



Задача 2: Спин у магнетном пољу (10 поена)

Фундаментална особина свих честица, поред масе и наелектрисања, је спин. Спин је унутрашњи облик момента импулса, карактеристичан за одређени тип честица. Иако је за потпуни опис и разумевање спина потребна квантна механика, неке особине можемо разматрати и класично. У оквиру овог задатка разматраћемо утицај магнетног поља на спин. Класично, моментна једначина за спин је:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B},$$

где \vec{S} представља унутрашњи угаони момент честице (тј. спин), $\vec{\mu}$ је магнетни момент честице, док је \vec{B} магнетно поље. Веза између спина честице и њеног магнетног момента је:

$$\vec{\mu} = -g\vec{S},$$

при чему је g жиромагнетни однос.

Део А - Ларморова прецесија (3 поена)

- (а) [1п] Показати да магнетно поље \vec{B} не мења интензитет магнетног момента μ .
- (б) [0,5п] У случају константног магнетног поља показати да се и угао између \vec{B} и $\vec{\mu}$ не мења.
- (в) [1,5п] Униформно магнетно поље \vec{B} гради угао ϕ са магнетним моментом честице $\vec{\mu}$. Због постојања момента силе магнетног поља, магнетни момент честице $\vec{\mu}$ ротира око правца магнетног поља \vec{B} . Ово додатно кретање, узроковано присуством магнетног поља, назива се *Ларморова прецесија*. Одредити угаону фреквенцу Ларморове прецесије ω_L , узимајући да је $\vec{B} = B\vec{e}_z$

Део Б - Прелазак у ротирајући референтни систем (4 поена)

У овом делу, размотримо феномен из другог референтног система. Замислимо да смо, из лабораторијског референтног система $S = (x, y, z)$, прешли у нови референтни систем $S' = (x', y', z')$ који ротира угаоном фреквенцијом $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$, у односу на лабораторијски референтни систем. У почетном тренутку $t = 0$ координате у ова два система се поклапају. Произвољни вектор $\vec{V} = V_x\vec{e}_x + V_y\vec{e}_y + V_z\vec{e}_z$ можемо записати као $\vec{V} = V'_x\vec{e}'_x + V'_y\vec{e}'_y + V'_z\vec{e}'_z$ у систему S' . Веза између извода овог вектора по времену у ова два система је

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\text{lab}} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{V}$$

где је $\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\text{lab}}$ извод по времену вектора \vec{V} у лабораторијском референтном систему, а $\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\text{rot}}$ извод по времену вектора \vec{V} у ротирајућем референтном систему.

- (а) [1п] Наћи временску еволуцију (извод по времену) вектора магнетног момента честице у S' систему. Решење изразити помоћу $\vec{B}_{\text{eff}} = \vec{B} - \frac{\omega}{g}\vec{e}'_z$ ефективног магнетног поља.
- (б) [0,5 п] У случају константног магнетног поља $\vec{B} = B\vec{e}_z$ одредити угаону фреквенцију Ларморове прецесије у S' систему.
- (в) [2,5п] Размотримо сада утицај временски зависног магнетног поља на честицу са спином. Претпоставимо да се магнетно поље може представити у облику $\vec{B} = B_0\vec{e}_z + \vec{b}(t)$, при чему је први сабирак константни део магнетног поља док други сабирак представља ротационо магнетно поље, и облика је: $\vec{b}(t) = b(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y)$. Израчунати \vec{B}_{eff} . Одредити угаону фреквенцију Ларморове прецесије у систему S' (систем у ком је B_{eff} константно).



Део В - Квантна природа светлости (3 поена)

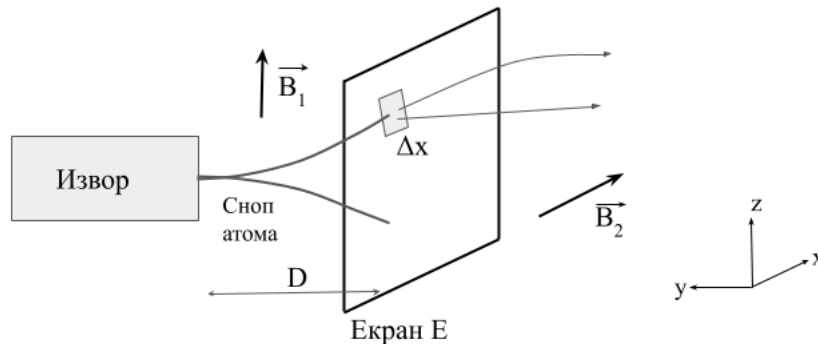
Спин је, ипак, векторска величина. Због своје квантне природе, немогуће му је мерити све компоненте истовремено. Можемо му мерити интензитет μ и једну компоненту (на пример μ_z) истовремено, али не и све μ , μ_x , μ_y , μ_z . У овом делу ћемо, на основу Хајзенбергових релација неодређености, показати да се ове величине заиста не могу мерити истовремено.

- (а) [1,5 п] У јаком магнетном пољу, честица са спином може се наћи у два квантна стања: „горе“ и „доле“. Посматрајмо извор атома сребра, који има мали отвор. Кроз овај отвор излеће сноп атома дуж y -осе као на слици 1, и улећу у јако, просторно променљиво, магнетно поље \vec{B}_1 , које је доминантно усмерено дуж z -осе. Услед дејства овог поља, атоми у различитим стањима са магнетним моментом $\mu_z = \pm g\hbar$ (спин стања „горе“ и „доле“ респективно) су „поцепани“ дуж z -осе. На растојању D од извора, постављен је екран Е тако да само атоми са спином у стању „горе“ могу да прођу. Такорећи, након екрана Е, атоми су „препарирани“ у стање са спином „горе“. Одмах након екрана Е, атоми улећу у јако, просторно променљиво, магнетно поље \vec{B}_2 доминантно усмерено дуж x -осе и на њих делује сила $F_x = \mu_x C$. Дуж x -осе атоми имају магнетни момент $\mu_x = \pm g\hbar$ (спин стања „горе“ и „доле“ респективно). Да бисмо одредили μ_x посматрајући „цепање“ дуж x -осе, показати да мора бити задовољено

$$\frac{1}{\hbar} |\mu_x| \Delta x C t \gg 1$$

при чему је Δx ширина процепа на екрану кроз коју пролазе атоми, док је t време након проласка кроз екран.

- (б) [1,5 п] Атоми су иницијално „препарирани“ у спин стању „горе“ након проласка кроз екран, при чему је $\mu_z = g\hbar = |\mu_x|$. Ово значи да ће атоми прецесирати са различитим угаоним фреквенцама у опсегу $\Delta\omega$ око x компоненте \vec{B}_2 , тј око $B_{2x} = B_0 + Cx$. Показати да је ширење угла прецесије $\Delta\omega t$ велико, тако да не можемо истовремено мерити μ_x и μ_z .



Слика 1: Поставка из дела задатка под В.