1. (а) Де Брољева таласна дужина дефинисана је једначином $\lambda = \frac{h}{p}$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Користећи да је $h = 2\pi\hbar$ $\boxed{\textbf{1п}}$ и $p = mv$ $\boxed{\textbf{1п}}$, добија се да је таласна дужина једнака $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Заменом $\hbar = 10\,\mathrm{Js}$, и $m = 2\,\mathrm{kg}$ се коначни резлтат $\lambda = \frac{10\pi}{v}\mathrm{m}$.

   (б) Угаони момент за кружно кретање дато је једначином $L = mvr$, и квантизација угаоног момента даје услов $mv_n r = n\hbar$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Брзина ће бити минимална када је $n = 1$ $\boxed{\textbf{2п}}$, те је у овом случају брзине прве орбите дата са $v_{n=1} = \frac{\hbar}{mr}$. Коришћењем да је радијус орбите дужина конца ($l = 1\,\mathrm{m}$) и заменом датих величина, добија се да је брзина прве орбите једнака $v_{n=1} = 5\,\mathrm{m/s}$ $\boxed{\textbf{1п}}$.

   (в) Следећа орбита је дефинисана са $n = 2$ $\boxed{\textbf{2п}}$. У овом случају је брзина $v_{n=2} = 2v_{n=1} = 10\,\mathrm{m/s}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Одавде следи да је минимално повећање брзине једнака $(\Delta v)_{\min} = 5\,\mathrm{m/s}$ $\boxed{\textbf{1п}}$.

   (г) Кинетичка енергија дата је једначином $E_{n=1} = \frac{1}{2}mv_{n=1}^2$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Заменом дате масе и пронађене брзине из другог дела задатка, добија се да је кинетичка енергија једнака $E_{n=1} = 25\,\mathrm{J}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

2. Обележимо интензитет зрачења са $I = 1245W/m^2$. Количина снаге која се улива у торањ је $P_1 = \pi R^2 I$ $\boxed{\textbf{5п}}$. Количина снаге која из њега излази је $P_2 = \sigma A T^4$ $\boxed{\textbf{5п}}$. Изједначавањем ове две снаге добија се равнотежна температура као: $T = \sqrt[4]{\frac{\pi R^2 I}{\sigma A}} = 2273\ K$ $\boxed{\textbf{10п}}$.

3. (а) Дељењем закона слагања релативистичких брзина са брзином светлости, добија се $\beta_2 = \frac{\beta_1+\beta_{21}}{1+\beta_1\beta_{21}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, где је β_1 брзина кретања референтног система првих кола у односу на улицу, док је β_{21} брзина других кола у референтном систему првих кола. Како је $\beta_1 = \beta_{21} = \beta$, добија се да је брзина других кола у односу на улицу $\beta_2 = \frac{\beta+\beta}{1+\beta^2}$. Заменом дефиниције $\beta = \tanh(\omega)$, добијамо $\beta_2 = \tanh(\omega_2) = \frac{\tanh(\omega)+\tanh(\omega)}{1+\tanh^2(\omega)}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Користећи адициону формулу, налазимо $\beta_2 = \tanh(\omega_2) = \tanh(2\omega)$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

   (б) Користећи резултат из претходног дела задатка, индукцијом показујемо да је брзина $n-$тих кола дефинисана преко $\beta_n = \tanh(n\omega)$. У претходном делу смо показали да је $\omega_2 = 2\omega$. Претпостављамо да је брзина $(n-1)-$их кола у односу на улицу $\beta_{n-1} = \tanh((n-1)\omega)$, тј да је $\omega_{n-1} = (n-1)\omega$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Тада, закон слагања релативистичких брзина нам говори да је брзина $n-$тих кола дата са $\beta_n = \frac{\beta_{n-1}+\beta}{1+\beta\beta_{n-1}}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Заменом дефиниције хиперболичког тангенса и сређивањем се налази да је $\beta_n = \tanh(\omega_{n-1}+\omega) = \tanh((n-1)\omega+\omega)$ $\boxed{\textbf{3п}}$, те је $\omega_n = n\omega$. $\boxed{\textbf{1п}}$. Да би се показала помоћна једначина, потребно је поћи од β изражене преко дефиниције хиперболичког тангенса и множити имениоцем. Добија се једначина $\beta(e^\omega + e^{-\omega}) = e^\omega - e^{-\omega}$. Множењем обе стране једначине са e^ω и изоловањем ω и β на супротним странама једнакости, једначина постаје $e^{2\omega} = \frac{1+\beta}{1-\beta}$. Логаритмом се онда добија помоћна једнакост, $\omega = \ln\left(\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Поново треба употребити дефиницију хиперболичког тангенса у величини β_n, и заменити помоћну једнакост за ω. Примећивањем да је $e^{n\omega} = e^{\ln\left(\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{n}{2}}\right)} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{n}{2}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, добија се израз за брзину $n-$тих кола: $\beta_n = \frac{1-\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n}{1+\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

   (в) Како је $\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) < 1$, ова величина тежи нули како n тежи бесконачности $\boxed{\textbf{1п}}$. Из овог разлога је $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 1$, и брзина $n-$тих кола тежи брзини светлости како n тежи бесконачности $\boxed{\textbf{1п}}$.

4. Коефицијент корисног дејства било ког циклуса се рачуна као однос рада и топлете коју прими гас током једног циклуса: $\eta = \frac{A}{Q_1}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Нека је минимална запремина гаса у циклусу означена са V. Рад се лако одређује као површина самог циклуса: $A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)V(y - x)$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Нека је коефицијент правца праве која пролази кроз координатни почетак и на којој леже тачке 1 и 2 циклуса означен са k. Помоћу ове чињенице закључујемо да важи: $p_1 = kV$ и $p_2 = kxV$ $\boxed{\textbf{4п}}$. Према томе, рад циклуса се може изразити са: $A = \frac{1}{2}kV^2(y-x)(x-1)$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Сада је потребно одредити уложену топлоту Q_1. Гас прима топлоту у процесима 1-2 и 2-3, када се шири. Рад и промена унутрашње енергије у процесу 1-2 су дати са: $A_{1-2} = \frac{1}{2}(p_1+p_2)(V_2-V_1) = \frac{1}{2}kV^2(x^2-1)$ $\boxed{\textbf{2п}}$ (површина трапеза испод процеса 1-2) и $\Delta U_{1-2} = n_m c_V \Delta T_{1-2} = \frac{3}{2}kV^2(x^2-1)$ $\boxed{\textbf{2п}}$ респективно. Док, у процесу 2-3 за рад и промену унутрашње енергије добијамо: $A_{2-3} = p_2(V_3 - V_2) = kV^2x(y-x)$ $\boxed{\textbf{2п}}$ и $\Delta U_{2-3} = n_m c_V \Delta T_{2-3} = \frac{3}{2}kV^2x(y-x)$ $\boxed{\textbf{2п}}$ респективно. Коначно, коефицијент корисног дејства је дат са: $\eta = \frac{(y-x)(x-1)}{5yx-x^2-4}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

5. Када тело масе M пређе на хоризонтални део, важи закон одржања енергије па имамо $Mgh = M\frac{v_0^2}{2}$, те је брзина тела када пређе на хоризонтални део $v_0 = \sqrt{2gh}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Како је време судара тела M и m кратко, можемо сматрати да се опруга није сабила током трајања судара. Самим тим, током судара важи $F_{el} = 0$ одакле следи да

Задатке припремили: *Стефан Ђорђевић и Ана Кнежевић*, Физички Факултет, Универзитет у Београду, *Миша Томан* и *Хана Шиф*, Универзитети у Калифорнији, Ирвин.
Рецензент: *Јован Марков*, Научни институт Вајцман, Израел
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду

важи закон одржања импулса $Mv_0 = Mv_0' + mv$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Због еластичности судара важиће и закон одржања енергије $\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{Mv_0'^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Решавањем ове две једначине за брзину првог тела из система тела везаних опругом, добијамо: $v = \frac{2Mv_0}{m+M}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Како је систем тела везаних опругом изолован, након судара и даље важе закон одржања енергије и закон одржања импулса, те можемо писати: $\frac{mv_1'^2}{2} + \frac{mv_2'^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$ и $mv = mv_1' + mv_2'$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Опруга ће бити највише сабијена када израз $\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_1'^2}{2} - \frac{mv_2'^2}{2}$ има максималну вредност. Коришћењем закона одржања импулса, овај израз можемо трансформисати у следећи израз: $\frac{kx^2}{2} = mv_1'v_2'$ $\boxed{\mathbf{4п}}$, што занчи да је потребно максимизовати производ два броја чији је збир фиксан. Из теорије квадратне једначине јасно је да овакав производ постиже максимум када важи: $v_1' = v_2' = \frac{v}{2} = \frac{M}{m+M}\sqrt{2gh}$ $\boxed{\mathbf{4п}}$.
Напомена: Признати сваки математички и физички валидан метод којим се долази до тачног закључка за максималну вредност израза $\frac{kx^2}{2}$ са максималним бројем поена ($\boxed{\mathbf{8п}}$).

Задатак се може урадити и на другачији начин од тренутка када прелазимо на посматрање само система два тела везана опругом. Након судара прелазимо у систем центра масе другог и трећег тела. Брзина центра масе другог и трећег тела након судара једнака је $v_{cm} = \frac{mv}{2m} = \frac{v}{2}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Како тела у овом систему имају исте почетне брзине и исто убрзање $a = \frac{F_{el}}{m}$ (јер су им масе једнаке), оба тела се истовремено и заустављају, те је у том положају опруга највише сабијена $\boxed{\mathbf{4п}}$. За брзину центра масе ова два тела важи $v_{cm} = const.$ јер нема спољашњих хоризонталних сила које делују на овај систем $\boxed{\mathbf{2п}}$. Следи да су брзине другог и трећег тела у односу на подлогу једнаке $v_2 = v_3 = v_{cm} = \frac{v}{2} = \frac{M}{m+M}\sqrt{2gh}$. $\boxed{\mathbf{4п}}$

Задатке припремили: *Стефан Ђорђевић и Ана Кнежевић*, Физички Факултет, Универзитет у Београду, *Миша Томан* и *Хана Шиф*, Универзитет у Калифорнији, Ирвин.
Рецензент: *Јован Марков*, Научни институт Вајцман, Израел
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду