Решење: Задатак 1 (10 поена)

Део А - Масена опруга (5 поена)

(а) Пошто је еластична опруга линеарни елемент, важи линеарна веза између брзине и позиције делића опруге:

$$v(x) = v(l)\frac{x}{l} \qquad [\mathbf{1\ п}]\,. \tag{1}$$

Ово се може закључити и на следећи начин. Посматрајмо два делића опруге који се налазе на растојањима x_1 и x_2 од зида и имају брзине v_1 и v_2 усмерене у истом смеру. За кратко време $\mathrm{d}t$, ови делићи промене растојања на $x_1' = x_1 + v_1\mathrm{d}t$ и $x_2' = x_2 + v_2\mathrm{d}t$. Како је однос растојања $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{x_1'}{x_2'}$ очуван, следи да је $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{x_1}{x_2}$.

(б) Кинетичка енергија делића дужине $\mathrm{d}x$ и масе $\mathrm{d}m$ који има брзину $v(x)$ је:

$$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2}\mathrm{d}m v^2(x) \qquad [\mathbf{0.5\ п}]\,. \tag{2}$$

Пошто је опруга хомогена, њена масена густина μ је константна:

$$\mu = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} = \frac{M}{l} \qquad [\mathbf{1\ п}]\,, \tag{3}$$

што значи да је енергија делића:

$$\mathrm{d}E_k(x) = \frac{Mv^2(l)}{2l^3}\cdot x^2\mathrm{d}x\,,$$

а укупна кинетичка енергија опруге:

$$E_k = \int_0^l \mathrm{d}E_k(x) = \frac{Mv^2(l)}{2l^3}\cdot\int_0^l x^2\mathrm{d}x = \frac{Mv^2(l)}{6} \qquad [\mathbf{1\ п}]\,. \tag{4}$$

(в) Уколико тег масе M_e закачен на крај безмасене опруге на растојање l од фиксираног краја и има брзину $v(l)$, тада опруга са тегом има кинетичку енергију исту као масивна опруга:

$$E_k = \frac{M_e v^2(l)}{2} = \frac{M}{3}\frac{v^2(l)}{2}\,.$$

Одакле закључујемо да је ефективна маса $M_e = \dfrac{M}{3}$ [**0.75 п**].

(г) Потенцијална енергија сабијене еластичне опруге се претвара се у кинетичку енегију неистегнуте масивне опруге и кинетичку енергију тега који се креће истом брзином v_0 као и слободни крај опруге:

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{3}+m\right)v_0^2\,,$$

одакле следи тражена брзина:

$$v_0 = x_0\sqrt{\frac{3k}{M+3m}} \qquad [\mathbf{0.75\ п}]\,. \tag{5}$$

Део Б - Коси хитац (5 поена)

(д) Почетна брзина тега има компоненте $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ и $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Кретање по x оси је равномерно, а по y оси је убрзано са убрзањем $-g$. Нека се тело у почетном тренутку налазило на $x(0) = 0$ и $y(0) = h_0$. Једначине кретања гласе:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha t \qquad [\mathbf{0.25\ п}], \tag{6}$$

$$y(t) = h_0 + v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} \qquad [\mathbf{0.25\ п}]. \tag{7}$$

(ђ) Трајекторија тела је линија у простору по којој се тело креће односно $y(x)$. Елиминацијом времена, параметра у једначинама $x(t)$ и $y(t)$, из прве једначине долази се до једначине параболе:

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2 + \tan\alpha \cdot x + h_0 \qquad [\mathbf{1.25\ п}]. \tag{8}$$

(е) Координате места на земљи на које ће тело пасти су $(x = D, y = 0)$ и та тачка лежи на параболи:

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot D^2 + \tan\alpha \cdot D + h_0 \qquad [\mathbf{0.5\ п}]. \tag{9}$$

Да би домет $D(\alpha)$ био максималн мора да важи да је $\frac{\mathrm{d}D(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = 0$ [**0.5 п**]. Узмимо извод једначине која одређује домет D:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot D^2 + \tan\alpha \cdot D + h_0\right) = 0\,,\\
&\frac{g}{v_0^2 \cos^3\alpha_0} \cdot (-\sin\alpha_0) \cdot D^2_{max}(\alpha_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0} \cdot 2D_{max} \cdot \frac{\mathrm{d}D(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\\
&+\frac{1}{\cos^2\alpha_0} \cdot D_{max}(\alpha_0) + \tan\alpha_0 \frac{\mathrm{d}D(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = 0\,,
\end{aligned}$$

и наметнимо услов који максимални домет задовољава:

$$\frac{g}{v_0^2 \cos^3\alpha_0} \cdot (-\sin\alpha_0) \cdot D^2_{max}(\alpha_0) + \frac{1}{\cos^2\alpha_0} \cdot D_{max}(\alpha_0) = 0\,,$$

$$D_{max}(\alpha_0) = \frac{v_0^2 \cos\alpha}{g \sin\alpha} \qquad [\mathbf{1.25\ п}]. \tag{10}$$

Враћањем ове релације у једначину за домет добија се:

$$0 = -\frac{v_0^2}{2g \sin^2\alpha_0} + \frac{v_0^2}{g} + h_0\,.$$

Решење ове једначине одређује угао максималног домета:

$$\sin\alpha_0 = \sqrt{\frac{v_0^2}{2(v_0^2 + gh_0)}} \qquad [\mathbf{0.5\ п}]. \tag{11}$$

Напомена: Начелно, могуће је прво одредити решење једначине за домет, а затим диференцирати тај израз што је математички много захтевније. Квадратна једначина (9) има два решења од којих је физичко:

$$D = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh_0}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right).$$

За овај израз доделити [**0.5 п**] уместо за (10), уколико већ нису додељени поени за (10) додељени.

(ж) За оштар угао α_0, из $\sin^2\alpha_0 + \cos^2\alpha_0 = 1$ добија се

$$\cos\alpha_0 = \sqrt{\frac{v_0^2 + 2gh_0}{2(v_0^2 + gh_0)}}\,. \tag{12}$$

Заменом у $D_{max}(\alpha_0)$ добија се максимални домет:

$$D_{max} = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gh_0}{v_0^2}} \qquad [\mathbf{0.5\ п}]\,. \tag{13}$$

Задатак припремио: *Петар Петрашиновић*, Физички факултет, Београд
Рецензент: *доц. др Момир Арсенијевић*, ПМФ Крагујевац
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *Проф. др Имре Гут*, Департман за физику, Нови Сад