика земље на кретање овог таласа, његова густина енергије (енергија по јединици површине) је $\varepsilon = \frac{1}{8}\rho g H^2$, где је H висина таласа а $\rho = 1000\,kg/m^3$ је густина воде. Под претпоставком да се у току једног дана 50% укупне енергије овог таласа утроши на трење које зауставља земљину ротацију, проценити висину плиме и осеке.

(г) **[3 п]** Сада можемо проценити и колики је угао, θ, између велике осе елипсоида и правца земља-месец који генерише момент силе који успорава месечеву ротацију чинећи да се он удаљава од земље. За овај део задатка, можемо претпоставити да се елипсоид може поједностављено представити са две материјалне тачке масе m које се налазе на супротним крајевима земље дуж велике осе елипсоида (слика 2). Детаљан рачун показује да на великим растојањима, ове две материјалне тачке генеришу исти момент силе као и елиспоид ако узмемо њихову масу да буде $m = \sqrt{8\pi/15}\rho R_z^2 H$. На основу ове апроксимације и резултата из претходних делова задатка проценити отклон θ. Овде можете користити математичку чињеницу да ако је величина x мала ($|x| \ll 1$), онда важи $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$.

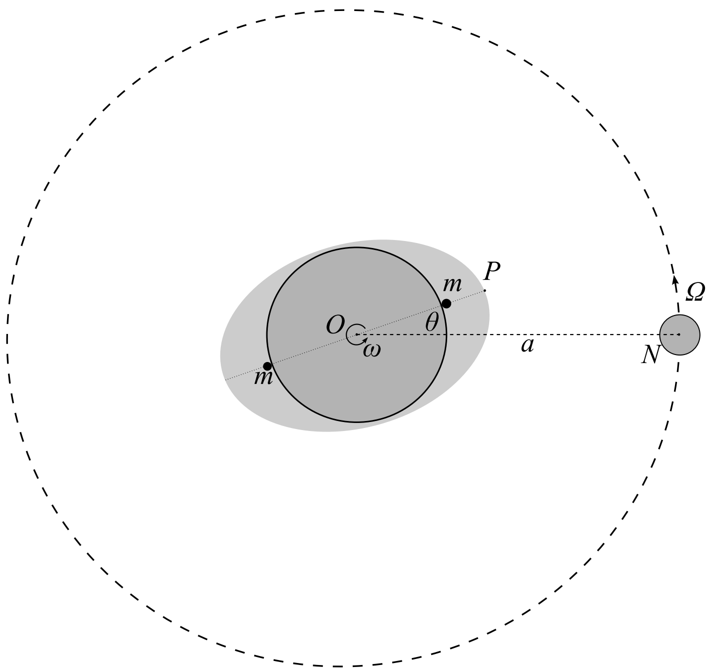
(д) **[1.5 п]** Месец се не може заувек удаљавати константном брзином, v — услед трења, у далекој будућности дужина дана и месечева удаљеност се ипак морају стабилизовати. Одредити услов за ову равнотежу, и везу између дужине дана и растојања до месеца који важе у њој.

Масе земље и месеца су $M_z = 5.97\times10^{24}kg$ и $M_m = 7.34\times10^{22}kg$. Можемо сматрати да је земља много масивнија од месеца тако да се центар масе система земља-месец приближно налази у средишту земље. За потребе рачунања момента инерције, можемо претпоставити да је земља сфера полупречника $R_z = 6371km$ чија ротација око своје осе траје $T = 24h$, а да је месец материјална тачка која обилази земљу по кружној путањи (са периодом много дужим од T), у равни земљиног екватора, и чија се ротација око сопствене осе може занемарити. Универзална гравитациона константа је $G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ а брзина светлости је $c = 3 \times 10^8\, m/s$.

* Можете искористити чињеницу да ако је промена физичке величине x мала, то јест ако је $|x_2 - x_1| \ll x_1$, онда је промена неког степена ове величине, $x_2^b - x_1^b$, где је b неки експонент, приближно једнака $b x_1^{b-1}(x_2 - x_1)$ (пошто су x_1 и x_2 блиски, члан x_1^{b-1} се по потреби може заменити са било којим x^{b-1}, где је x између x_1 и x_2).



Слика 1: **Лево:** Гравитационе, центрифугалне и плимске силе на земљи. **Десно:** Правац и смер плимских сила на површини земље.



Слика 2: Водени елиспоид је приказан светло сивом бојом. Земља и месец су приказани из инерцијалног референтног система изнад северног пола (тачка O). Материјалне тачке масе m представљају апроксимацију воденог покривача из дела задатка под (г).

Задатак припремио: *Предраг Поповић*, Физички факултет, Београд
Рецензент: *Ненад Стевановић*, Природно-математички факултет, Крагујевац
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *Проф. др Имре Гут*, Департман за физику, Нови Сад