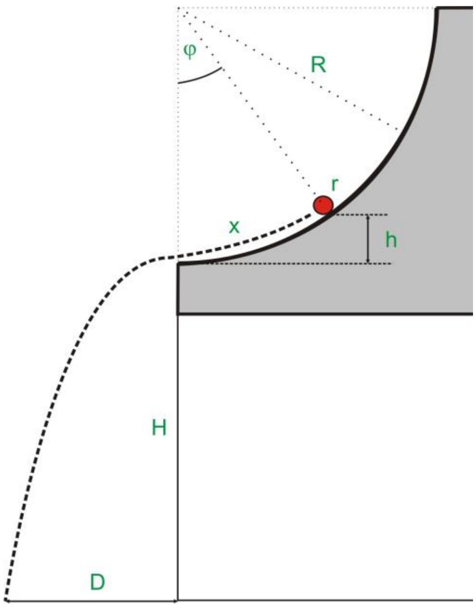
Промењиво убрзано кетање

1. УВОД

Када споменемо стрму раван одмах се помисли на Галилејеву, која је у суштини једна коса раван са жљебовима, низ које се котрљају металне куглице. Међутим у овом експерименту испитиваће се кретање округлих предмета (куглица) по лучној равни, која у ствари има кружни облик, тачније четвртина круга, по којем се куглица котрља по унутрашњој страни лука.
Основни задатак вежбе је теоријски, а потом и експериментално одредити брзину кретања куглице на крају кружног лука, или га назовимо скакаонице. Основни изглед експерименталне поставке се види на слици 1. Но задатак и није тако једноставан, јер се као куглице користе куглице танких зидова у којем се налазе различите, између осталог и вискозне течности.

Задатак 1. [**0.4 п**] **Одређивање брзине куглице**
За одређивање брзина се користи једна посредна метода: кружни лук се постави на ивицу стола, лук је постављен да му је завршетак хоризонталан, а брзина куглице при излетању се одређује помоћу домета куглице, коју постиже приликом пада на земљу. Брзина се дакле одређује помоћу хица после напуштања лука, и отуда је јасно зашто се малопре лук називао скакаоницом.
Задатак 1.1. [**0.4 п**] Изразити брзину куглице на крају скакаонице преко домета D- удаљености места где куглица удара тло од подножја скакаонице. Занемарити трење у ваздуху.



Слика 1. Експериментална поставка

Задатак 2. [**2.5 п**] **Хомогена куглица**
Решавање једначине кретања је овде доста компликовано, тако да се извођење неће вршити класично применом једначина кретања и Њутнових закона, већ се показало да је решење доста лако може извести коришћењен енергетских релација и примене закона одржања енергије (ЗОЕ).
Куглица која се користи је хомогена куглица, радијуса r. Ради универзалности решења (после ће се користити и друге врсте куглица) момент инерције куглице представити као $I = \xi m r^2$, где је са ξ обележен, назовимо га **фактором облика**, који је за материјалну тачку 1, за ваљак $\frac{1}{2}$, итд.
У почетном положају куглица се постави под углом φ у односу на вертикалу на површину скакаонице и пусти да се креће без почетне брзине. Поћи од предпоставке да куглица НЕ КЛИЗИ, већ се котрља без проклизавања.

Задатак 2.1. [**0.3 п**] Одредите потенцијалну енергију куглице која се налази на скакаоници преко угла φ коју заклапа почетни положај центра масе куглице са вертикалом.

Задатак 2.2. [**0.4 п**] Одредите кинетичку енергију куглице на крају скакаонице.

Задатак 2.3. [**1.0 п**] Одредити убрзање куглице и преко ње рад силе трења приликом кретања куглице низ скакаонице. Обратити пажњу на начин налегања куглице на рубове каналића скакаонице.

Задатак 2.4. [**0.5 п**] Из енергетске једначине извести израз за брзину куглице на крају скакаонице у функцији угла почетног положаја φ.

Задатак 2.5. [0.3 п] Објасните како ће се променити једначина за кинетичку енергију и како за силу трења уколико куглица проклизава по луку. Да ли је могуће и када, да брзина куглице на крају скакаонице буде већа ако куглица проклизава него када се котрља?

Задатак 3. [9.0 п] Одређивање брзине кретања хомогене куглице (куглица број 1.)
Поставити скакаоницу на ивицу стола и фиксирати је. Одабрати куглицу број 1. Ова куглица је лоптица танких зидова (занемарљиве масе) напуњена са материјалом који се понаша као чврсто тело (чврста Бингамова пластика). За одређивање положаја краја скакаонице на поду користити висак, који се налази на централном столу. Домет се одређује тако, да се на месту где се очекује удар лопте на под постави бели папир, преко чега се стави индиго папир. Куглица пада на индиго папир и траг удара се пресликава на бели папир. Држећи бели папир пријубљено на под, лагано подићи индиго папир. Препоручујемо да на сваком отиску повучете вертикалну линију на вертикалној средини отиска и ово користите за мерење домета. Померајте сваки пут мало папир у страну, да се отисци код поновљеног мерења не преклопе.

Задатак 3.1. [2.0 п] Извршити низ мерења домета куглице пуштених са различитих висина. Овде наравно уместо висине користити угао φ. Одредити домет из три поновљена мерења и проценити његову грешку. За одређивање угла φ се користи угломерна подела која се налази на унутрашњој страни каналића скакаонице. Одабрати обележене положаје, тј. одредите домете за углове 10^o, 20^o, ... до 80^o. Углови на скали су са грешком од $\Delta\varphi = \pm 0.5^o$. Грешка за cos (φ) је $\Delta\, cos(\varphi) = sin\,(\varphi)\Delta\varphi$

Задатак 3.2. [1.0 п] На основу везе домета и брзине куглице на крају скакаонице изведеног у Задатку 1.1. наћи брзине куглица на крају скакаонице за сваки угао мерења. Проценити и грешке брзина.

Линеаризација података и графички приказ
Задатак 3.3. [1.0 п] Извршити линеаризацију зависности из Задатка 2.4. али тако да зависност пролази кроз координатни положај.

Задатак 3.4. [3.0 п] Графички представити линеаризовану зависност. Мада наизглед зависност личи на линеарну, међутим ако се пажљивије погледа може се уочити да је зависност другачија за мале вредности угла од већих. У овом делу (мали углови) зависност је линеарна и пролази кроз координатни почетак. За веће углове зависност се може исто сматрати линеарним, али са другим коефицијентима.

Задатак 3.5. [1.0 п] Одредити област углова за које је зависност "теоријска", односно линеарна и одредити коефицијент праве у линеарној области и проценити његову грешку.

Задатак 3.6. [1.0 п] Одредити у линеарној области фактор облика ξ са грешком. Да ли фактор облика одговра хомогеној кугли?

Задатак 4. [8.1 п] Одређивање брзине кретања нехомогене куглице (куглица број 2.)
У овом делу задатка се користи куглица танких зидова (куглица број 2.) у којем се налази вискозна течност (у конкретном случају вода).

Задатак 4.1. [0.8 п] Идеализација случаја- суперфлуидна течност
У овој идеализацији у куглици занемарљиве масе и танких зидова се налази суперфлуидна течност, тј. течност чији је коефицијент вискозног трења 0. Маса течности нека је m. Како ће се мењати једначина из задатка 2.2.-2.4., и како ће на крају изгледати једначина за брзину (не треба поново извести, довољно је само да замените или занемарите чланове који се мењају).
Да ли ће ова куглица имати већу брзину на крају скакаонице или хомогена?

Задатак 4.2. [**2.0 п**] **Реалан случај- куглица пуњена вискозном течношћу**
Куглица занемарљиве масе у овом случају је потпуно напуњена водом, која се понаша као вискозна течност. Куглица се котрља по истој скакаоници без проклизавања. Сила вискозног трења се моделује по облику $F_v = fv^2$, где је f фактор пропорционалности, који зависи од коефицијента вискозног трења флуида, површине слојева које се додирују, температуре, облика и можда још нечег другог, али који се за дату експерименталну поставку не мењају. Објаснити које силе делују на куглицу и како ће се мењати једначине из задатка 2.2.-2.4., и како ће на крају изгледати једначина за брзину (не треба поново све извести, довољно је само да замените или занемарите чланове који се мењају, и искоментаришете их како се мењају). Да ли ће ова куглица имати већу брзину на крају скакаонице или хомогена? Како би се понашала ова куглица уколико би кретање било са промењивим успорењем?

Задатак 4.3. [**1.8 п**] За куглицу број 2. одредите брзине на крају скакаонице почевши од угла $\varphi = 10°, 15°, 20°$, до краја линеарне области кугле број 1. (из задатка 4.3.). Мерење вршите једанпут на сваком углу и занемарити процену грешке, али заокруживање вршите на исто децимално место као и код хомогене кугле.

Задатак 4.4. [**3.0 п**] Нацртајте зависност истог облика као код хомогене куглице (v^2 u funkciji $1 - cos\varphi$). На график уцртати и вредности хомогене кугле (кугле 1.)

Задатак 4.5. [**0.5 п**] Да ли се на основу графика из 4.4. за куглицу 2. може одредити некакав "ефективни" коефицијент облика?

Полупречник скакаонице је $R = (51{,}5 \pm 0{,}2)\ cm$. Гравитационо убрзање је $g = 9{,}808\ \frac{m}{s^2}$

Расположива опрема:

- скакаоница
- две куглице
- висак (централни сто)
- помично мерило (шублер) (централни сто)
- селотејп (централни сто)
- маказе (централни сто)
- лепљиви папирићи (централни сто)
- индиго папир
- бели папир
- метар
- пешкирић (за клечање)

Свим такмичарима желимо успешан рад !

Задатак припремио и експеримент реализовао: Проф. др Имре Гут, Департман за физику, Нови Сад
Рецензент: Доц. др Владимир Марковић, ПМФ Крагујевац
Председник комисије: Проф. др Имре Гут, Департман за физику, Нови Сад

ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ ЗАДАТАК

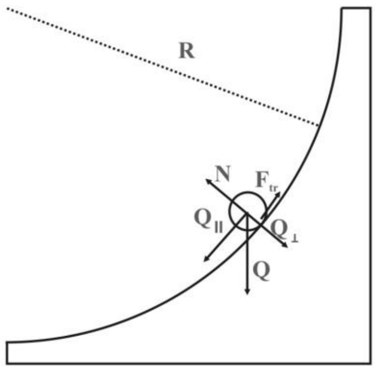
РЕШЕЊЕ

Задатак 1.1 [**0.4 п**] Како куглица на крају скакаонице излеће хоризонтално, могу се користити једначине хоризонталног хица. Пошто је почетна брзина хоризонтална (по вертикали је слободан пад без почетне брзине) и куглица увек креће са исте висине, време падања куглице је увек иста и износи $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, где је H висина од пода до дна скакаонице. Код свих мерења је била $H = (80.80 \pm 0.05)cm$ **[0,2п]**. Како је веза између домета, почетне хоризонталне брзине и времена падања куглице $D = v_{xo}t$, следи $v = \frac{D}{t} = \sqrt{\frac{g}{2H}}\, D$ **[0,2п]**.

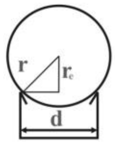
Задатак 2.1. [**0.3 п**] Када се куглица изведе за угао φ из доњег положаја, а центар масе му се креће по луку полупречника $R - r$ (слика 1.), тако јој се потенцијална енергија повећа за

$$E_p = mg(R - r_e)(1 - cos\varphi). \text{ (1) } \mathbf{[0,3п]}$$

За нулти потенцијални ниво је дакле узет положај центра масе куглице на крају скакаонице.



Слика 1.



Слика 2.

Задатак 2.2. [**0.4 п**] Кинетичка енергија је збир кинетичке транслаторне и ротационе енергије на крају скакаонице $E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$**[0,1п]**. Пошто је момент инерције куглице $I = \xi m r^2$**[0,1п]**, добија се $E_k = (1 + \xi')\frac{mv^2}{2}$ (2) **[0,2п],** где је $\xi' = \xi \frac{r^2}{r_e^2} = \frac{\xi}{1 - \left(\frac{d}{2r}\right)^2}$.

Задатак 2.3. [**1.0 п**] Једначина II Њутновог закона за ротацију око центра масе куглице је $I\alpha = r_e F_{tr}$**[0,1п]**. Како се куглица креће по рубовима каналића скакаонице, r_e није полупречник куглице, већ крак силе трења која се може израчунати из геометрије скакаонице и куглице $r_e = \sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ **[0,1п]** (слика 2.) где су r прави полупречник куглице а d ширина каналице скакаонице.
Напомена: ако је за крак силе трења која делује на куглицу узет r уместо r_e, одузети 0.5 поена од укупне суме поена.
Мада се кретање врши по луку, улога нормалне силе подлоге је да стално мења правац кретања (по површини скакаонице), али не мења интензитет тангенцијалне брзине. Тако је транслаторна једначина кретања, у систему везаном за површину скакаонице (тангенцијална раван) је

$$ma = Q_{\parallel} - F_{tr} = mg\, sin\varphi - \xi' ma \text{ (3) } \mathbf{[0,3п]}$$

(заменом силе трења из ротационе једначине). Из ове једначине се може изразити линијско убрзање куглице која износи

$$a = \frac{g}{1+\xi'}\, sin\varphi \mathbf{[0,2п]}.$$

Како нема проклизавања релативна брзина тачака куглице, које додирују жљеб је једнака нули, па је и рад сила трења једнак нули $A_{tr} = 0$ (4) **[0,3п]**.
Задатак 2.4. [**0.5 п**] Из енергетске једначине $E_p = E_k + A_{tr}$ **[0,1п]** (у овако постављеној једначини сви чланови су позитивни) следи $mg(R - r_e)(1 - cos\varphi) = (1 + \xi')\frac{mv^2}{2}$

одатле се добије коначна једначина $v = \sqrt{\frac{2g(R - r_e)}{1+\xi'}\,(1 - cos\varphi)}$ (5). **[0,4п]**

ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ ЗАДАТАК

Запазити да је и овде брзина независна од масе куглице.

Задатак 2.5. [**0.3 п**] У једначини за кинетичку енергију нестаће ротациони члан, тако да се једначина може трансформисти ако се узме да је коефицијент облика $\xi = 0$. Трење котрљања нестаје (једначина 4) али се јавља динамичка сила трења клизања која је зависна од нормалне силе на подлогу. Нормална сила реакције подлоге зависи од нормалне компоненте гравитационе силе $Q_\perp$ и од центрифугалне силе и то искомпликује целу једначину. Међутим, када је сила трења клизања мала (мали коефицијент трења), брзина ће на основу једначине (5) повећати. За веће коефицијенте трења се са друге стране очекује мања крајња брзина.

Задатак 3.1. [**2.0 п**] $\Delta\varphi = \pm 0.5^o$, $\Delta D = 0.5\ mm$, **[0,05п]** $H = (80{,}50 \pm 0{,}05)\ cm$, **[0,15п]**

$R = (51{,}5 \pm 0{,}2)\ cm$

[0,2п]					**[0,1п]**		**[0,1п]**			
$2r\ [mm]$			r $[mm]$	Δr $[mm]$	$d\ [mm]$	$\Delta d\ [mm]$	r_e $[mm]$	Δr_e $[mm]$	$R - r_e$ $[cm]$	$\Delta(R - r_e)$ $[cm]$
37,45	37,40	37,50	18,725	0,025	16,10	0,05	16,91	0,04	49,81	0,28

Грешка брзине се рачуна као $\Delta v = \frac{\partial v}{\partial H}\Delta H + \frac{\partial v}{\partial D}\Delta D = \sqrt{\frac{g}{2H^3}}\, D\Delta H + \sqrt{\frac{g}{2H}}\,\Delta D$ **[0,2п]**

Остали подаци се налазе у Табели 1.

Задатак 3.2. [**1.0 п**] Подаци се налазе у Табели 1.

Табела 1. Домети куглице 1., брзине и линеаризација зависности

	3.1 8·[0,15п]= [1,2п]					**3.2 8·[0,125п]= [1п]**		**3.3 8·[0,05п]= [0,4п]**			
φ [°]	D_1 [cm]	D_2 [cm]	D_3 [cm]	D_{sr} [cm]	ΔD [cm]	v (m/s)	Δv (m/s)	1-cos(φ)	Δ(1-cos(φ))	v^2 (m^2/s^2)	Δv^2
10	12,50	12,90	12,90	12,8	0,3	0,3151 0,315	0,0240 0,024	0,01517 0,0152	0,00151 0,0016	0,1150 0,115	0,0163 0,017
20	23,40	24,20	24,50	24,0	0,6	0,5932 0,59	0,0480 0,05	0,0602 0,060	0,00298 0,003	0,3519 0,35	0,0569 0,06
30	35,10	35,50	35,70	35,4	0,3	0,8746 0,875	0,0251 0,025	0,1338 0,134	0,0043 0,005	0,765 0,77	0,0439 0,05
40	46,70	47,10	46,60	46,8	0,3	1,1552 1,155	0,0257 0,026	0,2337 0,234	0,0056 0,006	1,334 1,33	0,059 0,06
50	56,40	57,50	55,80	56,6	0,2	1,3963 1,396	0,0184 0,019	0,3568 0,357	0,0066 0,007	1,949 1,95	0,051 0,06
60	64,40	64,80	65,30	64,8	0,5	1,6004 1,60	0,0422 0,05	0,4995 0,500	0,0075 0,008	2,561 2,56	0,134 0,14
70	72,60	73,30	72,30	72,7	0,6	1,7954 1,80	0,0504 0,06	0,6573 0,657	0,0081 0,009	3,223 3,22	0,1808 0,18
80	78,90	79,50	80,10	79,5	0,6	1,9624 1,96	0,0507 0,06	0,8256 0,826	0,0085 0,009	3,851 3,85	0,198 0,20

Задатак 3.3. [**1.0 п**] Линеарна зависност између врзина на крају скакаонице и угла са којег се спушта куглица је облика

$$v^2 = \frac{2g(R - r_e)}{1 + \xi'}(1 - cos\varphi),\ \mathbf{[0,4п]}$$

и то је на графику v^2 у функцији $1 - cos\varphi$ права која пролази кроз координатни положај. Грешка квадрата брзине је $\Delta v^2 = 2v\Delta v$ **[0,1п]** а грешка угла $\Delta(1 - cos\varphi) = sin\varphi\ \Delta\varphi$ **[0,1п].** Подаци се налазе у Табели 1.

Задатак 3.4. [**3.0 п**] Слика 3.

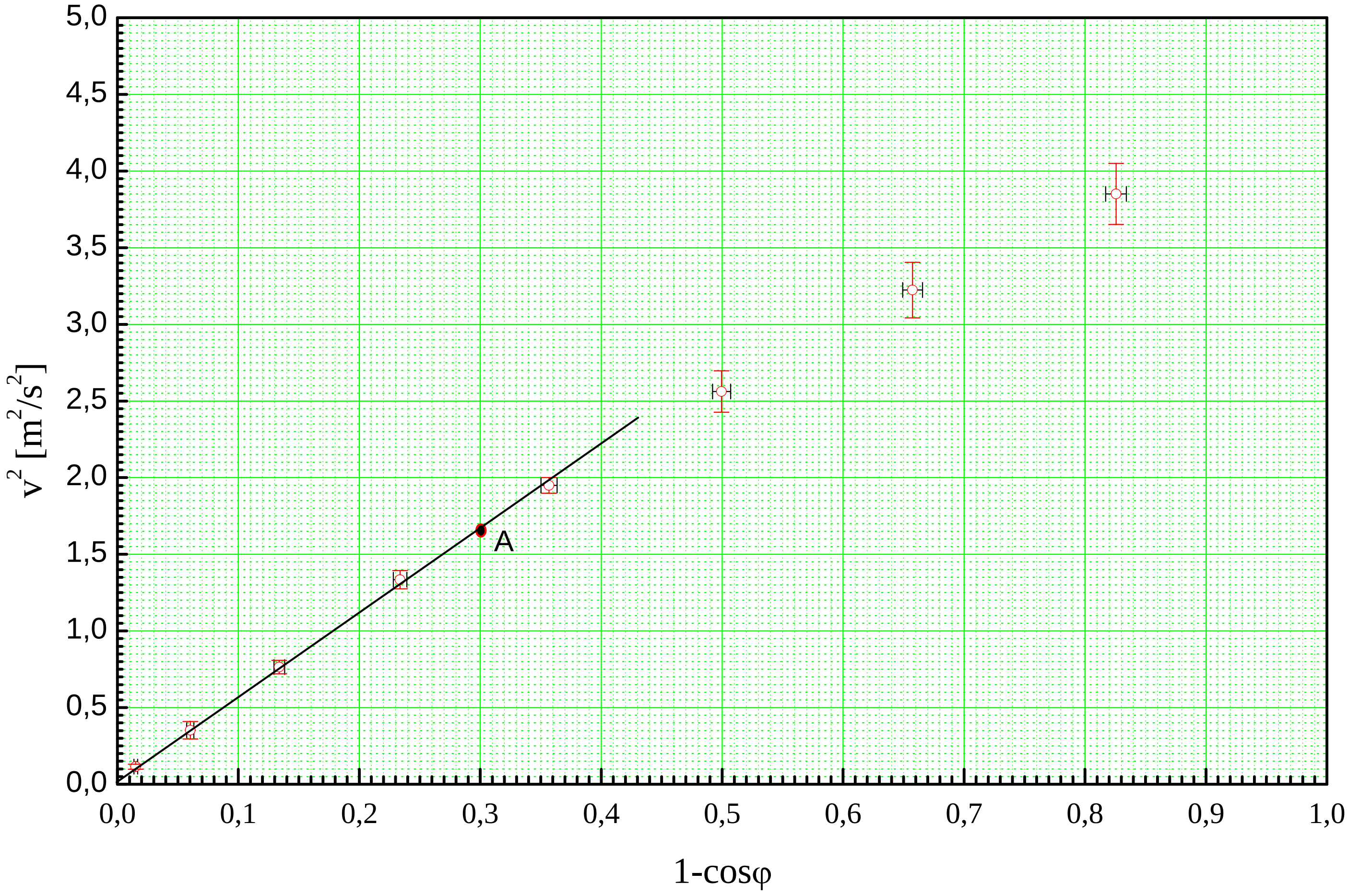
Задатак 3.5. [**1.0 п**] Координате тачке A су (0,3; 1,68) **[0,3п]**, тако да је коефицијент правца $k = 5{,}60$. Грешка коефицијента правца се рачуна из формуле $\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta x_A}{x_A} + \frac{\Delta y_A}{y_A}$, где за Δx_A и Δy_A се узимају веће грешке тачака лево и десно од тачке A. Тако су $\Delta x_A = 0{,}07$ **[0,1п]** и $\Delta y_A = 0{,}06$ **[0,1п]**, и добије се грешка за коефицијент правца 0,33. Коначно коефицијент правца је $k = (5{,}6 \pm 0{,}4)\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$ **[0,5п]**

Задатак 3.6. [**1.0 п**] Фактор облика се рачуна на основу $\xi' = \frac{2g(R-r_e)}{k} - 1 = \xi\frac{r^2}{r_e^2} = 0{,}74$ **[0,1п]**,

а његова грешка $\Delta\xi' = \frac{2g}{k}\Delta(R-r_e) + \frac{2g(R-r_e)}{\mathrm{k}^2}\Delta k = 0.02$ **[0,4п]**.

Добија се $\xi = \xi'\frac{r_e^2}{r^2}$ и $\frac{\Delta\xi}{\xi} = \frac{\Delta\xi'}{\xi'} + 2\frac{\Delta r}{r} + 2\frac{\Delta r_e}{r_e}$. Коначни резултат је

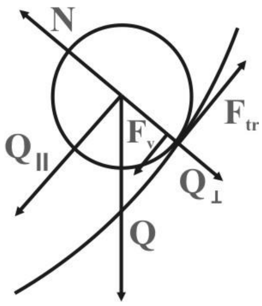
$$\boxed{\xi = 0{,}57 \pm 0{,}06.}$$ **[0,5п]**



Слика 3. Линеаризована зависност кретања куглице број 1.

Задатак 4.1. [**0.8 п**] У једначини за кинетичку енергију нестаће ротациони члан пошто се течност не ротира, већ ће само пратити кретање дна куглице, тако да се једначина може трансформисти ако се и овде узме да је коефицијент облика $\xi = 0$: $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Трење котрљања међутим не нестаје и ротациона једначина ће остати $I\alpha = rF_{tr}$ са том разликом да је I момент инерције али само куглице. Ако је на почетку претпостављено да је маса куглице занемарљива, сила трења, а самим тим и рад силе трења ће бити занемарљиво мала. Тако је једначина за брзину: $v = \sqrt{2g(R - r_e)\,(1 - cos\varphi)}$. Закључак је да ће брзина овакве куглице на крају скакаонице при истим почетним условима бити већа.

Задатак 4.2. **[2.0 п]** У овом случају се јављају две силе трења: сила сувог трења F_{tr} (слика 4.) између куглице и шине подлоге као и у предходним случајевима, али се јавља и сила вискозног трења F_v (кретање је ламинарно), између унутрашњег зида куглице и течности. Како је у почетном тренутку течност мировала, та сила се јавља између првог слоја и зида. Када се први слој покрене, то ће повући за собом други слој, итд. све док се целокупна запремина не покрене. Уколико је брзина константна ова сила вискозног трења би нестала. Међутим, како је кретање убрзано, а још и са повећаним убрзањем, ова вискозна сила ће стално деловати на зид куглице. Ако се пређе у систем везан за течност, у њој ће се куглица кретати у супротно правцу казаљке на сату, тако да се може закључити да сила вискозног трења делује у супротном смеру као сила трења са подлогом. Једначина кинетичке енергије остаје са истим обликом $E_k = (1 + \xi')\frac{mv^2}{2}$ **[0,2п]**, међутим у овом случају, пошту течност мирује у почетном стању и све се више убрзава, коефицијент више није коефицијент облика, већ један параметер који се са убрзањем мења од нуле (почетак- еквивалент суперфлуидној течности) па се приближава коефицијенту облика, уколико се течност ротира заједно са куглицом (еквивалент хомогене куглице,), али га никад не достиже (бар не док се убрзање повећава). Ако се само ова једначина гледа (где је ξ мањи од коефицијента облика хомогене куглице), стиче се утисак да ће на крају скакаонице брзина куглице бити мања од хомогене куглице. Међутим у ротационој једначини се појављује још један члан, $I\alpha = r(F_{tr} - F_v)$. Са друге стране, момент инерције исто варира, и то од момент инерције само зида куглице у почетном тренутку, па близу момента инерције хомогене кугле на крају. Транслаторна једначина исто добија један нови члан



Слика 4. Деловање сила на куглицу

$ma = Q_{\parallel} - F_{tr} + F_v = mg\,sin\varphi - \xi' ma + fv^2$**[0,3п]**

Ако силу вискозног трења моделирамо по постављеној предпоставци као квадратну функцију од брзине, а у одељку 2.4. је добијена везу између брзине и угла облика $v^2 = k\,(1 - cos\varphi)$ где је овде k неконстантни коефицијент пропорционалности, убрзање куглице се добија као $a = \frac{1}{1+\xi'}\,(gsin\varphi + fk\,(1 - cos\varphi))$ **[0,3п]**, а рад силе вискозног трења $A_v = fk(R - r_e)\int_{\varphi}^{0}(1 - cos\varphi)d\varphi = fk(R - r_e)(\varphi - sin\varphi)$ [**0, 7**п]. Енергетска једначина се претвара у

$$mg(R - r_e)(1 - cos\varphi) = (1 + \xi')\frac{mv^2}{2} + fk(R - r_e)(\varphi - sin\varphi)$$

и добије се за квадрат брзине

$$v^2 = \frac{2(R - r_e)}{1+\xi'}\left[g(1 - cos\varphi) - \frac{fk}{m}(\varphi - sin\varphi)\right] \textbf{[0,5п]}$$

Ово је сложена функција која зависи и од вредности fk (који варирају током кретања), и за мале вредности ових параметара тежи брзини хомогене куглице. Међутим, пошто су и параметри и заграда у вискозном члану позитивни, може се извести закључак, да је убрзање куглице током кретања веће, те да ће зато куглица излетети са већом крајњом брзином. Код кретања са промењивим успорењем (кретање уз скакаоницу) потенцијална енергија мења знак, кинетичка остаје позитивна а силе трења и вискозног трења ће исто променити смер.

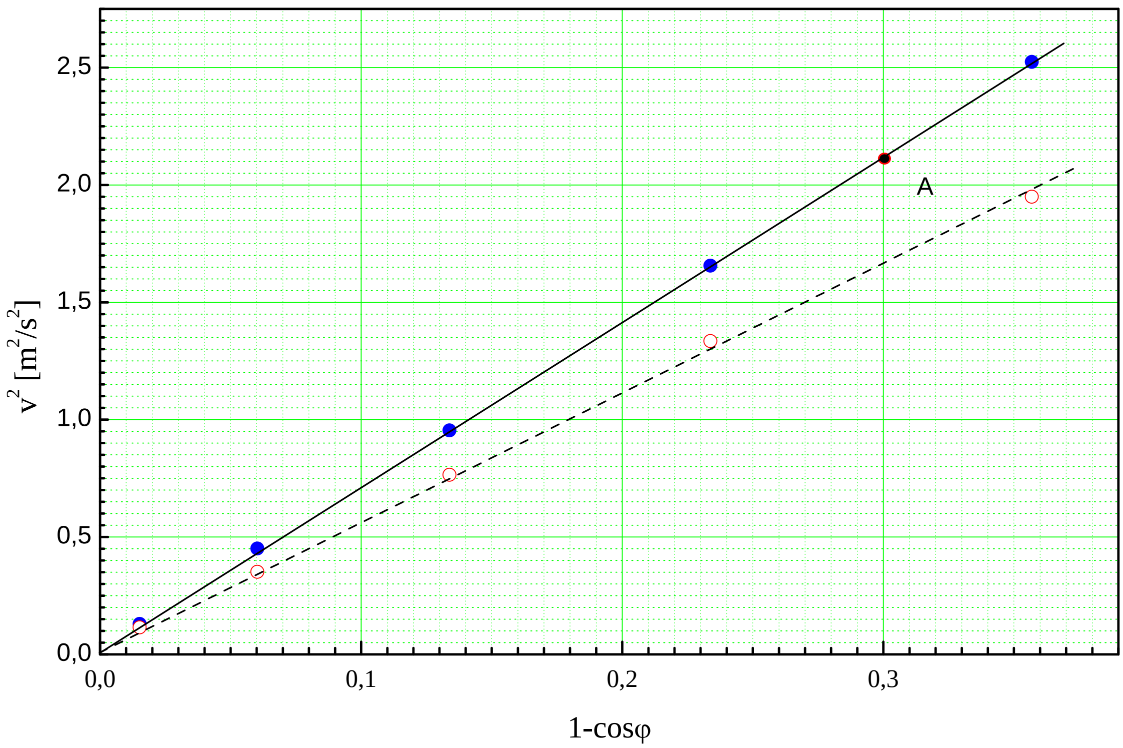
Задатак 4.3. [**2.0 п**] У Табели 2.

Табела 2. Домети куглице 2. и линеаризација зависности

Минимум 6 тачака = **[2п]**

φ [°]	D_1 [cm]	v (m/s)	1-cos(φ)	v^2 (m^2/s^2)
10	14,6	0,360	0,0152	0,130
20	27,2	0,671	0,060	0,45
30	39,6	0,977	0,134	0,95
40	52,1	1,287	0,234	1,66
50	64,4	1,589	0,357	2,52

Задатак 4.4. [**3.0 п**] На слици 5.



Слика 5. Линеаризована зависност кретања куглице број 2 (пуни кружићи) и мерене тачке за куглицу 1 (празни кружићи).

Задатак 4.5. [**0.5 п**] Зависност дефинисаног облика у мерној области је линеарна. Координате тачке А су (0,3; 2,12) **[0,2п]**, тако да је коефицијент правца $k = 7{,}1\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}$. **[0,1п]** и одатле је $\boxed{\xi = 0{,}29}$ **[0,2п]**