ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2023/2024. ГОДИНЕ

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

II разред

РЕШЕЊА – АЛФА КАТЕГОРИЈА*

ОПШТИНСКИ НИВО
4. фебруар 2024.

1. Посматрајмо систем који се састоји од поменута два диска. Након спајања, између њих почиње да делује сила трења - унутрашња сила која не мења момент импулса система али смањује механичку енергију система.

   Моменти импулса дискова су $L_1 = I\omega_1$ и $L_2 = I\omega_2$, где је $I = \frac{1}{2}mR^2$ **(1 поен)** момент инерције диска у односу на осу симетрије око које дискови ротирају. Како дискови ротирају у супротним смеровима, вектори момената импулса су супротно усмерене дуж осе ротације те важи да је укупан момент импулса система пре контакта $L = L_1 - L_2 = I(\omega_1 - \omega_2)$ **(4 поена)**.

   Проклизавање престаје у тренутку када дискови постигну једнаке угаоне брзине по интензитету и смеру ротације. Од тог тренутка систем постаје диск двоструко веће масе $2m$ и истог полупречника R, а ротира угаоном брзином ω **(2 поена)**.

   Момент импулса система након проклизавања је $L' = 2I\omega$ **(2 поена)**. Из закона одржања момента импулса $L = L'$ следи угаона брзина којом дискови ротирају без проклизавања $\omega = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ **(2 поена)**. Напомена: Претпоставили смо да је момент импулса L_1 већи те његов смер узели за позитиван.

   Кинетичка енергија ротације дискова пре контакта је $E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}I(\omega_1^2 + \omega_2^2)$ **(1 поен)**. Након проклизавања енергија ротације дискова је $E' = \frac{1}{2}\cdot 2I\omega^2$ **(2 поена)**. Закон одржања енергије се може исказати на следећи начин $E = E' + A_{tr}$ **(4 поена)**, где је A_{tr} рад силе трења. Тражени рад силе трења је $A_{tr} = \frac{1}{8}mR^2(\omega_1 + \omega_2)^2$ **(2 поена)**.

2. Гас се пре загревања налазио у стању "0" одређеном параметрима $\left(P_0, V_0, T_0\right)$. Услов равнотеже клипа гласи $0 = P_0S + F_{tr} - P_aS - mg$ **(1 поен)**, где је F_{tr} сила трења која делује на клип. Смер и интензитет силе трења морамо одредити, а претпоставили смо да делује вертикално навише. Како је гас у таквом стању да би се приликом било каквог хлађења клип спустио, то значи да је сила трења мировања достигла максималну вредност која је једнака сили трења клизања $F_{tr} = \mu N$ и да стварно делује вертикално навише **(3 поена)**. Једначина стања гаса гласи $P_0SL = nRT_0$ **(1 поен)** одакле следи тражена маса клипа $m = \frac{nRT_0}{gL} - \frac{P_aS}{g} + \frac{\mu N}{g}$ **(2 поена)**.

   Из једначине гасног стања за стање "0" може се одредити притисак гаса $P_0 = \frac{nRT_0}{SL}$, док је запремина гаса $V_0 = SL$. У зависности од количине топлоте предате гасу сукцесивно се дешавају следећи процеси. Гас се прво загрева изохорски те важи $V = V_0 = const.$ све док сила трења мировања не промени смер и достигне максималну вредност. Услов равнотеже клипа у стању "1" на крају изохорског загревања гласи $0 = P_1S - \mu N - P_aS - mg$ одакле следи притисак у стању "1" $P_1 = P_a + \frac{mg}{S} + \frac{\mu N}{S} = P_0 + 2\frac{\mu N}{S}$ **(2 поена)**. Како важи да је $\frac{P_1}{P_0} = \frac{nRT_1}{nRT_0}$, у стању "1" температура износи $T_1 = T_0(1 + 2\frac{\mu N}{SP_0})$ **(1 поен)**. Параметри стања "1" су $\left(P_1 = P_0 + 2\frac{\mu N}{S}, V_1 = V_0, T_1 = T_0(1 + 2\frac{\mu N}{SP_0})\right)$. Даље загревање гаса одиграва се при константном притиску $P = P_1 = const.$ Нека се гас загреје тако да запремину повећа k пута, $V_2 = k\cdot V_0$. Тада је температура стања "2" одређена релацијом $\frac{V_2}{V_1} = \frac{nRT_2}{nRT_1}$ одакле добијамо $T_2 = k\cdot T_0(1 + 2\frac{\mu NL}{nRT_0})$ **(1 поен)** и крајње стање гаса је $\left(P_2 = P_0 + 2\frac{\mu N}{S}, V_2 = kV_0, T_2 = k\cdot T_0(1 + 2\frac{\mu NL}{nRT_0})\right)$.

