1. Пре наелектрисавања балона од сапунице, притисак у балону је $p_1 = p_a + \frac{4\gamma_0}{R_0}$, **[2п]** где други сабирак потиче од површинског напона на сапуници, а запремина балона је $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$. Након наелектрисавања балона, јавља се додатан притисак услед међусобног одбијања наелектрисања на површини балона. Тај притисак се може израчунати тако што се одреди сила која делује на мали делић површине балона, а потиче од остатка наелектрисања балона. Површинска густина наелектрисања балона је $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$, где је $R = R_0 + \Delta R$ нови полупречник балона. Посматрамо малу површину $\Delta S$ на површини балона. Непосредно изнад и испод средишњег дела те мале површине она изгледа као бесконачна раван наелектрисана површинском густином наелектрисања $\sigma$, па је електрично поље непосредно изнад и испод средишњег дела мале површине $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Са друге стране, знамо да је електрично поље у балону једнако нули. Да би поље унутар балона било нула, поље које потиче од остатка наелектрисане сфере мора бити једнако електричном пољу које потиче од делића површине, али супротног смера. Према томе, сила којом остатак површине наелектрисаног балона делује на делић површине једнака је $F = \sigma \Delta S E = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\Delta S$, па је притисак услед међусобног одбијања наелектрисања на површини балона једнак $\Delta p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{q^2}{32\pi^2 R^4 \varepsilon_0}$. **[7п]** Притисак у балону након наелектрисавања балона је $p_2 = p_a + \frac{4\gamma_0}{R} - \frac{q^2}{32\pi^2 R^4\varepsilon_0}$, **[1п]** а запремина је $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$. Пошто је процес наелектрисавања балона изотермски, важи $p_1V_1 = p_2V_2$, тј. $(p_a + \frac{4\gamma_0}{R_0})\frac{4}{3}\pi R_0^3 = (p_a + \frac{4\gamma_0}{R} - \frac{q^2}{32\pi^2R^4\varepsilon_0})\frac{4}{3}\pi R^3$. **[3п]** Овај израз се даље може средити као $\frac{4}{3}\pi p_a R_0^3 R + \frac{16}{3}\gamma_0\pi R_0^2 R = \frac{4}{3}\pi p_a R^4 + \frac{16}{3}\gamma_0 \pi R^3 - \frac{q^2}{24\pi\varepsilon_0}$.
**I начин:** Заменом $R = R_0 + \Delta R$ у претходну једначину добија се израз $\frac{q^2}{24\pi\varepsilon_0} = (4\pi p_a R_0^4 + \frac{32}{3}\gamma_0\pi R_0^3)(\frac{\Delta R}{R_0}) + (8\pi p_a R_0^4 + 16\gamma_0\pi R_0^3)(\frac{\Delta R}{R_0})^2 + (\frac{16}{3}\pi p_a R_0^4 + \frac{16}{3}\gamma_0\pi R_0^3)(\frac{\Delta R}{R_0})^3 + \frac{4}{3}\pi p_a R_0^4(\frac{\Delta R}{R_0})^4$. **[3п]** Пошто је количина наелектрисања којом је балон наелектрисан мала, може се сматрати $\frac{\Delta R}{R_0} \ll 1$, па се други, трећи и четврти сабирак у претходном изразу на десној страни могу занемарити **[2п]** и добија се да је промена полупречника балона од сапунице $\Delta R = \frac{q^2}{24\pi\varepsilon_0(4\pi p_a R_0^3 + \frac{32}{3}\gamma_0\pi R_0^2)} = \frac{q^2}{32\pi^2 R_0^2\varepsilon_0(3p_aR_0+8\gamma_0)}$. **[2п]**
**II начин:** Пошто је количина наелектрисања којом је балон наелектрисан мала, може се сматрати $\frac{\Delta R}{R_0} \ll 1$ и искористити $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, где је $x = \frac{\Delta R}{R_0}$ тако што се $R$ замени изразом $R_0(1+\frac{\Delta R}{R_0})$ и примени поменута апроксимација. **[2п]** Добија се израз $\frac{4}{3}\pi p_a R_0^4(1+\frac{\Delta R}{R_0}) + \frac{16}{3}\gamma_0\pi R_0^3(1+\frac{\Delta R}{R_0}) = \frac{4}{3}\pi p_a R_0^4(1+4\frac{\Delta R}{R_0}) + \frac{16}{3}\gamma_0\pi R_0^3(1+3\frac{\Delta R}{R_0}) - \frac{q^2}{24\pi\varepsilon_0}$. **[3п]** Тиме се директно добија израз $\Delta R = \frac{q^2}{32\pi^2R_0^2\varepsilon_0(3p_aR_0+8\gamma_0)}$. **[2п]**

2. Нека су $S_2 = 2S_1$ и $l_2 = \frac{1}{2}l_1$. Индуктивност примара је $L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S_1}{l_1} = 6{,}4\mathrm{mH}$. **[1п]** Индуктивност секундара је $L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 S_2}{l_2} = 1{,}6\mathrm{mH}$. **[1п]** Коефицијент међусобне индукције $M$ се одређује из формуле $N_2\Phi_1 = MI_1$, где је $\Phi_1 = B_1S_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_1}$, **[2п]** и износи $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1}{l_1} = 1{,}6\mathrm{mH}$. **[1п]** Други Кирхофов закон за примарно коло је $\underline{U} = \underline{I}_1 j\omega L_1 + \underline{I}_2 j\omega M$, где је $\underline{U} = 20\mathrm{V}$ комплексни напон идеалног напонског генератора, **[3п]** а за секундарно коло $0 = \underline{I}_2 j\omega L_2 + \underline{I}_1 j\omega M + \underline{I}_2 R + \underline{I}_2\frac{1}{j\omega C}$. **[3п]** Из друге једначине следи да је комплексна струја примара $\underline{I}_1 = -\underline{I}_2\frac{j\omega L_2 + R + \frac{1}{j\omega C}}{j\omega M}$. **[1п]** Заменом тог израза у прву једначину добија се да је комплексна струја секундара $\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{-j\omega L_1\frac{j\omega L_2+R+\frac{1}{j\omega C}}{j\omega M} + j\omega M}$, **[2п]** одакле је ефективна вредност струје секундара $I_2 = \frac{UM}{\sqrt{(L_1R)^2 + (-\omega L_1 L_2 + \frac{L_1}{\omega C} + \omega M^2)^2}}$. **[2п]** Да би она била максимална, именилац треба да буде минималан, а биће онда када је други сабирак једнак нули, **[1п]** одакле следи да је капацитивност кондензатора $C = \frac{L_1}{\omega^2(L_1L_2 - M^2)} = 8{,}33\mu\mathrm{F}$. **[1+1п]** За ову вредност $C$ ефективна вредност струје је $I_2 = \frac{UM}{L_1R} = 0{,}5\mathrm{A}$, што представља максималну ефективну вредност струје. **[1п]**
**Напомена:** За модуле свих комплексних величина узете су њихове ефективне вредности. Уколико је ученик узео за модуле комплексних величина њихове амплитуде у временском домену, али на крају добио тачан резултат, наглашавајући да је ефективна вредност величине $x$ $X = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$, треба дати све поене.

3. Размотримо прво случај када је вредност угла $\alpha$ таква да постоји тачка унутар калема са траженом особином. У овом случају имамо да је магнетна индукција правог проводника интензитета $B_p = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$**[1п за формулу + 1п за добро усмерен вектор магнетне индукције]**. (овде је $r$ растојање од осе правог проводника/калема) док су правац и смер приказани на слици 2 а). Магнетна индукција дугачког калема је интензитета $B_k = \mu_0 I_1 n$ **[1п за формулу + 1п за добро усмерен вектор магнетне индукције]** (овде је $n$ број намотаја калема по јединици дужине), док су правац и смер приказани на слици 2 а). Јасно је да за укупни вектор магнетне индукције $\vec{B_u}$, на растојању $d$ од осе калема, важи $B_{u,||} = B_k = \mu_0 I_1 n$ (компонента укупне магнентне индукције паралелна оси калема) **[3п]**, и $B_{u,\perp} = B_p = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}$ (компонента укупне магнентне индукције нормална на осу калема) **[3п]**. Укупни вектор магнетне индукције градиће угао од $\alpha$ са осом калема када важи $\tan\alpha = \frac{B_\perp}{B_{||}}$ **[3п]**(као на слици 2 б)). Заменом одговарајућих израза добијамо $d = \frac{I_2}{2\pi n \tan\alpha I_1}$ **[3п]**. Укупна магнетна индукција у тој тачки рачуна се по изразу $|\vec{B_u}| = \sqrt{B_{u,||}^2 + B_{u,\perp}^2}$ **[2п]**. Заменом одговарајућих израза добијамо $|\vec{B_u}| = \mu_0 I_1 n\sqrt{1 + (\tan\alpha)^2}$ **[2п]**. Треба уочити

Задатке припремили: *Настасија Цонић* (1, 2, 4. и 5. задатак), *Петар Петрашиновић* (3. задатак), Физички Факултет, Универзитету Београду
Рецензент: *Михаило Ђорђевић*, Физички Факултет, Универзитету Београду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду

да постоји доња граница на вредност угла $\alpha$. Када смо у непосредној близини проводника, доминантан допринос вектору укупне магнетне индукције даје вектор магнетне индукције проводника, те је угао $\alpha \approx 90°$. Удаљавањем од осе калема, опада интензитет магнетне индукције проводника и угао $\alpha$ се смањује **[2п](За исправно објашњење о промени угла** $\alpha$). Најмању вредност имаће када је $d = R$ **[1п]** и тада ће важити $\tan\alpha_{min} = \frac{\mu_0 \frac{I_2}{2\pi R}}{\mu_0 I_1 n} = \frac{I_2}{2\pi R n I_1}$ тј. $\alpha_{min} = \arctan\frac{I_2}{2\pi R n I_1}$ **[2п]**. Дакле уколико је $\alpha \leq \alpha_{min}$ не постоји растојање (тачка) унутар калема (а ни ван калема) са траженом особином **[1п]**.

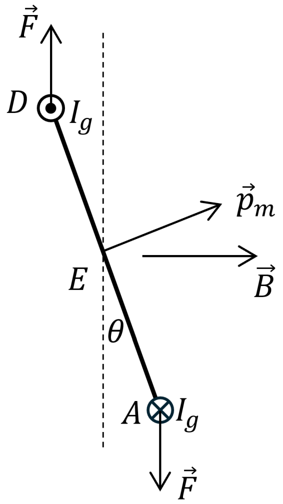
4. Силе које делују на рам када се рам изведе из равнотежног положаја треба да буду такве да враћају рам у равнотежни положај, па у складу с тим треба изабрати смер магнетног поља. На слици 1 је приказан смер магнетног поља. **[2п]** Момент инерције рама у односу на осу $EF$ је $I = 2\frac{1}{12}\frac{m}{6}a^2 + 2\frac{m}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7}{36}ma^2$. **[4п]** Једначина кретања рама је $I\ddot{\theta} = M$, где је $\ddot{\theta}$ угаоно убрзање око осе $EF$ и $M$ момент силе у односу на осу $EF$. **[2п]** Момент силе у односу на осу $EF$ једнак је $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$. **[1п]** Магнетни диполни момент рама је $\vec{p}_m = I_g\vec{S}$, где је $S = 2a^2$, а правац вектора површине је нормалан на раван у којој лежи рам и смер му је одређен правилом десне руке за дати смер струје која протиче кроз рам. **[2п]** Коначно, алгебарска вредност магнетног момента сила је $M = -I_g 2a^2 B\sin\theta$, **[2п]** а како се ради о малим осцилацијама, може се искористити апроксимација $\sin\theta \approx \theta$. **[1п]** Одавде се добија једначина малих осцилација $\ddot{\theta} + \frac{72 I_g B}{7m}\theta = 0$. **[2п]** Кружна фреквенција малих осцилација је $\omega = \sqrt{\frac{72 I_g B}{7m}}$, па је период малих осцилација једнак $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{7m}{72 I_g B}}$. **[4п]**

5. Најпре ћемо увести координатни систем и нумерисати шупљине као на слици 3. Нека струја кроз проводник тече у смеру $z$ осе. Због симетрије ће на осама свих шупљина бити исти интензитет магнетне индукције. Задатак ћемо решити применом принципа суперпозиције. Вектор густине струје кроз проводник је $\vec{j} = \frac{I}{\pi(a^2-4b^2)}\vec{e}_z$. **[2п]** Резултантна магнетна индукција на оси шупљине биће једнака векторском збиру магнетне индукције индуковане струјом густине $\vec{j}$ која би протицала кроз пун проводник и магнетних индукција индукованих струјама густине $-\vec{j}$ које би протицале кроз цилиндричне проводнике на месту шупљина. **[2п]** Магнетна индукција на оси шупљине 1, индукована струјом густине $\vec{j}$ која би протицала кроз пун проводник, јесте $\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 j d^2\pi}{2\pi d}(-\vec{e}_y) = \frac{\mu_0 j d}{2}(-\vec{e}_y)$. **[3п]** Магнетна индукција на оси шупљине 1, индукована струјом густине $-\vec{j}$ која би протицала кроз цилиндрични проводник на месту шупљине 2, јесте $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 j b^2\pi}{2\pi d\sqrt{2}}\frac{\vec{e}_x+\vec{e}_y}{\sqrt{2}} = \frac{\mu_0 j b^2}{2\sqrt{2}d}\frac{\vec{e}_x+\vec{e}_y}{\sqrt{2}}$. **[3п]** Магнетна индукција на оси шупљине 1, индукована струјом густине $-\vec{j}$ која би протицала кроз цилиндрични проводник на месту шупљине 3, јесте $\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 j b^2\pi}{2\pi 2d}\vec{e}_y = \frac{\mu_0 j b^2}{4d}\vec{e}_y$. **[3п]** Магнетна индукција на оси шупљине 1, индукована струјом густине $-\vec{j}$ која би протицала кроз цилиндрични проводник на месту шупљине 4, јесте $\vec{B}_4 = \frac{\mu_0 j b^2\pi}{2\pi d\sqrt{2}}\frac{-\vec{e}_x+\vec{e}_y}{\sqrt{2}} = \frac{\mu_0 j b^2}{2\sqrt{2}d}\frac{-\vec{e}_x+\vec{e}_y}{\sqrt{2}}$. **[3п]** Магнетна индукција на оси шупљине 1, индукована струјом густине $-\vec{j}$ која би протицала кроз цилиндрични проводник на месту шупљине 1, јесте $\vec{B}_1 = 0$. Коначно, магнетна индукција на оси шупљине 1 је $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a^2-4b^2)}\left(d - \frac{3b^2}{2d}\right)(-\vec{e}_y)$. **[2п]** Магнетна индукција на оси шупљине 2 је $\frac{\mu_0 I}{2\pi(a^2-4b^2)}\left(d - \frac{3b^2}{2d}\right)\vec{e}_x$. Магнетна индукција на оси шупљине 3 је $\frac{\mu_0 I}{2\pi(a^2-4b^2)}\left(d - \frac{3b^2}{2d}\right)\vec{e}_y$. Магнетна индукција на оси шупљине 4 је $\frac{\mu_0 I}{2\pi(a^2-4b^2)}\left(d - \frac{3b^2}{2d}\right)(-\vec{e}_x)$. **[2п]**

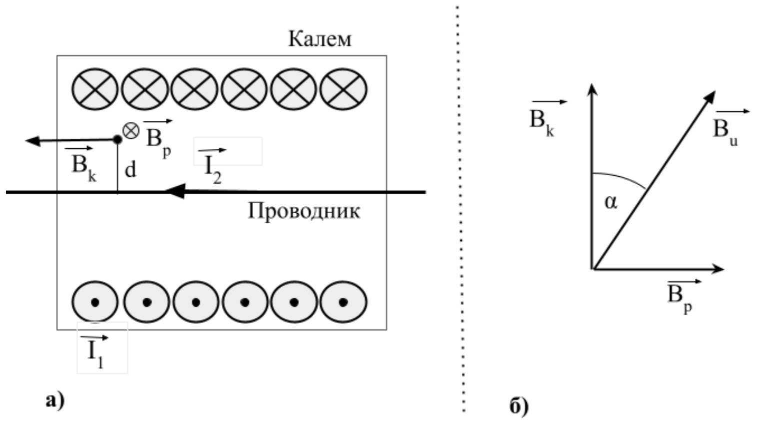
**Решења свих задатака треба јасно образложити и треба јасно навести све физичке законе и дефинисати све ознаке које се користе у решењу задатка.**

*У алфа категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима специјализованих гимназија за области математика и физика.

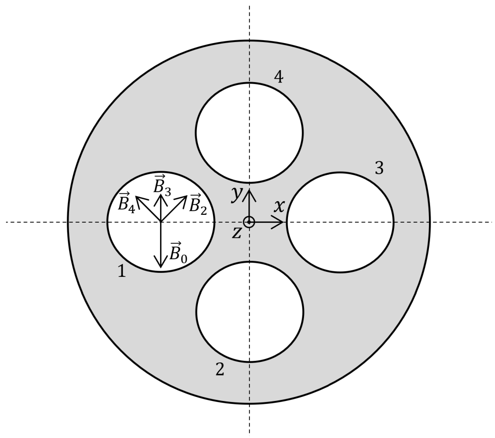
Задатке припремили: *Настасија Цонић* (1, 2, 4. и 5. задатак), *Петар Петрашиновић* (3. задатак), Физички Факултет, Универзитету Београду
Рецензент: *Михаило Ђорђевић*, Физички Факултет, Универзитету Београду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду




Слика 1: Проводни рам у задатку 4. гледан са стране




Слика 2: Калем и проводник из задатка 3, а) попречни пресек б) вектор магнетне индукције




Слика 3: Проводник у задатку 5.

Задатке припремили: *Настасија Цонић* (1, 2, 4. и 5. задатак), *Петар Петрашиновић* (3. задатак), Физички Факултет, Универзитету Београду
Рецензент: *Михаило Ђорђевић*, Физички Факултет, Универзитету Београду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду