



III разред

Друштво физичара Србије и Министарство просвете
науке и технолошког развоја Републике Србије
ЗАДАЦИ-АЛФА КАТЕГОРИЈА*

ОКРУЖНИ НИВО
20. фебруар 2021.

1. За мерење активне снаге индуктивног пријемника користи се струјно коло чија је схема приказана на слици 1. Амперметар и волтметар сматрати идеалним. Капацитет кондензатора C се подеси тако да ефективна вредност струје кроз грану са генератором наизменичног напона буде минимална (I_{\min}). Доказати да је активна снага индуктивног пријемника дата формулом $P_a = UI_{\min}$. [20 поена]

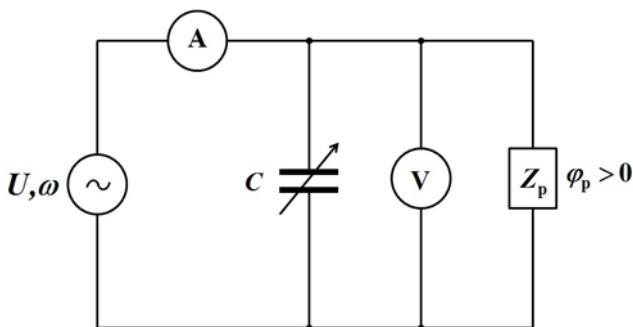
2. Бесконачан проводник који се налази у ваздуху, савијен је као на слици 2. Делови проводника датих у виду полуправа, леже дуж правца x и y -оса, слика 2. Кружни прстен формиран увијањем проводника је полупречника $R = 10\text{ cm}$ и лежи у равни α . Раван α садржи y -осу и са z и x -осама заклапа угао $\theta = 45^\circ$ (слика 2). У координатном почетку O , на слици 2, жице проводници су изоловани и не долази до формирања чвора, већ струје теку као на слици 2. Оса симетрије која пролази кроз центар кружног прстена C и нормална је на раван α , у којем лежи кружни прстен, сече x -осу у тачки M . Уколико кроз проводник тече струја јачине $I = 1\text{ A}$, одредити интензитет индукције магнетног поља у тачки M . Узети да је магнетна пропустљивост ваздуха једнака магнетној пропустљивости вакуума, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{ H/m}$. [20 поена]

3. У колу 3 са слике одредити укупну снагу која се развија на отпорницима R_1, R_2, R_3 и R_4 . Познато је $\varepsilon = 90\text{ V}$, $r = 0,55\ \Omega$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 60\ \Omega$ и $R_4 = 60\ \Omega$. Отпорности спојних проводника, контаката, и унутрашњу отпорност генератора електромоторне силе занемарити. [20 поена]

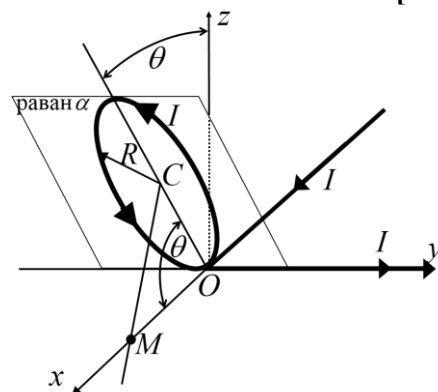
4. У колу наизменичне струје, са слике 4, повезани су извор максимлане вредности напона $U_0 = 10\text{ V}$ и променљиве кружне фреквенције ω , затим отпорници отпорности $R_1 = 1\text{ k}\Omega$, $R_2 = 2\text{ k}\Omega$, калем индуктивности $L = 10\text{ H}$ и кондензатор капацитета $C = 10\ \mu\text{F}$.

- а) Одредити кружну фреквенцију извора, ω_0 , такву да напон између тачака А и В буде једнак нули. [8 поена]
- б) Одредити максималну вредност напона између тачака А и В у случају када је кружна фреквенција извора $\omega = 2\omega_0$, где је ω_0 фреквенција извора у делу задатка под а). [12 поена]

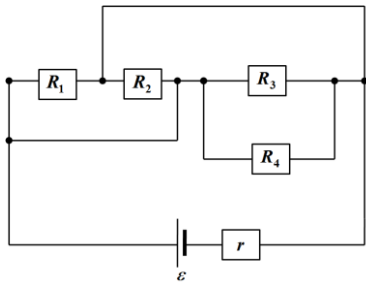
5. Један мол идеалног једноатомског гаса пролази кроз кружни циклус $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ који је приказан на $T - V$ дијаграму (слика 5). Током процеса $1 \rightarrow 2$ температура гаса се мења у зависности од запремине по закону $T = \alpha V^2$, где је α позитивна константа. Током циклуса однос максималног и минималног притиска гаса је $\frac{P_{\max}}{P_{\min}} = 2$. Ако током процеса $1 \rightarrow 2$ гас прими количину топлоте $Q_1 = 120\text{ J}$, одредити укупну количину топлоте коју гас ослободи током процеса $2 \rightarrow 3$ и $3 \rightarrow 1$. [20 поена]



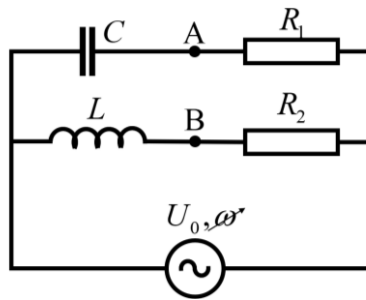
слика 1



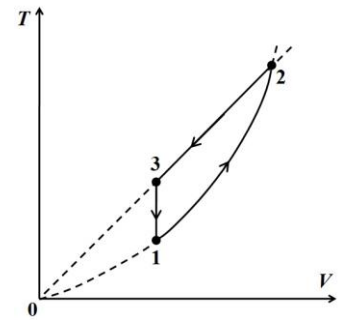
слика 2



слика 3



слика 4



слика 5

Решења свих задатака треба јасно образложити са јасно дефинисаним физичким законима и величинама које користите приликом решавања задатака. Нарочито дефинисати ознаке које уводите а које нису уобичајене.

* У алфа категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима специјализованих гимназија за област математика и физика.

Задатке 1,3,5 припремио: Владимир Чубровић; задатке 2, 4 припремили: Љубица Кузмановић и Христина Делибашић, ПМФ Крагујевац

Рецензент: проф. др Ненад Стевановић, ПМФ Крагујевац

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: доц. др Владимир Марковић, ПМФ Крагујевац

Свим такмичарима желимо успешан рад!



III разред

Друштво физичара Србије и Министарство просвете,
науке и технолошког развоја Републике Србије
РЕШЕЊА- АЛФА КАТЕГОРИЈА*

ОКРУЖНИ НИВО
20. фебруар 2021.

1. Први начин. Активна снага пријемника је $P_a = UI_p \cos(\varphi_p)$ [2п]. Први Кирхофов закон примењен на чвор В је

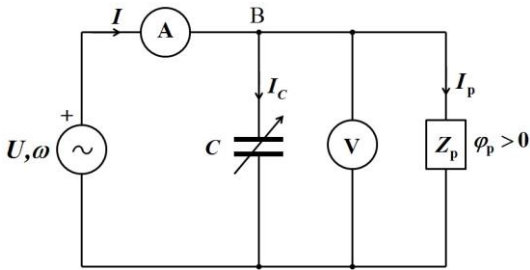
$\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_p$ [2п] (слика 1.а), где је $\underline{I}_C = j\omega C \underline{U}$ [2п] и $\underline{I}_p = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_p} = \frac{\underline{U}}{R + jX_p} = \frac{R_p - jX_p}{Z_p^2} \cdot \underline{U}$ [3п], тако да је

$\underline{I} = \left[\frac{R_p}{Z_p^2} + j \left(\omega C - \frac{X_p}{Z_p^2} \right) \right] \cdot \underline{U}$, па је $I = \sqrt{\left(\frac{R_p}{Z_p^2} \right)^2 + \left(\omega C - \frac{X_p}{Z_p^2} \right)^2} \cdot U$ [4п]. Струја I има минимум када је $\omega C - \frac{X_p}{Z_p^2} = 0$ тј.

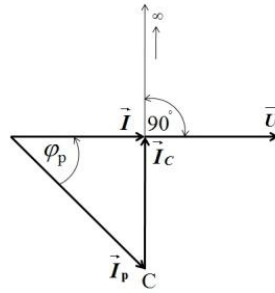
када је $\omega C = \frac{X_p}{Z_p^2}$ и тада је њена вредност $I_{\min} = \frac{R_p}{Z_p^2} \cdot U$ [2п]. Како је $\frac{R_p}{Z_p} = \cos(\varphi_p)$ [2п] следи

$I_{\min} = \frac{U}{Z_p} \cos(\varphi_p) = I_p \cos(\varphi_p)$ [2п] па је активна снага индуктивног пријемника $P_a = UI_p \cos(\varphi_p) = UI_{\min}$ [1п] што је и

требало доказати.



Слика 1.а



Слика 1.б

Други начин. Како је $\vec{I} = \vec{I}_p + \vec{I}_C$, врх фазора \vec{I} налази се на полуправој на којој лежи фазор \vec{I}_C од тачке С за коју је $I_C = 0$, до $+\infty$ када $I_C \rightarrow +\infty$ [5п]. Са фазорског дијаграма се види да је дужина фазора \vec{I} најмања када се он по

правцу поклапа са фазором \vec{U} (слика 1.б) [7п]. Дакле струја I ће бити минимална када је у фази са напонем U , односно када је реактивна отпорност кола једнака нули. У том случају је $I_{\min} = I_p \cos(\varphi_p)$ [5п]. Активна снага

индуктивног пријемника је $P_a = UI_p \cos(\varphi_p)$ [2п] па је на основу претходног разматрања $P_a = UI_p \cos(\varphi_p) = UI_{\min}$ [1п], што је и требало доказати.

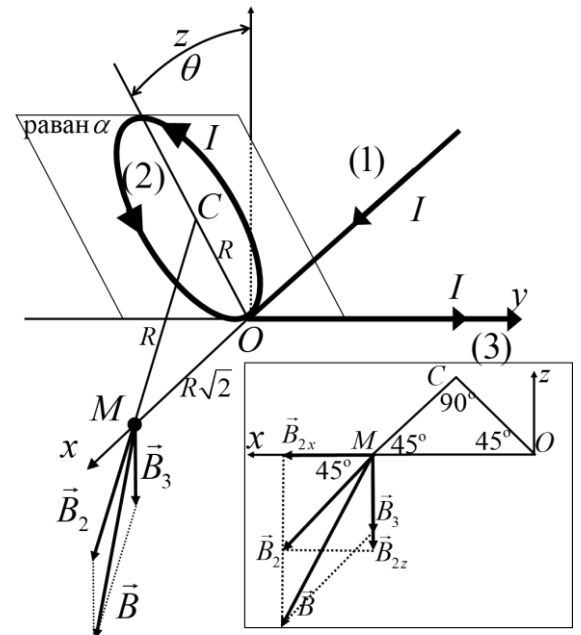
2. Индукција магнетног поља у тачки М је векторски збир индукција магнетних поља које потичу од делова проводника (1), (2) и (3), $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$ [2п], слика 2. Како се тачка М налази на x -оси, у

продужетку дела проводника (1), интензитет индукције магнетног поља у тачки М од дела проводника (1) је $B_1 = 0$ [1п]. Како је

$\overline{OM} = R\sqrt{2}$ индукција магнетног поља од дела проводника (3) износи $\vec{B}_3 = -\frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\pi R} \vec{e}_z$ [5п]. Тачка М лежи на оси симетрије кружног

прстена, где је $\overline{CM} = R$. Интензитет индукције магнетног поља од кружног прстена (2) износи $B_2 = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{8R}$ [5п]. Вектор

индукције магнетног поља \vec{B}_2 можемо разложити на компоненте $\vec{B}_{2x} = \frac{\mu_0 I}{8R} \vec{e}_x$ [1п] и $\vec{B}_{2z} = -\frac{\mu_0 I}{8R} \vec{e}_z$ [1п]. Резултујући интензитет



слика 2

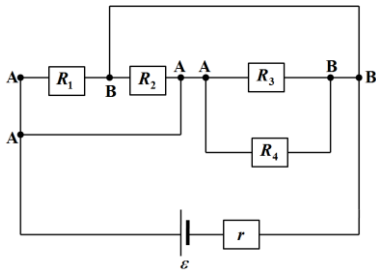


**ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2020/2021. ГОДИНЕ.**

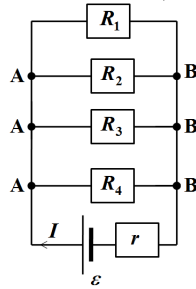


индукције магнетног поља износи $B = \sqrt{B_{2x}^2 + (B_{2z} + B_3)^2}$ [2п], одакле је $B = \frac{\mu_0 I}{R} \sqrt{\frac{1}{64} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4\sqrt{2}\pi}\right)^2} \approx 2,8 \mu\text{T}$ [2+1п].

3. Чворови кола који су спојени проводником занемарљиве отпорности су на једнаком потенцијалу. Чворове кола чији су потенцијали једнаки означаћемо истим латиничним словима (слика 3а). Полазно коло ћемо затим преуредити и изгледаће као што је приказано на слици 3б.



Слика 3а



Слика 3б

Снага генератора електромоторне силе једнака је укупној снази која се развија на свим отпорницима у колу $P_\epsilon = P_r + P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_2} + P_{R_2}$, тако да је укупна снага која се развија на отпорницима R_1, R_2, R_3 и R_4 једнака $P_{Ru} = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_2} + P_{R_2} = P_\epsilon - P_r$ [4п]. Снага генератора електромоторне силе је једнака $P_\epsilon = \epsilon \cdot I$ [1п], где је I јачина

струје кроз грану са генератором електромоторне силе $I = \frac{\epsilon}{R_e}$ [2п], тако да је $P_\epsilon = \frac{\epsilon^2}{R_e}$ [1п] (R_e је укупна

еквивалентна отпорност кола). Укупна еквивалентна отпорност кола је $R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} + r \approx 6 \Omega$ [7+1п]. Из

претходног следи да је снага генератора електромоторне силе једнака $P_\epsilon = \frac{\epsilon^2}{R_e} \approx 1350 \text{ W}$ [1п]. Снага која се развија

на отпорнику r је $P_r = I^2 r = \frac{\epsilon^2}{R_e^2} \cdot r \approx 124 \text{ W}$ [1+1п]. Коначно је $P_{Ru} = P_\epsilon - P_r \approx 1226 \text{ W}$ [1п].

4. Део а) (8 поена) Из услова задатка да је напон $U_{AB} = 0$, следи да је $U_{AC} = U_{BC}$ [1п] и $U_{AD} = U_{BD}$ [1п], где је $U_{AC} = \frac{I_1}{\omega_0 C}$ [1п], $U_{BC} = I_2 \omega_0 L$ [1п], $U_{AD} = I_1 R_1$ [1п] и $U_{BD} = I_2 R_2$ [1п], слика 3а. На основу претходних једначина добија

$$\text{се } \omega_0 = \sqrt{\frac{R_2}{R_1 LC}} = 100\sqrt{2} \text{ Hz} [1+1п].$$

Део б) (12 поена)

И начин за б)

Дефинишимо струје у колу као на слици 3.а. Фазорски дијаграм за грану кола која садржи кондензатор и отпорник R_1 је дат на 3б. Фазор напона на отпорнику је $U_{R_1} = R_1 I_1$ [1п]. Фазор напона на кондензатору једнак је

$U_C = \frac{1}{2\omega_0 C} I_1$ [1п]. Напон над том граном је напон извора и једнак је $U_0 = \sqrt{U_{R_1}^2 + U_C^2} = I_1 \sqrt{R_1^2 + \left(\frac{1}{2\omega_0 C}\right)^2}$, на основу чега је

$I_1 = U_0 / \sqrt{R_1^2 + \left(\frac{1}{2\omega_0 C}\right)^2}$. Максимална вредност напона на отпорнику износи

$U_{R_1} = I_1 R_1 = R_1 U_0 / \sqrt{R_1^2 + \left(\frac{1}{2\omega_0 C}\right)^2} = 9,42 \text{ V}$ [2п], а фазни угао између напона и струје у грани износи

$\phi_{R_1 C} = \arctan \frac{1}{2\omega_0 C R_1} \approx 19,4^\circ$ [1п]. Са фазорског дијаграма на слици 3б, који се односи на грану кола која садржи

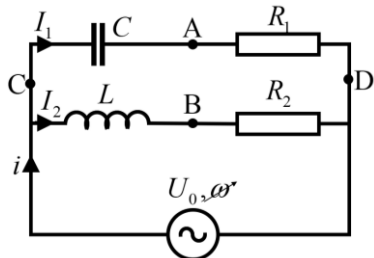


**ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2020/2021. ГОДИНЕ.**

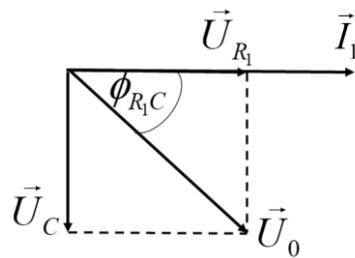


отпорник и калем важи да је $U_{R_2} = R_2 I_2$ [1п], $U_L = 2\omega_0 L I_2$ [1п]. Резултујући напон је напон извора па важи да је $U_0 = \sqrt{U_{R_2}^2 + U_L^2} = I_2 \sqrt{R_2^2 + (2\omega_0 L)^2}$, одакле се добија максимална струја у тој грани $I_2 = U_0 / \sqrt{R_2^2 + (2\omega_0 L)^2}$. Коначно максимална вредност напона на отпорнику износи $U_{R_2} = R_2 U_0 / \sqrt{R_2^2 + (2\omega_0 L)^2} \approx 5,77 \text{ V}$ [2п] а фазни угао између напона извора и струје у грани износи $\phi_{R_2, L} = \arctan \frac{2\omega_0 L}{R_2} \approx 54,7^\circ$ [1п]. За електрично коло трећи фазорски дијаграм је приказан на основу претходна два на слици 3г, одакле се може написати да тражени напон износи

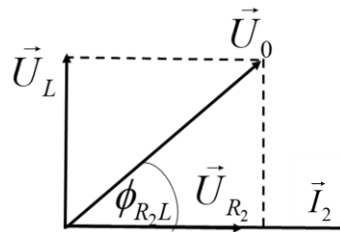
$$U_{AB} = \sqrt{U_{R_1}^2 + U_{R_2}^2 - 2U_{R_1}U_{R_2} \cos(\phi_{R_2, L} + \phi_{R_1, C})} \approx 9,62 \text{ V} \text{ [1+1п]}$$



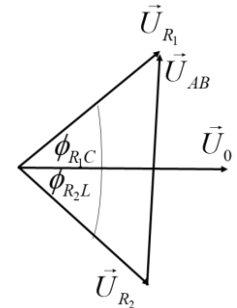
Слика 3а



Слика 3б



Слика 3в



Слика 3г

II начин за б)

У форми комплексних бројева, напон на отпорнику R_1 се може написати као $\bar{U}_{R_1} = R_1 \bar{I}_{CR_1}$ [1п], при чему је импеданса гране тог отпорника $\bar{Z}_{CR_1} = R_1 - j \frac{1}{2\omega_0 C}$ [3п]. Јачина струје у тој грани је $\bar{I}_{CR_1} = \frac{U_0}{\bar{Z}_{CR_1}} = \frac{U_0}{|\bar{Z}_{CR_1}|} \bar{Z}_{CR_1}^*$, па на

основу тих релација напон на отпорнику R_1 износи $\bar{U}_{R_1} = \frac{R_1 U_0}{\sqrt{R_1^2 + \left(\frac{1}{2\omega_0 C}\right)^2}} \left(R_1 + j \frac{1}{2\omega_0 C} \right) = \frac{20}{9} (4 + j\sqrt{2}) \text{ V}$ [1п].

Напон на отпорнику R_2 у форми комплексних бројева је $\bar{U}_{R_2} = R_2 \bar{I}_{LR_2}$ [1п], док је импеданса гране којој припада дата реакцијом $\bar{Z}_{LR_2} = R_2 + j2\omega_0 L$ [3п]. За струју у тој грани важи да је $\bar{I}_{LR_2} = \frac{U_0}{\bar{Z}_{LR_2}} = \frac{U_0}{|\bar{Z}_{LR_2}|} \bar{Z}_{LR_2}^*$, одакле следи да је напон

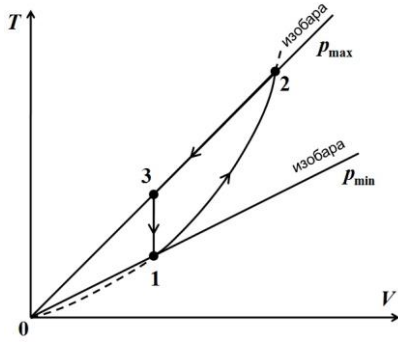
на отпорнику R_2 облика $\bar{U}_{R_2} = \frac{R_2 U_0}{\sqrt{R_2^2 + (2\omega_0 L)^2}} (R_2 - j2\omega_0 L) = \frac{1}{3} (10 - j10\sqrt{2}) \text{ V}$ [1п].

Тражени напон између тачака А и В износи $\bar{U}_{AB} = \bar{U}_{R_1} - \bar{U}_{R_2} = \frac{50}{9} (1 + j\sqrt{2}) \text{ V}$ [1п], односно модуо тог напона је $|\bar{U}_{AB}| \approx 9,62 \text{ V}$ [1п].

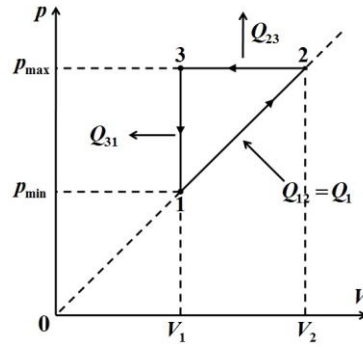
5. За процес $1 \rightarrow 2$ (слика 4.а) важи једначина $T = \alpha V^2$ и ако искористимо једначину стања идеалног гаса $pV = nRT$ добијамо $pV = nR\alpha V^2$ тако да је $p = nR\alpha \cdot V$ па је на $p-V$ дијаграму зависност притиска од запремине права линија (слика 4.б). За процес $2 \rightarrow 3$ је $T = \beta V$, где је β позитивна константа, и ако искористимо једначину стања идеалног гаса $pV = nRT$ добијамо $p = nR\beta = \text{const}$ што указује да је процес изобарски. Процес $3 \rightarrow 1$ је изохорски. Из једначине стања идеалног гаса $T = \frac{p}{nR} \cdot V$ па је изобара $p = \text{const}$ на $T-V$ дијаграму представљена правом линијом $T = k \cdot V$, где је $k = \frac{p}{nR} = \text{const}$ (слика 4.а). На основу претходног разматрања и слике 4.а можемо да установимо да је $p_2 = p_3 = p_{\text{max}}$ и $p_1 = p_{\text{min}}$. Дати циклус можемо да представимо на $p-V$ дијаграму (слика 4.б).



ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2020/2021. ГОДИНЕ.



слика 4.a



слика 4.б

За процес $2 \rightarrow 3$ количина топлоте коју отпусти гас је $Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_3) + p_{\max}(V_2 - V_1)$ [2п]. За процес

$3 \rightarrow 1$ количина топлоте коју отпусти гас је $Q_{31} = \Delta U_{31} = \frac{3}{2}R(T_3 - T_1)$ [2п] тако да је укупна топлота коју гас отпусти

$Q_2 = Q_{23} + Q_{31} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + p_{\max}(V_2 - V_1)$ [1п]. У процесу $1 \rightarrow 2$ гас прима количину топлоте

$Q_{12} = Q_1 = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + \frac{(p_{\max} + p_{\min})(V_2 - V_1)}{2} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + \frac{3p_{\max}(V_2 - V_1)}{4}$ [3п], при чему је искоришћено $\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = 2$.

Једначина за процес $1 \rightarrow 2$ је $\frac{p_{\max}}{V_2} = \frac{p_{\min}}{V_1}$ [1п], за процес $2 \rightarrow 3$ је $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_3}$ [1п], док је за процес $3 \rightarrow 1$

$\frac{p_{\max}}{T_3} = \frac{p_{\min}}{T_1}$ [1п]. Из претходних једначина добијамо $T_3 = 2T_1$ [1п], $T_2 = 2T_3$ [1п] и $T_2 = 4T_1$ [1п]. Једначине за стања 2

и 3 су редом $p_{\max}V_2 = RT_2$ и $p_{\max}V_1 = RT_3$ па је $p_{\max}(V_2 - V_1) = RT_2 - RT_3 = 2RT_1$ [1п]. Даље је $Q_1 = 6RT_1$ [1п] и

$Q_2 = \frac{13}{2}RT_1$ [1п] тако да је $RT_1 = \frac{Q_1}{6}$ па је $Q_2 = \frac{13}{12}Q_1 = 130\text{J}$ [2+1п].