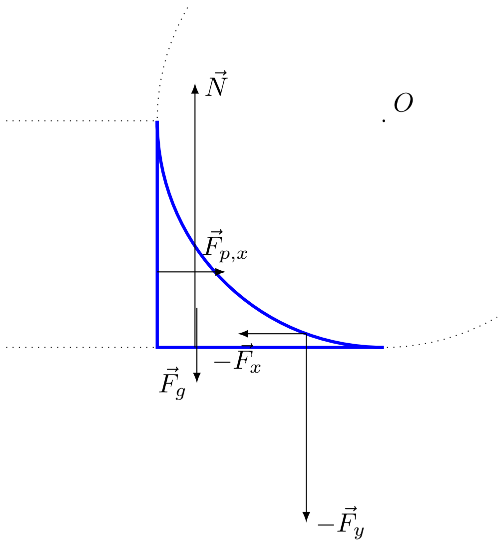
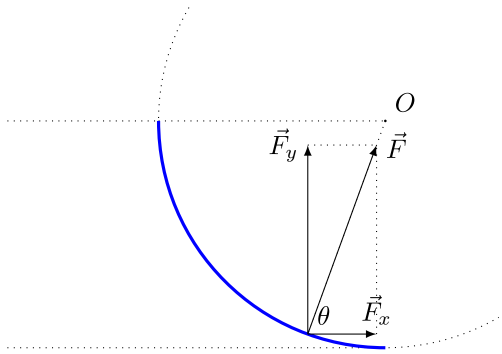
1. Нека је сила којом течност делује на ваљак $\vec{F}$. Та сила има две компоненте, вертикалну $\vec{F}_y$ и хоризонталну $\vec{F}_x$. Тражену силу одредићемо на основу трећег Њутновог закона - одредићемо којом силом ваљак делује на течност. Искористићемо чињеницу да је читава течност у стању ранотеже. Издвојимо део течности која се налази испод ваљка. Поред поменуте две силе којима ваљак делује на тај део течности интензитета F_x и F_y, на исту делују и гравитациона сила F_g, сила реакције подлоге N и хоризонтална сила притиска $F_{p,x}$, као на слици 1. Услови равнотеже гласе $0 = F_{p,x} - F_x$ **(3 поена)** и $0 = N - F_g - F_y$ **(3 поена)**. Гравитациона сила је $F_g = \rho \cdot (r^2 - \frac{1}{4}r^2\pi)L \cdot g$ **(1 поен)**. Сила реакције подлоге једнака је сили хидростатичког притиска $N = \rho gh \cdot rL$ **(1 поен)**. Остатак течности на издвојени део делује хоризонталном силом $F_{p,x} = p_{sr} \cdot rL$, где је срењни хидростатички притисак са леве стране издвојене течности $p_{sr} = \frac{1}{2}\rho g(2h - r)$ **(2 поена)**. Из услова равнотеже једноставно добијамо тражене компоненте сила $F_x = \frac{1}{2}\rho g(2h - r) \cdot rL$ и $F_y = \rho g(h - r\frac{4-\pi}{4}) \cdot rL$. Интензитет силе по јединици дужине, $f = \frac{|\vec{F}|}{L}$, којом течност делује на ваљак је $f = \frac{1}{L}\sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{1}{4}\rho gr\sqrt{4(2h - r)^2 + (4h - (4 - \pi)r)^2}$ **(1 поен)**. Пошто је сила притиска нормална на површину на коју делује, на сваком веома малом делу ваљка сила ће деловати према оси симетрије па ће и укупна сила којом течност делује на ваљак бити усмерена ка оси симетрије ваљка **(3 поен)**, тачка O на слици 2. Угао θ који правац силе заклапа са хоризонталом одређен је условом $\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{4h-(4-\pi)r}{2(2h-r)}$ **(1 поен)**. Еквивалентно, $\sin\theta = \frac{F_y}{F} = \frac{4h-(4-\pi)r}{\sqrt{4(2h-r)^2+(4h-(4-\pi)r)^2}}$ или на било који други начин записано. Нападна тачка вектора силе налази се на половини дужине ваљка, као на слици 2.

   Момент гравитационе силе око тачке A је $M_g = mg \cdot r = \rho_v r^3\pi Lg$ **(1 поен)**. Са порастом висине течности у суду расте момент силе F око тачке A, $M_F = F \cdot r\sin\theta = \rho g(h - r\frac{4-\pi}{4}) \cdot r^2 L$ **(2 поена)**. У тренутку када течност достигне граничну висину h_0 моменти ових сила се изједначавају односно важи $M_F = M_g$ **(1 поен)**. Одатле следи да је $\rho_v = \rho(\frac{h_0}{\pi r} - \frac{4-\pi}{4\pi})$ **(1 поен)**.



Слика 1: Силе које делују на издвојени део течности у задатку 1.



Слика 2: Сила којом течност делује на ваљак у задатку 1.

2. Вертикалне манометарске цевчице мере притиске у два дела цеви — $p_1 = p_a + \rho gh_1$ и $p_2 = p_a + \rho gh_2$ **(2 поена)**, где је ρ непозната густина течности а p_a атмосферски притисак. U-цевчица мери разлику притиска између два дела цеви — $p_2 - p_1 = \rho_{Hg} g\Delta h$ **(3 поена)** (пошто је жива много гушћа од течности, можемо занемарити утицај тежине стуба течности у U-цевчици). Комбиновањем мерења из вертикалних цевчица и U-цевчице, добијамо $\rho g(h_2 - h_1) = \rho_{Hg} g\Delta h$, што даје непознату густину течности:

$$\rho = \rho_{Hg}\frac{\Delta h}{h_2 - h_1} \quad \textbf{(2 поена)} . \tag{1}$$

   Заменом вредности, добија се $\rho \approx 0.72 g/cm^3$ **(1 поен)**. Да бисмо добили брзину, можемо применити Бернулијеву једначину, $p_1 + \rho v_1^2/2 = p_2 + \rho v_2^2/2$ **(2 поена)**. Одавде следи $\rho(v_1^2 - v_2^2)/2 = p_2 - p_1$, па применом мерења из манометарских цевчица, добијамо:

$$v_1^2 - v_2^2 = 2g(h_2 - h_1) \quad \textbf{(2 поена)} . \tag{2}$$

Задатке припремили: *Ђорђе Богдановић, Никола Коњик* и *Предраг Поповић*, Физички Факултет, Универзитет у Београду.
Рецензент: *Момир Арсенијевић*, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу.
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду

Из једначине континуитета, добијамо однос брзина, $v_1 S_1 = v_2 S_2$ **(2 поена)**, па заменом у горњу једначину, добијамо формулу за брзину у првом делу цеви:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g(h_2 - h_1)}{1 - (S_1/S_2)^2}} \quad \textbf{(3 поена)} \ . \tag{3}$$

Заменом вредности, добијамо $v_1 \approx 1m/s$ (илити $v_2 \approx 0.5m/s$). Масени проток је $q_m = \rho v_1 S_1$ **(2 поена)**, па заменом вредности добијамо $q_m \approx 71.4g/s$ **(1 поен)**.

3. Топлота се доводи само у делу $4 \to 1$, а одводи само у делу $2 \to 3$. Према томе, степен корисног дејства је $\eta = (|Q_{41}| - |Q_{23}|)/|Q_{41}|$ **(4 поена)**. За изохоре важи да је $p_4/T_4 = p_1/T_1$ (1) **(2 поена)** и $p_2/T_2 = p_3/T_3$ (2) **(2 поена)**, док за адијабате имамо $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$ **(2 поена)** и $p_3 V_3^\gamma = p_4 V_4^\gamma$ **(2 поена)**. Узимајући у обзир да је $V_1 = V_4$ и $V_2 = V_3$ добија се да је $p_1 p_3 = p_2 p_4$. Комбинујући то са једначинама (1) и (2) добија се $T_3 = (T_4/T_1)T_2$ **(1 поен)**. Како су $Q_{41} = nC_V(T_1 - T_4) = nC_V T_1(1 - (T_4/T_1))$ **(3 поена)** и $Q_{23} = nC_V(T_3 - T_2) = nC_V T_2((T_3/T_2) - 1) = nC_V T_2((T_4/T_1) - 1)$ **(3 поена)**. Следи да је $\eta = 1 - (T_2/T_1)$. Онда је $P = P_0(1 - (T_2/T_1))$ **(1 поен)**.

4. Пошто су масе судова и гаса занемарљиве, судови ће мировати када је сила потиска, $F_{p,1}$, која делује на први суд једнака сили потиска, $F_{p,2}$, која делује на други суд **(1 поен)**. Пошто је запремина зидова суда занемарљива, сила потиска зависи само од запремине гаса заробљеног у суду, $F_p = \rho_v g V$ **(1 поен)**. Из $F_{p,1} = F_{p,2}$ следи да судови мирују када су запремине гаса у два суда једнаке, $V_1 = V_2$ **(2 поена)**. Запремине гаса су одређене једначинама стања идеалног гаса — $p_1 V_1 = n_1 RT$ и $p_2 V_2 = n_2 RT$, где је T заједничка температура **(2 поена)**. Дељењем ове две једначине и коришћењем услова равнотеже, $V_1 = V_2$, добијамо да је услов мировања $p_1/p_2 = n_1/n_2$ **(2 поена)**. Притисак у судовима једнак је збиру атмосферског притиска и притиска воде — $p_1 = p_a + \rho_v g h_1$ и $p_2 = p_a + \rho_v g h_2$ **(4 поена)** (пошто су димензије судова занемарљиве у односу на дубину, можемо занемарити разлику притиска између врха и дна суда). Судови су повезани неистегљивом нити, па њихове дубине нису независне. Дужина нити између првог суда и котура је $L_1 = h - h_1$ док је дужина између другог суда и котура $L_2 = h - h_2$ **(1 поен)**. Укупна дужина нити је $L = L_1 + L_2 + \Delta L$, што даје везу између дужине нити, положаја котура, и дубина судова $L = 2h - h_1 - h_2 + \Delta L$ **(1 поен)**. Заменом у једначине за притиске, ово даје $p_1 + p_2 = 2p_a + \rho_v g(2h + \Delta L - L)$. Комбиновањем ове формуле са условом за мировање, $p_1 = n_1 p_2/n_2$, добијамо једначину за притисак у другом суду:

$$p_2\left(1 + n_1/n_2\right) = 2p_a + \rho_v g(2h + \Delta L - L) \ . \tag{4}$$

Тако да је притисак гаса у другом суду:

$$p_2 = \frac{2p_a + \rho_v g(2h + \Delta L - L)}{1 + n_1/n_2} \quad \textbf{(3 поена)} \ . \tag{5}$$

Коначно, враћањем у формулу за притисак, $p_2 = p_a + \rho_v g h_2$, налазимо дубину h_2:

$$h_2 = \frac{p_a(1 - n_1/n_2)/(\rho_v g) + 2h + \Delta L - L}{1 + n_1/n_2} \quad \textbf{(2 поен)} \ . \tag{6}$$

Другу дубину добијамо из услова неистегљиве нити, $h_1 + h_2 = 2h + \Delta L - L$:

$$h_1 = \frac{p_a(1 - n_2/n_1)/(\rho_v g) + 2h + \Delta L - L}{1 + n_2/n_1} \quad \textbf{(1 поен)} \ . \tag{7}$$

5. Када се две количине воде споје, топлија предаје топлоту хладнијој док се температуре не изједначе, па важи $m_1 c(t_2 - t) = m_2 c(t_1 - t_2)$ **(6 поена)** што даје $t_2 = (Vt + V_1 t_1)/(V_1 + V_2)$ **(2 поен)**. Након тога вода почне да се греје па важи $P\tau = \rho(V_1 + V_2)c(t_f - t_2)$ **(10 поена)**. Ово нам даје да је $t_f = t_2 + (P\tau)/(\rho(V_1 + V_2)c) = 37.8^0 C$ **(2 поена)**.

Задатке припремили: *Ђорђе Богдановић, Никола Коњик* и *Предраг Поповић*, Физички Факултет, Универзитет у Београду.
Рецензент: *Момир Арсенијевић*, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу.
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду