15. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2021/2022. ГОДИНЕ.

Друштво физичара Србије и Министарство просвете
Науке и технолошког развоја Републике Србије

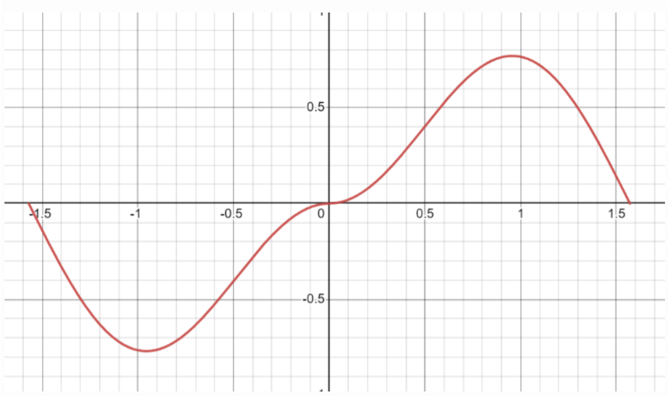
26-27. мај 20
Нови Сад

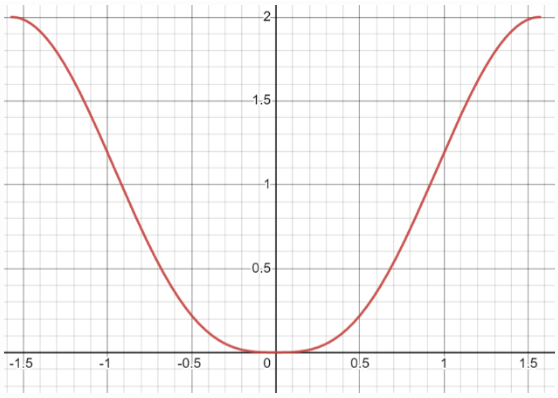
РЕШЕЊЕ – ЗАДАТАК 1

Део А:

(а) Ситуацију је најлакше разматрати у референтном систему везаном за крило. Овде, честице ваздуха налећу на крило брзином v под углом, те губе компоненту брзине нормалну на крило због нормалне силе, а другу одржавају. За мало време dt на крило налети запремина ваздуха у облику паралелипипеда са углом α дужине L, висине d и дебљине vdt, те је маса која налеће $dm=\rho dLv\sin\alpha\cdot dt$ **[0,5].** Промена импулса је само дуж нормале на крило (јер се само та компонента брзине губи), и то $dp=v\sin\alpha\cdot dm$ **[0,5],** и може се разложити на две компоненте, вертиклану и хоризонталну. Коначно, узгон је $F_L=\frac{dp_y}{dt}=\rho dL\sin^2\alpha\cos\alpha v^2$ а отпор $F_D=\frac{dp_x}{dt}=\rho dL\sin^3\alpha v^2$, и наравно $k_L=\rho dL\sin^2\alpha\cos\alpha$ и $k_D=\rho dL\sin^3\alpha$ **[0,5+0,5].**

(б) Дељењем имамо $c_L=2\sin^2\alpha\cos\alpha$ и $c_D=2\sin^3\alpha$ **[0,25].** Конвенције угла узете у делу (а) више не важе за негативне нападне угле, али се може лако закључити да је c_L непарна функција (када је крило нагнуто „надоле“, честице га ударају са горње стране, те ка земљи), а c_D парна функција (честице увек гурају крило уназад). Отпор је тривијално најјачи за 90^0 и -90^0, а максимум за узгон је у позитивном делу интервала. Узимањем извода и изједначавањем са нулом, $\sin\alpha\left(2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=0$. Тачка у којој је синус нула очигледно није максимум (ово је тачка где график има нулу), а друга једнакост $\alpha=arctg\sqrt{2}=54,74^\circ$ **[0,25].** Ово се може потврдити као максимум разматрањем другог извода (конкавност). Скице графика су приложене на слици 1 **[0,25+0,25 оценити по квалитативним особинама: критичне тачке и нуле].** Значајно је напоменути да модел јако лоше барата са ниским нападним угловима: прави максимум јавља се на око свега 15 степени због ламинарног протицања ваздуха око крила, а током круза се угао одржава на око 5 степени. Судари (и недостатак струјања ваздуха иза крила) сличнији су стајном региону секционог коефицијента, где се иза крила јављају вртложна струјања.





Слика 1: График зависности секционог коеф. узгона (лево) и отпора (десно) од угла

(в) Сада дужина тетиве зависи од удаљености од кабине као $d=d_0-\frac{d_0}{L}x$ **[0,25]**. Сила која делује на мали део дуж дужине је $dF_L=\rho\sin^2\alpha\cos\alpha v^2\cdot d\cdot dL=\rho\sin^2\alpha\cos\alpha v^2\left(d_0-\frac{d_0}{L}x\right)dx$ **[0,25]**. Интеграљењем имамо $F_L=\rho\sin^2\alpha\cos\alpha\cdot v^2\int_0^L\left(d_0-\frac{d_0}{L}x\right)\mathrm{d}x=\rho\frac{d_0}{2}L\sin^2\alpha\cos\alpha\cdot v^2$, те је $k_L=\rho\frac{d_0}{2}L\sin^2\alpha\cos\alpha$ **[0,5]**.

(г) За авион важи други Њутнов закон $m\frac{dv}{dt}=F-k_D v^2$ **[0,25]**. Дељењем, интеграцијом, и сменом имамо

$$t=m\int_0^v \frac{dv}{F-k_D v^2}=\frac{m}{\sqrt{Fk_D}}\int_0^{v\sqrt{\frac{k_D}{F}}}\frac{dx}{1-x^2}=\frac{m}{2\sqrt{Fk_D}}\ln\left|\frac{v\sqrt{\frac{k_D}{F}}+1}{v\sqrt{\frac{k_D}{F}}-1}\right|$$

[0,75]. Брзина никад не прелази $\sqrt{\frac{F}{k_D}}$, ово је терминална брзина (да икада ово пређе, убрзање би постало негативно, те би отпор гурао предмет напред, али ово је нефизички), те доња апсолутна заграда мења редослед. Брзина код узлетања се добија из услова вертикалне равнотеже $2k_L v^2=mg$ **[0,25]**. Комбинацијом коефицијента из дела (в) са новодобијеним изразом за време, имамо да до полетања прође 46,76s **[0,25]**.

(д) Брзина крузирања се поново добија из услова вертикалне равнотеже, са промењеном густином **[0,25]**. Сада је време лета $t=\frac{s}{v}=4,86h$ **[0,25]**.

Део Б:

(а) Нека из ракете излети маса dm_g. Промена импулса за ову малу масу је $dm_g(u-v+v)=dm_g u$ налево **[0,25]**, а остатка ракете $m\cdot dv$ надесно **[0,25]**. Узимајући у обзир одржање импулса и чињеницу $dm_g=-dm$ имамо

$$v=v_0-u\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}=v_0+u\ln\frac{m_0}{m}$$

[0,5].

(б) Ако укључимо млазнице у нормалном или антинормалном вектору, изаћи ћемо из жељене равни. Ако укључимо млазнице у радијалном или антирадијалном правцу, променићемо праву кроз коју пролазе перихел и афел, а тачка маневра заправо више неће ни представљати перихел. Решење је дакле, јасно, или проградно или ретроградно. Приметити такође да позиције и промене крајњих тачака орбите никада не зависе од масе саме ракете, јер се у законима одржања оне крате. Због овога се не морамо бринути о промени масе ракете током маневара.

Нека маневар дода ракети брзину Δv у проградном правцу (по конвенцији, ако је ово негативно, онда у ретроградном). Због кружне орбите, пре маневра изједначене су центрифугална и гравитациона сила $G\frac{mM}{R_0^2}=\frac{mv_0^2}{R_0}$, те $v_0=\sqrt{\frac{GM}{R_0}}$ **[0,25]**. Након маневра и додатка брзине ($v_a=v_0+\Delta v$) закони одржања угаоног импулса и енергије у перихелу и афелу гласе $v_p R_0=v_a R_M$ и $-G\frac{M}{R_0}+\frac{v_a^2}{2}=-G\frac{M}{R_M}+\frac{v_p^2}{2}$ **[0,25+0,25]**.

Решавањем система добијамо $\Delta v=-\sqrt{\frac{GM}{R_0}}+\sqrt{\frac{GM}{R_0}\frac{2R_M}{R_M+R_0}}$ **[0,25]**. Пошто је $R_M>R_0$, други корен је већи, те је промена афелске брзине позитивна. Ово значи да се глава треба уперити проградно, како би млазнице увећале брзину у смеру кретања **[0,25]**. По ракетној једначини $\Delta v=u\ln\frac{m_0}{m_0-\mu t}$, те је $t=\frac{m_0}{\mu}\left(1-e^{-\frac{\Delta v}{u}}\right)$, а коначни резултат добија се уврштавањем претходно добијеног израза за промену брзине **[0,25]**.

(в) Сада је јасно да би се орбита избацила из почетне равни, треба се извршити прво нормални маневар **[0,25]**. Нека је додата нормална брзина Δv_n. Претпоставимо за сада да је ова корекција адекватна. Вектор брзине у перихелу је и даље нормалан, на правац Земља-ракета, те смо и даље у крајњим тачкама орбите (или перихел или афел)! Штавише, пошто смо додали брзину, као што је показано у делу под (б), сада смо у перихелу, а афел се удаљио. Да би се ово поправило, потребна је поправка брзине, сада ретроградним маневром (супротно од онога што смо урадили под (б)), док се нова брзина не изједначи са почетном **[0,25]**. Назовимо ову поправку Δv_{re}.Након овога, вратили смо се у кружну орбиту. Оно што је значајно је да се угао равни две орбите, те и угао између нормалне и тангенцијалне компоненте брзине ракете, у перихелу одржава током ретроградног маневра. Ово значи да за тражени угао и нормалну поправку мора да важи $tg\alpha=\frac{\Delta v_n}{v_0}$, а из ретроградне поправке $\sqrt{{v_0}^2+\Delta {v_n}^2}-\Delta v_{re}=v_0$ **[0,25+0,25]**. Решавањем имамо $\Delta v_n=\sqrt{\frac{GM}{R_0}}tg\alpha$ и $\Delta v_{re}=\sqrt{\frac{GM}{R_0}}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)$ **[0,25+0,25]**.

Решење припремио: Јован Марковић; Масачусетски Институт за Технологију