ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2023/2024. ГОДИНЕ

IV разред | **Друштво физичара Србије и Министарство просвете** | **ОКРУЖНИ НИВО**

РЕШЕЊА – АЛФА КАТЕГОРИЈА* | **16. март 2024.**

1. (а) Де Брољева таласна дужина дефинисана је једначином $\lambda = \frac{h}{p}$ $\boxed{\text{3п}}$. Користећи да је $h = 2\pi\hbar$ $\boxed{\text{1п}}$ и $p = mv$ $\boxed{\text{1п}}$, добија се да је таласна дужина једнака $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv}$ $\boxed{\text{1п}}$. Заменом $\hbar = 10\,\mathrm{Js}$, и $m = 2\,\mathrm{kg}$ се коначни резлтат $\lambda = \frac{10\pi}{v}\mathrm{m}$.

   (б) Угаони момент за кружно кретање дат је једначином $L = mvr$. Квантизација угаоног момента даје услов $mv_n r = n\hbar$ $\boxed{\text{2п}}$. Брзина ће бити минимална када је $n = 1$ $\boxed{\text{2п}}$, те је у овом случају брзине прве орбите дата са $v_{n=1} = \frac{\hbar}{mr}$. Коришћењем да је радијус орбите дужина конца ($l = 1\,\mathrm{m}$) и заменом датих величина, добија се да је брзина прве орбите једнака $v_{n=1} = 5\,\mathrm{m/s}$ $\boxed{\text{1п}}$.

   (в) Следећа орбита је одређена са $n = 2$ $\boxed{\text{2п}}$. У овом случају је брзина $v_{n=2} = 2v_{n=1} = 10\,\mathrm{m/s}$ $\boxed{\text{1п}}$. Одавде следи да је минимално повећање брзине једнако $v_{n=2} - v_{n=1} = 5\,\mathrm{m/s}$ $\boxed{\text{1п}}$.

   (г) Према Хајзенберговом принципу неодређености енергије и времена $\Delta\tau\Delta E \sim \frac{\hbar}{2}$ $\boxed{\text{1п}}$. Како је енергија дата са: $E = \frac{mv^2}{2}$, коришћењем извода можемо проценити да је неодређеност енергије дата са: $\Delta E = mv\Delta v = n\hbar\Delta\omega$ $\boxed{\text{1п}}$. Заменом у Хајзенбергов принцип неодређености, за неодређеност времена, добијамо: $\Delta\tau \sim \frac{1}{2n\Delta\omega} = \frac{1}{n}\mathrm{s}$ $\boxed{\text{3п}}$. Видимо да дуже можемо бити у нижим енергетским стањима, као што бисмо и очекивали.
   Напомена: Признавати и решења у којим је искоришћен Хајзенбергов принцип неодређености у облику: $\Delta\tau\Delta E \sim ch$, где је c произвољан број реда 1.

2. Укупна снага која се израчи са сунца је $P_0 = 4\pi R_s^2\sigma T_s^4$ $\boxed{\text{2п}}$. Како је површина атмосфере коју сунце "види"једнака πR_a^2 $\boxed{\text{2п}}$, снага коју атмосфера упија је $P_a^{in} = P_z^{out} + P_0\frac{\pi R_a^2}{4\pi a^2} = 4\pi R_z^2\sigma T_z^4 + \frac{\pi R_s^2 R_a^2}{a^2}\sigma T_s^4$ $\boxed{\text{3п}}$. Како атмосфера зрачи снагу са две, унутрашње и спољашње стране, снага коју атмосфера губи је $P_a^{out} = 8\pi R_a^2\sigma T_a^4$ $\boxed{\text{3п}}$. Снага коју Земља прима је $P_z^{in} = \frac{1}{2}P_a^{out} = 4\pi R_a^2\sigma T_a^4$ $\boxed{\text{2п}}$. Снага коју Земља губи је $P_z^{out} = 4\pi R_z^2\sigma T_z^4$ $\boxed{\text{2п}}$. Услов термодинамичке равнотеже налаже: $P_z^{in} = P_z^{out}$ и $P_a^{in} = P_a^{out}$ $\boxed{\text{2п}}$. Коначно решење је $T_a = T_s\sqrt{\frac{R_s}{2a}}$ $\boxed{\text{2п}}$, $T_z = T_s\sqrt{\frac{R_s R_a}{2aR_z}}$ $\boxed{\text{2п}}$. Видимо да присуство атмосфере повећава температуру Земље.

3. (а) Дељењем закона слагања релативистичких брзина са брзином светлости, добија се $\beta_2 = \frac{\beta_1+\beta_{21}}{1+\beta_1\beta_{21}}$ $\boxed{\text{2п}}$, где је β_1 брзина кретања референтног система првих кола у односу на улицу, док је β_{21} брзина других кола у референтном систему првих кола. Како је $\beta_1 = \beta_{21} = \beta$, добија се да је брзина других кола у односу на улицу $\beta_2 = \frac{\beta+\beta}{1+\beta^2}$. Заменом дефиниције $\beta = \tanh(\omega)$, добијамо $\beta_2 = \tanh(\omega_2) = \frac{\tanh(\omega)+\tanh(\omega)}{1+\tanh^2(\omega)}$ $\boxed{\text{2п}}$. Користећи адициону формулу, налазимо $\beta_2 = \tanh(\omega_2) = \tanh(2\omega)$ $\boxed{\text{2п}}$.

   (б) Користећи резултат из претходног дела задатка, индукцијом показујемо да је брзина $n-$тих кола дефинисана преко $\beta_n = \tanh(n\omega)$. У претходном делу смо показали да је $\omega_2 = 2\omega$. Претпостављамо да је брзина $(n-1)-$их кола у односу на улицу $\beta_{n-1} = \tanh((n-1)\omega)$, тј да је $\omega_{n-1} = (n-1)\omega$ $\boxed{\text{1п}}$. Тада, закон слагања релативистичких брзина нам говори да је брзина $n-$тих кола дата са $\beta_n = \frac{\beta_{n-1}+\beta}{1+\beta\beta_{n-1}}$ $\boxed{\text{1п}}$. Заменом дефиниције хиперболичког тангенса и срећивањем се налази да је $\beta_n = \tanh(\omega_{n-1}+\omega) = \tanh((n-1)\omega+\omega)$ $\boxed{\text{3п}}$, те је $\omega_n = n\omega$. $\boxed{\text{1п}}$. Полазећи од β изражене преко дефиниције хиперболичког тангенса и множење имениоцем, добија се једначина $\beta(e^\omega + e^{-\omega}) = e^\omega - e^{-\omega}$. Множењем обе стране једначине са e^ω и изоловањем ω и β на супротним странама једнакости, једначина постаје $e^{2\omega} = \frac{1+\beta}{1-\beta}$. Логаритмом се онда добија $\omega = \ln\left(\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ $\boxed{\text{2п}}$. Поново треба употребити дефиницију хиперболичког тангенса у величини β_n, и заменити помоћну једнакост за ω. Примећивањем да је $e^{n\omega} = e^{\ln\left(\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{n}{2}}\right)} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{n}{2}}$ $\boxed{\text{2п}}$, добија се израз за брзину $n-$тих кола: $\beta_n = \frac{1-\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n}{1+\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n}$ $\boxed{\text{2п}}$.

   (в) Како је $\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) < 1$, ова величина тежи нули како n тежи бесконачности $\boxed{\text{1п}}$. Из овог разлога је $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 1$, и брзина $n-$тих кола тежи брзини светлости како n тежи бесконачности $\boxed{\text{1п}}$.

4. (а) Коефицијент корисног дејства било ког циклуса се рачуна као однос рада и топлете коју прими гас током једног циклуса: $\eta = \frac{A}{Q_1}$ $\boxed{\text{2п}}$. Нека је минимална запремина гаса у циклусу означена са V. Рад се лако одређује као површина самог циклуса: $A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)V(y - x)$ $\boxed{\text{2п}}$. Нека је коефицијент правца праве која пролази кроз координатни почетак и на којој леже тачке 1 и 2 циклуса означен са k. Помоћу ове чињенице закључујемо да важи: $p_1 = kV$ и $p_2 = kxV$ $\boxed{\text{3п}}$. Према томе, рад циклуса се може изразити са: $A = \frac{1}{2}kV^2(y-x)(x-1)$ $\boxed{\text{1п}}$. Сада је потребно одредити уложену топлоту Q_1. Гас прима топлоту у процесима 1-2 и 2-3, када се шири.

Задатке припремили: *Стефан Ђорђевић и Ана Кнежевић*, Физички Факултет, Универзитет у Београду, *Миша Томан* и *Хана Шиф*, Универзитет у Калифорнији, Ирвин.
Рецензент: *Јован Марков*, Научни институт Вајцман, Израел
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду

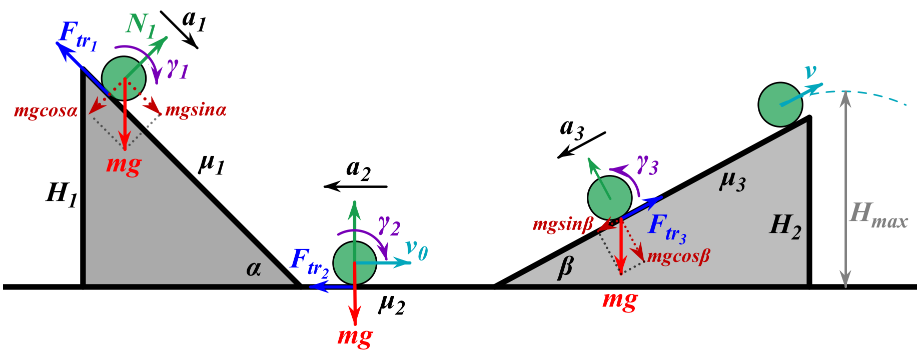
Рад и промена унутрашње енергије у процесу 1-2 су дати са: $A_{1-2} = \frac{1}{2}(p_1+p_2)(V_2-V_1) = \frac{1}{2}kV^2(x^2-1)$ $\boxed{\textbf{1п}}$ (површина трапеза испод процеса 1-2) и $\Delta U_{1-2} = n_m c_V \Delta T_{1-2} = \frac{3}{2}kV^2(x^2-1)$ $\boxed{\textbf{1п}}$ респективно. Док, у процесу 2-3 за рад и промену унутрашње енергије добијамо: $A_{2-3} = p_2(V_3-V_2) = kV^2x(y-x)$ $\boxed{\textbf{1п}}$ и $\Delta U_{2-3} = n_m c_V \Delta T_{2-3} = \frac{3}{2}kV^2x(y-x)$ $\boxed{\textbf{1п}}$ респективно. Коначно, коефицијент корисног дејства је дат са: $\eta = \frac{(y-x)(x-1)}{5yx-x^2-4}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

(б) Када је $y=4$, коефицијент корисног дејства се може преписати у следећем облику: $\eta = 1 - \frac{15}{20-(x+\frac{4}{x})}$. Овај израз је максималан када је $20 - x - \frac{4}{x}$ максимално. Овај израз достиже максималну вредност када је: $x = \frac{4}{x}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Одавде закључујемо да је коефицијент корисног дејства максималан када је $x=2$ $\boxed{\textbf{2п}}$.
Напомена: До резултата се могло доћи и рачунањем извода функције коефицијента корисног дејства од x. У том случају дати све поене.

(в) Заменом вредности $x=2$ у израз за коефицијент корисног дејства добијамо максималну вредност: $\eta_{max} = \frac{1}{16} = 6.25\%$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Као што видимо, овај циклус је врло мало ефикасан.

5. Све силе које делују на ваљак су приказане на слици 1; као и правци убрзања и угаоних убрзања у сваком тренутку кретања ваљка. Транслаторне једначине кретања ваљка на првој стрмој равни су дате са: $ma_1 = mg\sin\alpha - F_{tr,1}$ $\boxed{\textbf{1п}}$ и $N_1 = mg\cos\alpha$ $\boxed{\textbf{1п}}$; док за ротациону једначину кретања имамо: $I\gamma_1 = RF_{tr,1}$ $\boxed{\textbf{1п}}$, где је $I = \frac{1}{2}mR^2$ момент инерције ваљка, док је γ_1 угаоно убрзање ваљка на првој стрмој равни. Претпоставимо да ваљак не проклизава дуж ове стрме равни. Услов непроклизавања је дат са: $F_{tr,1} < \mu_1 N_1$ и $a_1 = R\gamma_1$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Помоћу горе наведених једначина кретања, ови услови се своде на: $\mu_1 > \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Заменом бројних вредности видимо да је овај услов задовољен, те закључујемо да тело не проклизава дуж прве стрме равни $\boxed{\textbf{1п}}$. До брзине тела на дну стрме равни можемо доћи на више начина. Најлакши начин је помоћу закона одржања енергије: $mgH_1 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I\omega_0^2}{2}$. Уз услов непроклизавања $v_0 = R\omega_0$, добијамо: $v_0 = \sqrt{\frac{4}{3}gH_1}$ $\boxed{\textbf{1п}}$.
Након силаска са прве стрме равни ваљак наставља да се креће дуж хоризонталне подлоге. Док је на њој важе следеће једначине кретања: $I\gamma_2 = RF_{tr,2}$, $ma_2 = F_{tr,2}$ и $N_2 = mg$. Претпоставимо поново да нема проклизавања на овој деоници кретања. Услов непроклизавања сада гласи: $F_{tr,2} < \mu_2 N_2$ и $a_2 = R\gamma_2$. Ови услови се своде на: $a_2 = 0$ и $F_{tr,2} = 0$, те је услов непроклизавања задовољен. Као што видимо, на овој деоници ваљак се креће константном брзином v_0 $\boxed{\textbf{2п}}$.
Како једначине кретања имају исти облик на другој стрмој равни као и на првој, услови непроклизавања се своде на: $\mu_3 > \frac{1}{3}\operatorname{tg}\beta$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Заменом бројних вредности видимо да овај услов није испуњен, те ваљак проклизава на овој деоници свог кретања $\boxed{\textbf{1п}}$. То значи да је битно одредити тачан смер силе трења. Како ће сила трења клизања бити усмерана у супротном смеру од смера брзине додирне тачке ваљка и подлоге закључујемо да она мора деловати у смеру уз стрму раван (слика) $\boxed{\textbf{2п}}$. Ово можемо видети на следећи начин: како је доминанта сила која делује на ваљак у смеру стрме равни компонента гравитационе силе $mg\sin\beta$ која настоји да успори тарансларорно кретање ваљка, промена транслаторне брзине ваљка ће бити већа од промене ротационе брзине ваљка, те ће након јако малог временског интервала брзина додирне тачке бити усмерена у смеру низ стрму раван. Према томе, једначине кретања сада имају следећи облик: $ma_3 = mg\sin\beta - F_{tr,3}$, $I\gamma_3 = RF_{tr,3}$ и $N_3 = mg\cos\beta$. Како тело проклизава: $F_{tr,3} = \mu_3 N_3$. Решавањем овог система једначина, за транслаторно убрзање добијамо: $a_3 = \frac{1}{2}g(1-\mu_3\sqrt{3})$ $\boxed{\textbf{2п}}$.
Сада је потребно да проверимо да ли ваљак стиже до врха стрме равни. Најлакши начин јесте да одредимо транлаторну брзину ваљка након што он пређе пут: $s = \frac{H_2}{\sin\beta} = 2H_2$. Израз за ову брзину је дат са: $v^2 = v_0^2 - 2sa_3 = \frac{4}{3}gH_1 - 2g(1-\mu_3\sqrt{3})H_2 = 1.83\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$. Овај израз нам говори да ваљак стиже до краја стрме равни $\boxed{\textbf{2п}}$. Након овог тренутка он се креће као коси хитац. Како више не постоји ни једна тангенцијална сила, он наставља да се ротира константном угаоном брзином, те помоћу закона одржања енергије добијамо: $\frac{mv_0^2\sin^2\beta}{2} + mgH_2 = mgH_{max}$. Након рачуна, добијамо: $H_{max} = \frac{1}{6}H_1 + \frac{3+\mu_3\sqrt{3}}{4}H_2 = 1.523\mathrm{m}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

Задатке припремили: *Стефан Ђорђевић и Ана Кнежевић*, Физички Факултет, Универзитет у Београду, *Миша Томан* и *Хана Шиф*, Универзитет у Калифорнији, Ирвин.
Рецензент: *Јован Марков*, Научни институт Вајцман, Израел
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду



Слика 1: Слика уз 5. задатак

Задатке припремили: *Стефан Ђорђевић и Ана Кнежевић*, Физички Факултет, Универзитет у Београду, *Миша Томан* и *Хана Шиф*, Универзитет у Калифорнији, Ирвин.
Рецензент: *Јован Марков*, Научни институт Вајцман, Израел
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду