ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2020/2021. ГОДИНЕ.

IV разред

Друштво физичара Србије и Министарство просвете
науке и технолошког развоја Републике Србије
ЗАДАЦИ-АЛФА КАТЕГОРИЈА*

ОПШТИНСКИ НИВО
30. јануар 2021.

1. Максвелове једначине електродинамике и једначине кретања честица имају исти облик у свим инерцијалним системима (принцип релативности). Трансформационе формуле за компоненте електричног ($\vec{E}$) и магнетног поља ($\vec{B}$) при преласку из система S у систем S' (систем S' се креће дуж x осе релативистичком брзином v) су редом

$$E'_x = E_x \;,\; E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;, E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, B'_x = B_x \,,\; B'_y = \frac{B_y + \frac{v}{c^2}E_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;\text{ и }\; B'_z = \frac{B_z - \frac{v}{c^2}E_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

а) Показати да је величина $E^2 - c^2B^2$ инваријанта у свим инерцијалним системима. **[7 поена]**

б) Показати да ако су вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$ ортогонални у једном инерцијалном систему они су ортогонални у свим инерцијалним системима. **[13 поена]**

2. Посматрајмо инверзно Комптоново расејање релативистичког електрона укупне енергије E (где је за електрон $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 4$, где је v брзина електрона, а c брзина светлости у вакууму) и фотона енергије $h\nu$ који се крећу један ка другом као што је приказано на слици 1. Након расејања фотон се креће дуж истог правца али у супротном смеру у односу смер кретања пре расејања. Одредити вредност енергије фотона пре расејања тако да његова енергија буде максимална након расејања и у том случају одредити вредност енергије фотона након расејања. Тражене вредности енергија изразити у јединицама eV. Енергија мировања електрона је $E_0 = 0{,}511\,\mathrm{MeV}$.**[20 поена]**

3. У колу са слике 2 одредити вредности струје која протиче кроз идеални амперметар за све могуће положаје (отворен или затворен) прекидача Π_1 и Π_2. Величине ε и R сматрати познатим. Унутрашњу отпорност електромоторне силе и све остале отпорности (каблови, контакти, прекидачи) занемарити. **[20 поена]**

4. На располагању имамо танко сабирно сочиво жижне даљине $f_{\mathrm{S}} = 10\,\mathrm{cm}$ и конкавно (удубљено) огледало полупречника кривине $R_{\mathrm{O}} = 10\,\mathrm{cm}$. Оптичке осе конкавног огледала и танког сабирног сочива се поклапају, а сабирно сочиво је постављено нормалано на оптичку осу.

а) Одредити на коликом растојању од темена огледала треба поставити сочиво тако да зраци који падају на сочиво паралелно са оптичком осом након преламања на сочиву, одбијања од огледала па поновним преламањем на сочиву се поново крећу паралелно са оптичком осом сочива. **[10 поена]**

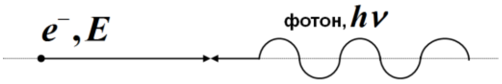
б) Скицирати положаје конкавног огледала и сабирног сочива са јасно означеним елементима огледала и сочива, као и путање карактеристичних зрака. **[10 поена]**

5. У овом задатку помоћу димензионе анализе треба одредити укупну снагу коју зраче два снопа релативистичких честица, протона и антипротона , који се у великом хадронском сударачу помоћу хомогеног магнетног поља крећу по кружној путањи. Услови при којима се протони и антипротони крећу су идентични, само су им кружне путање међусобно просторно одвојене.

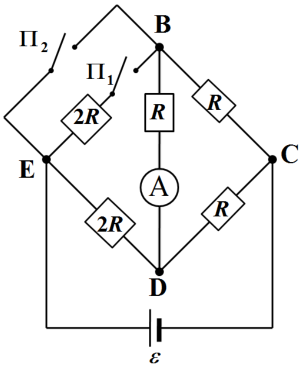
а) Наелектрисана честица која се креће убрзано зрачи енергију у виду електромагнетних таласа. Снага зрачења P једне релативистичке честице која се креће по кружној путањи у константном и хомогеном магнетном пољу константном угаоном брзином зависи од наелектрисања q, диелектричне пропустљивости вакуума ε_0, брзине светлости у вакууму c, полупречника кружне путање r, и фактора $\frac{(\gamma^2-1)^2}{6\pi}$, где је $\gamma = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Ова зависност је облика $P = \frac{(\gamma^2-1)^2}{6\pi}\cdot q^{\alpha}\cdot\varepsilon_0^{\beta}\cdot r^{\gamma}\cdot c^{\delta}$. Димензионом анализом наћи израз за P. **[13 поена]**

б) Ако је укупан број протона и антипротона једнак $N_{\mathrm{p}} = N_{\bar{\mathrm{p}}} = 3{,}229\cdot 10^{14}$, укупна енергија сваког појединачног протона и антипротона $E_{\mathrm{p}} = E_{\bar{\mathrm{p}}} = 7\,\mathrm{TeV}$, полупречници кружних путања по којима се крећу су једнаки а вредност $r = 4245\ \mathrm{m}$ одредити вредност укупне снаге зрачења P_{u}. **[7 поена]**

Користити следеће бројне вредности: елементарно наелектрисање $|e| = 1{,}602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, брзина светлости у вакууму $c = 2{,}998\cdot 10^{8}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, диелектрична пропустљивост вакуума $\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$, енергије мировања протона (p) и антипротона ($\overline{p}$) су једнаке и износе $E_{\mathrm{p}0} = E_{\bar{\mathrm{p}}0} = 938\,\mathrm{MeV}$.



Слика 1



Слика 2

Решења свих задатака треба јасно образложити са јасно дефинисаним физичким законима и величинама које користите приликом решавања задатака. Нарочито дефинисати ознаке које уводите а које нису уобичајене.

*****У алфа категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима специјализованих гимназија за област математика и физика.

Задатке припремио: Владимир Чубровић,
Рецензент: проф. др Милан Ковачевић, ПМФ, Крагујевац
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: доц. др Владимир Марковић, ПМФ, Крагујевац

Свим такмичарима желимо успешан рад!

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2020/2021. ГОДИНЕ.

IV разред

Друштво физичара Србије и Министарство просвете,
науке и технолошког развоја Републике Србије

ОПШТИНСКИ НИВО
30. јануар 2021.

РЕШЕЊА-АЛФА КАТЕГОРИЈА*

1. **а)** Покажимо да важи $(E')^2 - c^2(B')^2 = E^2 - c^2B^2$. Уврштавајући трансформационе формуле за компоненте поља из поставке задатка добијамо $(E')^2 - c^2(B')^2 = E_x^2 - c^2B_x^2 + \frac{E_y^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{E_z^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{(v^2-c^2)(B_y^2+B_z^2)}{1-\frac{v^2}{c^2}}$ **[4п]**, што након мало алгебре даје $(E')^2 - c^2(B')^2 = E^2 - c^2B^2$ што је и требало доказати. Дакле величина $E^2 - c^2B^2$ је инваријанта **[3п]**.

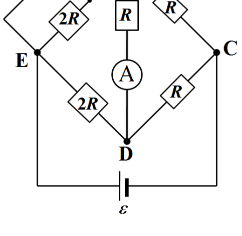
б) Најпре покажимо да важи $\vec{E}'\cdot\vec{B}' = \vec{E}\cdot\vec{B}$. Прво важи да је $\vec{E}'\cdot\vec{B}' = E_x'\cdot B_x' + E_y'\cdot B_y' + E_z'\cdot B_z'$ **[1п]**. Уврштавајући трансформационе формуле за компоненте поља из поставке задатка у претходну једнакост добијамо

$$\vec{E}'\cdot\vec{B}' = E_x\cdot B_x + \frac{\left(E_y - vB_z\right)\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) + \left(E_z + vB_y\right)\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

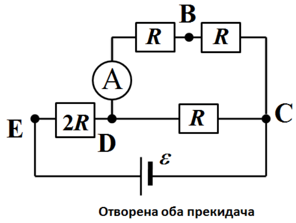
[4п]. Након сређивања последње једнакости добијамо $\vec{E}'\cdot\vec{B}' = E_x\cdot B_x + E_y\cdot B_y + E_z\cdot B_z = \vec{E}\cdot\vec{B}$ **[4п]**. Ако су вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$ ортогонални $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ **[2п]** у једном инерцијалном систему онда ће бити ортогонални и у сваком другом инерцијалном систему јер је $\vec{E}'\cdot\vec{B}' = \vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ **[2п]**, чиме је доказ комплетан.

2. Енергија фотона након расејања ће бити максимална ако након расејања електрон мирује**.** У том случају закони одржања енергије и импулса су редом $h\nu + E = h\nu' + E_0$ **[5п]** и $p - \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}$ **[5п]**. Такође важе следећи изрази $E^2 = (pc)^2 + E_0^2$ **[2п]** и $E = \gamma\cdot E_0$ **[2п]**. Из претходних једначина следи $h\nu = \frac{1}{2}(E_0 - E + \sqrt{E^2 - E_0^2}) = \frac{E_0}{2}(1 - \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) \approx 0{,}223\,\mathrm{MeV}$ **[2+1п]**. Енергија фотона након расејања је $h\nu' = \frac{1}{2}(E - E_0 + \sqrt{E^2 - E_0^2}) = \frac{E_0}{2}(\gamma - 1 + \sqrt{\gamma^2 - 1}) \approx 1{,}756\,\mathrm{MeV}$ **[2+1п]**.

3. а) Ако су оба прекидача Π_1 и Π_2 отворена као на почетној слици 1 еквивалетно коло је приказано на слици 2. Укупна еквивалентна отпорност кола у овом случају је $R_e = \frac{(R+R)\cdot R}{(R+R)+R} + 2R = \frac{8R}{3}$ **[2п]**, па је струја која протиче кроз грану са извором ε и отпорником $2R$ једнака $I = \frac{\varepsilon}{R_e} = \frac{3\varepsilon}{8R}$ **[2п]**. Напон U_{DC} је $U_{\mathrm{DC}} = \varepsilon - I\cdot 2R = \frac{\varepsilon}{4}$ **[2п]**, а струја која протиче кроз идеални амперметар $I_{\mathrm{A1}} = \frac{U_{\mathrm{DC}}}{2R} = \frac{\varepsilon}{8R}$ **[2п]**.

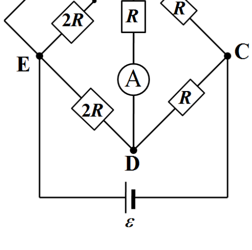


Слика 1



Отворена оба прекидача

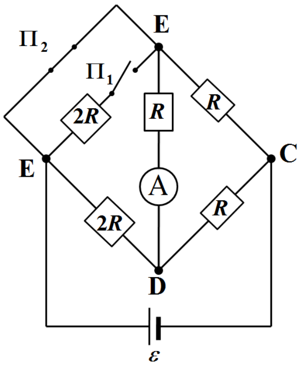
Слика 2



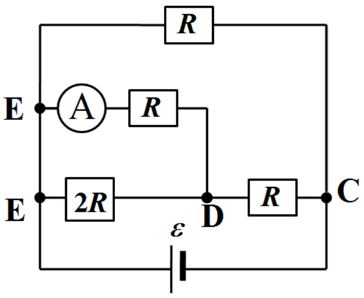
Слика 3

б) Ако је прекидач Π_1 затворен а прекидач Π_2 отворен коло је у том случају еквивалентно уравнотеженом Витстоновом мосту , слика 3, па струја не протиче кроз амперметар $I_{\mathrm{A}2}=0\,\mathrm{A}$ **[4п]**.

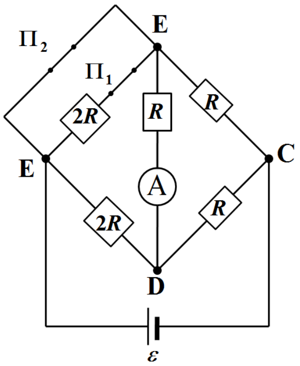
в) Ако је прекидач Π_1 отворен а прекидач Π_2 затворен , у том случају коло је еквивалентно колу са слике 5.



Слика 4



Слика 5

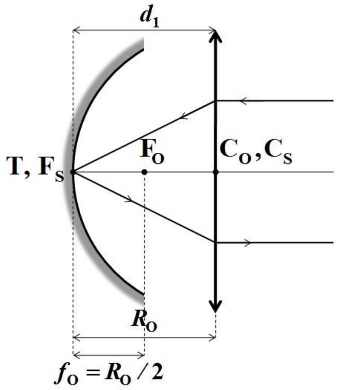


Слика 6

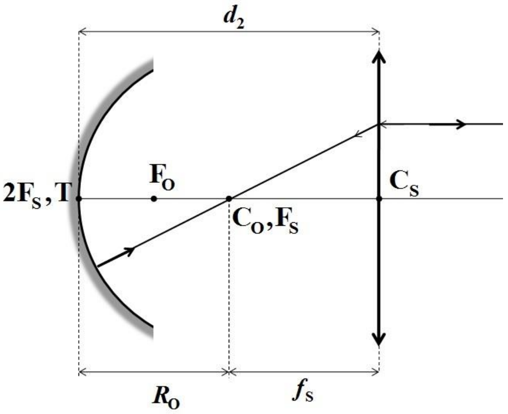
Укупна еквивалентна отпорност кола у овом случају је $R_e=\dfrac{\left(\dfrac{R\cdot 2R}{R+2R}+R\right)\cdot R}{\left(\dfrac{R\cdot 2R}{R+2R}+R\right)+R}=\dfrac{5R}{8}$ **[2п]** па је струја која протиче кроз грану са извором једнака $I=\dfrac{\varepsilon}{R_e}=\dfrac{8\varepsilon}{5R}$ **[1п].** Струја кроз грану ЕС је $I_2=I-\dfrac{\varepsilon}{R}=\dfrac{3\varepsilon}{5R}$ **[1п]**, а напон U_{ED} је $U_{\mathrm{ED}}=\varepsilon-I_2\cdot R=\dfrac{2\varepsilon}{5}$ **[1п]**, тако да је струја која протиче кроз идеални амперметар $I_{\mathrm{A}3}=\dfrac{U_{\mathrm{ED}}}{R}=\dfrac{2\varepsilon}{5R}$ **[1п].**

г) Ако су оба прекидача Π_1 и Π_2 затворена (слика 6) у том случају коло је еквивалентно колу описаном у делу задатка под в). Струја која протиче кроз амперметар је $I_{\mathrm{A}4}=\dfrac{2\varepsilon}{5R}$ **[2п]**.

4. Искористићемо особине преламања зрака на сабирном сочиву и одбијања зрака на конкавном (удубљеном огледалу). У општем случају да би зрак био паралелан са оптичком осом, након преламање зрака на сочиву, одбијања зрака од огледала па поновним преламањем зрака на сочиву, потребно је да након одбијања зрака од огледала зрак на сочиво долази дуж правца који пролази кроз жижу сочива. Имамо два могућа положаја сочива d_1 (слика 7 **[5п]**) и d_2 (слика 8 **[5п]**) Дакле један од случајева је када се жижа сочива поклапа са теменом огледала (слика 7), тако да је растојање између темена огледала и центра сочива $d_1=f_\mathrm{S}=10\,\mathrm{cm}$ **[5п]**. Ако искористимо особину одбијања зрака на огледалу, да зрак који пролази кроз центар огледала након одбијања од огледала поново пролази кроз центар огледала, дакле центар огледала треба да се поклапа са жижом сочива (слика 8). Тако добијамо да је $d_2=R_\mathrm{O}=20\,\mathrm{cm}$ **[5п].**



Слика 7



Слика 8

5. **а)** Израз $P=\frac{(\gamma^2-1)^2}{6\pi}\cdot q^\alpha\cdot\varepsilon_0^\beta\cdot r^\gamma\cdot c^\delta$ димензионо је $\left[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-3}\right]=\left[\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}\right]^\alpha\cdot\left[\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-3}\right]^\beta\cdot\left[\mathrm{m}\right]^\gamma\cdot\left[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right]^\delta$ **[2п],** односно $\left[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-3}\right]=\left[\mathrm{kg}\right]^{-\beta}\cdot\left[\mathrm{m}\right]^{-3\beta+\gamma+\delta}\cdot\left[\mathrm{s}\right]^{\alpha+4\beta-\delta}\cdot\left[\mathrm{A}\right]^{\alpha+2\beta}$ **[2п],** тако да добијамо четири једначине $-\beta=1$ **[1п]**, $-3\beta+\gamma+\delta=2$ **[1п]**, $\alpha+4\beta-\delta=-3$ **[1п]** и $\alpha+2\beta=0$ **[1п]**. Решавањем претходних једначина добијамо $\alpha=2$ **[1п]**, $\beta=-1$ **[1п]**, $\gamma=-2$ **[1п]** и $\delta=1$ **[1п],** па је тражени израз $P=\frac{(\gamma^2-1)^2}{6\pi}\cdot\frac{q^2c}{\varepsilon_0\cdot r^2}$ **[1п]**.

б) По услову задатка је $N_\mathrm{p}=N_{\bar{\mathrm{p}}}$, $E_\mathrm{p}=E_{\bar{\mathrm{p}}}$ и $E_{\mathrm{p}0}=E_{\bar{\mathrm{p}}0}$. Како је $q_\mathrm{p}=|e|$ и $q_{\bar{\mathrm{p}}}=-|e|$ **[1п]**, и $E_\mathrm{p}=\gamma E_{\mathrm{p}0}$ **[2п]**, следи $P_\mathrm{u}=2N_\mathrm{p}\cdot\frac{((E_\mathrm{p}/E_{\mathrm{p}0})^2-1)^2}{6\pi}\cdot\frac{e^2c}{\varepsilon_0\cdot r^2}\approx 5{,}13\,\mathrm{kW}$ **[2+2п].**