   За описани изохорски процес загревања гасу је потребно предати количина топлоте $Q_1 = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_0) = 3\mu NL$ **(1 поен)**. По услову датом у задатку, гас је примио количину топлоте $Q > Q_1$ па се да закључити да ће гас почети и да се шири **(1 поена)**. Током изобарског ширења до k пута веће запремине гас је морао да прими количину топлоте $Q_2 = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}(k-1)(1 + \frac{2\mu NL}{nRT_0})nRT_0$ **(1 поен)**. Део те топлоте долази од рада силе трења клизања који током процеса ширења износи $A_{tr} = -(k-1)\mu NL$ **(1 поен)**, а други део од преостале топлоте, што се може представити као $Q_2 = Q - Q_1 + \eta|A_{tr}|$ **(2 поена)**. Одавде се лако може одредити $k = 1 + \frac{Q - 3\mu NL}{\frac{5}{2}nRT_0 + (5-\eta)\mu NL}$ што одређује крајњу температуру гаса $T_2 = \left(1 + \frac{Q-3\mu NL}{\frac{5}{2}nRT_0 + (5-\eta)\mu NL}\right)(1 + 2\frac{\mu NL}{nRT_0})T_0$ **(1 поен)** и висину до које ће се клип попети $L_2 = \left(1 + \frac{Q-3\mu NL}{\frac{5}{2}nRT_0 + (5-\eta)\mu NL}\right)L$ **(1 поен)**. Напомена: Како би процес био приказан на $P - V$ дијаграму, потребно је одредити притиске и запремине одговарајућих стања. $P - V$ дијаграм носи **(1 поен)**.

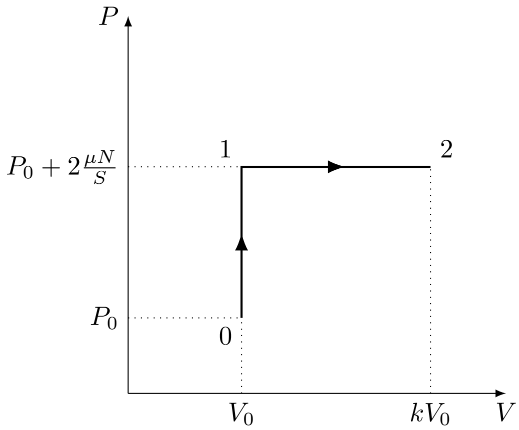
3. Пошто за адијабатски процес важи $TV^{\gamma-1} = const$, следи да мора да важи $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$. Из овога директно следи релација $(\frac{V_1}{V_2})^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}$ **(5 поена)**. Уврштавањем нумеричких вредности, добијамо да мора да важи $27^{\gamma-1} = 3$. Следи да је $\gamma = \frac{4}{3}$ **(3 поена)**. Пошто је $\gamma = \frac{C_V+R}{C_V}$, следи да је $C_V = 3R = \frac{i}{2}R$. Број степени слободе је $i = 6$ **(8 поена)** што важи за све тро и више атомске молекуле који немају линијску структуру. Пошто CO_2 има линијску структуру **(2 поена)**, радни гасови који могу да учествују у овом процесу су H_2O **(1 поен)** и CH_4 **(1 поен)**.

4. Пошто је иницијално у десној страни коморе вакуум, хелијум при ширењу кроз мембрану не врши рад, па му се температура том приликом не мења. Након ширења гаса, дакле, лева половина је испуњена са $n_l = 2n/3 = 2mol$ гасне смесе, а десна са $n_d = n/3 = 1mol$ хелијума на истој почетној температури, $°t_0 = 50°C$ **(2 поена)**. Након тога, долази до размене топлоте између гаса и воде. Равнотежа се успоставља када и вода и гас имају исту крајњу температуру, $°t$. Пошто се одвија при константној запремини, овај процес представља изохорско хлађење гаса. Пошто се ради о гасној смеси, посматрамо одвојено хелијум и кисеоник. Моларни топлотни капацитет при

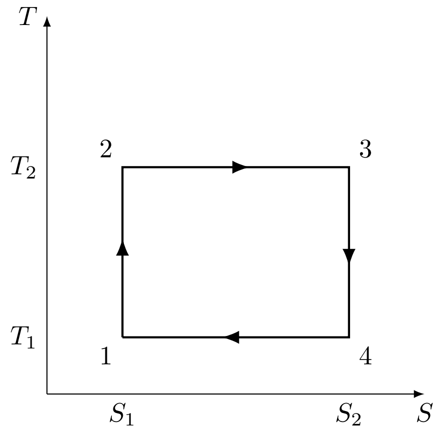
Задатке припремили: *Ђорђе Богдановић, Никола Коњик и Предраг Поповић*, Физички Факултет, Универзитет у Београду.
Рецензент: *Момир Арсенијевић*, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу.
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду

изохорском хлађењу за једноатомски гас (хелијум) је $C_{V,He} = 3/2R$, док је за двоатомски гас (кисеоник) $C_{V,O_2} = 5/2R$ **(4 поена)**. Укупна топлота коју отпусти гасна смеса је дакле, $Q = 2n/3C_{V,He}(T_0 - T) + n/3C_{V,O_2}(T_0 - T) = 11/6nR(T_0 - T)$ **(6 поена)**. Са друге стране, вода прими топлоту $Q = mc_v(T - T_v)$, где је $m = \rho V_v = 0.1kg$ маса воде у комори **(3 поена)**. Изједначавањем две топлоте, добијамо крајњу температуру $11/6nR(T_0 - T) = mc_v(T - T_v) \Rightarrow T = [11nRT_0/6 + mc_vT_v] / [11nR/6 + mc_v] \approx 278.05K$ **(2 поена)**. Једначине стања у два дела коморе су дакле, $p_lV/2 = 2n/3RT$ и $p_dV/2 = n/3RT$, па су притисци $p_l = 4n/3RT/V \approx 92.4kPa$ и $p_d = 2n/3RT/V \approx 46.2kPa$ **(2 поена)**. Сила којом гас делује на мембрану је $F = S(p_l - p_d) = 2SRkT/3V \approx 4621.4N$ **(1 поен)**.

5. Да би циклус радио као топлотна машина, он мора бити усмерен као на слици **(5 поена)**. Процеси $1-2$ и $3-4$ су адијабатски **(2 поена)**, док су процеси $2-3$ и $4-1$ изотермски (то јест, у питању је Карноов циклус) **(2 поена)**. Површина обухваћена циклусом на T-S дијаграму је $A = \Delta S\Delta T$, где је $\Delta S = S_4 - S_1$ а $\Delta T = T_2 - T_1$. Преписивањем добијамо $A = \Delta ST_2 - \Delta ST_1$. Први члан, $Q_2 = \Delta ST_2$, је топлота предата систему током изотермског процеса $2-3$, док је други члан, $Q_1 = \Delta ST_1$, топлота отпуштена током изотермског процеса $4-1$, тако да је површина $A = Q_2 - Q_1$ једнака раду извршеном током циклуса **(5 поена)**. Коефицијент корисног дејства је $\eta = A/Q_2 = (T_2 - T_1)/T_2$ **(6 поена)**.



Слика 1: $P - V$ дијаграм уз задатак 2.



Слика 2: $T - S$ дијаграм уз задатак 5.

Задатке припремили: *Ђорђе Богдановић, Никола Коњик и Предраг Поповић*, Физички Факултет, Универзитет у Београду.
Рецензент: *Момир Арсенијевић*, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу.
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду