ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2023/2024. ГОДИНЕ

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

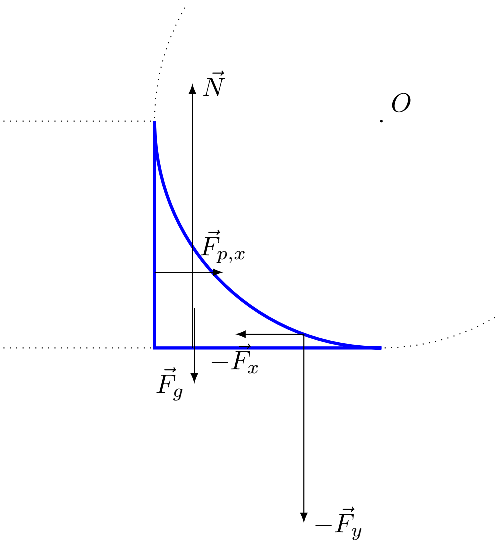
РЕШЕЊА – АЛФА КАТЕГОРИЈА*

II разред

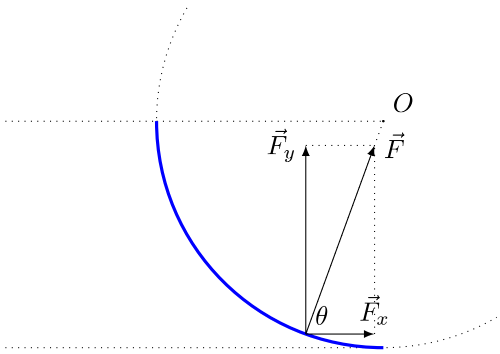
ОКРУЖНИ НИВО
16. 03. 2024.

1. Нека је сила којом течност делује на ваљак $\vec{F}$. Та сила има две компоненте, вертикалну $\vec{F}_y$ и хоризонталну $\vec{F}_x$. Тражену силу одредићемо на основу трећег Њутновог закона - одредићемо којом силом ваљак делује на течност. Искористићемо чињеницу да је читава течност у стању ранотеже. Издвојимо део течности која се налази испод ваљка. Поред поменуте две силе којима ваљак делује на тај део течности интензитета F_x и F_y, на исту делују и гравитациона сила F_g, сила реакције подлоге N и хоризонтална сила притиска $F_{p,x}$, као на слици 1. Услови равнотеже гласе $0 = F_{p,x} - F_x$ **(3 поена)** и $0 = N - F_g - F_y$ **(3 поена)**. Гравитациона сила је $F_g = \rho \cdot (r^2 - \frac{1}{4}r^2\pi)L \cdot g$ **(1 поен)**. Сила реакције подлоге једнака је сили хидростатичког притиска $N = \rho g h \cdot rL$ **(1 поен)**. Остатак течности на издвојени део делује хоризонталном силом $F_{p,x} = p_{sr} \cdot rL$, где је срењни хидростатички притисак са леве стране издвојене течности $p_{sr} = \frac{1}{2}\rho g(2h - r)$ **(2 поена)**. Из услова равнотеже једноставно добијамо тражене компоненте сила $F_x = \frac{1}{2}\rho g(2h - r) \cdot rL$ и $F_y = \rho g(h - r\frac{4-\pi}{4}) \cdot rL$. Интензитет силе по јединици дужине, $f = \frac{|\vec{F}|}{L}$, којом течност делује на ваљак је $f = \frac{1}{L}\sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{1}{4}\rho g r\sqrt{4(2h-r)^2 + (4h - (4-\pi)r)^2}$ **(1 поен)**. Пошто је сила притиска нормална на површину на коју делује, на сваком веома малом делу ваљка сила ће деловати према оси симетрије па ће и укупна сила којом течност делује на ваљак бити усмерена ка оси симетрије ваљка **(3 поен)**, тачка O на слици 2. Угао θ који правац силе заклапа са хоризонталом одређен је условом $\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{4h-(4-\pi)r}{2(2h-r)}$ **(1 поен)**. Еквивалентно, $\sin\theta = \frac{F_y}{F} = \frac{4h-(4-\pi)r}{\sqrt{4(2h-r)^2+(4h-(4-\pi)r)^2}}$ или на било који други начин записано. Нападна тачка вектора силе налази се на половини дужине ваљка, као на слици 2.

   Момент гравитационе силе око тачке A је $M_g = mg \cdot r = \rho_v r^3 \pi L g$ **(1 поен)**. Са порастом висине течности у суду расте момент силе F око тачке A, $M_F = F \cdot r\sin\theta = \rho g(h - r\frac{4-\pi}{4}) \cdot r^2 L$ **(2 поена)**. У тренутку када течност достигне граничну висину h_0 моменти ових сила се изједначавају односно важи $M_F = M_g$ **(1 поен)**. Одатле следи да је $\rho_v = \rho(\frac{h_0}{\pi r} - \frac{4-\pi}{4\pi})$ **(1 поен)**.



Слика 1: Силе које делују на издвојени део течности у задатку 1.



Слика 2: Сила којом течност делује на ваљак у задатку 1.

2. Без умањења општости, нека је однос температура $t_1 < t_2 < t_3$. Нека су одговарајуће масе течности m_1, m_2 и m_3 и њихови специфични топлотни капацитети c_1, c_2 и c_3.

   Приликом мешања прве и друге течности, прва се течност греје примајући количину топлоте $Q'_{12} = m_1c_1(t_{12} - t_1)$, друга се течност хлади отпуштајући количину топлоте $Q''_{12} = m_2c_2(t_2 - t_{12})$. Како нема топлотних губитака, важи $Q'_{12} = Q''_{12}$ односно $m_1c_1(t_{12} - t_1) = m_2c_2(t_2 - t_{12})$ (1) **(5 поена)**. Аналогно, једначина која описује мешање друге и треће течности је $m_2c_2(t_{23} - t_2) = m_3c_3(t_3 - t_{23})$ (2) **(5 поена)** и једначина која описује мешање прве и треће течности гласи $m_1c_1(t_1 - t_{13}) = m_3c_3(t_{13} - t_3)$ (3) **(5 поена)**.

   Из једначине (1) можемо изразити $m_1c_1 = m_2c_2\frac{(t_2-t_{12})}{(t_{12}-t_1)}$, из једначине (2) можемо изразити $m_3c_3 = m_2c_2\frac{(t_{23}-t_2)}{(t_3-t_{23})}$.

   Заједно са једначином (3) то значи $\frac{(t_2-t_{12})(t_1-t_{13})}{(t_{12}-t_1)} = \frac{(t_{23}-t_2)(t_{13}-t_3)}{(t_{12}-t_1)}$. Тражена температура је:
   $t_{13} = \frac{t_1(t_2-t_{12})(t_3-t_{23})+t_3(t_1-t_{12})(t_2-t_{23})}{(t_2-t_{12})(t_3-t_{23})+(t_1-t_{12})(t_2-t_{23})}$. **(5 поена)**

Задатке припремили: *Ђорђе Богдановић, Никола Коњик* и *Предраг Поповић*, Физички Факултет, Универзитет у Београду.
Рецензент: *Момир Арсенијевић*, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу.
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду

3. Први принцип термодинамике гласи $Q = A + \Delta U$, где је Q примљена топлота, A извршен рад и ΔU промена унутрашње енергије. Током процеса $1-2$ рад гаса је позитиван, $A > 0$, а температура му расте па је $\Delta U > 0$. На основу првог принципа термодинамике закључујемо да је $Q > 0$, дакле током процеса $1-2$ гас прима топлоту **(1 поен)**. Аналогно, током процеса $3-4$ гас отпушта топлоту **(1 поен)**. Током изотермског процеса $2-3$ гас не мења температуру па нема ни промене унутрашње енергије $\Delta U = 0$ и врши позитивни рад $A > 0$. Током процеса $2-3$ гас прима топлоту **(1 поен)**. Аналогно, током процеса $4-1$ гас отпушта топлоту **(1 поен)**.

   Како бисмо одредили моларни топлотни капацитет гаса током процеса $1-2$ и $3-4$ (политропских процеса за које важи pV^κ, у овом задатку је $\kappa = -1$) морамо израчунати топлоту коју током процеса гас прими или отпусти јер је дефиниција моларног топлотног капацитета садржана у $Q = nC\Delta T$. Током процеса $1-2$ промена унутрашње енергије је $\Delta U_{12} = \frac{5}{2}nR(T_{max} - T_{min})$ **(1 поен)**. Рад гаса можемо израчунати као површину испод линије $1-2$ на $P-V$ дијаграму: $A_{12} = \frac{1}{2}(p_2+p_1)(V_2-V_1)$ **(2 поен)**, где су (p_1, V_1, T_{min}) и (p_2, V_2, T_{max}) параметри стања 1 и 2, повезани једначинама стања $p_1V_1 = nRT_{min}$ **(1 поен)** и $p_2V_2 = nRT_{max}$ **(1 поен)**, респективно. Обзиром да је $\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}$ (1) **(3 поена)**, рад током процеса $1-2$ износи $A_{12} = \frac{1}{2}nR(T_{max} - T_{min})$ **(1 поен)**. Укупно, $Q = 3nR\Delta T$ па је тражени моларни топлотни капацитет $C = 3nR$ **(1 поен)** и исти је и за процес $1-2$ и за процес $3-4$.

   Укупна количина топлота коју је примио систем је $Q_{in} = Q_{12}+Q_{23} = 3nR\left(T_{max} - T_{min}\right) + nRT_{max}\ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)$ **(1 поен)**, а укупна количина топлоте коју је отпустио систем је $Q_{out} = Q_{43} + Q_{14} = 3nR\left(T_{max} - T_{min}\right) + nRT_{min}\ln\left(\frac{V_4}{V_1}\right)$ **(1 поен)**. Узимајући у обзир (1) и једначине стања 1 и 2 добија се $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_{max}V_1}{V_2 T_{min}}$ односно $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{T_{min}}{T_{max}}}$ **(1 поен)**. Аналогно се долази до релације $\frac{V_4}{V_3} = \sqrt{\frac{T_{min}}{T_{max}}}$ **(1 поен)**. Узимајући у обзир да је $V_3 = kV_1$ добија се $Q_{in} = 3nRT_{max}\left(1 - \frac{T_{min}}{T_{max}}\right) + nRT_{max}\ln\left(k\sqrt{\frac{T_{min}}{T_{max}}}\right)$ и $Q_{out} = 3nRT_{max}\left(1 - \frac{T_{min}}{T_{max}}\right) + nRT_{min}\ln\left(k\sqrt{\frac{T_{min}}{T_{max}}}\right)$. Одговрајући Карнoов циклус се одиграва између температура T_{max} и T_{min} па за такав циклус важи релација $\frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \eta_c$ **(1 поен)**. Коначно, коефицијент корисног дејства циклуса из задатка одређен је $\eta = 1 - \frac{Q_{out}}{Q_{in}}$ што се да записати у коначном облику $\eta = \frac{\eta_c \ln\left(k\sqrt{1-\eta_c}\right)}{3\eta_c + \ln\left(k\sqrt{1-\eta_c}\right)}$ **(1 поен)**.

4. Пошто су масе судова и гаса занемарљиве, судови ће мировати када је сила потиска, $F_{p,1}$, која делује на први суд једнака сили потиска, $F_{p,2}$, која делује на други суд **(1 поен)**. Пошто је запремина зидова суда занемарљива, сила потиска зависи само од запремине гаса заробљеног у суду, $F_p = \rho_v g V$ **(1 поен)**. Из $F_{p,1} = F_{p,2}$ следи да судови мирују када су запремине гаса у два суда једнаке, $V_1 = V_2$ **(2 поена)**. Запремине гаса су одређене једначинама стања идеалног гаса — $p_1V_1 = n_1RT$ и $p_2V_2 = n_2RT$, где је T заједничка температура **(2 поена)**. Дељењем ове две једначине и коришћењем услова равнотеже, $V_1 = V_2$, добијамо да је услов мировања $p_1/p_2 = n_1/n_2$ **(2 поена)**. Притисак у судовима једнак је збиру атмосферског притиска и притиска воде — $p_1 = p_a + \rho_v g h_1$ и $p_2 = p_a + \rho_v g h_2$ **(4 поена)** (пошто су димензије судова занемарљиве у односу на дубину, можемо занемарити разлику притиска између врха и дна суда). Судови су повезани неистегљивом нити, па њихове дубине нису независне. Дужина нити између првог суда и котура је $L_1 = h - h_1$ док је дужина између другог суда и котура $L_2 = h - h_2$ **(1 поен)**. Укупна дужина нити је $L = L_1 + L_2 + \Delta L$, што даје везу између дужине нити, положаја котура, и дубина судова $L = 2h - h_1 - h_2 + \Delta L$ **(1 поен)**. Заменом у једначине за притиске, ово даје $p_1 + p_2 = 2p_a + \rho_v g(2h + \Delta L - L)$. Комбиновањем ове формуле са условом за мировање, $p_1 = n_1p_2/n_2$, добијамо једначину за притисак у другом суду:

$$p_2\left(1 + n_1/n_2\right) = 2p_a + \rho_v g(2h + \Delta L - L)\ . \tag{1}$$

   Тако да је притисак гаса у другом суду:

$$p_2 = \frac{2p_a + \rho_v g(2h + \Delta L - L)}{1 + n_1/n_2} \quad \textbf{(3 поена)}\ . \tag{2}$$

   Коначно, враћањем у формулу за притисак, $p_2 = p_a + \rho_v g h_2$, налазимо дубину h_2:

$$h_2 = \frac{p_a(1 - n_1/n_2)/(\rho_v g) + 2h + \Delta L - L}{1 + n_1/n_2} \quad \textbf{(2 поен)}\ . \tag{3}$$

   Другу дубину добијамо из услова неистегљиве нити, $h_1 + h_2 = 2h + \Delta L - L$:

$$h_1 = \frac{p_a(1 - n_2/n_1)/(\rho_v g) + 2h + \Delta L - L}{1 + n_2/n_1} \quad \textbf{(1 поен)}\ . \tag{4}$$

Задатке припремили: *Ђорђе Богдановић, Никола Коњик* и *Предраг Поповић*, Физички Факултет, Универзитет у Београду.
Рецензент: *Момир Арсенијевић*, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу.
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду

5. Према Бернулијевој једначини за случај када је отвор на дну много мањег полупречника од полупречника суда за тачку на врху воде и тачку на дну суда имамо $p_0 + mg/S + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_1 v^2/2$ **(15 поена)**. Пошто је $\rho_1 h_1 = m/S$ **(1 поен)** важи да је $v = \sqrt{(4mg)/(\rho_1 S)}$ **(4 поена)**.

Задатке припремили: *Ђорђе Богдановић, Никола Коњик* и *Предраг Поповић*, Физички Факултет, Универзитет у Београду.
Рецензент: *Момир Арсенијевић*, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу.
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду